R
F 2557

1
TOMUL 29
1970

1970 MAR 3 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacţie

Acad. **E. CARAFOLI** — *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** — *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ŞTEFAN BĂLAN,**
Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU C. BOGDAN,**
Ing. **DAN PAVELESCU,**
Prof. **T. OROVEANU,** *secretar de redacţie.*

În ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135, sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă, se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei,

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacţia: Bucureşti,

Str. Const. Mille 15, tel. 13.83.26

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ

Bucureşti, 23—27 iunie 1969

1989

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratlelltár
526/1972

AL XXI-LEA CONGRES INTERNAȚIONAL DE ASTRONAUTICĂ

4—10 octombrie 1970, Constance (R. F. a Germaniei)

Autorii români care doresc să prezinte comunicări vor înainta pînă la data de 10 martie a.c., la Comisia de Astronautică a Academiei R. S. România, strada Const. Mille 15, of. poștal 45, rezumatul lucrării (500 — 1000 cuvinte) în trei exemplare — din care să rezulte originalitatea și importanța problemei tratate — redactat în una din limbile de circulație internațională.

În acest an, Congresul de Astronautică va cuprinde următoarele secțiuni: propulsie spațială, fizica reintrării, aerodinamica hipersonică, sisteme spațiale, astrodinamică, sateliți științifici și meteorologici, astrionică, tehnica senzorilor, aplicații terestre ale tehnologiei spațiale, organizarea datelor la bordul vehiculelor spațiale, stații spațiale locuite, bioastronautică, învățămîntul în astronautică, securitatea experiențelor cu rachete în școli și laboratoare.

Se precizează că includerea lucrărilor în program se face în baza acceptării lor de către Comitetul Internațional de Programe al Congresului.

COMISIA DE ASTRONAUTICĂ
A ACADEMIEI R. S. ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 29, nr. 1 1970

SUMAR

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ
Bucureşti, 23—27 iunie 1969

Pag.

Cuvîntul de deschidere, rostit de Acad. Ştefan Bălan, Ministrul Învăţămîntului . . . 5

Dezvoltarea cercetărilor de mecanică aplicată în România, de Acad. Elie Carafoli, Preşedintele Comitetului de Organizare a Conferinţei Naţionale de Mecanică Aplicată 7

Cuvînt de închidere, rostit de Acad. Elie Carafoli, Preşedintele Comitetului de Organizare a Conferinţei Naţionale de Mecanică Aplicată 19

PROBLEME GENERALE DE MECANICĂ

EMIL TOCACI, Aspecte ale utilizării teoriei distribuţiilor în mecanică 27

TEORIA MECANISMELOR ŞI DINAMICA MAŞINILOR

GEORGE BĂRĂNESCU, DINU TARAZA, Studiul echilibrajului motoarelor în linie cu ajutorul programării liniare 47

LEON LIVOVSCHI, Sinteza distribuitoarelor hidraulice 63

A. H. SONI, CHR. PELECUDI, Determinarea vectorială a ecuaţiilor generale de mişcare ale mecanismelor tridimensionale 91

REZISTENŢA ŞI ÎNCERCAREA MATERIALELOR

A. PAVEL, Calculul de rezistenţă al îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune. I 123

N. ŢOPA, Contribuţii la studiul conlucrării spaţiale a grinzilor din tablierele de poduri simplu rezemate fără antretoaze în cîmp în domeniul elastic 149

pag.

FLUIDE INCOMPRESIBILE

T. POPP, I. CIORĂNESCU, Considerații privind acțiunea vîntului asupra construcțiilor înalte 173

DINAMICA GAZELOR ȘI MAGNETOFLUIDODINAMICA

L. Z. DUMITRESCU, C. POPESCU, Producerea undelor de șoc de mare intensitate, cu aplicații la generarea curgerilor hipersonice de entalpie înaltă 185
V. MANEA, N. GEORGESCU, Cîteva aspecte privind mișcarea fluidelor compresibile prin ajutaje 203
DAN MATEESCU, Asupra aripilor poligonale prezentînd antisimetrie de incidență în regim supersonic 225

HIDRAULICĂ, MAȘINI HIDRAULICE ȘI MEDII POROASE

T. OROVEANU, Asupra efectului dispersiei transversale în scurgerea fluidelor miscibile prin medii poroase 245

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

D. MANGERON, A cincea conferință internațională de oscilații neliniare Kiev, 25 august — 5 septembrie 1969. Academia de Științe a U.R.S.S., Academia de Științe a R.S.S. Ucraina, Institutul de matematică 257

RECENZII 263

ȘTEFAN BĂLAN

23 iunie, 1969

CONFERINȚA DE MECANICĂ APLICATĂ

ONORAT PREZIDIU,
DISTINȘI OASPEȚI,
STIMAȚI TOVARĂȘI,

1. La deschiderea lucrărilor Conferinței naționale de mecanică aplicată, organizată de Academia Republicii Socialiste România și de Ministerul Învățământului, avem satisfacția să constatăm participarea deosebit de amplă a oamenilor de știință români și străini, reprezentanți ai unor renumite școli de cercetare din domeniul mecanicii, precum și a numeroase personalități din centrele și institutele de cercetare, din producție și din învățământul superior.

Prezența acestor valoroși specialiști ne îndreptățește să credem că dezbaterile conferinței se vor dovedi tot atît de fructuoase ca și cele din reuniunile anterioare, marcînd un moment de reținut în dezvoltarea mecanicii.

Tuturor participanților din țară și de peste hotare, în numele Ministerului Învățământului și personal, le adresez un salut cordial și le urez succes deplin la lucrările acestei însemnate reuniuni științifice.

2. Rolul științei și tehnicii în creșterea avuției materiale și în îmbogățirea vieții spirituale a omenirii devine mereu mai important. Oameni de știință și de învățământ contribuie hotărîtor la progresul social contemporan prin rezultatele științifice pe care le obțin și prin valorificarea acestor rezultate în folosul societății. Realizările științei sînt urmărite cu maximă atenție de producție; știința și învățământul constituie investiții de cea mai mare rentabilitate. Mecanica, prin numeroasele sale ramuri — mecanica generală, mecanica solidelor, mecanica fluidelor etc.—, intervine astăzi cu eficiență considerabilă în accelerarea procesului de producție, în ușurarea muncii umane, în crearea unei vieți mai bune, în realizarea unor vechi visuri ale oamenilor de știință.

3. Continuînd tradiția manifestărilor științifice din acest domeniu, Conferința națională de mecanică aplicată va pune în evidență rezulta-

tele obţinute în ultimii ani şi va realiza un bogat schimb de opinii între participanţi.

Sîntem convinşi că vor fi prezentate lucrări care răspund cerinţelor actuale şi de perspectivă ale societăţii, care vor da sugestii şi metode noi pentru rezolvarea unor probleme fundamentale, menite să ducă mai departe renumele milenarei ştiinţe a mecanicii.

În acelaşi timp, conferinţa va prilejui lărgirea relaţiilor de colaborare ştiinţifică dintre cercetătorii români şi colegii lor de peste hotare, relaţii pe care le dorim cît mai ample şi mai utile, cît mai prieteneşti.

În acest spirit, lucrările conferinţei noastre vor avea consecinţe însemnate pentru înflorirea ştiinţei mecanicii şi vor permite să ne alăturăm mai activ efortului general de rezolvare a problemelor ştiinţei şi tehnicii contemporane în avantajul omului.

4. Conferinţa de mecanică aplicată capătă pentru noi o semnificaţie deosebită în condiţiile întîmpinării de către întregul popor a Congresului al X-lea al Partidului Comunist Român şi, în acelaşi timp, ale împlinirii unui sfert de secol de la eliberarea patriei.

Tezele Comitetului Central al Partidului Comunist Român pentru Congresul al X-lea consacră un loc important dezvoltării în continuare a economiei, ştiinţei şi tehnicii, cercetării ştiinţifice. „*Se va acorda o atenţie deosebită* — se arată în teze — *dezvoltării activităţii de cercetare ştiinţifică, corespunzător rolului tot mai important pe care îl are ştiinţa în progresul societăţii, îmbinării armonioase a cercetării fundamentale cu cea aplicativă*".

Este sigur că şi în domeniul mecanicii se vor realiza progrese însemnate, orientînd tematica de cercetare spre obiectivele majore ale producţiei, ale vieţii, spre noile idei ştiinţifice ale timpului nostru.

În încheiere, urez încă o dată succes lucrărilor conferinţei, iar dumneavoastră, stimaţi participanţi, vă doresc rezultate strălucite în activitatea pe care o duceţi în interesul dezvoltării ştiinţei, în folosul ţării, al întregii omeniri.

CONFERINȚA NAȚIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ
București, 23—27 iunie 1969

DEZVOLTAREA CERCETĂRILOR DE MECANICĂ APLICATĂ ÎN ROMÂNIA

Acad. ELIE CARAFOLI,
PREȘEDINTELE COMITETULUI DE ORGANIZARE

Cercetările de mecanică aplicată au un rol hotărîtor în progresul tehnic în general și în dezvoltarea industriei în special.

Creșterea în ritm vertiginos a industriei noastre, acțiunea de mecanizare a agriculturii și a sectoarelor de producție, introducerea progresului tehnic în toate ramurile economiei naționale au deschis un cîmp larg al activității de cercetare științifică în mecanica aplicată. Continuind tradițiile științifice ale înaintașilor noștri, oamenii de știință și specialiștii din unitățile Academiei, de la catedrele universitare, din institutele de cercetare și de proiectare ale diverselor departamente, cît și cei din laboratoarele uzinale, desfășoară cu pasiune o intensă muncă de investigație științifică, cuprinzînd cele mai variate domenii ale mecanicii aplicate.

Prin îmbinarea armonioasă a cercetărilor teoretice și a celor experimentale, a cercetărilor cu aplicații imediate în industrie și a celor cu aplicabilitate în viitor, specialiștii din țara noastră aduc contribuții importante la rezolvarea unor probleme ridicate de dezvoltarea actuală și de perspectivă a industriei românești și în același timp la afirmarea științei noastre peste hotare.

Mărturie a succeselor repurtate sînt construcțiile de mașini și de utilaje de tot felul, cu performanțe și calități apreciate peste hotare, marile obiective industriale, puternice sisteme energetice și încă multe altele, toate acestea constituind o frumoasă carte de vizită a oamenilor de știință, a inginerilor și a tehnicienilor români. În plus, amploarea cercetărilor științifice, rezultatele remarcabile obținute pînă acum au condus la crearea unor adevărate școli științifice românești, recunoscute și apreciate în țară și peste hotare, contribuind astfel la creșterea presti-

giului ştiinţei noastre, la afirmarea noastră ştiinţifică pe plan mondial. Numeroasele monografii şi tratate de înaltă ţinută ştiinţifică, elaborate în domeniul mecanicii aplicate în ultimii ani, reflectă vasta activitate ştiinţifică ce se desfăşoară în prezent în ţara noastră. Multe dintre aceste lucrări valoroase, întrunind aprecieri elogioase din partea specialiştilor de peste hotare, au fost traduse în diferite ţări, opera ştiinţifică românească intrînd şi pe această cale în circuitul ştiinţei mondiale.

Un rol deosebit în stimularea activităţii de investigaţie ştiinţifică şi în difuzarea rezultatelor obţinute în acest domeniu îl au numeroasele periodice de specialitate care se editează în ţara noastră, cum sînt revistele Academiei, publicaţiile institutelor de învăţămînt superior, revistele tehnice ale Consiliului naţional al inginerilor şi tehnicienilor, ale societăţilor de mecanică şi fizică etc.

Bogata activitate ştiinţifică de mecanică aplicată este ilustrată şi de participarea tot mai activă a specialiştilor români la congrese, conferinţe, colocvii şi sesiuni ştiinţifice din ţară şi de peste hotare, prezentînd lucrări ştiinţifice deosebite.

Unele dintre manifestările din ţară au avut tocmai ca obiect confirmarea activităţii noastre ştiinţifice pe diverse perioade şi stabilirea orientării de viitor a cercetărilor noastre în diversele domenii ale ştiinţelor mecanice.

Printre confruntările de acest gen care au avut loc în trecut menţionăm în mod deosebit Conferinţa organizată în 1960, cu prilejul jubileului Institutului de mecanică aplicată.

A urmat apoi în 1965 Conferinţa de mecanică, organizată de Academie în colaborare cu Ministerul Învăţămîntului, care se înscrie ca unul dintre evenimentele importante ale vieţii ştiinţifice româneşti, bucurîndu-se totodată de contribuţia ştiinţifică deosebită a numeroşi specialişti de peste hotare.

În acelaşi context se înscriu şi o serie de reuniuni ştiinţifice, dintre care — referindu-mă la cele mai recente — voi menţiona Simpozionul din 1967 cu tema „Efectul Coandă şi unele aplicaţii speciale ale aerohidrodinamicii".

La toate acestea vom adăuga colocviile şi seminariile organizate de centrul din Timişoara, de Institutul de mecanică şi de Societatea de matematici.

Conferinţa actuală vine să confirme o tradiţie instaurată printre specialiştii români în domeniul mecanicii aplicate de a se reuni periodic în cadrul unor manifestări de amploare naţională, în care, într-o adevărată atmosferă de lucru, să fie dezbătute principalele realizări şi să se stabilească orientarea activităţii de viitor.

Este pentru noi un prilej de îndreptăţită satisfacţie să constatăm că actuala conferinţă se bucură de cea mai importantă participare străină

de pînă acum la o manifestare ştiinţifică naţională organizată la noi în ţară.

Aducem cele mai călduroase mulţumiri oaspeţilor de peste hotare pentru răspunsul dat invitaţiei noastre, pregătind pentru actuala conferinţă comunicări valoroase, de mare actualitate ştiinţifică. Vom beneficia în acelaşi timp de prezenţa lor pentru a face un schimb util de opinii şi de rezultate cu consecinţe dintre cele mai favorabile pentru dezvoltarea activităţii noastre în viitor.

Vom fi fericiţi să ştim că timpul petrecut printre noi va fi cît se poate de plăcut pentru oaspeţii noştri.

Vom fi bucuroşi să arătăm specialiştilor străini care ne vizitează ţara cu această ocazie frumoasele realizări obţinute de poporul nostru în ultimele două decenii în activitatea sa paşnică, constructivă, orientată spre propăşirea economică şi culturală a României.

Adresăm mulţumirile noastre cele mai călduroase reprezentanţilor departamentelor pentru sprijinul pe care ni l-au dat, îndemnînd specialiştii din unităţile lor să participe la lucrările conferinţei noastre, asigurînd prin aceasta condiţii prielnice pentru elaborarea într-un cadru larg a problemelor majore care interesează deopotrivă cercetarea şi producţia. Aceleaşi mulţumiri călduroase şi amicale le adresăm tuturor cercetătorilor din ţara noastră care au răspuns cu atîta însufleţire la invitaţia noastră de a contribui direct cu comunicările lor la lucrările Conferinţei naţionale de mecanică aplicată.

Profităm de această ocazie pentru a evidenţia momentul festiv în care se desfăşoară lucrările conferinţei noastre.

În anul acesta se împlinesc două decenii de la înfiinţarea *Institutului de mecanică aplicată al Academiei*, care a constituit un eveniment deosebit de important în viaţa ştiinţifică din ţara noastră. Creat cu profil corespunzător stadiului de dezvoltare al cercetărilor în acea perioadă, institutul a fost apoi divizat în două unităţi — Institutul de mecanică a fluidelor şi Centrul de mecanică a solidelor —, care s-au dezvoltat în mod paralel.

Bucurîndu-se de sprijinul şi de înţelegerea forurilor competente, cei cîţiva specialişti existenţi pe atunci în ţară au depus la rîndul lor o muncă plină de abnegaţie şi entuziasm, ale cărei roade nu au întîrziat să apară.

Alegerea judicioasă a problemelor studiate, cu permanenta preocupare de realizare a echilibrului necesar între cercetările cu aspect fundamental şi cele cu caracter aplicativ, au condus toate la formarea unor grupe de specialişti cu temeinică pregătire, la adevărate şcoli româneşti de cercetare.

Aceste şcoli se prezintă, în raport cu cercetările similare pe plan mondial, cu o individualitate bine marcată, atît prin metodele proprii utilizate în exploatarea unor noi aspecte ale diferitelor probleme, cît şi prin valoarea rezultatelor obţinute.

Manifestarea ştiinţifică pe care o începem astăzi reprezintă cea mai bună ocazie de a sărbători într-un cadru festiv şi această aniversare, nu numai prin reamintirea unor realizări şi succese remarcabile, ci mai ales prin deschiderea unor noi perspective la noi în ţară pe o linie continuă ascendentă.

Urăm cercetătorilor şi colaboratorilor celor două institute, care au format în trecut *Institutul de mecanică aplicată*, noi şi importante succese în frumoasa lor activitate de promovare a ştiinţelor mecanice, orientată spre rezolvarea problemelor majore ale tehnicii româneşti.

★

Să revenim acum la manifestarea de astăzi.

Pentru a ilustra bogata activitate ştiinţifică de mecanică aplicată din ţara noastră, vom căuta acum să vă informăm asupra principalelor rezultate obţinute în ultimul timp în acest domeniu, pornind de la stadiul înregistrat la precedenta conferinţă.

Astfel, în mecanica fluidelor au fost continuate cercetările în direcţiile tradiţionale, fiind abordate şi multe probleme noi, importante atît sub aspectul actualităţii ştiinţifice, cît şi prin perspectivele de aplicaţii viitoare. În felul acesta s-a reuşit să se ajungă la rezultate care contribuie la o mai bună cunoaştere a proceselor aerotermodinamice din motoarele cu reacţie şi la îmbunătăţirea performanţelor avioanelor, la realizarea calculatoarelor pneumonice, la construcţia maşinilor hidraulice, la îmbunătăţirea funcţionării lagărelor supuse la sarcini şi turaţii mari sau a lagărelor pentru maşini de înaltă precizie, precum şi la exploatarea în condiţii raţionale a zăcămintelor de hidrocarburi fluide.

Menţionăm mai departe cercetările referitoare la mişcarea bulelor de gaz la mişcările cu antrenare de aer în canalele de aspiraţie, precum şi cercetările privind curgerile cu suprafaţă liberă. În acelaşi cadru se înscriu şi cercetările privind metodele analitice de calcul al maşinilor hidraulice, hidrodinamica maşinilor şi a instalaţiilor hidraulice şi pneumatice, metodele de optimizare a sistemelor hidroenergetice etc.

Au fost continuate studiile sistematice asupra scurgerii în reţele de profile hidrodinamice şi s-a dezvoltat teoria curbelor de sensibilitate la cavitaţie a profilelor izolate şi în reţea.

În hidrodinamica turbomaşinilor au fost efectuate studii referitoare la scurgerea la limită a formării cavitaţiei în principalele organe ale turbinelor hidraulice, pompelor şi turbotransformatoarelor. Studiile efectuate

privind procesele dinamice din pompele de injecţie clasice şi cele cu pistoane rotative pentru combustibili cu diverse grade de viscozitate, inclusiv a celor cu viscozitatea înaltă, au condus la elaborarea unor metode de calcul care permit un control mai exact al procesului de injecţie, asigurîndu-se prin aceasta creşterea performanţelor energetice şi economice ale motoarelor.

În aerodinamică s-a urmărit ameliorarea calităţilor de zbor ale avioanelor româneşti, pentru care au fost elaborate şi prescripţii de calcul, precum şi studiul influenţei solului asupra aripilor prevăzute cu jeturi fluide. Au fost iniţiate cercetările de fluidică, care au condus la stabilirea caracteristicilor statice şi dinamice ale unor elemente pneumonice. Au fost efectuate de asemenea cercetări asupra difuziei convective în regim nestaţionar, în amestecul de gaze, în mişcare cu viteză mică.

În dinamica fluidelor compresibile au fost studiate sistemele portante în regim supersonic, obţinîndu-se rezultate interesante cu aplicaţii la avioanele moderne de mare viteză. Alte cercetări au avut ca obiect aripile delta în interacţiune cu fuzelaje de diferite forme, aerodinamica rachetelor, aripile de rezistenţă minimă etc.

Au fost efectuate studii asupra scurgerii transonice în jurul sistemelor portante, care au comportat şi o serie de lucrări experimentale.

A fost studiată de asemenea acţiunea undelor de şoc intense asupra obstacolelor plane, punîndu-se la punct o metodă pentru determinarea sistemului de unde difractate. Cercetările asupra propagării undelor de şoc prin ajutaje au fost efectuate în tubul de şoc hipersonic, realizat şi pus la punct în ultimii ani la noi în ţară.

O nouă direcţie de cercetare a fost deschisă prin abordarea unor probleme din dinamica gazelor rarefiate. S-a studiat influenţa agitaţiei termice în cazul figurilor de echilibru ionice spaţiale şi în particular s-a rezolvat problema referitoare la figura de echilibru a plasmei în prezenţa cîmpurilor magnetice. Alte cercetări au avut ca obiect pompajul termic. O altă direcţie de preocupări o constituie cercetările asupra combustiei care includ aerotermochimia, combustia supersonică, precum şi studiul efectelor speciale de ionizare. Astfel, prin aplicarea unei metode noi s-a studiat şi s-a rezolvat problema scurgerii unui jet gazos inflamabil mărginit de pereţi solizi sau fluizi.

În mecanica zborului, rezultatele noi au fost obţinute în studiul influenţei unor parametri constructivi şi a regimului de zbor asupra stabilităţii avionului. Au fost iniţiate cercetări referitoare la influenţa reacţiilor chimice asupra scurgerilor în regim supersonic, în special în ajutaje.

S-a reuşit să se evalueze efectul variaţiei de regim (viteză, altitudine) şi al turbulenţei atmosferice asupra stabilităţii avionului în zbor.

În aceeași ordine de idei vom menționa cercetările de dinamică a rachetei și mai ales cele de mecanică a zborului spațial privind studiul unor manevre orbitale, cît și analiza unor probleme speciale referitoare la vehiculul orbital staționar la o latitudine arbitrară.

Rezultatele noi au fost obținute și în studiul flutterului structurilor aeroelastice cu proprietăți neliniare, elaborîndu-se o teorie a acestor structuri. În cadrul dinamicii fluidelor vîscoase menționăm studiile asupra scurgerii în jurul obstacolelor și în labirinții mașinilor hidraulice. Au fost rezolvate și probleme mai complexe din punct de vedere fizic în care intervin și fenomene de transfer de căldură. Mișcarea fluidelor vîscoase la numere Reynolds mici a fost studiată și în vederea aplicațiilor la unele canale sau conducte obișnuite.

O altă preocupare a fost constituită de studiul mișcărilor fluidelor vîscoase cu suprafață de separație, în cadrul căreia au fost rezolvate cîteva probleme de mișcare plană a două fluide vîscoase în contact.

Au fost efectuate cercetări în probleme de mișcare în stratul-limită laminar, în stratul-limită turbulent cu gradient de presiune, precum și de desprindere a stratului-limită turbulent, care au condus de altfel la realizarea și experimentarea unui generator de turbulență.

Cercetările din domeniul lubrificației au fost reprezentate prin mai multe probleme, dintre care menționăm mai întîi studiul efectelor macrogeometriei longitudinale asupra distribuției de presiuni și asupra forțelor de frecare în lagăre, în cadrul căreia au fost considerate lagăre cu geometrie complexă. S-au continuat studiile asupra lubrificației la sarcini foarte mari în cazul mișcării de rostogolire, aplicațiile cele mai interesante fiind ungerea rulmenților și a transmisiilor cu angrenaje.

S-a studiat lubrificația în straturi subțiri, rezultatele obținute arătînd care este influența mișcării asupra straturilor superficiale de material de pe suprafețele de mișcare relativă.

Vom mai menționa cercetările privind lubrificația lagărelor, a roților dințate și a altor organe de mașini confecționate din materiale plastice, precum și influența bisulfurii de molibden și a grafitului ca adaosuri de ameliorare.

În cercetările asupra lubrificației cu gaze ionizate au fost înregistrate rezultate teoretice asupra distribuției presiunilor și a parametrilor globali ai lagărelor, ajungîndu-se și la realizarea unui nou sistem de lubrificație cu gaze.

În domeniul scurgerii fluidelor prin medii poroase menționăm rezultatele obținute în cercetările experimentale asupra scurgerii multifazice la scară microscopică, prin care au fost puse în evidență unele fenomene mai puțin studiate pînă acum.

Dezlocuirea unui fluid de către altul într-un mediu poros a fost studiată sub mai multe aspecte, găsindu-se rezultate interesante în studiul dezlocuirii plane necapilare și negravitaționale.

A fost considerată și problema dezlocuirii plane capilare și negravitaționale, găsindu-se o soluție cu caracter general a acesteia care a fost aplicată la un caz particular interesant pentru exploatarea zăcămintelor de petrol.

Alte cercetări asupra scurgerii în medii poroase au avut ca obiect scurgerile cu suprafață liberă în medii poroase neomogene sau scurgerile spre diferite sisteme de drenuri.

Trecînd acum la mecanica solidelor, vom menționa cercetările de mecanică a vibrațiilor neliniare în condițiile unor perturbații aleatoare cu aplicații la autovehicule, apoi studiile privind percuția corpurilor rigide în mișcare, autovibrațiile barelor continue și al unor mașini-unelte, cercetările de dinamică a sistemelor vibropercutante, apoi cele de dinamică a așchierii, studiul stabilității autovehiculelor și autotrenurilor în regim tranzitoriu etc. În același cadru se înscriu și cercetările teoretice și experimentale privind vibrațiile corpurilor principalelor tipuri de nave construite în țară, care au condus la elaborarea unor metode raționale pentru dimensionarea acestora, analiza oscilațiilor de răsucire a liniei de arbori din instalația de propulsie a navelor românești și altele.

Grupul de probleme privind teoria și aplicațiile ecuațiilor polivibrante și-a găsit soluționări interesante la proiectarea suprafețelor de formă oarecare.

În teoria mecanismelor s-au elaborat și s-au extins diverse metode de studiu, cum sînt metoda analizei armonice complexe, metoda mecanoelectrică, precum și cea a solidarizării, pentru problemele de analiză și sinteză a mecanismelor cu programare la mașinile electronice.

Alte lucrări au abordat problema de sinteză a mecanismelor plane spațiale, probleme de sinteză a mecanismelor cu came, precum și de dinamică a mecanismelor cu mai multe grade de libertate.

Cu deosebit succes a fost dezvoltată „teoria șuruburilor" în mecanisme plane și spațiale, cu rezultate dintre cele mai bune.

Rezultate interesante au fost obținute în studiul unor probleme de cinematică și dinamică a mecanismelor cu came polidine, cu aplicație la sistemele de distribuție ale motoarelor cu ardere internă, apoi în studiul cinematic, în sinteza dimensională și analiza structurală a mecanismelor spațiale. Alte cercetări se referă la stabilirea soluțiilor optime a transmisiilor prin curele, la studiul transporturilor cu bandă-jgheab, altele la angrenajele globoidale.

În domeniul dinamicii mașinilor au fost întreprinse ample cercetări privind echilibrajul motoarelor cu ardere internă, printre care vom

menţiona studiile privind echilibrajul motoarelor cu mai multe linii de cilindri — paralele şi în V —, determinarea unor forme de arbori cotiţi pentru motoare cu număr impar de cilindri, precum şi îmbunătăţirea echilibrajului motoarelor policilindrice prin plasarea cilindrilor la distanţe inegale.

În domeniul teoriei elasticităţii au fost efectuate cu succes cercetări privind sarcinile concentrate în cazul clasic şi al corpurilor de tip Cosserat, studiul corpurilor elastice neliniare, calculul tensiunilor în medii elastice plane cu goluri de formă circulară sau eliptică.

Semnalăm apoi rezultatele obţinute în studiul deformărilor plane ale unor medii elastice cu neomogenitate continuă şi la studiul mediilor elastice anizotrope, cît şi cele obţinute în domeniul teoriei elasticităţii corpurilor cu deformări mari şi în prezenţa unor cupluri de tensiune.

Alte cercetări au avut ca obiect probleme dinamice ale corpurilor elastoplastice, propagarea undelor în fire, membrane şi plăci plane, unele probleme liniarizate de magnetoelasticitate, comportarea şi calculul structurilor în domeniul elastoplastic, generalizarea teoriei sistemelor conjugate, apoi calculul tensiunilor termice nestaţionare, analiza tensiunilor termice în bare elastice anizotrope omogene, calculul termoelastic al barajelor arcuite cu aplicaţii la barajele construite în ţară, clasificarea reologică a unor materiale neelastice, precum şi teoreme de existenţă şi de unicitate în probleme privind aceste clase de corpuri.

În problemele de calcul al structurilor vom menţiona cercetările de statică a hiperboloidului generat pe trei drepte oarecare şi unele probleme de frontieră (la paraboloizii hiperbolici). În acelaşi domeniu se înscriu şi cercetările privind structurile de rezistenţă destinate acoperirii suprafeţelor cu deschideri mari, calculul cadrelor-diafragmă la clădirile înalte din beton armat supuse la sarcini orizontale, grinda continuă pe mediu elastic şi cu reazeme elastice, comportarea elementelor din beton armat în structurile static nedeterminate, preocupări legate de alegerea soluţiilor constructive şi realizarea proiectelor de execuţie a unor importante obiective industriale sau civile, precum şi elaborarea unor metode de calcul destinate proiectării structurilor de nave în domeniul plastic.

În domeniul programării analizei elastoplastice la calculatoarele numerice au fost elaborate algoritme şi programe generale pentru structuri plane şi spaţiale, precum şi pentru sisteme de bare, destinate să servească în mod nemijlocit la proiectarea economică a structurilor de rezistenţă.

Relevăm în mod deosebit cercetările privind comportarea şi calculul structurilor în regim seismic, domeniu în care au fost obţinute rezultate interesante. Au fost efectuate o serie de lucrări teoretice şi experimentale legate de utilizarea echivalenţilor dinamici în calculul antiseismic al structurilor privind influenţa acţiunii dintre terenul de fundaţie şi forma

răspunsului dinamic. Rezultate interesante au fost obținute și în legătură cu platformele seismice, precum și la folosirea calculatoarelor electronice în probleme de dinamica construcțiilor.

Unele cercetări privind comportarea structurilor la încărcări statice și dinamice au fost efectuate în legătură directă cu realizarea unor lucrări importante, cum sînt consolidarea ansamblului de poduri Feteşti-Cernavodă, proiectarea noului pod peste Dunăre de la Vadul Oii și altele.

Mai menționăm studiile privind optimatizarea profilelor la barajele de greutate și cu contrafortă, prin care s-au stabilit profilele cele mai raționale, superioare celor clasice din punctul de vedere al consumului de material.

Rezultate interesante au fost obținute în teoria plăcilor și structurilor curbe. S-au studiat probleme privind plăcile curbe cu margini asimptotice, plăcile groase, deformațiile și eforturile în plăcile plane oblice simplu rezemate, stabilitatea plăcilor oblice simplu rezemate pe contur și altele.

Cercetările legate de frecarea și de uzarea materialelor au abordat probleme privind fenomenul de alunecare sacadată și influența sa asupra uzării, asupra stării de suprafață și a mediului controlat, asupra coeficientului de frecare, studiul degradării superficiale prin contact cu alunecare uscată, comportarea la uzură și la frecare uscată a unor mase plastice aglomerate destinate elementelor de frînare ale vehiculelor, comportarea la uzură și dimensionarea rațională a segmenților din motoarele cu ardere internă, studiul frecării și uzării din cuplurile de materiale metal și metal pe masă plastică etc.

Au fost de asemenea inițiate unele cercetări de mecanică fină, printre care vom menționa studiul frecării în lagărele cu alunecare prevăzute cu cuzineți de piatră.

O contribuție de reală importanță pentru dezvoltarea cercetărilor științifice este și aplicarea diferitelor metode experimentale, ca fotoelasticitatea, cercetări statice și dinamice pe modele, extensometria mecanică, optică și electrică, noi metodologii de încercare la solicitări repetate.

În studiul comportării structurilor prin folosirea materialelor cromoplastice, s-a obținut un material nou cu proprietăți mecanice speciale, care permite urmărirea vizuală a zonelor cu deformații plastice din modelele experimentale.

În domeniul mecanicii ruperii metalelor s-a studiat fenomenul de oboseală, cu aplicații la calculul unor organe din motoarele cu ardere internă.

Studiile privind ruperea fragilă au condus la elucidarea fenomenului de deformare elastoplastică în condițiile stării de tensiune triaxiale

neomogene, cu punerea în evidenţă a propagării fisurii pînă la rupere. În acelaşi cadru se înscriu şi cercetările privind curgerea lentă a betonului uşor, comportarea mecanică a materialelor plastice de rezistenţă şi altele.

★

Această enumerare, desigur incompletă, ne dă totuşi o imagine grăitoare a stadiului actual al cercetării româneşti şi arată contribuţia remarcabilă adusă la dezvoltarea ştiinţelor mecanice în ţara noastră. Rezultatele obţinute sînt rodul muncii creatoare a unui numeros detaşament de cercetători, cuprinşi într-o reţea de institute, unităţi şi colective de cercetare. O bună parte dintre cercetările menţionate au fost întreprinse în cadrul institutelor Academiei, profilate pe diferite ramuri ale mecanicii aplicate, cum sînt Institutul de mecanică a fluidelor, Centrul de mecanică a solidelor, Centrul de cercetări fizice şi tehnice din Timişoara, Centrul de cercetări tehnice din Iaşi, precum şi secţia de mecanică a Institutului de matematică, toate acestea avînd un rol primordial în promovarea cercetărilor de mecanică din ţara noastră.

De asemenea, o pondere importantă în desfăşurarea acestor activităţi o au cadrele din cadrul instituţiilor de învăţămînt superior, valoroase colective de cercetare ştiinţifică, al căror prestigiu, o dată cu dezvoltarea şi cu perfecţionarea învăţămîntului în ţara noastră, cunoaşte dimensiuni din ce în ce mai înalte. Pe lîngă instituţii cu o bogată şi îndelungată tradiţie de cercetare în domeniul ştiinţelor aplicate, cum sînt Institutul politehnic din Bucureşti, Institutul de construcţii, Institutul politehnic din Timişoara şi Institutul politehnic din Iaşi, se înscriu cu realizări tot mai remarcabile institutele înfiinţate în ultimele două decenii, cum sînt Institutul de petrol, gaze şi geologie din Bucureşti, apoi institutele politehnice din Cluj, Braşov, Galaţi etc., toată această vastă reţea de pe întreg cuprinsul ţării contribuind în mod substanţial la dezvoltarea cercetărilor de mecanică aplicată din ţara noastră. În această ordine de idei trebuie menţionată contribuţia deosebită adusă de facultăţile de matematică şi de mecanică de la universităţile din diferitele centre ale ţării noastre.

Vom releva mai departe contribuţia institutelor de cercetare şi de proiectare din cadrul diferitelor departamente şi a laboratoarelor uzinale, a căror activitate de investigaţie tehnică-ştiinţifică în domeniul mecanicii aplicate înregistrează an de an succese şi realizări tot mai însemnate.

Aşa cum a rezultat de altfel din această prezentare sumară a rezultatelor obţinute, cercetările efectuate în ultimii ani acoperă principalele direcţii actuale ale ştiinţelor mecanice, o bună parte din problemele majore ale cercetării de mecanică aplicată fiind legate direct de progresul tehnic şi industrial din ţara noastră. Vasta activitate ştiinţifică desfă-

şurată în acest domeniu şi rezultatele valoroase obţinute pînă acum sînt elocvent ilustrate de pregătirea deosebită a specialiştilor noştri şi de realizările tot mai însemnate ale acestora în tehnică şi industrie. Este suficient doar să amintesc în acest sens grandioasele construcţii hidroenergetice de la Bicaz şi Argeş, succesele repurtate în proiectarea şi realizarea de maşini-unelte de diverse tipuri, a instalaţiilor de foraj şi a altor echipamente pentru industria extracţiei şi prelucrării petrolului, a tractoarelor, a maşinilor agricole şi autovehiculelor, a unor utilaje şi instalaţii complete pentru industria chimică, toate acestea cu performanţe tehnice apreciate astăzi pe toate meridianele globului.

Cu toate aceste succese, avem încă multe de făcut pentru a asigura o legătură cît mai strînsă între producţie şi activitatea de cercetare, pentru orientarea investigaţiilor noastre spre problemele ridicate de dezvoltarea actuală a economiei naţionale, concomitent cu abordarea unor domenii de perspectivă. Sarcini deosebite revin în acest sens deopotrivă cercetătorilor, cadrelor didactice, proiectanţilor şi inginerilor din industrie, a căror colaborare strînsă va asigura creşterea eficienţei activităţii de cercetare, orientarea acesteia spre rezolvarea obiectivelor actuale ale producţiei.

Pentru noi toţi cei care activăm pe tărîmul ştiinţei ne sînt stimuatoare cuvintele tovarăşului Nicolae Ceauşescu, secretarul general P.C.R., preşedintele Comitetului de Stat al R.S.România, care arăta recent: „Astăzi cînd sîntem martorii celui mai uriaş progres al ştiinţei, care schimbă în mod radical nenumărate concepţii, care creează orizonturi noi, nebănuite, a nu cerceta, a nu te strădui să duci mai departe cunoaşterea, a nu te pune în serviciul progresului material şi spiritual înseamnă a te condamna la cele mai grave rămîneri în urmă. De aceea trebuie să facem totul pentru a stăpîni ceea ce ştiinţa a creat mai bun, de aceea oamenii noştri de ştiinţă trebuie să fie creatori, să contribuie la progresul general al ştiinţei".

Proiectul de directive privind planul cincinal pe anii 1971—1975 şi documentul privind liniile directoare ale dezvoltării economiei naţionale pe perioada 1976—1980, sintetizînd cu deosebită forţă şi precizie ştiinţifică experienţa unui glorios sfert de secol, stabilesc pentru cercetarea ştiinţifică, ca şi pentru toate celelalte sectoare de activitate, sarcini de o deosebită însemnătate.

„În condiţiile revoluţiei tehnico-ştiinţifice contemporane — se arată în proiectul de directive — dezvoltarea economiei depinde într-o măsură tot mai mare de ridicarea potenţialului ştiinţific şi tehnologic, de capacitatea de a introduce în practica economică şi socială cuceririle ştiinţei şi tehnicii".

În ansamblul măsurilor preconizate în aceste documente istorice se acordă o atenţie deosebită dezvoltării cercetării ştiinţifice, situînd pe un loc central activitatea din domeniul ştiinţelor tehnice, domeniu care cuprinde, bineînţeles, ştiinţele mecanice.

Cercetarea ştiinţifică de mecanică aplicată va cunoaşte în viitor noi dimensiuni, astfel încît să asigure dezvoltarea economiei noastre naţionale în condiţii optime.

Comunicările înscrise în programul conferinţei care se deschide astăzi acoperă un cîmp vast de probleme ştiinţifice de mare actualitate, reunind toate aspectele cercetării — de la studiile fundamentale şi cele aplicative pînă la introducerea lor în practică —, constituind astfel un bun prilej pentru dezvoltarea legăturilor dintre cercetare şi industrie şi stimularea activităţii ştiinţifice de mecanică aplicată.

Prin expunerile şi dezbaterile care vor avea loc în aceste zile se vor mai contura noi orientări ale activităţii noastre ştiinţifice şi vom fi mai bine pregătiţi pentru realizarea măreţelor obiective care ne stau în faţă în viitoarea etapă de dezvoltare a patriei noastre, contribuind astfel cu toate forţele noastre şi cu entuziasm deosebit la propăşirea României socialiste pe cele mai înalte culmi ale progresului şi civilizaţiei.

CONFERINȚA NAȚIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ
București, 23—27 iunie 1969

CUVÎNT DE ÎNCHIDERE

Acad. ELIE CARAFOLI,
PREȘEDINTELE COMITETULUI DE ORGANIZARE

După cinci zile de intensă activitate, de luare de contact și de discuții utile, sîntem acum la sfîrșitul Conferinței naționale de mecanică aplicată.

Într-o adevărată atmosferă de lucru, plină de entuziasm și de avînt creator, specialiștii de peste hotare și cei din țară au prezentat rezultatele lor, au dezbătut împreună, într-un spirit de strînsă colaborare și prietenie, multe și importante probleme actuale ale științelor mecanice.

Prin numărul mare de specialiști români prezenți, prin participarea cu totul deosebită a cercetătorilor veniți din atîtea țări, unele chiar foarte îndepărtate, prin numărul foarte impresionant de comunicări, prin valoarea științifică a lucrărilor prezentate, prin varietatea și noutatea problemelor discutate, conferința noastră se înscrie ca un eveniment important în viața științifică a României, aducînd o contribuție de seamă la dezvoltarea cercetărilor de mecanică aplicată în țara noastră.

Pentru știința și tehnica românească, această conferință are în primul rînd meritul de a fi reunit numeroși specialiști din toate centrele culturale ale țării, din institutele de cercetări ale Academiei, din învățămîntul superior, din institutele departamentale de cercetare și de proiectare și din industrie, prilejuind prin aceasta un larg schimb de opinii cu rezultate optime pentru ancorarea tot mai strînsă a activității noastre științifice de necesitățile actuale și de perspectivă ale progresului tehnic și industrial al României.

Participanții români la această remarcabilă manifestare științifică, specialiști din toate domeniile mecanicii aplicate, activînd în învățămînt sau în industrie, luînd acum contact cu o producție științifică mai bogată și dobîndind noi învățăminte pentru activitatea lor, se vor împrăștia pe tot cuprinsul țării noastre, rămînînd însă uniți prin preocupări comune și prin aceeași dorință fierbinte de a contribui prin munca lor creatoare la propășirea patriei noastre, la afirmarea științei și tehnicii românești.

Ei au contribuit, desigur, la bunul mers al conferinței prin comunicările prezentate și prin observațiile, propunerile și sugestiile făcute în cursul dezbaterilor.

Lucrările conferinței s-au desfășurat la un înalt nivel științific și au consemnat frumoasele rezultate obținute de specialiștii noștri, relevînd amploarea cercetărilor de mecanică aplicată ce se desfășoară tot mai intens în țara noastră. Adăugînd mai departe și contribuția valoroasă și substanțială a prietenilor noștri savanți de peste hotare, putem spune că s-a imprimat acestei conferințe caracterul unei adevărate manifestări științifice internaționale.

Desigur că pe lîngă părțile pozitive am avut și unele deficiențe de organizare, pentru care cerem scuzele noastre. Noi am fost însă însuflețiți de intenția cea mai bună și am depus toate eforturile pentru ca lucrările conferinței să se desfășoare normal, iar participanților români și distinșilor oaspeți de peste hotare să li se asigure toate condițiile unui sejur plăcut în București.

Sperăm că la viitoarele întîlniri, pe care le dorim tot mai fructuoase, să înlăturăm toate lipsurile care au existat.

Vom publica lucrările prezentate și profităm de această ocazie pentru a ruga pe toți participanții de la această conferință să ne transmită cît mai curînd posibil textul comunicărilor lor pentru a le da lumina tiparului cît mai repede posibil. Am rezervat pentru aceasta numerele revistei noastre *Revue de Mécanique Appliquée*, precum și ale ediției românești ale acestei publicații, *Studii și cercetări de mecanică aplicată*.

În numele Academiei și al Ministerului Învățămîntului, mulțumim tuturor departamentelor pentru sprijinul pe care ni l-au dat, îndemnînd specialiștii din unitățile lor să participe la lucrările conferinței noastre, asigurînd prin aceasta dezbaterea unor probleme majore care interesează deopotrivă cercetarea și producția în cadrul departamentelor respective.

Aducem cu această ocazie mulțumirile noastre și conducerii Conservatorului „Ciprian Porumbescu", care nu numai că ne-a găzduit în acest frumos local, dar a avut amabilitatea de a ne oferi momente plăcute de destindere prin spectacolul organizat în cinstea participanților la Conferința națională de mecanică aplicată. De asemenea mulțumim și Consiliului General al Sindicatelor, care ne-a oferit un frumos spectacol cu artiștii folclorului național românesc.

Sîntem profund impresionați de interesul deosebit manifestat față de această conferință de către oamenii de știință de peste hotare. Vom spune încă o dată că succesul acestei manifestări științifice se datorește în foarte mare măsură și contribuției prețioase aduse de acești eminenți oaspeți de peste hotare, cărora le adresăm din acest loc cele mai calde mulțumiri pentru amabilitatea de a participa la această conferință cu

numeroase lucrări de un înalt nivel ştiinţific. Ţinem să le spunem din nou că am fost deosebit de fericiţi să-i avem în mijlocul nostru şi îi asigurăm că prezenţa lor activă ne-a fost de un real folos.

Am avut multe de învăţat de la domniile lor, din experienţa lor ştiinţifică, pe care ne-au împărtăşit-o din plin prin comunicările ţinute, prin discuţiile purtate.

Beneficiind de participarea a peste 200 de specialişti de prestigiu din 18 ţări, cercetătorii români au avut ocazia de a lua un contact direct cu realizările şi cu preocupările existente pe plan mondial în domeniul mecanicii aplicate.

Luînd cunoştinţă şi pe această cale de tendinţele dezvoltării cercetărilor de mecanică aplicată din multe ţări ale lumii, vom avea acum posibilitatea să stabilim noile coordonate ale activităţii noastre de viitor. Vom folosi din plin experienţa iluştrilor noştri oaspeţi, valoroasele rezultate pe care ni le-au furnizat, pentru orientarea cercetărilor atît spre rezolvarea problemelor care au aplicaţii imediate în practica industrială, cît şi spre noile direcţii ce se afirmă în prezent pe plan mondial.

Le mulţumim încă o dată şi sperăm că s-au simţit bine printre noi.

Sperăm de asemenea că această reuniune va prilejui lărgirea relaţiilor de colaborare ştiinţifică ale specialiştilor noştri cu oamenii de ştiinţă de peste hotare, relaţii pe care le dorim cît mai trainice şi mai utile tuturor; aceste relaţii vor constitui un factor pozitiv pentru întărirea şi dezvoltarea prieteniei dintre toţi oamenii de ştiinţă.

Să-mi fie permis acum să expun cîteva foarte succinte concluzii privind desfăşurarea lucrărilor conferinţei noastre.

Voi reface mai întîi imaginea cadrului în care s-a desfăşurat reuniunea noastră ştiinţifică. Aşa cum vă este cunoscut, comunicările au fost grupate în trei secţii mari : 1) mecanică generală cu două subsecţii; 2) mecanica solidelor cu şase subsecţii; 3) mecanica fluidelor cu cinci subsecţii.

În acest cadru organizatoric, programul conferinţei a cuprins 405 comunicări, dintre care 220 elaborate de specialişti români, iar 185 aparţinînd oaspeţilor străini, ceea ce dovedeşte interesul şi bunăvoinţa acestora pentru conferinţa noastră.

Caracteristic acestei importante manifestări este faptul că numeroasele lucrări prezentate acoperă cele mai diverse domenii ale mecanicii aplicate, începînd cu problemele generale de mecanică, cele de mecanica solidului deformabil, de cinemateca şi dinamica maşinilor, apoi problemele de mecanica fluidelor incompresibile, dinamica gazelor, hidraulică şi maşini hidraulice, pînă la cele mai variate probleme privind lubrificaţia şi uzarea elementelor de maşini, precum şi diverse alte aplicaţii.

Astfel, comunicările de mecanică generală s-au referit la mecanica sistemelor neolonome, optimizarea sistemelor de control, dinamica solidului cu punct fix, mecanica sistemelor de masă variabilă, teoria gravitației, teoria stabilității mișcării cu unele aspecte generale, cît și cu aplicații concrete în cazul aparatelor de zbor. Alte comunicări au avut ca obiect calculul performanțelor vehiculelor aeriene, studiul reintrării aparatelor spațiale în atmosferă, precum și analiza perturbațiilor vehiculului orbital staționar la o latitudine arbitrară. Tot în cazul acesta au fost prezentate o serie de comunicări axate pe diverse probleme de aeroelasticitate privind dimensionarea și comportarea structurilor aparatelor moderne de zbor.

Numeroase comunicări au tratat cele mai variate probleme și aspecte ale mecanicii solidului deformabil. În elasticitate, plasticitate și reologie, comunicările prezentate au abordat o serie de probleme privind atît calculul structurilor, mediile granulare discrete, studiul corpurilor anizotrope sau micropolare, cît și efectele unor cîmpuri termice și magnetice etc.

Alte comunicări au avut ca obiect problema plană pentru materiale elastice și vîscoplastice, precum și unele probleme bidimensionale care apar în teoria elasticității.

Au existat de asemenea multiple preocupări pentru aplicarea unor teorii de elasticitate la calculul organelor de mașini, al elementelor de construcție și la studiul materialelor plastice. O serie de lucrări au fost consacrate teoriei vibrațiilor neliniare și în regim aleator, diferitelor aspecte ale amortizării vibrațiilor, ale regimului de rezonanță, precum și ale vibrațiilor plăcilor, grinzilor, ale terenurilor de fundații și ale diverselor organe de mașini. Au fost prezentate de asemenea cercetări privind propagarea undelor în plăci, bare și medii ortotrope.

În teoria plăcilor și structurilor s-au prezentat numeroase comunicări privind calculul plăcilor curbe, al structurilor sandviș, al plăcilor-cheson, al plăcilor cilindrice și conice și al celor rezemate pe piloți.

Alte lucrări au avut ca obiect aplicarea diferitelor metode matematice în studiul plăcilor și structurilor de diferite forme.

Comunicările de teorie a mecanismelor au abordat probleme de cinematică a mecanismelor spațiale și a mecanismelor plane deformabile, probleme de dinamică a mecanismelor cu came și a celor diferențiale și s-au studiat efectele accelerațiilor de ordin superior.

Au fost prezentate de asemenea comunicări privind aplicarea diferitelor metode matematice, ca, de pildă, aplicarea operatorilor complexi și hipercomplecși, a teoriei distribuțiilor etc. Alte comunicări au avut ca obiect o serie de probleme privind sinteza mecanismelor plane și spațiale.

În mecanica construcţiilor au fost prezentate comunicări referitoare la calculul structurilor de rezistenţă în regim seismic şi în domeniul elastoplastic, la structurile de greutate minimă şi alte aspecte ale optimizării, apoi la calculul static al structurilor bidimensionale şi spaţiale, precum şi la unele probleme legate de stabilitatea construcţiilor.

Alte comunicări s-au referit la studiul stărilor de tensiune şi deformaţii în tiranţii de beton armat, în barele curbe cu secţiune variabilă, în masivele de pămînt şi în fundaţii. În acelaşi cadru se înscriu şi lucrările privind studiile dinamice şi seismice ale barajelor, rezervoarelor şi ale unor construcţii industriale de mari dimensiuni, precum şi comunicările referitoare la utilizarea calculatoarelor electronice pentru dimensionarea şi studiul comportării diverselor elemente de construcţii.

Au mai fost discutate unele metode pentru determinarea proprietăţilor materialelor, a constantelor elastice ale corpurilor anizotrope, analiza fenomenului de oboseală, precum şi unele aspecte noi ale fotoelasticimetriei şi ale defectoscopiei aplicate în diferite cazuri specifice. Vom mai menţiona şi studiile privind calculul şi comportarea diverselor organe de maşini.

Un loc important în desfăşurarea acestei conferinţe l-au avut lucrările de mecanică a fluidelor.

În domeniul mecanicii fluidelor incompresibile au fost prezentate comunicări cu aplicaţii în aviaţie, în construcţia maşinilor şi a mecanismelor hidraulice, în pneumonică şi alte domenii ale tehnicii.

S-au abordat probleme referitoare la mişcările oscilatorii ale aripii de avion, studiul curenţilor pulsatori de aer, aerodinamica reţelelor de profile, determinarea sensibilităţii la cavitaţie, scurgerea fluidelor prin orificii, analiza unor elemente aerodinamice de automatizare şi altele.

O activitate foarte însemnată s-a desfăşurat în dinamica gazelor şi magnetofluidodinamică.

Au fost prezentate comunicări privind teoria sistemelor portante complexe, curgerile cu unde de şoc la viteze transonice şi supersonice, dezvoltarea tehnicii de investigaţie şi de măsură cu ajutorul tuburilor de rezonanţă şi de şoc, analiza fenomenului de implozie, jeturile libere cu relaxare termodinamică, aripile oscilatorii în regim supersonic, scurgerile în starea de neechilibru termodinamic, curgerile cu unde de şoc şi de combustie, transferul de energie în plasmă, mişcarea gazelor rarefiate cu aplicaţii la pompele turbomoleculare, precum şi unele probleme legate de motoarele rachetă cu combustibil lichid.

În acelaşi cadru se înscriu şi cercetările de aerodinamică a vitezelor mari cu aplicaţii în alte domenii industriale, diferite de cel al aviaţiei.

În fluidele vîscoase, strat de limită, turbulenţă, au fost prezentate lucrări privind transferul de căldură în apropierea suprafeţelor, studiul

curenţilor macroturbulenţi, studiul stratului-limită, mişcarea prin tuburi, conducte şi ajutaje, studiul desprinderii curenţilor fluizi de pereţii obstacolelor sau ai conductelor, precum şi automatizarea funcţionării staţiilor de încălzire ale conductelor magistrale.

Alte comunicări au avut ca obiect stabilitatea hidrodinamică, curgerile turbulente provocate de lărgirea bruscă a secţiunii conductelor, studiul unor medii cu comportare reologică şi a mediilor nenewtoniene, precum şi o serie de metode experimentale utilizate în acest domeniu.

În hidraulică s-au prezentat lucrări privind lichidele mono- şi multifazice, mişcările fluidelor nemiscibile, scurgerii prin medii permeabile cu aplicaţii la proiectarea şi la exploatarea zăcămintelor petroliere, mişcările elicoidale şi cvasielicoidale cu aplicaţii la camerele spirale ale unor tipuri de turbine şi la deversoarele hidraulice, propagarea undelor de presiune în conducte şi canale, mişcări cu vîrtejuri şi alte multe probleme legate de funcţionarea maşinilor hidraulice şi de construcţia centralelor hidroenergetice.

În tribologie s-au abordat probleme foarte actuale ale lubrificaţiei şi frecării suprafeţelor solide, lubrificarea cu filme de viscozitate cinematică redusă, contactul suprafeţelor supuse la sarcini foarte mari, evaluarea energiei la disipaţie în mişcarea de alunecare şi de rostogolire, comportarea unor materiale la mişcarea de rostogolire, macrogeometria suprafeţelor de frecare, diferite aspecte ale fenomenului de gripaj, întinderea materialelor care curg, frecarea solidelor refractare, frecarea cuplelor, *masă plastică-metal* şi altele. În acest cadru se înscriu şi comunicările referitoare la lagărele hidrostatice, lubrificaţia în regim turbulent, efectele pompajului electromagnetic, lubrificaţia magnetogazodinamică, lagărele cu aer şi cu gaze sub presiune etc.

Această scurtă prezentare, deşi sumară şi incompletă — conferinţa noastră a cuprins aproape 400 de comunicări, fiecare cu aspecte şi realizări specifice —, relevă totuşi destul de pregnant amploarea manifestării ştiinţifice pe care o încheiem astăzi.

Este de remarcat că în toate domeniile care au format obiectul conferinţei noastre s-au prezentat numeroase aspecte de aplicare directă în practică a rezultatelor obţinute.

Conferinţa noastră şi-a desfăşurat astfel lucrările în spiritul îmbinării armonioase a cercetărilor fundamentale cu cele aplicative, constituind astfel un bun prilej pentru dezvoltarea legăturilor dintre cercetare şi industrie, pentru stimularea activităţii ştiinţifice de mecanică în vederea aplicaţiilor lor în tehnică şi în practica industrială.

Ţinînd seama de rezultatele obţinute, de larga participare a specialiştilor români şi a celor din alte ţări, de importanţa ştiinţifică şi practică

a problemelor dezbătute, putem spune că actuala Conferință de mecanică aplicată și-a atins pe deplin obiectivele sale principale.

Cum arătam și la ședința de deschidere, anul acesta se împlinesc două decenii de la înființarea Institutului de mecanică aplicată al Academiei, reprezentat astăzi prin Institutul de mecanică a fluidelor și prin Centrul de mecanică a solidelor. Conferința la care am participat în aceste zile ne-a oferit prilejul de a sărbători într-un cadru științific deosebit aniversarea acestui important eveniment al vieții științifice de mecanică aplicată în țara noastră. Este momentul acum să constatăm cu satisfacție că strădaniile cercetătorilor acestor unități sînt încununate cu succes.

Această manifestare științifică are meritul de a confirma tradiția instaurată în rîndurile specialiștilor noștri, de a se reuni periodic în cadrul unor ample manifestări științifice în care să dezbatem principalele noastre realizări, să le confruntăm cu rezultatele similare ale savanților din alte țări, să consemnăm progresele obținute în cercetarea științifică de mecanică aplicată și să stabilim, în consecință, orientarea activității noastre de viitor.

Utilitatea manifestărilor de acest gen, demonstrată din plin și cu ocazia acestei conferințe, ne îndreptățește să continuăm această tradiție și să organizăm cu regularitate reuniuni ale specialiștilor noștri de mecanică aplicată, de preferat din 4 în 4 ani.

În acest context apare tot mai necesară înființarea în țara noastră a unui organism de mecanică aplicată care să unească toți specialiștii noștri în acest domeniu, de la cei ce se ocupă cu aspectul fundamental pînă la cei ce introduc în practică cuceririle moderne ale științelor mecanice. Acest organism va avea rolul de a asigura organizarea unor astfel de manifestări și totodată i s-ar putea atribui și alte funcțiuni, menite să sprijine și să stimuleze dezvoltarea cercetărilor de mecanică din țara noastră și aplicațiile lor în economie.

Mulțumindu-vă încă o dată tuturor, onorați colegi de peste hotare și din țara noastră, pentru prețioasa dumneavoastră contribuție la succesul acestei reuniuni științifice, declar închise lucrările Conferinței naționale de mecanică aplicată, urîndu-vă în același timp succes deplin în activitatea dumneavoastră viitoare.

Voi încheia acum simplu, spunîndu-vă tuturor:

LA REVEDERE, PE CURÎND!

ASPECTE ALE UTILIZĂRII TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN MECANICĂ

de EMIL TOCACI
Institutul de petrol, Ploiești

În lucrare sînt analizate atît modalitatea de utilizare a teoriei distribuțiilor în studiul mișcărilor de viteze discontinui, cît și consecințele care decurg din aplicarea acestei metode.
Sînt, de asemenea, cercetate modalități de evitarea dezavantajelor provocate de idealizarea matematică potrivit căreia șocurile trebuie considerate ideale (pentru a putea fi introdusă în calcul distribuția lui Dirac) obținîndu-se astfel o mai mare apropiere de fenomenul real.

În studiul fenomenelor caracterizate prin variații discontinue, folosirea teoriei distribuțiilor este extrem de eficace, ceea ce face ca acest instrument de calcul să fie prețios atunci cînd se stabilesc mișcările sistemelor materiale percutate sau de masă discontinuu variabilă, precum și în situația în care se caută relații generale pentru solicitările provocate de forțe sau de momente atît continuu distribuite, cît și concentrate.

În cele de mai jos sînt prezentate cîteva dintre numeroasele aplicații ale funcțiilor generalizate, precum și principiul unei metode noi, metoda funcțiilor aproape distribuționale.

1. DISTRIBUȚIA LUI DIRAC ÎN STUDIUL MIȘCĂRILOR MATERIALE DISCONTINUE ALE UNOR SISTEME NEOLONOME ȘI OLONOME

Teoria distribuțiilor și-a făcut loc în ultimul timp într-o serie de domenii ale studiului naturii și tehnicii. Ea implică un model matematic care, firește, idealizează fenomenul fizic studiat, fără însă a-l îndepărta simțitor de realitate, prin aceasta obținîndu-se o tratare matematică unitară, elegantă și, în foarte multe cazuri, deosebit de eficace.

Prezenta lucrare extinde ecuațiile mecanicii analitice pentru sistemele materiale acționate simultan de forțe continue, de forțe percutante și de forțe de reacție percutante, provocate de emisia (captarea) unor mase avînd același ordin de mărime cu masa sistemului material considerat. În acest fel se continuă și se generalizează rezultatele obținute în [4] — [6],

ideea fundamentală rămînînd aceeaşi. Fenomenele discontinue pot fi privite drept cazuri-limită ale fenomenelor continue.

Suportul matematic al acestei afirmaţii constă în faptul că distribuţia lui Dirac şi funcţia lui Heaviside pot fi obţinute ca limite ale unor funcţii continue, chiar şi indefinit derivabile, conţinînd un parametru.

Într-adevăr, fie

$$J = f(t, \lambda) \tag{1}$$

o funcţie continuă, de variabilă t, depinzînd şi de parametrul λ. Deşi nu este absolut necesar, se va admite că (1) este şi indefinit derivabilă.

Prezentarea se rezumă la o singură variabilă independentă (deşi oricînd se poate generaliza la mai multe, fiindcă discontinuităţile mişcării vor fi privite la timp) la anumite momente, nu în anumite poziţii, după cum se va vedea. Se ştie că, dacă

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t, \lambda)\, dt \right| < 1 \tag{2}$$

pentru orice, α, β şi λ şi, în plus, există o constantă τ asociată fiecărei funcţii astfel încît

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, \lambda)\, dt = \begin{cases} 1 \text{ pentru } \tau \in (\alpha, \beta), \\ 0 \text{ pentru } \tau \notin (\alpha, \beta), \end{cases} \tag{3}$$

atunci

$$\lim_{\lambda \to 0} f(t, \lambda) = \delta(t - \tau), \tag{4}$$

$\delta(t - \tau)$ fiind distribuţia lui Dirac. De exemplu,

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-2} [e^{(t-\tau)\lambda^{-2}} + e^{-(t-\tau)\lambda^{-2}} + 2]^{-1} = \delta(t - \tau), \tag{5}$$

ceea ce se poate verifica cu uşurinţă.

De asemenea, în virtutea celor de mai sus, egalitatea

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, \lambda) = f(t, \lambda) \tag{6}$$

antrenează relaţia

$$\lim_{\lambda \to 0} \varphi(t, \lambda) = H(t - \tau), \tag{7}$$

în care $H(t - \tau)$ este funcţia lui Heaviside, adică

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } t > \tau, \\ 0 \text{ pentru } t < \tau. \end{cases} \tag{8}$$

În aceste condiții se poate enunța cunoscuta egalitate

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(t-\tau) = \delta(t-\tau), \tag{9}$$

unde operatorul de derivare trebuie înțeles în sensul teoriei distribuțiilor, egalitate de primă importanță în studiul evoluției mecanice a sistemelor materiale în mișcare discontinuă, la fel ca

$$\int \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = H(t-\tau) + C, \tag{9'}$$

care are același sens generalizat.

Fie acum forța

$$\overline{F}_\lambda = \overline{P} f(t, \lambda), \tag{10}$$

care variază în timp (t) după o funcție continuă și indefinit derivabilă. $\overline{P}$ fiind o constantă vectorială, iar funcția scalară îndeplinind toate condițiile pentru ca (4) să existe, apare evident că

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{F}_\lambda = \overline{P}\delta(t-\tau). \tag{11}$$

În consecință, integrala în sensul distribuțiilor,

$$\int_0^t \overline{F}\mathrm{d}t = \overline{P}\int_0^t \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t, \tag{12}$$

ținînd seama de (9') și de faptul că τ reprezintă un moment și este pozitiv ($\tau > 0$), va fi

$$\int_0^t \overline{F}\,\mathrm{d}t = \overline{P}H(t-\tau), \tag{13}$$

ceea ce înseamnă că impulsul forței $\overline{F}$, dat de primul membru al egalității (13), are un salt la momentul $t = \tau$, pentru că, potrivit cu (8), se poate scrie

$$\int_0^t \overline{F}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \overline{P} & \text{pentru } t > \tau, \\ 0 & \text{pentru } t < \tau. \end{cases} \tag{13'}$$

Concluzia care se impune este că forța $\overline{F}$ are o natură percutantă în ipoteza ideală a șocului instantaneu.

Pe de altă parte, dacă masa m a unui punct material M variază cu timpul (t) după legea

$$m_\lambda = m_0 + \sum_{\sigma=1}^{a} \mu_\sigma \varphi_\sigma(t, \lambda), \tag{14}$$

unde m_0 este o funcţie oarecare de timp sau o constantă la fel ca μ_σ ($\sigma = 1, 2, \ldots, a$), iar $\varphi_\sigma(t, \lambda)$ funcţii continue şi indefinit derivabile, îndeplinind condiţiile necesare pentru ca

$$\lim_{\lambda \to 0} \varphi_\sigma(t, \lambda) = H(t - \tau_\sigma) \quad \sigma = 1, 2, \ldots, a, \tag{15}$$

atunci

$$\lim_{\lambda \to 0} m_\lambda = m_0 + \sum_{\sigma=1}^{a} \mu_\sigma H(t - \tau_\sigma) = m \tag{16}$$

reprezintă variaţia unei mase care captează (emite) particule de acelaşi ordin de mărime cu al masei iniţiale. Masele acestor particule sînt constantele μ_σ, pozitive pentru cazul captării, negative pentru cel al emisiei. În cazul în care m_0 este o constantă, singura variaţie a masei este cea în trepte prin captările (emisiile) maselor μ_σ iar în situaţia în care m_0 este o funcţie de timp, ea reprezintă o variaţie ce se suprapune peste cea în trepte, conducînd la o funcţie oarecare cu discontinuităţi pentru $t = \tau_\sigma$, salturile fiind tocmai μ_σ. În conformitate cu (9) rezultă

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_0}{dt} + \sum_{\sigma=1}^{a} \mu_\sigma \delta(t - \tau_\sigma). \tag{17}$$

Odată stabilite toate acestea, fie un sistem material alcătuit din n puncte M_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), supus unui număr de 3n-h legături olonome şi γ legături neolonome. Legăturile se presupun ideale.

În cel mai general caz, particulele constituente ale acestui sistem au mase variabile, fiind în acelaşi timp acţionate şi de forţe exterioare date.

Punctul de plecare al întregii demonstraţii îl constituie admiterea următorelor expresii:

a) pentru forţele exterioare date $\overline{\Psi}_{s\lambda}$:

$$\overline{\Psi}_{s\lambda} = \overline{\Phi}_s(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{j=1}^{b_s} \overline{P}_{sj} f_{sj}(t, \lambda), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

unde $\overline{\Phi}_s$ sînt funcţii continue de coordonatele generalizate q_i, de vitezele generalizate $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, h$) introduse după eliminarea legăturilor olonome, şi de timpul t; $\overline{P}_{sj}$ sînt nişte constante vectoriale, iar $f_{sj}(t, \lambda)$ funcţii continue şi indefinit derivabile în raport cu timpul t, depinzînd şi de parametrul λ şi îndeplinind condiţiile necesare pentru ca

$$\lim_{\lambda \to 0} f_{sj}(t, \lambda) = \delta(t - \tau_{sj}); \tag{19}$$

b) pentru variaţia maselor punctelor M_s:

$$m_{s\lambda} = m_{0s}(t) + \sum_{\sigma=1}^{a_s} \mu_{s\sigma} \varphi_{s\sigma}(t, \lambda); \; s = 1, 2, \ldots, n, \tag{20}$$

relație în care $m_{0s}(t)$ sînt funcții continue de timp, $\mu_{s\sigma}$ constante, iar $\varphi_{s\sigma}(t,\lambda)$ funcții continue și indefinit derivabile în raport cu timpul t, depinzînd și de parametrul λ și satisfăcînd condițiile necesare pentru ca

$$\lim_{\lambda\to 0} \varphi_{s\sigma}(t,\ \lambda) = H(t - \tau_{s\sigma}); \tag{21}$$

c) vitezele relative dintre punctele M_s și jeturile de particule captate (emise) sînt funcții continue de timp:

$$\overline{U}_s = \overline{U}_s(t). \tag{22}$$

Important de remarcat este faptul că egalitățile (18) și (20) nu introduc nici o particularizare, deoarece este suficient să se ia $\overline{P}_{sj} = 0$ și $\mu_{s\sigma} = 0$ și se ajunge la cazul studiat uzual în mecanica rațională.

Totodată, caracterul expresiilor (18), (20) și (22) permite scrierea ecuațiilor mecanicii analitice în forma și interpretarea lor clasică, deci se va începe prin considerarea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_\lambda}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T_\lambda}{\partial q_i} = Q_{\lambda i} + \Gamma_{\lambda i} + N_{\lambda i} + \Pi_{\lambda i} + \sum_{k=1}^{r} l_{\lambda k} C_{\lambda k i},\ i = 1, 2, \ldots, h, \tag{23}$$

care sînt o formă Lagrange pentru legături olonome și neolonome, cu T_λ energia cinetică, $Q_{\lambda i}$ forța generalizată corespunzătoare termenilor $\overline{\Phi}_s$, adică

$$Q_{\lambda i} = \sum_{s=1}^{n} \overline{\Phi}_s \frac{\partial \overline{r}_{\lambda s}}{\partial q_i}, \tag{24}$$

$\overline{r}_{\lambda s}$ fiind vectorii de poziție ai punctelor M_s, $\Gamma_{\lambda i}$ tot de natura unei forțe generalizate,

$$\Gamma_{\lambda i} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{b_s} \overline{P}_{sj} f_{sj}(t,\ \lambda), \frac{\partial \overline{r}_{\lambda s}}{\partial q_i}, \tag{25}$$

la fel ca $N_{\lambda i}$ și $\Pi_{\lambda i}$, care au structurile

$$N_{\lambda i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t} \overline{U}_s \frac{\partial \overline{r}_{\lambda s}}{\partial q_i} \tag{26}$$

și

$$\Pi_{\lambda i} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{a_s} \mu_{s\sigma} \frac{\mathrm{d}\varphi_{s\sigma}}{\mathrm{d}t} \overline{U}_s \frac{\partial \overline{r}_{\lambda s}}{\partial q_i}, \tag{27}$$

reprezentînd forțele generalizate corespunzătoare forțelor de reacție provocate de variația maselor.

De remarcat că $\Gamma_{\lambda i}$ și $Q_{\lambda i}$, pe de o parte, și $N_{\lambda i}$ și $\Pi_{\lambda i}$, pe de altă parte, se puteau grupa în cîte o singură forță generalizată. S-a ales însă forma de mai sus în interesul clarității celor ce vor urma.

Se vede imediat că $l_{\lambda k}$ din (23) sînt coeficienţii legăturilor neolonome, iar $C_{\lambda ki}$ funcţiile restrictive ale acestora. Indicele λ indică dependenţa evidentă a mărimilor cărora le-a fost aplicat faţă de parametrul λ.

Fie

$$\lim_{\lambda\to 0} q_i = \omega_i\,; \quad \lim_{\lambda\to 0} \dot{q}_i = \dot{\omega}_i\,; \quad \lim_{\lambda\to 0} \ddot{q}_i = \ddot{\omega}_i\,, \tag{28}$$

ceea ce înseamnă de fapt că $\dot{\omega}_i$ şi $\ddot{\omega}_i$ sînt derivabile, în sensul teoriei distribuţiilor, de ordinul prim şi secund ale lui ω_i.

În ipoteza că funcţia $T_\lambda = T_\lambda(t, q_i, \dot{q}_i)$ şi toate derivatele sale parţiale de ordinul prim şi secund sînt uniform continue şi că ω_i şi $\dot{\omega}_i$ aparţin domeniului de definiţie al lui T_λ, se pot scrie egalităţile

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0} T_\lambda = T_\lambda(\omega_i, \dot{\omega}_i, t) = T,\\
&\lim_{\lambda\to 0} \frac{\partial T_\lambda}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial \omega_i},\\
&\lim_{\lambda\to 0} \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial t\,\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial t\,\partial \dot{\omega}_i}, \qquad i,\ \alpha = 1, 2, \ldots, h,\\
&\lim_{\lambda\to 0} \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial \dot{q}_i\,\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\omega}_i\,\partial \omega_\alpha},\\
&\lim_{\lambda\to 0} \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\omega}_i\,\partial \dot{\omega}_\alpha}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Cu $\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\omega}_i\,\partial \omega_\alpha}$ finită, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\omega}_i\,\partial \dot{\omega}_\alpha}$ finită şi nenulă, ceea ce corespunde realităţii fizice, pentru că orice sistem are o viteză finită şi o derivată finită şi diferită de zero a energiei cinetice în raport cu viteza, după calcule simple se ajunge la

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_\lambda}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}_i}\right), \tag{30}$$

operatorul de derivare din membrul secund fiind în sensul distribuţiilor.

La fel, cum $\bar{r}_{\lambda s}$ aparţine cel puţin clasei c^2 în raport cu toate cele $h+1$ variabile ale sale, ω_i făcînd parte din domeniul de definiţie al funcţiei $\bar{r}_{\lambda s} = \bar{r}_{\lambda s}(q_i, t)$, rezultă

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0} \bar{r}_{\lambda s} = \bar{r}_{\lambda s}(\omega_i, t) = \bar{r}_s\,,\\
&\lim_{\lambda\to 0} \frac{\partial \bar{r}_{\lambda s}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial \omega_i},
\end{aligned} \tag{31}$$

iar ca o consecință imediată și în virtutea unor relații prezentate mai sus se stabilește

$$\lim_{\lambda\to 0} Q_{\lambda i} = \sum_{s=1}^{n} \overline{\Phi}_s \frac{\partial \overline{r}_s}{\partial \omega_i} = Q_i, \tag{32}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \Gamma_{\lambda i} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{b_s} \overline{P}_{sj} \frac{\partial \overline{r}_s}{\partial \omega_i} \delta(t - \tau_{sj}) = \Gamma_i, \tag{32'}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} N_{\lambda i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}m_{0s}}{\mathrm{d}t} \overline{U}_s \frac{\partial \overline{r}_s}{\partial \omega_i} = N_i, \tag{32''}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \Pi_{\lambda i} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{a_s} \mu_{s\sigma} \overline{U}_{s\sigma} \frac{\partial \overline{r}_s}{\partial \omega_i} \delta(t - \tau_{s\sigma}) = \Pi_i. \tag{32'''}$$

Se precizează că relațiile care implică produse cu distribuția lui Dirac au sens datorită continuității funcțiilor pe care acesta le înmulțește, de asemenea că

$$\overline{U}_{s\sigma} = \overline{U}_s(\tau_{s\sigma}) \tag{33}$$

a fost introdusă în (32''') pe baza cunoscutei egalități

$$\overline{U}_s(t)\delta(t - \tau_{s\sigma}) = \overline{U}_s(\tau_{s\sigma})\delta(t - \tau_{s\sigma}). \tag{34}$$

În sfîrșit, cu $C_{\lambda ki}$ funcții continue în raport cu variabilele de care depind și cu domeniul de definiție conținînd ω_i, și $\dot{\omega}_i$,

$$\lim_{\lambda\to 0} C_{\lambda ki}(q_i, \dot{q}_i, t) = C_{\lambda ki}(\omega_i, \dot{\omega}_i, t) = C_{ki} \tag{35}$$

și

$$\lim_{\lambda\to 0} l_{\lambda k} = l_k; \tag{36}$$

se poate considera în (23) cazul-limită $\lambda\to 0$; obținîndu-se potrivit cu (29), (30), (32'), (32''), (32'''), (35) și (36) ecuațiile

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = Q_i + \Gamma_i + N_i + \Pi_i + \sum_{k=1}^{\Upsilon} l_k C_{ki}, \tag{37}$$

în care toate notațiile sînt cunoscute, toate derivatele considerate în sensul funcțiilor generalizate și care reprezintă ecuațiile de mișcare (de tip Lagrange pentru sisteme cu legături olonome și neolonome) în cazul suprapunerii forțelor continue, forțelor percutante, forțelor reactive (date de variația masei) continue și forțelor reactive percutante (date de discontinuitățile în variația masei).

Dacă se au în vedere relațiile (11) și (17), afirmația apare evidentă, Q_i fiind forțele generalizate ale forțelor continue $\overline{\Phi}_s$, Γ_i forțele generalizate ale forțelor percutante,

$$\overline{F}_s = \sum_{j=1}^{b_s} \overline{P}_{sj}\delta(t - \tau_{sj}), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{38}$$

provocate de b_s percuţii $\overline{P}_{sj}$ aplicate la momentele τ_{sj}, N_i forţele generalizate corespunzătoare unei captări (emisii) de jeturi continue, iar Π_i forţele generalizate corespunzătoare unor captări (emisii) de mulţimi discrete de particule cu mase $\mu_{s\sigma}$ de acelaşi ordin de mărime cu masa întregului sistem.

Asemenea şocurilor care s-au presupus instantanee, şi captările ($\mu_{s\sigma} > 0$) sau emisiile ($\mu_{s\sigma} < 0$) se consideră tot instantanee. Acesta este idealizarea pe care o pretinde introducerea teoriei distribuţiilor în studiul mişcărilor discontinue.

În mod absolut similar se stabilesc şi ecuaţiile lui Mangeron :

$$\frac{1}{m}\frac{\partial T^{(m)}}{\partial \omega_i^{(m)}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = Q_i + \Gamma_i + N_i + \Pi_i + \sum_{k=1}^{\gamma} l_k C_{ki} \qquad (39)$$

$$\text{unde } T^{(m)} = \frac{d}{dt} T^{(m-1)} \text{ şi } \omega_i^{(m)} = \frac{d}{dt}\omega_i^{(m-1)}$$

sau ecuaţiile lui Appell :

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{\omega}_i} = Q_i + N_i + \Gamma_i + \Pi_i + \sum_{k=1}^{\gamma} l_k C_{ki}, \qquad (40)$$

A fiind energia de acceleraţie.

Bineînţeles că pentru rezolvare ecuaţiile (37), (39) sau (40) trebuie asociate cu condiţiile de legătură.

Metoda prezentată în această lucrare, o lărgire şi o generalizare a altor lucrări publicate anterior, poate contribui la creşterea domeniului de aplicare al ecuaţiilor mecanicii analitice.

Dacă percuţiile sau discontinuităţile de variaţie a masei au loc la momente necunoscute, dar în anumite poziţii cunoscute, metoda de mai sus (care a presupus momentele τ date) rămîne adevărată, cu precizarea că se va lucra cu momente τ necunoscute, acestea determinîndu-se după integrarea ecuaţiilor diferenţiale ca nişte constante arbitrare din condiţiile de poziţie cunoscute.

În viitor, pentru a se evita idealizarea care presupunea percuţiile instantanee, se va adopta un model matematic bazat nu pe distribuţii, ci pe funcţii aproape distribuţionale (în loc de $\lambda \to 0$ se va lua $\lambda = \varepsilon$, foarte mic, dar finit) cu ajutorul căruia exactitatea studiului (de altfel şi aşa suficientă) va avea de cîştigat.

2. UNELE APLICAŢII ALE DISTRIBUŢIILOR ÎN REZISTENŢA MATERIALELOR

Distribuţiile oferă posibilitatea de a exprima şi a trata forţele concentrate şi momentele concentrate ca pe forţe continuu distribuite şi, respectiv, momente continuu distribuite.

Într-adevăr, dacă se consideră o forţă concentrată $\overline{F}$ aplicată într-un punct oarecare A, problema nu suferă nici o particularizare prin adoptarea unui sistem de referinţă $Oxyz$, astfel încît Ox să conţină punctul A. Se admite acum pe axa Ox o forţă de repartiţie continuă a cărei valoare unitară să fie

$$\overline{\alpha}_\lambda = \overline{F} f(x, \lambda), \qquad (41)$$

în care λ este un parametru, iar $f(x, \lambda)$ o funcție îndeplinind cunoscutele condiții (2) și (3) necesare și suficiente pentru ca

$$\lim_{\lambda \to 0} f(x, \lambda) = \delta(x - a), \tag{42}$$

unde a este coordonata punctului A $(a, 0, 0)$ în sistemul $oxyz$ ales și $\delta(x - a)$ distribuția lui Dirac.

Cum $\overline{F}$ este o constantă vectorială, rezultă

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{\alpha}_\lambda = \overline{F}\delta(x - a) = \overline{\alpha}, \tag{43}$$

și, în virtutea cunoscutei relații

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x - a)\mathrm{d}x = H(x - a) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x > a, \\ 0 \text{ pentru } x < a, \end{cases} \tag{44}$$

se poate afirma că α este tocmai repartiția unitară în cazul forței concentrate $\overline{F}$, care apare ca un caz-limită, conform cu (41, (42) și (43), al unei repartiții unitare continuu distribuită pe întreaga axă ox.

Firește, integrala (44) are sensul teoriei distribuțiilor, iar $H(x - a)$ este funcția lui Heaviside.

În mod similar în cazul unui moment $\overline{M}$ concentrat în punctul A $(a,0,0)$ se poate considera acțiunea unei forțe distribuite pe întreaga axă Ox, avînd valoarea unitară

$$\overline{\beta} = \overline{M}\ \delta'(x - a), \tag{45}$$

notîndu-se cu $\delta'(x-a)$ derivata (în sensul distribuțiilor) a funcției generalizate a lui Dirac.

Afirmația apare ca evidentă dacă se ține seama de cunoscutele relații dintre forțele distribuite și momentele acestora în raport cu un punct oarecare situat pe dreapta pe care acționează și forța distribuită considerată, precum și de relația

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{M}\delta'(x - a)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}x = \overline{M}, \tag{46}$$

frecvent utilizată de calculele distribuționale.

Remarca I. Cu $f(x, \lambda)$ astfel încît să fie respectată egalitatea (42) și cu

$$g(x, \lambda) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \tag{47}$$

repartiția unitară $\overline{\beta}$ a forței pentru cazul considerat apare ca limită:

$$\overline{\beta} = \lim_{\lambda \to 0} \overline{M}\, g(x, \lambda), \tag{48}$$

ceea ce înseamnă că momentul concentrat poate fi privit ca un caz-limită de moment continuu distribuit.

REMARCA II. În cele de mai sus s-a raţionat numai pe spaţiul monodimensional al axei ox, subînţelegîndu-se ca fiind nule toate valorile unitare ale forţelor distribuite în oricare punct ce nu aparţine axei ox. Acest procedeu nu afectează cu nimic rezultatele obţinute.

În consecinţă, orice încercare realizată de forţele continue şi concentrate, precum şi de momentele continue şi concentrate, poate fi tratată ca o încărcare dată de o forţă continuu distribuită, ceea ce duce la o tratare generală, unitară şi considerabil simplificată.

De pildă, pentru un element monodimensional (grindă supusă la încovoiere sau cadru), cazul general de încărcare presupune acţiunea unei forţe a cărei repartiţie unitară este

$$\overline{p}(x) = \overline{q}(x) + \overline{\rho}(x) + \sum_{i=1}^{h} \overline{F}_i\, \delta(x - a_i) + \sum_{j=1}^{k} \overline{M}_j\, \delta'(x - b_j), \tag{49}$$

unde x este coordonata elementului monodimensional solicitat, $\overline{q}(x)$ repartiţia unitară a unei forţe continuu distribuite, $\overline{\rho}(x)$ repartiţia unitară corespunzătoare unor momente continuu distribuite, iar cele două sume corespund la h forţe $\overline{F}_i$ concentrate în $x = a_i$ şi k momente $\overline{M}_j$ concentrate în $x = b_j$. Natural, în situaţia în care lipsesc unele dintre solicitări, termenii corespunzători sînt nuli.

Calculele sînt mult simplificate în acest fel, fiind în acelaşi timp şi generalizate. Nu mai este necesară abordarea problemei pe porţiuni.

Fie, de exemplu, o grindă simplu rezemată, acţionată de h forţe concentrate la $x = a_i$ şi k momente concentrate la $x = b_j$;
atunci

$$\overline{p}(x) = \sum_{i=1}^{h} \overline{F}_i \delta(x - a_i) + \sum_{j=1}^{k} \overline{M}_j\, \delta'(x - b_j). \tag{50}$$

Reacţiunea din reazemul A normală pe grindă este

$$\overline{N}_A = \frac{1}{l} \int_0^l (l - x)\, \overline{p}(x)\, dx, \tag{51}$$

presupunînd $\overline{F}_i$ şi $\overline{M}_j$ vectori normali la axul grinzii, iar momentul încovoietor

$$M_{ix} = N_A x - \int_0^x p(u)\, du, \tag{52}$$

N_A şi p fiind mărimile vectorilor corespunzători normali pe grindă.

Integrala distribuţională (52) duce imediat la

$$M_{ix} = N_A x - \sum_{i=1}^{h} F_i(x - a_i)\, H(x - a_i) - \sum_{j=1}^{k} \overline{M}_j H(x - b_j). \tag{53}$$

Dacă se caută fibra medie deformată, cu E modulul de elasticitate și I momentul de inerție al secțiunii, prin două integrări succesive în sensul teoriei distribuțiilor se obține ecuația acesteia:

$$y = \frac{1}{EI}\left[N_A \frac{x^3}{6} - \sum_{i=1}^{h} F_i \frac{(x-a_i)^3}{6} H(x-a_i) - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{k} M_j \frac{(b_j - x)^2}{2} H(x-b_j)\right] + C_1 x + C_2, \tag{54}$$

constantele arbitrare C_1 și C_2 determinîndu-se imediat din condițiile de rezemare.

Deci, în loc să se trateze fenomenul pe $h + k$ porțiuni, s-a tratat simultan pe întregul domeniu, fiind necesară determinarea doar a două constante în loc de $2(h + k)$. Ținînd seama de (44), care dă variația funcției Heaviside, identitatea dintre rezultatele obținute facil mai sus și cele cunoscute prin alte procedee este ușor de stabilit.

Acest exemplu simplu, precum și multe alte calcule de acest gen, reliefează eficacitatea metodei prezentate.

3. FUNCȚIILE APROAPE DISTRIBUȚIONALE ȘI UNELE APLICAȚII ALE LOR

Fie

$$y = f(t, \lambda) \tag{55}$$

o funcție continuă și derivabilă (eventual chiar indefinit derivabilă), îndeplinind toate condițiile pentru ca

$$\lim_{\lambda \to 0} f(t, \lambda) = \delta(t - \tau), \tag{56}$$

unde $\delta(t - \tau)$ este distribuția lui Dirac, iar λ un parametru.

Rezultă că, dacă

$$\frac{df}{dt} = g(t, \lambda) \tag{57}$$

atunci

$$\lim_{\lambda \to 0} g(t, \lambda) = \delta'(t - \tau). \tag{58}$$

Pentru a se fixa ideile, se consideră din mulțimea tuturor funcțiilor (55) submulțimea celor definite pe axa reală R.

Este evident însă că toate cele ce vor urma se pot extinde imediat și asupra celorlalte funcții de tip (55), definite pe un domeniu oarecare $D \subset R$.

După cum se știe, relația (56) implică egalitatea

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda) dt \right| = 1 \text{ pentru orice } \lambda, \tag{59}$$

şi

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \lambda)\, dt\right| \leqslant 1 \text{ pentru orice } \alpha, \beta, \lambda. \tag{60}$$

Se adoptă notaţia

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \lambda)\, dt\right| = S, \tag{61}$$

luîndu-se α şi β astfel încît $\tau \in (\alpha, \beta)$.

În aceste condiţii, funcţia

$$S = S(\lambda) \tag{62}$$

este o funcţie descrescătoare pentru $\lambda \in (0,\infty)$ şi crescătoare pentru $\lambda \in (-\infty, 0)$.

Într-adevăr, pe de o parte, (60) şi (61) dau

$$S(\lambda) \leqslant 1 \tag{63}$$

pentru orice λ, iar pe de altă parte, ţinînd seama de o altă condiţie pe care o presupune (56), şi anume

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, \lambda)\, dt = \begin{cases} 1 \text{ pentru } \tau \in (\alpha, \beta), \\ 0 \text{ pentru } \tau \notin (\alpha, \beta), \end{cases} \tag{64}$$

rezultă imediat

$$\lim_{\lambda \to 0} S(\lambda) = 1, \text{ dacă } \tau \in (\alpha, \beta). \tag{65}$$

S-au presupus, fără a se restrînge generalitatea, funcţiile $f(t, \lambda)$ pozitive peste tot.

Evident că în structura funcţiei $S(\lambda)$ un rol important îl joacă numerele α şi β.

Cu $\varepsilon_1 > 0$ şi $\varepsilon_2 > 0$ se va admite că

$$\alpha = \tau - \varepsilon_1 \tag{66}$$

şi

$$\beta = \tau + \varepsilon_2, \tag{67}$$

putînd exista şi situaţia particulară în care $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Luînd

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \mu, \tag{68}$$

funcţia $y = f(t, \lambda)$ se numeşte funcţie aproape distribuţională dacă

$$\int_{\tau-\varepsilon_1}^{\tau+\varepsilon_2} f(t, \lambda)\, dt = 1 \tag{69}$$

pentru orice

$$|\lambda| < \nu, \tag{70}$$

unde ν este un număr pozitiv care depinde de μ, descrescînd o dată cu acesta.

Altfel exprimat, $y = f(t, \lambda)$ este o funcție aproape distribuțională dacă în condițiile existenței relației (68) se găsește un număr ν pozitiv dependent de μ, astfel încît, considerînd dependența $\nu = \nu(\mu)$ în cadrul acesteia,

$$\nu_1 = \nu(\mu_1) \tag{71}$$

și

$$\nu_2 = \nu(\mu_2), \tag{72}$$

$\mu_1 > \mu_2$ să implice $\nu_1 > \nu_2$ pentru orice μ_1 și μ_2, iar $\mu \to 0$ să antreneze $\nu \to 0$ concomitent cu

$$S(\lambda) = 1 \tag{73}$$

în ipoteza că λ satisface inegalitatea (70).

Ambele forme de definire ale funcțiilor aproape distribuționale, în fond identice, sugerează, printre altele, următoarea interpretare fizică. În timp ce pentru o masă egală cu unitatea concentrată în punctul $t = \tau$ situat pe axa reală *ot* densitatea liniară este $\delta(t - \tau)$ pentru o masă de asemenea egală cu unitatea, dar repartizată după o lege de variație continuă într-o vecinătate $(\tau - \varepsilon_1, \tau + \varepsilon_2)$ a lui $t = \tau$, care reprezintă și punctul de maximă concentrație, densitatea liniară pe axa reală este o funcție aproape distribuțională.

Aceste funcții pot juca în numeroase aplicații fizice rolul distribuției lui Dirac, cu deosebirea, uneori foarte utilă, că ele rămîn încă funcții, supunîndu-se tuturor legilor analizei matematice clasice. În plus, ele pot apropia calculul matematic de fenomenul real. Astfel, de pildă, pentru un μ suficient de mic, o forță percutantă se reprezintă mai apropiat de realitatea fizică prin relația

$$\overline{F} = \overline{P} f(t, \lambda), \tag{74}$$

unde $\overline{P}$ este percuția, μ durata de percuție, iar $|\lambda| < \nu$, decît

$$\overline{F} = \overline{P}\delta(t - \tau), \tag{75}$$

care presupune șocul ideal. În (74) și (75), t este timpul.

Într-adevăr, funcția aproape distribuțională fiind întotdeauna o funcție care îndeplinește condiția

$$\lim_{\lambda \to 0} f(t, \lambda) = \delta(t - \tau), \tag{76}$$

rezultă în conformitate cu cele de mai sus că

$$\overline{P}\int_{\tau-\varepsilon_1}^{\tau+\varepsilon_2} f(t,\ \lambda)\ \mathrm{d}t = \overline{P} \tag{77}$$

dacă $|\lambda|<\nu$ şi $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \mu$, acesta fiind, după cum s-a precizat, chiar timpul de percuţie, totodată

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t,\ \lambda)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} k\overline{P} \text{ pentru } (\alpha,\ \beta)\cap(\tau-\varepsilon_1,\ \tau+\varepsilon_2) \neq \Phi, \\ 0 \text{ pentru } (\alpha,\ \beta)\cap(\tau-\varepsilon_1,\ \tau+\varepsilon_2) = \Phi, \end{cases} \tag{78}$$

Φ fiind mulţimea vidă, valoarea coeficientului scalar k depinzînd de intersecţia domeniilor (α, β) şi $(\tau-\varepsilon_1,\ \tau+\varepsilon_2)$. Cînd $(\alpha, \beta)\cap(\tau-\varepsilon_1,\ \tau+\varepsilon_2) = (\tau-\varepsilon_1,\ \tau+\varepsilon_2)$, atunci $k = 1$, atinge valoarea maximă posibilă.

Se vede imediat că această reprezentare este mai apropiată de fenomenul fizic, pentru că percuţiile presupun un timp de interacţiune mic, dar nonul, percuţia instantanee fiind o idealizare matematică.

Unul dintre marile avantaje ale acestui mod de a lucra îl constituie posibilitatea extinderii teoremei energiei cinetice pentru sistemele materiale percutate. Astfel, după cum se ştie, nu are nici un sens produsul $\omega(t)\delta(t-\tau)$ dacă funcţia $\omega(t)$ nu este continuă în punctul $t = \tau$.

În consecinţă, nu poate fi multiplicată funcţia lui Heaviside cu distribuţia lui Dirac de acelaşi argument. Acest fapt creează dificultăţi în exprimarea lucrului mecanic al forţelor percutante. Dacă însă se adoptă metoda funcţiilor aproape distribuţionale, acestea fiind funcţii clasice (negeneralizate), produsele au sens bine determinat.

Cu $f\ (t,\ \lambda)$ o funcţie aproape distribuţională (care deci îndeplineşte toate condiţiile cunoscute) se va nota $\varphi(t,\ \lambda)$ funcţia care îndeplineşte la rîndul ei condiţia

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = f(t,\ \lambda). \tag{79}$$

Fie acum un sistem material format din n puncte M_s de mase m_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Fiecare punct al sistemului suferă de o percuţie (rezultantă a percuţiilor exterioare (date şi de legătură) şi interioare, $\overline{P}_s$, deci acţiunea unei forţe percutante:

$$\overline{E}_s = \overline{P}_s f_s(t,\ \lambda), \tag{80}$$

cu notaţiile evidente.

Datorită percuţiilor, vitezele vor varia după legea

$$\overline{V}_s = \overline{V}_{0s} + \varphi_s(t,\ \lambda)\frac{\overline{P}_s}{m_s}, \tag{81}$$

$\overline{V}_{0s}$ fiind vitezele anterioare aplicării percuţiilor $\overline{P}_s$, iar lucrul mecanic elementar este

$$\delta L = \sum_{s=1}^{n} \overline{F}_s\ \mathrm{d}\overline{r}_s, \tag{82}$$

unde $d\bar{r}_s$ sînt variațiile elementare ale vectorilor de poziție ai punctelor M_s, sau

$$dL = \sum_{s=1}^{n} \overline{P}_s f(t, \lambda)\left[\overline{V}_{0s} + \varphi_s(t, \lambda)\frac{\overline{P}_s}{m_s}\right]dt. \tag{83}$$

Expresia (83) se poate integra pe intervalul

$$(t_1, t_2) = \bigcup_{s=1}^{n} (\tau_s - \varepsilon_{1s}, \tau_s + \varepsilon_{2s}), \tag{84}$$

care reprezintă reuniunea tuturor intervalelor de percuție ale punctelor constituente ale sistemului material studiat.

Dacă alături de forțele percutante acționează și forțe continue, vectorii $\overline{V}_{0s}$ sînt variabili. În caz contrar, ei sînt constanți. Saltul de viteză provocat de percuția $\overline{P}_s$ aplicată masei m_s este $\frac{P_s}{m_s}$, după cum rezultă și din (78) asociată cu (79) și (80).

Cu (t_1, t_2) suficient de mic, $\overline{V}_{0s}$, se pot asimila în orice situație cu niște constante vectoriale. Atunci, potrivit cu (79), integrarea dă

$$L_{1,2} = \sum_{s=1}^{n}\left\{\overline{P}_s\overline{V}_{0s}\varphi(t, \lambda) + \frac{p_s^2}{2m_s}[\varphi_s(t, \lambda)]^2\right\}\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{85}$$

și pentru că

$$(\tau_s - \varepsilon_{1s}, \tau_s + \varepsilon_{2s}) \subset (t_1, t_2) \tag{86}$$

relațiile (78) și (79) dau

$$L_{1,2} = \sum_{s=1}^{n}\left[\overline{P}_s\overline{V}_{0s} + \frac{P_s^2}{2m_s}\right], \tag{87}$$

egalitate prin care lucrul mecanic de percuție devine cunoscut și care conduce la posibilitatea extinderii teoremei energiei cinetice pentru cazul în care acționează forțe percutante.

Într-adevăr, vitezele după percuții fiind

$$\overline{V}_s = \overline{V}_{0s} + \frac{\overline{P}_s}{m_s}, \tag{88}$$

ceea ce este bine cunoscut, energia cinetică corespunzătoare este

$$E_2 = \sum_{s=1}^{n}\frac{m_s}{2}\left(\overline{V}_{0s} + \frac{\overline{P}_s}{m_s}\right)^2, \tag{89}$$

iar energia cinetică înainte de percuții

$$E_1 = \sum_{s=1}^{n}\frac{m_s}{2}V_{0s}^2. \tag{90}$$

Deci variația de energie cinetică va fi

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \sum_{s=1}^{n} \left[\overline{P}_s \overline{V}_{0s} + \frac{P_s^2}{2m_s} \right] \tag{91}$$

adică, conform cu (87), rezultă imediat

$$\Delta E = E_2 - E_1 = L_{1,2}, \tag{92}$$

care nu reprezintă altceva decît teorema energiei cinetice pentru cazul forțelor percutante.

Interesant de observat este că în cazul aplicării bruște a unei legături există cunoscuta relație

$$\overline{P}_s \cdot \left(\overline{V}_{0s} + \frac{\overline{P}_s}{m_s} \right) = 0, \tag{93}$$

datorită ortogonalității vectorilor-percuții și viteze finale (adică viteze după aplicarea bruscă a legăturii, aplicare care echivalează cu o percuție).

Dar din (93) se poate imediat extrage

$$\overline{P}_s \overline{V}_{0s} = - \frac{P_s^2}{m_s}. \tag{94}$$

Introducînd (94) în (91), se conclude

$$E_1 - E_2 = \sum_{s=1}^{n} \frac{P_s^2}{2m_s} \tag{95}$$

sau, notînd saltul de viteză cu $\Delta \overline{V}_s$,

$$\Delta \overline{V}_s = \frac{\overline{P}_s}{m_s}, \tag{96}$$

se poate scrie

$$E_1 - E_2 = \sum_{s=1}^{n} \frac{m_s}{2} (\Delta \overline{V}_s)^2, \tag{97}$$

adică s-a obținut tocmai teorema lui Carnot ca un caz pur particular.

Maniera de lucru expusă mai sus este mai riguroasă dacă se apelează (așa cum s-a și procedat) la funcțiile aproape distribuționale decît dacă s-ar fi utilizat distribuția lui Dirac și funcția lui Heaviside, deoarece produsul dintre acestea două nu are sens, după cum de altfel s-a mai arătat.

Concluzia este că această categorie de funcții (aproape distribuționale) au permis generalizarea unor cunoscute teoreme.

În ceea ce privește studiul mișcării, funcțiile aproape distribuționale se pot introduce imediat, fără a fi necesară pentru aceasta o demonstrație specială.

Astfel, forțele percutante se pot exprima, după cum s-a văzut prin astfel de funcții, iar în ceea ce privește eventuala existență a discontinuităților în variația masei, acestea se pot considera la fel, rezultatul unei idea-

lizări matematice. În realitate se aproximează mult mai corect fenomenul dacă se admite legea

$$m_s(t) = m_{0s}(t) + \sum_{j=1}^{k_s} \varphi_{sj}(t, \lambda)\mu_{sj}, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{98}$$

pentru variațiile cu timpul ale maselor m_s, ale punctelor M_s, care constituie un sistem material de n puncte ; m_{0s} sînt funcții continue, μ_{sj} constante, iar

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = f_s(t, \lambda), \tag{99}$$

cu $f_s(t, \lambda)$ o funcție aproape distribuțională pentru orice $s = 1, 2, \ldots, n$. Justificarea este imediată.

Consecința constă în faptul că ecuațiile de mișcare conținînd distribuția lui Dirac, de exemplu (37), (39) sau (40), rămîn nemodificate, cu deosebirea că în locul distribuțiilor $\delta(t - \tau)$ apar funcțiile aproape distribuționale $f(t, \lambda)$, domeniile pe care acestea sînt nenule fiind în jurul valorilor τ ale variabilei t.

Dar studiul funcțiilor aproape distribuționale și principalele lor aplicații se vor aprofunda și amplifica într-o lucrare viitoare, al cărui schelet va fi constituit din sumarele considerații prezentate aici.

Sînt însă ușor de întrevăzut, chiar din această fază incipientă, avantajul și eficacitatea aduse de această manieră de a trata unele fenomene. Afirmația nu tinde la diminuarea importanței metodei funcțiilor generalizate. În cele ce urmează se va face o paralelă între cele două procedee de tratare a mișcărilor discontinue, subliniindu-se esențialele asemănări și deosebiri.

4. METODA UTILIZĂRII DISTRIBUȚIILOR COMPARATĂ CU CEA A FOLOSIRII FUNCȚIILOR APROAPE DISTRIBUȚIONALE

Introducerea distribuției lui Dirac în studiul fenomenelor care implică variații discontinue sau acțiuni concentrate conduce, în general, la realizarea unei metode elegante și eficace care oferă cunoașterea variației tuturor parametrilor care intervin aproape peste tot, adică la orice moment dat, cu excepția unei mulțimi de măsură nulă de momente (cele în care au loc discontinuitățile) sau în cazul variației în spațiu, se ajunge la cunoașterea variațiilor implicate de asemenea aproape peste tot, cu excepția unei mulțimi de măsură nulă de puncte (cele în care au loc acțiunile concentrate).

Pentru a se putea ajunge la prezența în relații a distribuției lui Dirac și a funcției lui Heaviside, este însă obligatorie idealizarea matematică a percuțiilor, discontinuităților strict instantanee sau a acțiunilor concentrate în puncte (sau linii) geometrice (nu în vecinătăți, oricît de mici, ale

acestora). Acest fapt, de cele mai multe ori, nu este deranjant, ci, dimpotrivă, creează posibilitatea unei tratări generale și eficiente, după cum s-a văzut.

Dar metoda are anumite limite. De exemplu, definirea și calculul lucrului mecanic al forțelor percutante conduc la produse între funcții Heviside și distribuții Dirac care nu au sens.

Introducerea funcțiilor aproape distribuționale, definite ca mai sus, elimină aceste neajunsuri, ele fiind funcții propriu-zis, și astfel, datorită continuității lor (pot fi indefinit derivabile fără ca prin aceasta generalitatea să sufere), operațiile efectuate asupra lor, oricare ar fi aceste operații, nu sînt în general lipsite de sens.

Exprimarea lucrului mecanic și generalizarea teoremei enegiei cinetice pentru cazul forțelor percutante au fost posibile numai pe această cale. În schimb, metoda funcțiilor aproape distribuționale duce la cunoașterea fenomenului, cu excepția unei mulțimi de momente sau de puncte care nu este însă o mulțime de măsură nulă. Acesta este un dezavantaj, imponderabil dacă măsura mulțimii momentelor sau a punctelor în care fenomenul studiat rămîne necunoscut este neglijabilă în raport cu restul mărimilor similare care intervin.

De pildă, în cazul unei ciocniri cu $(\tau - \varepsilon_1,\ \tau + \varepsilon_2)$ intervalul de interacțiune, în interiorul acestui interval, nu se poate considera cunoscută mișcarea, acest fapt rămînînd însă nesupărător, ε_1 și ε_2 fiind extrem de mici.

Important de remarcat este însă faptul că pe ambele căi forțele percutante au o natură potențială. Într-adevăr,

$$\overline{F} = \overline{P}\delta(t - \tau) = \text{grad}\ [P_x x + P_y y + P_z z]\,\delta(t - \tau) \tag{100}$$

și

$$\overline{F} = \overline{P} f(t,\ \lambda) = \text{grad}\ [P_x x + P_y y + P_z z] f(t,\ \lambda), \tag{101}$$

P_x, P_y, P_z fiind componentele vectorului-percuție $\overline{P}$, iar x, y și z coordonatele curente într-un sistem cartesian.

În concluzie, cele două metode de calcul (cea a distribuțiilor și cea a funcțiilor aproape distribuționale) sînt similare, dar nu cu totul identice, prima presupunînd o idealizare matematică, a doua renunțînd la această idealizare, ambele prezentînd avantaje și dezavantaje, în parte expuse aici, și tot ambele fiind extrem de utile în studiul mișcărilor discontinue sau al acțiunilor concentrate.

În fond, la limită ($\lambda \to 0$), metoda funcțiilor aproape distribuționale revine la metoda distribuțiilor. Se poate utiliza, în funcție de fenomenul abordat, fie una, fie cealaltă. Aprofundate și extinse (eventual și unificate, ceea ce este posibil datorită extremei lor înrudiri), ele formează un instrument matematic de maximă utilitate în studiul unei largi diversități de probleme tehnice sau de cercetare a naturii.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Bouix M., *Les functions generalisées on distributions*, Paris, Masson, 1964.
2. Kecs W., *Asupra unor aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanica teoretică și aplicată*, St. cerc. mat., *15* (1964).
3. Schwartz Laurent, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Paris, Hermann, 1961.
4. Togaci Emil, *Asupra ecuațiilor mecanicii analitice pentru cazul sistemelor materiale percutate*, St. cerc. mat., *8* (1966).
5. — *Ecuațiile lui Lagrange pentru sistemele materiale de masă discontinuu variabilă*, Analele Univ. București, seria Șt. nat., *2* (1966).
6. — *Contribuții la studiul sistemelor materiale percutante*, Bul. Ist. polit. Iași, *3—4* (1965).

STUDIUL ECHILIBRAJULUI MOTOARELOR ÎN LINIE CU AJUTORUL PROGRAMĂRII LINIARE

de GEORGE BĂRĂNESCU
Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
DINU TARAZA
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

În lucrare se prezintă o metodă de rezolvare a problemelor de echilibraj a momentelor forţelor de inerţie la motoarele policilindrice în linie cu ajutorul programării liniare. Metoda prezintă avantajul unei reduceri apreciabile a volumului de calcul în special la motoarele cu număr mare de cilindri.

1. INTRODUCERE

Una dintre metodele care permit îmbunătăţirea echilibrajului momentelor forţelor de inerţie la motoarele cu ardere internă este plasarea cilindrilor consecutivi la distanţe diferite. Deoarece această metodă antrenează creşterea lungimii arborelui cotit, deci şi a lungimii motorului, aplicarea ei este indicată în cazurile în care echilibrarea unor momente ale forţelor de inerţie nu poate fi realizată numai prin dispunerea convenabilă a manivelelor în jurul arborelui cotit, de pildă la motoarele cu număr impar de cilindri.

Datorită convergenţei puternice a seriei Fourier a momentelor forţelor de inerţie, este suficient să se echilibreze numai primele două sau trei momente, echilibrajul astfel obţinut fiind cu totul satisfăcător, fără creşterea prea mare a lungimii arborelui cotit.

Principial pot fi modificate toate distanţele dintre cilindrii consecutivi. La motoarele cu mulţi cilindri, numărul variabilelor este mai mare decît numărul condiţiilor ce trebuie îndeplinite pentru echilibrarea primelor două sau trei momente şi, în consecinţă, problema pusă este nedeterminată, gradul de nedeterminare fiind cu atît mai mare cu cît numărul de cilindri este mai mare. Găsirea soluţiei optime, adică a soluţiei pentru care lungi-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 1, 1970 P. 47–61

mea arborelui cotit este minimă, se poate face cu ajutorul programării liniare. Formularea problemei şi rezolvarea ei prin această metodă fac obiectul prezentei lucrări.

2. PRECIZAREA PROBLEMEI

Fie un motor în linie cu i cilindri. Se cere să se determine distanţele la care trebuie plasaţi cilindrii consecutivi pentru echilibrarea momentelor primelor p armonici; dintre toate soluţiile care satisfac această condiţie se caută soluţia pentru care lungimea arborelui cotit este minimă. Problema

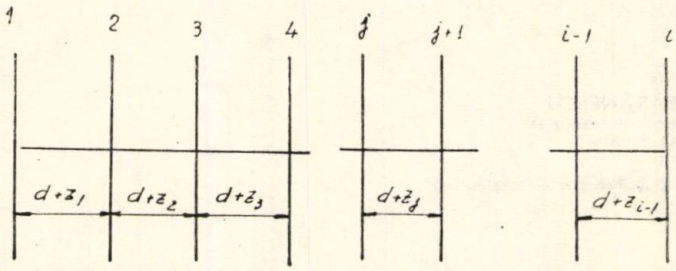


Fig. 1. — Plasarea planurilor de mişcare a manivelelor în lungul arborelui cotit.

este analizată în continuare pentru motoarele cu aprinderi uniform repartizate, la care se realizează variaţii minime ale momentului motor şi un bun echilibraj al forţelor de inerţie.

Pentru exprimarea matematică a acestei probleme se alege un sistem de coordonate $Oxyz$ cu originea în planul de mişcare al manivelei 1[1], axa Ox fiind paralelă cu axele cilindrilor, iar axa Oz confundîndu-se cu axa arborelui cotit. Se notează cu z_j diferenţa dintre distanţele ce separă planele în care se mişcă manivelele j şi $j+1$ şi cu d distanţa minimă dintre doi cilindri consecutivi (fig. 1).

Fie F_p vectorul care interpretează armonica de ordinul p a forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie şi α_j unghiul pe care îl face cu direcţia Ox vectorul F_1 aferent cilindrului j, măsurat în sensul de rotaţie al arborelui cotit. Conform interpretării vectoriale menţionate, vectorul F_p aferent cilindrului j va face în acelaşi moment de timp cu direcţia Ox unghiul $p\alpha_j$, măsurat de asemenea în sensul de rotaţie al arborelui cotit.

Momentele proiecţiilor vectorilor F_p pe planele xOz şi yOz, calculate în raport cu punctul O, au expresiile

$$\begin{aligned} M_{p_x} &= F_p \sum_{j=2}^{j=i} \left[(j-1)\, d + \sum_{h=1}^{h=j-1} Z_h \right] \cos p\alpha_j, \\ M_{p_y} &= F_p \sum_{j=2}^{j=i} \left[(j-1)\, d + \sum_{h=1}^{h=j-1} Z_h \right] \sin p\alpha_j. \end{aligned} \tag{1}$$

[1]) Conform uzanţei, cilindrii sînt numerotaţi consecutiv de la o extremitate la alta a arborelui cotit.

Deoarece echilibrarea momentului vectorilor care interpretează o armonică a forțelor de inerție a maselor cu mișcare de translație antrenează echilibrarea momentului produs de armonica respectivă, condițiile ce trebuie îndeplinite pentru echilibrarea momentului extern al armonicii de ordinul p sînt

$$\sum_{j=2}^{j=i}\left[(j-1)\ d+\sum_{h=1}^{h=j-1} Z_h\right]\cos p\alpha_j = 0,$$
$$\sum_{j=2}^{j=i}\left[(j-1)\ d+\sum_{h=1}^{h=j-1} Z_h\right]\sin p\alpha_j = 0. \tag{2}$$

Ordonînd termenii după necunoscutele $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{i-1}$, se deduce

$$\sum_{e=1}^{e=i-1} Z_e \sum_{j=e+1}^{j=i} \cos p\alpha_j = -\,d\sum_{j=2}^{j=i}(j-1)\cos p\alpha_j,$$
$$\sum_{e=1}^{e=i-1} Z_e \sum_{j=e+1}^{j=i} \sin p\alpha_j = -\,d\sum_{j=2}^{j=i}(j-1)\sin p\alpha_j. \tag{3}$$

Condițiile de echilibrare ale primelor p momente se pot scrie în forma

$$Z_1\sum_{j=2}^{j=i}\cos\alpha_j + Z_2\sum_{j=3}^{j=i}\cos\alpha_j + \ldots + Z_{i-1}\cos\alpha_i = -\,d\sum_{j=2}^{j=i}(j-1)\cos\alpha_j,$$
$$Z_1\sum_{j=2}^{j=i}\sin\alpha_j + Z_2\sum_{j=3}^{j=i}\sin\alpha_j + \ldots + Z_{i-1}\sin\alpha_i = -\,d\sum_{j=2}^{j=i}(j-1)\sin\alpha_j,$$
$$Z_1\sum_{j=2}^{j=i}\cos 2\alpha_j + Z_2\sum_{j=3}^{j=i}\cos 2\alpha_j + \ldots + Z_{i-1}\cos 2\alpha_i = -\,d\sum_{j=2}^{j=i}(j-1)\cos 2\alpha_j,$$
$$Z_1\sum_{j=2}^{j=i}\sin 2\alpha_j + Z_2\sum_{j=3}^{j=i}\sin 2\alpha_j + \ldots + Z_{i-1}\sin 2\alpha_i = -\,d\sum_{j=2}^{j=i}(j-1)\sin 2\alpha_j, \tag{4}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$Z_1\sum_{j=2}^{j=i}\cos p\alpha_j + Z_2\sum_{j=3}^{j=i}\cos p\alpha_j + \ldots + Z_{i-1}\cos p\alpha_i = -\,d\sum_{j=2}^{j=i}(j-1)\cos p\alpha_j,$$
$$Z_1\sum_{j=2}^{j=i}\sin p\alpha_j + Z_2\sum_{j=3}^{j=i}\sin p\alpha_j + \ldots + Z_{i-1}\sin p\alpha_i = -\,d\sum_{j=2}^{j=i}(j-1)\sin p\alpha_j.$$

Se observă că aceste condiții sînt exprimate de un sistem de $2p$ ecuații liniare cu $i-1$ necunoscute, unde $2p \leqslant i-1$.

Dacă pentru vectorii-coloană din sistemul (4) se folosesc notaţiile

$$a_1 = \begin{Vmatrix} \sum_{j=2}^{j=i} \cos \alpha_j \\ \sum_{j=2}^{j=i} \sin \alpha_j \\ \sum_{j=2}^{j=i} \cos 2\alpha_j \\ \sum_{j=2}^{j=i} \sin 2\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=2}^{j=i} \cos p\alpha_j \\ \sum_{j=2}^{j=i} \sin p\alpha_j \end{Vmatrix}, a_2 = \begin{Vmatrix} \sum_{j=3}^{j=i} \cos \alpha_j \\ \sum_{j=3}^{j=i} \sin \alpha_j \\ \sum_{j=3}^{j=i} \cos 2\alpha_j \\ \sum_{j=3}^{j=i} \sin 2\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=3}^{j=i} \cos p\alpha_j \\ \sum_{j=3}^{j=i} \sin p\alpha_j \end{Vmatrix}, \ldots a_{i-1} = \begin{Vmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \\ \cos 2\alpha_i \\ \sin 2\alpha_i \\ \vdots \\ \cos p\alpha_i \\ \sin p\alpha_i \end{Vmatrix}, \mathrm{b} = \begin{Vmatrix} -d \sum_{j=2}^{j=i} (j-1) \cos \alpha_j \\ -d \sum_{j=2}^{j=i} (j-1) \sin \alpha_j \\ -d \sum_{j=2}^{j=i} (j-1) \cos 2\alpha_j \\ -d \sum_{j=}^{j=i} (j-1) \sin 2\alpha_j \\ \vdots \\ -d \sum_{j=2}^{j=i} (j-1) \cos p\alpha_j \\ -d \sum_{j=2}^{j=i} (j-1) \sin p\alpha_j \end{Vmatrix} \quad (5$$

sistemul ia forma vectorială

$$z_1 a_1 + z_2 a_2 + \ldots + z_{i-1}\, a_{i-1} = b. \qquad (6)$$

Dintre soluţiile posibile ale acestui sistem se caută soluţia pentru care lungimea arborelui cotit şi deci a motorului are o valoare minimă. Matematic această condiţie este exprimată de funcţia

$$f = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{i-1} = \min, \qquad (7)$$

denumită în continuare funcţie de eficienţă.

Întrucît distanţa dintre cilindrii consecutivi este cel puţin d, relaţiile de mai sus sînt supuse restricţiilor

$$z_1 \geqslant 0,\ z_2 \geqslant 0,\ \ldots z_{i-1} \geqslant 0.$$

3. REZOLVAREA PROBLEMEI CU AJUTORUL METODEI SIMPLEX

Sistemul (4), format din $2p$ ecuaţii cu $i - 1$ necunoscute, poate fi transformat într-un sistem de $2p$ ecuaţii cu $2p$ necunoscute prin atribuirea valorii nule unui număr de $i - 1 - 2p$ variabile. Alegerea acestor necunoscute fiind arbitrară, se poate face într-un număr finit de moduri, şi anume C_{i-1}^{2p}.

Fiecare dintre aceste sisteme admite o soluţie unică dacă determinantul său caracteristic este diferit de zero. O asemenea soluţie reprezintă un punct-vîrf al poliedrului soluţiilor în spaţiul vectorial cu $i - 1$ dimensiuni şi se numeşte soluţie de bază a sistemului.

Cunoscînd o soluţie de bază a sistemului, se cunoaşte implicit şi baza, respectiv ansamblul vectorilor a_1 corespunzători componentelor z_1 strict pozitive ale acestei soluţii.

Metoda simplex precizează criteriile cu ajutorul cărora dintr-o soluţie de bază oarecare se poate obţine o altă soluţie de bază pentru care funcţia de eficienţă are o valoare mai avantajoasă. Se consideră o primă soluţie de bază constituită de vectorul-coloană

$$Z = (z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{2p},\ 0{,}0 \ldots 0),$$

unde $z_1, z_2, \ldots z_{2p}$ sînt numere strict pozitive. Generalitatea raţionamentelor nu este afectată de considerarea soluţiei iniţiale formate din primii $2p$ termeni, întrucît această particularitate nu este folosită în continuare. Ecuaţia vectorială (6) şi funcţia de eficienţă (7) devin pentru această soluţie

$$z_1 a_1 + z_2 a_2 + \ldots + z_{2p}\, a_{2p} = b, \tag{8}$$

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{2p}. \tag{9}$$

Se caută o altă soluţie de bază în care să intre unul dintre vectorii sistemului (6) ce nu face parte din baza $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$, de pildă vectorul a_q. Deoarece o soluţie de bază poate fi alcătuită din cel mult 2_p vectori, rezultă că introducerea în bază a vectorului a_q necesită eliminarea unui vector al bazei.

Vectorul a_q poate fi exprimat ca o combinaţie liniară a vectorilor de bază

$$z_{1q} a_1 + z_{2q} a_2 + \ldots + z_{kq} a_k + \ldots + z_{2p.q} a_{2p} = a_q \tag{10}$$

unde scalarii $z_{1q}, z_{2q} \ldots, z_{2p.q}$ sînt coordonatele vectorului a_q în baza a_1, $a_2, \ldots a_{2p}$. Înmulţind relaţia (10) cu numărul pozitiv w şi scăzînd din (8), se obţine

$$(z_1 - wz_{1q}) a_1 + (z_2 - wz_{2q})\, a_2 + \ldots + (z_{2p} - wz_{2p.q})\, a_{2p} = b. \tag{11}$$

Din comparaţia relaţiei (11) cu relaţia (8) se observă că vectorul

$$Z_1 = (z_1 - wz_{1q},\ z_2 - wz_{2q} \ldots z_{2p} - wz_{2p.q},\ w)$$

poate fi o soluţie în cazul în care componentele sale sînt pozitive, adică

$$z_e - wz_{eq} \geqslant 0 \quad ,\quad e = 1, 2, \ldots, 2p,$$

deci valoarea lui w trebuie să verifice dubla inegalitate

$$0 < w < \min. \frac{z_e}{z_{eq}}, z_{eq} > 0.$$

Întrucît Z_1 conţine $2p + 1$ componente, pentru ca noua soluţie să rămînă soluţie de bază este necesar ca una dintre componentele vectorului Z_1 să devină zero. Această condiţie este îndeplinită dacă se alege pentru w valoarea

$$w_0 = \min. \frac{z_e}{z_{eq}}, \quad z_{eq} > 0, \tag{12}$$

componenta căreia îi aparţine acest minim anulîndu-se. Noua soluţie de bază este deci

$$Z_1 = (z_1 - w_0 z_{1q},\ z_2 - w_0 z_{2q} \dots\ z_{2p} - w_0 z_{2p,q},\ w_0). \tag{13}$$

Cu ajutorul componentelor vectorului a_q se alcătuieşte expresia

$$f_q = z_{1q} + z_{2q} + \dots + z_{2p,q}.$$

Înmulţind această expresie cu w_0 şi scăzînd rezultatul din relaţia (9), se deduce

$$(z_1 - w_0 z_{1q}) + (z_2 - w_0 z_{2q}) + \dots + (z_{2p} - w_0 z_{2p,q}) = f_0 - w_0 f_q,$$

relaţie din care, prin adăugirea lui w_0 în ambele părţi, se obţine

$$(z_1 - w_0 z_{1q}) + (z_2 - w_0 z_{2q}) + \dots + (z_{2p} - w_0 z_{2p,q}) + w_0 = f_0 - w_0(f_q - 1).$$

Se observă că membrul stîng al acestei relaţii reprezintă tocmai valoarea f_1 a funcţiei de eficienţă pentru noua soluţie de bază Z_1. În consecinţă, se poate scrie

$$f_1 = f_0 - w_0(f_q - 1). \tag{14}$$

Întrucît $w_0 > 0$, se constată că în cazul $f_q > 1$ valoarea funcţiei de eficienţă se micşorează, scăderea fiind cu atît mai mare cu cît f_q este mai mare.

În concluzie plecînd de la o soluţie de bază oarecare, se poate obţine o altă soluţie, mai apropiată de cea optimă, prin introducerea în bază a vectorului a_q, pentru care expresia f_q are valoarea supraunitară maximă pozitivă, din bază eliminîndu-se vectorul pentru care raportul z_e/z_{eq}, calculat pentru componentele lui Z_1 strict pozitive, are valoarea minimă.

Pentru efectuarea calculelor este necesar să se cunoască modalitatea de determinare a coordonatelor vectorilor la schimbarea bazei.

Se consideră baza formată din vectorii $a_1,\ a_2,\ \dots, a_k, \dots, a_{2p}$, din care se constituie o nouă bază prin introducerea vectorului a_q şi eliminarea vectorului a_k. Vectorul a_q, nefăcînd parte din baza iniţială, poate fi exprimat ca o combinaţie liniară a vectorilor acestei baze, conform relaţiei (10). Se deduce astfel

$$a_k = \frac{a_0}{z_{kq}} - \frac{z_{1q}}{z_{kq}} a_1 - \frac{z_{2q}}{z_{kq}} a_2 - \dots - \frac{z_{2p,q}}{z_{kq}} a_{2p}. \tag{15}$$

Un vector oarecare a_r al noii baze poate fi de asemenea exprimat ca o combinaţie liniară a vectorilor bazei precedente:

$$a_r = z_{1r} a_1 + z_{2r} a_2 + \dots + z_{kr} a_k + \dots + z_{2p,r} a_{2p}. \tag{16}$$

Înlocuind pe a_k din (15) în (16), se obţine

$$a_r = z_{1r} a_1 + z_{2r} a_2 + \dots + z_{kr}\left(\frac{a_0}{z_{kq}} - \frac{z_{1q}}{z_{kq}} a_1 - \frac{z_{2q}}{z_{kq}} a_2 - \dots - \frac{z_{2p,q}}{z_{kq}} a_{2p}\right) +$$

$$+ \dots + z_{2p,r} a_{2p}$$

sau

$$a_r = \frac{z_{1r}z_{kq} - z_{1q}z_{kr}}{z_{kq}} a_1 + \frac{z_{2r}z_{kq} - z_{2q}z_{kr}}{z_{kq}} a_2 + \cdots + \frac{z_{2p,r}z_{kq} - z_{2pq}z_{kr}}{z_{kq}} a_{2p} +$$

$$+ \frac{z_{kr}}{z_{kq}} a_q .$$

Coordonatele vectorului a_r în noua bază $(a_1, a_2, \ldots, a_{2p}, a_q)$, exprimate în funcţie de coordonatele în baza veche $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots a_{2p})$, sînt

$$z'_{er} = \frac{z_{er}z_{kq} - z_{eq}z_{kr}}{z_{kq}}, \qquad e = 1, 2, \ldots, 2p, \quad e \neq k,$$

şi (17)

$$z'_{kr} = \frac{z_{kr}}{z_{kq}} .$$

În cazul în care nu se dispune de o soluţie de bază a sistemului (4) se poate construi o soluţie de bază iniţială prin introducerea în sistem a $2p$ variabile ajutătoare.

Folosind forma (4), condiţiile funcţionale cu variabile ajutătoare sînt

$$\begin{aligned}
&z_1a_{11} + z_2a_{12} + \cdots + z_{i-1}a_{1,i-1} + z_i &&= b_1,\\
&z_1a_{21} + z_2a_{22} + \cdots + z_{i-1}a_{2,i-1} + z_{i+1} &&= b_2,\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots &&\\
&z_1a_{2p,1} + z_2a_{2p,2} + \cdots + z_{i-1}\ a_{2p,i-1} + z_{i+2p-1} &&= b_{2p}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Pentru ca sistemul astfel obţinut să fie echivalent cu sistemul (4), trebuie îndeplinită condiţia

$$z_i = z_{i+1} = \cdots = z_{i+2p-2} = z_{i\,2p-1} = 0. \tag{19}$$

Dacă aceste variabile iau valori nule în soluţia optimă, funcţia de eficienţă se poate scrie sub forma

$$f = \sum_{j=1}^{j=i-1} z_j + \mu \sum_{j=1}^{j=i+2p-1} z_j , \tag{20}$$

unde μ poate lua o valoare pozitivă oricît de mare; soluţia iniţială a sistemului (18) devine

$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_i, \ldots, z_{i\,2p-1})$$

$$(0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_{2p}).$$

Eliminarea din bază a vectorilor ajutători se face după mecanismul descris anterior. Se consideră o iteraţie intermediară pînă la care au fost eliminaţi din bază $2p - u$ vectori ajutători şi se alcătuieşte expresia f_q pentru vectorul a_q care urmează să intre în bază :

$$f_q = \mu \sum_u a_{eq} + \sum_{2p-u} a_{eq}. \tag{21}$$

În această expresie, prima sumă se referă la componentele vectorului a_q corespunzătoare variabilelor de bază. Se observă că f_q este o funcţie liniară de μ, deci la fiecare vector care poate intra în noua bază va corespunde o dreaptă $f = \varphi(\mu)$. Dacă $\sum_u a_{eq} > 0$, pentru o valoare a lui μ superioară abscisei celei mai mari a punctelor de intersecţie a dreptelor (21) valorile f_q se eşalonează între ele la fel ca pantele $\sum_u a_{eq}$ ale dreptelor. Valoarea maximă a lui f_q corespunde celei mai mari valori a sumei $\sum_u a_{el}$; în consecinţă se va introduce în bază vectorul pentru care această sumă este maximă.

Efectuarea calculelor pentru determinarea soluţiei optime se sistematizează sub formă tabelară (tabela 1). Prima coloană grupează vectorii care formează baza în etapa considerată. Coloana a doua conţine coeficienţii variabilelor de bază din funcţia de eficienţă. În a treia coloană se trec componentele vectorului b (termenii din membrul drept al sistemului 4). A patra coloană conţine valorile raportului dintre componentele vectorului b şi componentele vectorului a_q care urmează să intre în noua bază. În coloanele următoare sînt trecute componentele vectorilor corespunzători variabilelor $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}$ şi variabilelor ajutătoare. O secţiune a tabelei corespunde unei iteraţii. Pe ultima linie a fiecărei secţiuni sînt trecute valorile expresiei $f_q (q = 1, 2, \ldots, i - 1)$.

În prima secţiune se presupune că expresia f_q, corespunzătoare vectorului a_q, are valoarea supraunitară maximă ; vectorul a_q intră în bază, de pildă, în locul vectorului a_2, pentru care valoarea raportului b_2/a_{2q} este minimă.

Soluţia de bază îmbunătăţită este prezentată în secţiunea a doua, unde coordonatele vectorilor în noua bază sînt calculate cu relaţiile (17). Calculele se succedă similar pînă la determinarea soluţiei optime, adică a soluţiei pentru care

$$f_q \leqslant 1 \qquad (q = 1, 2, \ldots i - 1)$$

şi care, în consecinţă, nu mai poate fi îmbunătăţită în continuare.

4. APLICAŢII

Pentru exemplificarea metodei prezentate se tratează cazul mai cuprinzător al motorului cu 11 cilindri în linie.

Se consideră motorul cu 11 cilindri, echipat cu arborele cotit corespunzător stelei manivelelor din figura 2. Dacă aprinderile sînt uniform repartizate şi distanţele dintre cilindri consecutivi sînt egale, această soluţie prezintă cel mai mic moment extern al armonicilor $1 + 2$.

Pentru a determina soluţia de arbore cotit care să conducă la echilibrarea momentelor externe de ordinul unu şi doi, se scriu condiţiile res-

pective conform relațiilor (4):

$$z_1 \sum_{j=2}^{j=11} \cos\alpha_j + z_2 \sum_{j=3}^{j=11} \cos\alpha_j + \cdots + z_{10}\cos\alpha_{11} = -d \sum_{j=2}^{j=11} (j-1)\cos\alpha_j, \quad (22)$$

$$z_1 \sum_{j=2}^{j=11} \sin\alpha_j + z_2 \sum_{j=3}^{j=11} \sin\alpha_j + \cdots + z_{10}\sin\alpha_{11} = -d \sum_{j=2}^{j=11} (j-1)\sin\alpha_j, \quad (23)$$

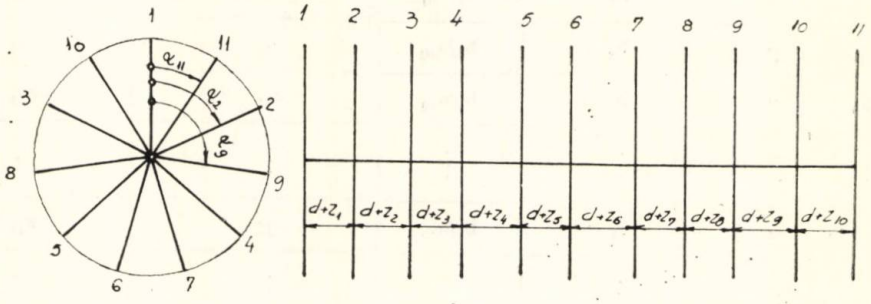


Fig. 2. — Steaua manivelelor adoptată la motorul cu 11 cilindri în linie și aprinderi uniform repartizate pentru care se urmărește echilibrarea momentelor M_1 și M_2.

$$z_1 \sum_{j=2}^{j=11} \cos 2\alpha_j + z_2 \sum_{j=3}^{j=11} \cos 2\alpha_j + \ldots + z_{10}\cos 2\alpha_{11} = -d \sum_{j=2}^{j=11} (j-1)\cos 2\alpha_j, \quad (24)$$

$$z_1 \sum_{j=2}^{j=11} \sin 2\alpha_j + z_2 \sum_{j=3}^{j=11} \sin 2\alpha_j + \ldots + z_{10}\sin 2\alpha_{11} = -d \sum_{j=2}^{j=11} (j-1)\sin 2\alpha_j. \quad (25)$$

Cu notațiile din figura 2, rezultă

α_2	=	65°27′16″,	$\sin\alpha_2$	=	0,90963,	$\cos\alpha_2$	= 0,41542,
α_3	=	294°32′44″,	$\sin\alpha_3$	=	−0,90963,	$\cos\alpha_3$	= 0,41542,
α_4	=	130°54′32″,	$\sin\alpha_4$	=	0,75575,	$\cos\alpha_4$	= −0,65486,
α_5	=	229°05′28″,	$\sin\alpha_5$	=	−0,75575,	$\cos\alpha_5$	= −0,65486,
α_6	=	196°21′50″,	$\sin\alpha_6$	=	−0,28173,	$\cos\alpha_6$	= −0,95950,
α_7	=	163°38′10″,	$\sin\alpha_7$	=	0,28173,	$\cos\alpha_7$	= −0,95950,
α_8	=	261°49′06″,	$\sin\alpha_8$	=	−0,98982,	$\cos\alpha_8$	= −0,14251,
α_9	=	98°10′54″,	$\sin\alpha_9$	=	0,98982,	$\cos\alpha_9$	= −0,14251,
α_{10}	=	327°16′22″,	$\sin\alpha_{10}$	=	−0,54064,	$\cos\alpha_{10}$	= 0,84126,
α_{11}	=	32°43′38″,	$\sin\alpha_{11}$	=	0,54064,	$\cos\alpha_{11}$	= 0,84126,
$2\alpha_2$	=	130°54′32″,	$\sin 2\alpha_2$	=	0,75575,	$\cos 2\alpha_2$	= −0,65486,
$2\alpha_3$	=	589°05′28″,	$\sin 2\alpha_3$	=	−0,75575,	$\cos 2\alpha_3$	= −0,65486,
$2\alpha_4$	=	261°49′04″,	$\sin 2\alpha_4$	=	−0,98982,	$\cos 2\alpha_4$	= −0,14251,
$2\alpha_5$	=	458°10′56″,	$\sin 2\alpha_5$	=	0,98982,	$\cos 2\alpha_5$	= −0,14251,
$2\alpha_6$	=	329°43′40″,	$\sin 2\alpha_6$	=	0,54064,	$\cos 2\alpha_6$	= 0,84126,

Tab

Sistematizarea calculelor l

Baza	c	b	$\frac{b}{a_q}$	a_1	a_2
a_i	μ	b_1	b_1/a_{1q}	a_{11}	a_{12}
$\leftarrow a_{i+1}$	μ	b_2	b_2/a_{2q}	a_{21}	a_{22}
a_{i+2}	μ	b_3	b_3/a_{3q}	a_{31}	a_{32}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i+j-1}	μ	b_j	b_j/a_{jq}	a_{j1}	a_{j2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i+2p-1}	μ	b_{2p}	$b_{2p}/a_{2p,q}$	$a_{2p,1}$	$a_{2p,2}$
$\sum_{e=1}^{e=2p} a_{eq}$		$\sum_{e=1}^{e=2p} b_e$		$\sum_{e=1}^{e=2p} a_{e1}$	$\sum_{e=1}^{e=2p} a_{e2}$
a_i	μ	$b_1^{(1)}=\frac{b_1a_{2q}-b_2a_{12}}{a_{2q}}$	$b_1^{(1)}/a_{12}^{(1)}$	$a_{11}^{(1)}=\frac{a_{11}a_{2q}-a_{21}a_{1q}}{a_{2q}}$	$a_{12}^{(1)}=\frac{a_{12}a_{2q}-a_{22}a_{1q}}{a_{2q}}$
$\rightarrow a_q$	1	$b_2^{(1)}=\frac{b_2}{a_{2q}}$	$b_2^{(1)}/a_{22}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}=\frac{a_{21}}{a_{2q}}$	$a_{22}^{(1)}=\frac{a_{22}}{a_{2q}}$
a_{i+2}	μ	$b_3^{(1)}=\frac{b_3a_{2q}-b_2a_{3q}}{a_{2q}}$	$b_2^{(1)}/a_{32}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}=\frac{a_{31}a_{2q}-a_{21}a_{3q}}{a_{2q}}$	$a_{32}^{(1)}=\frac{a_{32}a_{2q}-a_{22}a_{3q}}{a_{2q}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i+j-1}	μ	$b_j^{(1)}=\frac{b_ja_{2q}-b_2a_{jq}}{a_{2q}}$	$b_j^{(1)}/a_{j2}^{(1)}$	$a_{j1}^{(1)}=\frac{a_{j1}a_{2q}-a_{21}a_{jq}}{a_{2q}}$	$a_{j2}^{(1)}=\frac{a_{j2}a_{2q}-a_{22}a_{jq}}{a_{2q}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i+2p-1}	μ	$b_{2p}^{(1)}=\frac{b_{2p}a_{2q}-b_2a_{2p,q}}{a_{2q}}$	$b_{2p}^{(1)}/a_{2p,2}^{(1)}$	$a_{2p,1}^{(1)}=\frac{a_{2p,}a_{2q}-a_{21}a_{2p,q}}{a_{2q}}$	$a_{2p,2}^{(1)}=\frac{a_{2p,2}a_{2q}-a_{22}a_{2}}{a_{2q}}$
$\sum_{\substack{e=1\\e\neq 2}}^{e=2\ p} a_{eq}$		$\sum_{e=1}^{e=2p} b_e^{(1)}$		$\sum_{\substack{e=1\\e\neq 2}}^{e=2p} a_e^{(1)}$	$\sum_{\substack{e=1\\e\neq a}}^{e=2p} a_{e_1}^{(1)}$

1

icarea metodei Simplex

—	a_q	— —	a_{j-1}	a_j	a_{j+1}	a_{j+2}	— — —	a_{j+2p-1}
—	a_{1q}	— —	$a_{1,j-1}$	1	0	0	— —	0
—	a_{2q}	— —	$a_{2,j-1}$	0	1	0	— —	0
—	a_{3q}	— —	$a_{3,j-1}$	0	0	1	— —	0
—	⋮	— —	⋮	⋮	⋮	⋮	— —	⋮
—	a_{jq}	— —	$a_{j,j-1}$	0	0	0	— —	0
—	⋮	— —	⋮	⋮	⋮	⋮	— —	⋮
—	$a_{2p,q}$	— —	$a_{2p,j-1}$	0	0	0	— —	1
—	$\sum_{e=1}^{e=2p} a_{eq}$	— —	$\sum_{e=1}^{e=2p} a_{e,j-1}$					
—	0	— —	$a^{(1)}_{1,j-1} = \frac{a_{2q}a_{1,j-1} - a_{1q}a_{2,j-1}}{a_{2q}}$	1	0	0	— —	0
—	1	— —	$a^{(1)}_{2,j-1} = \frac{a_{2,j-1}}{a_{2q}}$	0	1	0	— —	0
—	0	— —	$a^{(1)}_{3,j-1} = \frac{a_{2q}a_{3,j-1} - a_{3q}a_{2,j-1}}{a_{2q}}$	0	0	1	— —	0
—	⋮	— —	⋮	⋮	⋮	⋮	— —	⋮
—	0	— —	$a^{(1)}_{j,j-1} = \frac{a_{2q}a_{j,j-1} - a_{jq}a_{2,j-1}}{a_{2q}}$	0	0	0	— —	0
—	⋮	— —	⋮	⋮	⋮	⋮	— —	⋮
—	0	— —	$a^{(1)}_{2p,j-1} = \frac{a_{2q}a_{2p,j-1} - a_{2p,q}a_{2,j-1}}{a_{2q}}$	0	0	0	— —	1
—	1	— —	$\sum_{\substack{e=1 \\ e\neq 2}}^{e=2p} a^{(1)}_{e,j-1}$					

Tabela 2

Determinarea soluției optime de arbore cotit care asigură echilibrarea momentelor M_1 și M_2 la motorul cu 11 cilindri în linie

Baza	c	b	$\frac{b}{a_q}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
$\leftarrow a_{11}$	μ	0,0430d	0,0255d	−1	−1,4154	−1,8308	−1,1760	−0,5211	0,4384	1,3980	1,5402	1,6825	0,8413	1	0	0	0
a_{12}	μ	0,1465d		0	−0,9096	0	0,7557	0	−0,2817	0	−0,9898	0	−0,5406	0	1	0	0
a_{13}	μ	0,2073d	0,2526d	−1	−0,3451	0,3097	0,4521	0,5944	−0,2570	−1,0982	−0,1387	0,8208	0,4154	0	0	1	0
a_{14}	μ	0,3217d		0	0,7557	0	−0,9898	0	0,5406	0	0,2817	0	−0,9096	0	0	0	1
				−2	−0,0951	−1,5211	−0,9580	0,0733	0,4404	0,2997	0,6935	2,5034	−0,1936				
$\rightarrow a_9$	1	0,0255d	—	−0,5943	−0,8412	−1,0881	−0,6989	−0,3097	0,2606	0,8308	0,9154	1	0,500		0	0	0
$\leftarrow a_{12}$	μ	0,1465d	0,1610d	0	0,9096	0	0,7558	0	−0,2817	0	−0,9898	0	−0,5407		1	0	0
a_{13}	μ	0,1863d	0,5395d	−0,5121	0,3454	1,2029	1,0257	0,8486	−0,4708	−1,7801	−0,8901	0	0,0050		0	1	0
a_{14}	μ	0,3217d	0,4254d	0	0,7557	0	−0,9898	0	0,5406	0	0,2817	0	−0,9096		0	0	1
				0,5121	2,0108	1,2029	0,7917	0,8486	−0,2119	−1,7801	−1,5982	1	−1,4453				
a_9	1	0,1610d	—	−0,5943	0	−1,0881	0	0,3097	0	0,8308	0	1	0			0	0
$\rightarrow a_2$	1	0,1610d		0	1	0	0,8308	0	−0,3097	0	−1,0881	0	−0,5943			0	0
$\leftarrow a_{13}$	μ	0,1307d	0,1087d	−0,5121	0	1,2029	0,7388	0,8486	−0,3638	−1,7801	−0,5142	0	0,2103			1	0
a_{14}	μ	0,200d	—	0	0	0	−1,6177	0	0,7747	0	1,1041	0	−0,4605			0	1
				−0,5121	0	1,2029	−0,8789	0,8486	0,4109	−1,7801	0,5899	0	−0,2502				

a_9	1	0,2794d	—	−1,0576	0	0	0,6683	0,4579	−0,3291	−0,7794	−0,4652	1	0,1902			0
a_2	1	0,1610d	—	0	1	0	0,8308	0	−0,3098	0	−1,0882	0	−0,5943			0
→ a_3	1	0,1087d	—	−0,4257	0	1	0,6141	0,7054	−0,3024	−1,4798	−0,4275	0	0,1748			0
← a_{14}	μ	0,200d	0,1812d	0	0	0	−1,6177	0	−0,7747	0	1,1041	0	−0,4004			1
				0	0	0	−1,6177	0	0,7747	0	1,1041	0	−0,4004			
a_9	1	0,3635d	0,9719d	−1,0570	0	0	−0,0132	0,4579	−0,0027	−0,7794	0	1	0,0215			
a_2	1	0,3581d	—	0	1	0	−0,7635	0	0,4537	0	0	0	−0,9890			
← a_3	1	0,1861d	0,2638d	−0,4257	0	1	−0,0122	0,7054	−0,0025	−1,4798	0	0	0,0198			
→ a_8	1	0,1812d	—	0	0	0	−1,4652	0	0,7017	0	1	0	−0,3627			
	Σb =	1,1704d		−1,4834	1	1	−2,2541	1,1633	1,1503	−2,2593	1	1	−1,3104			
a_9	1	0,2427d	—	−0,7813	0		−0,0025	0	−0,0011	0,1811	0	1	0,0087			
a_2	1	0,3581d	0,7892d	0	1		−0,7635	0	0,4538	0	0	0	−0,9890			
→ a_5	1	0,2638d	—	−0,6035	0		−0,0173	1	−0,0035	−2,0978	0	0	0,0280			
← a_8	1	0,1812d	0,2582d	0	0		−1,4651	0	0,7017	0	1	0	−0,3627			
	Σb =	1,1273d		−1,3843	1		−2,2485	1	1,1508	−1,9166	1	1	−1,3150			
a_9	1	0,2430d		−0,7813	0		−0,0048	0	0	0,1811		1	0,0030			
a_2	1	0,2410d		0	1		0,1841	0	0	0		0	−0,7544			
a_5	1	0,2647d		−0,6036	0		−0,0246	1	0	−2,0978		0	0,0262			
→ a_6	1	0,2682d		0	0		−2,0882	0	1	0		0	−0,5170			
	Σb =	1,0069d		−1,3848	1		−1,9335	1	1	−1,9166		1	−1,2421			

$$2\alpha_7 = 327°16'20'', \quad \sin 2\alpha_7 = -0{,}54064, \quad \cos 2\alpha_7 = 0{,}84126,$$
$$2\alpha_8 = 523°38'12'', \quad \sin 2\alpha_8 = 0{,}28173, \quad \cos 2\alpha_8 = -0{,}95950,$$
$$2\alpha_9 = 196°21'48'', \quad \sin 2\alpha_9 = -0{,}28173, \quad \cos 2\alpha_9 = -0{,}95950,$$
$$2\alpha_{10} = 654°32'44'', \quad \sin 2\alpha_{10} = -0{,}90963, \quad \cos 2\alpha_{10} = 0{,}41542,$$
$$2\alpha_{11} = 65°43'38'', \quad \sin 2\alpha_{11} = 0{,}90963, \quad \cos 2\alpha_{11} = 0{,}41542.$$

Dacă se efectuează sumele din relaţiile (22) — (25), se obţin ecuaţiile

$$-z_1 - 1{,}4154\,z_2 - 1{,}8308\,z_3 - 1{,}1760\,z_4 - 0{,}5211\,z_5 + 0{,}4384\,z_6 + 1{,}3980\,z_7 + 1{,}5402\,z_8 + 1{,}6825\,z_9 + 0{,}8413\,z_{10} = 0{,}9430d,$$

$$0{,}9096\,z_2 + 0{,}7557\,z_4 - 0{,}2817\,z_6 - 0{,}9898\,z_8 - 0{,}5406\,z_{10} = 0{,}1464d,$$

$$-z_1 - 0{,}3451\,z_2 - 0{,}3097\,z_3 + 0{,}4520\,z_4 + 0{,}5944\,z_5 - 0{,}2570\,z_6 - 1{,}0982\,z_7 - 0{,}1387\,z_8 + 0{,}8208\,z_9 + 0{,}4154\,z_{10} = 0{,}2073d,$$

$$0{,}7757\,z_2 - 0{,}9898\,z_4 + 0{,}5406\,z_6 + 0{,}2817\,z_8 - 0{,}9096\,z_{10} = 0{,}3217\,d.$$

Pentru rezolvarea problemei se întocmeşte tabela simplex (tabela 2) folosindu-se ca soluţie iniţială de bază soluţia obţinută prin introducerea, vectorilor ajutători a_{11}, a_{12}, a_{13} şi a_{14}.

După efectuarea calculelor se obţine soluţia optimă

$$z_1 = z_3 = z_4 = z_7 = z_8 = z_{10} = 0,$$
$$z_2 = 0{,}24096\,d,$$
$$z_5 = 0{,}26475\,d,$$
$$z_6 = 0{,}25818\,d,$$
$$z_9 = 0{,}24297\,d.$$

Această soluţie este reprezentată în figura 3.

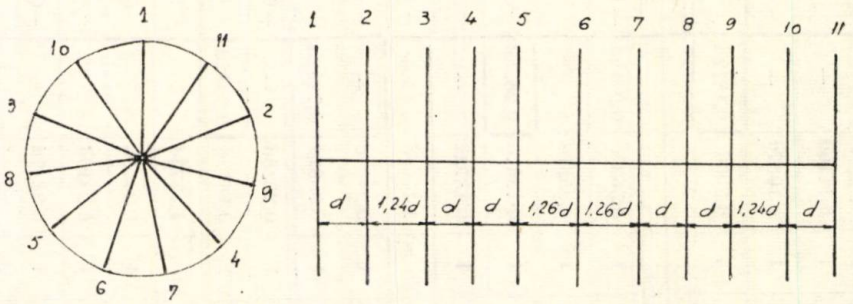


Fig. 3. — Soluţia optimă de arbore cotit la un motor cu 11 cilindri pentru o stea a manivelelor dată.

5. CONCLUZII

Metoda precedentă permite stabilirea soluției optime de arbore cotit care asigură echilibrarea unor momente externe ale forțelor de inerție prin modificarea distanțelor dintre manivele, plecînd de la o stea a manivelelor cunoscută.

Aplicarea acestei metode este cu deosebire indicată în cazul motoarelor cu număr mare de cilindri, unde gradul de nedeterminare al problemei este de asemnea mare, dacă se urmărește numai echilibrarea momentelor primelor două armonici.

Primită la redacție la 21 februarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Bărănescu G., *O teorie a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele policilindrice în linie în doi timpi cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate.* St. cerc. mec. apl., *4* (1959).
2. Biezeno C. B., Grammel R., *Technische Dynamik*, Berlin-Götingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1953.
3. Ionescu H., Mirescu P., Nădejde I., *Programarea liniară*, București, Edit. științifică, 1964.
4. Mihoc Gh., Ionescu H., *Bazele matematice ale programării liniare*, București, Edit. științifică, 1965
5. Schrön H., *Zur Analyse und Synthese der Kurbelwellen mit kleinsten Massenmomenten bei Verbrenungsmotoren*, Stuttgart, Frankh' sche Verlagshandlung, 1950.

SINTEZA DISTRIBUITOARELOR HIDRAULICE

de LEON LIVOVSCHI
Institutul de petrol, gaze
și geologie, București

Se studiază sinteza distribuitoarelor hidraulice după programul de conexiuni dintre conductele de acces. Determinarea configurației canalelor unui distribuitor se reduce la rezolvarea unei probleme de acoperire a mulțimii conexiunilor pe care le realizează un sistem de distribuitoare elementare.
Distribuitoarele elementare se deduc din programul dat de conexiuni; prin compunerea lor se obține distribuitorul care realizează acest program.

1. INTRODUCERE

În practică se utilizează frecvent trei tipuri de distribuitoare: rectilinii, rotative și cu supape.

Distribuitoarele rectilinii ori cu sertar sau sertăraș sînt formate dintr-un corp și un sertar, care are cîteva pistonașe legate printr-o tijă (fig. 1). Vom numi *canale* spațiile dintre două pistoane.

Corpul distribuitorului are mai multe orificii la care se leagă conductele ce trebuie conectate între ele. Orificiile din corpul distribuitorului formează *cîmpul de orificii*.

Distribuitoarele rotative sînt formate dintr-un cep cu canale și un corp cu orificii (fig. 2). Cepul se poate roti în jurul axei sale și în anumite poziții conectează între ele diferite orificii din corp.

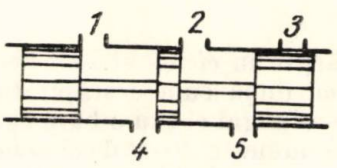


Fig. 1.

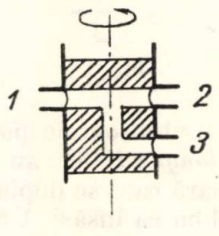


Fig. 2.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 1, 1970, P. 63–89.

Distribuitoarele cu supape sînt formate dintr-una sau din mai multe supape, care în fiecare dintre cele două poziţii ale lor închid sau deschid legătura dintre două conducte (fig. 3).

Distribuitoarele pot fi acţionate manual, electric, hidraulic, pneumatic sau mecanic (cu ajutorul camelor).

Distribuitoarele rectilinii şi rotative pot fi reprezentate convenţional ca în figura 4, unde cîmpul de orificii este reprezentat sub forma unei

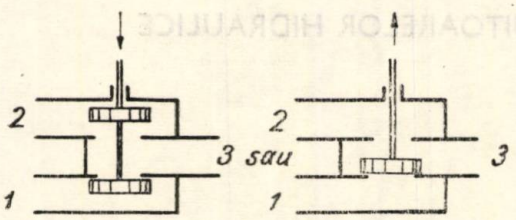


Fig. 3.

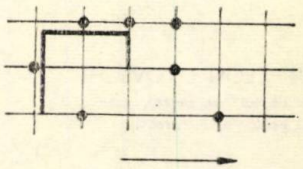
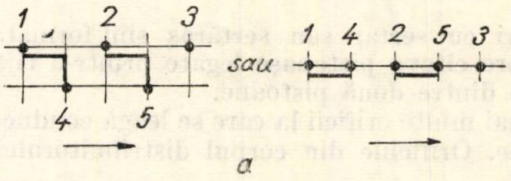


Fig. 4.

reţele plane, iar canalele sub formă de bare. Pentru distribuitoarele din figurile 1 şi 2, acest mod de reprezentare conduce la figurile 5 *a* şi *b*. Pentru distribuitoarele cu supape vom folosi acelaşi mod de reprezentare ca pentru contactele electrice de relee. În figura 6 este arătată reprezentarea distribuitorului din figura 3.

Dăm în continuare unele completări la descrierea distribuitoarelor rectilinii şi rotative. După modul în care se succedă poziţiile succesive ale



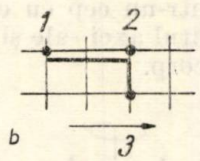


Fig. 5.

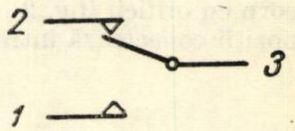


Fig. 6

canalelor, distribuitoarele pot fi împărţite în *ciclice* şi *neciclice*. Un canal se numeşte *longitudinal* sau *transversal* după cum desfăşurata lui pe un plan este o bară care se deplasează de-a lungul ei sau o bară care se deplasează paralel cu ea însăşi. Un canal se numeşte *direct* dacă conectează numai orificiile care coincid cu extremităţile lui. Un canal direct poate fi longitudinal sau transversal; asemenea canale vor fi reprezentate în modul arătat în figura 7. Canalele directe longitudinale ale distribuitoarelor ro-

tative au diferite forme, echivalente cu canalele drepte, avînd ca axă coarda sau diametrul unui cerc pe periferia căruia sînt distribuite orificiile (fig. 8). Canalele directe longitudinale ale distribuitoarelor cu sertar şi cele transversale ale distribuitoarelor rotative au o formă echivalentă cu un canal în formă de U (fig. 9).

Canalele longitudinale sau transversale se numesc *simple*, *duble*, *triple* etc., după cum ele conectează cel mult două, trei, patru etc. orificii.

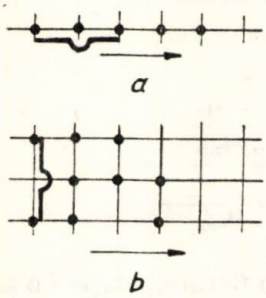


Fig. 7.

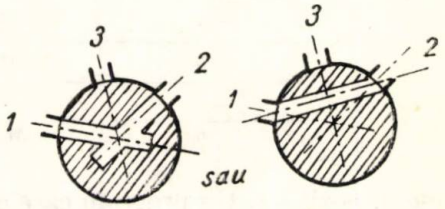


Fig. 8.

Un distribuitor cu un singur canal direct sau cu un singur canal longitudinal sau transversal se numeşte *distribuitor elementar*. În procedeul de sinteză pe care-l propunem distribuitoarele elementare joacă rolul de ele-

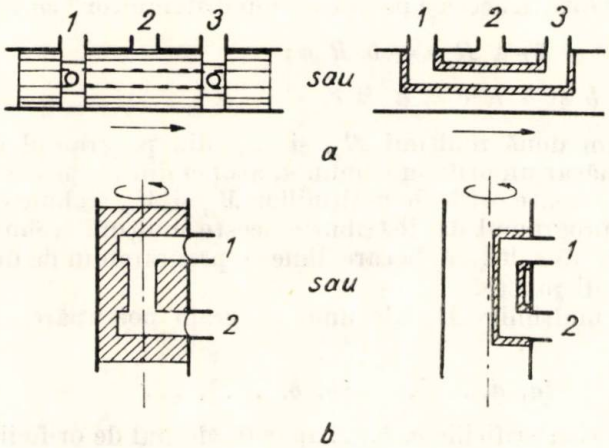


Fig. 9.

mente componente ale distribuitorului care realizează un program dat de distribuţie, adică de legături între orificii.

În continuare ne ocupăm mai întîi de sinteza distribuitoarelor rectilinii şi rotative, iar apoi de sinteza distribuitoarelor cu supape.

2. PROGRAME DE DISTRIBUȚIE

Se numește *program de distribuție* un tablou în care pentru fiecare poziție a distribuitorului sînt precizate conexiunile care trebuie realizate în această poziție. Un program de distribuție are în general structura din tabela 2.1, unde M_{ij} reprezintă mulțimi de orificii care trebuie conectate

Tabela 2.1

Poziție	Conexiuni
1	$M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1p}$
2	$M_{21}, M_{22}, \ldots, M_{2p_2}$
⋮	⋮
n	$M_{n1}, M_{n2}, \ldots, M_{np_n}$

între ele în poziția i. Un program care conține în fiecare poziție i o singură mulțime de orificii M_i se numește *program simplu*; în caz contrar, el se numește *compus*.

Se poate arăta că un program compus poate fi scris sub o formă în care toate mulțimile din aceeași linie sînt disjuncte. Pentru aceasta considerăm mai întîi următoarea proprietate aproape evidentă :

PROPRIETATEA 2.1. Relația „două orificii sînt conectate în aceeași poziție a unui distribuitor " este o relație de echivalență.

Într-adevăr, dacă notăm orificiile cu a, b, c..., iar relația „două orificii sînt conectate în aceeași poziție a unui distribuitor" cu R, atunci avem

1) $a \; R \; a$; 2) $a \; R \; b \Rightarrow b \; R \; a$;

3) $a \; R \; b$ și $b \; R \; c \Rightarrow a \; R \; c$.

Fie acum două mulțimi M_{ij} și M_{ik} din programul de distribuție. Dacă ele au măcar un orificiu comun a, atunci din proprietatea 2.1 rezultă că în poziția i toate orificiile mulțimilor M_{ij} și M_{ik} trebuie conectate între ele, adică în programul de distribuție aceste mulțimi trebuie înlocuite cu reuniunea lor. Rezultă că fiecare linie a programului de distribuție conține mulțimi disjuncte.

Printre mulțimile M_{ij} ale unui program pot apărea și mulțimi de forma

$$\{a, a, \ldots\}, \quad \{b, b, \ldots\}, \ldots \tag{2.1}$$

În acest caz, orificiile $a, b, \ldots$ apar în cîmpul de orificii de mai multe ori, iar în poziția i a distribuitorului sînt conectate două sau mai multe orificii a, două sau mai multe orificii b etc.

O linie a programului care nu prevede nici o conexiune între orificii poate fi înlocuită cu un sistem de mulțimi de forma (2.1). Mai jos asemenea mulțimi vor fi notate cu semnul $\sim$.

Fiind dat un program compus, se numește *program simplu* al său un program care satisface condițiile : a) în linia i apare una dintre mulți-

mile M_{ij} sau semnul $\sim$ și b) semnul $\sim$ nu apare în toate liniile. Un sistem S de programe simple reprezintă o *descompunere* a unui program compus P dacă pentru fiecare i o mulțime M_{ij} apare măcar într-unul din programele simple ale lui S. Este evident că orice program compus admite mai multe descompuneri în sisteme de programe simple. Există și o „cea mai fină" descompunere a unui program compus; programele ei simple conțin într-o singură linie o mulțime M_{ij}, iar în celelalte linii conțin semnul $\sim$.

Fie un program simplu în liniile căruia apar mulțimi M_{ij} sau semnul $\sim$. Un program în liniile căruia măcar o mulțime M_{ij} este înlocuită cu o mulțime $M'_{ij} \subset M_{ij}$ sau cu semnul $\sim$ se numește *subprogram simplu* al programului simplu dat. Un sistem S de subprograme simple reprezintă o descompunere a unui program simplu P dacă pentru orice i conexiunile din linia i a lui P sînt aceleași cu conexiunile din toate liniile i ale subprogramelor lui S.

În mod asemănător se definește descompunerea unui program compus P într-un sistem S de subprograme simple. În sfîrșit, vom numi subprogram al unui program compus orice program P' care conține numai o parte din conexiunile lui P.

3. DETERMINAREA DISTRIBUITOARELOR ELEMENTARE CARE REALIZEAZĂ SUBPROGRAME SIMPLE

Fiind dat un distribuitor elementar, vom presupune că canalul lui se deplasează pe desfășurata plană a cîmpului de orificii de la stînga spre dreapta.

Extremitatea din stînga a desfășuratei unui canal longitudinal sau direct va fi numită *origine*; prin poziția unui asemenea canal vom înțelege pozițiile succesive ale originii lui. Prin poziția unui canal transversal vom înțelege pozițiile succesive ale uneia dintre extremitățile canalului. Pozițiile succesive ale unui canal vor fi notate cu 1, 2, ..., n. Cîmpul unui distribuitor elementar cu canal longitudinal sau direct este definit de orificiile pe care le ocupă succesiv originea canalului. Cîmpul unui distribuitor elementar cu canal transversal simplu este definit de perechile de orificii pe care le ocupă succesiv cele două extremități ale canalului; în cazul unui canal transversal dublu, cîmpul este definit de tripletele de contacte peste care se suprapune succesiv canalul etc.

Dăm în continuare descrierea unor procedee care permit determinarea cîmpurilor de orificii ale distribuitoarelor elementare.

3.1 DISTRIBUITOARE ELEMENTARE CICLICE

În acest caz, desfășurata cîmpului de orificii conține un număr de șiruri verticale de orificii egal cu numărul n de poziție ale comutatorului.

Fie un distribuitor elementar cu un canal longitudinal avînd în desfășurare lungimea ma, unde a este distanța dintre două șiruri verticale de orificii.

Vom conveni aici să notăm cu i orificiul cu care coincide originea unui canal care ocupă poziția i. Să presupunem acum că se dă programul simplu din tabela 3.1. Deoarece canalul are lungimea ma, el se va

Tabela 3.1.

Poziție	Conexiuni
1	M_1
2	M_2
⋮	⋮
n	M_n

suprapune peste orificiul i atît în poziția i, cît și în pozițiile $i-1$, $i-2, \ldots, i-m$ ale distribuitorului. Cu alte cuvinte, orificiul i trebuie să aparțină fiecăreia dintre mulțimile de orificii M_i, $M_{i-1}, \ldots, M_{i-m}$, adică el trebuie să aparțină intersecției acestor mulțimi [1]);

$$M_i\, M_{i-1} \ldots M_{i-m}. \tag{3.1}$$

Orificiile cîmpurilor distribuitoarelor elementare cu canal longitudinal de lungime ma sînt date, evident, de termenii produsului cartezian

$$L_m = \overset{n}{\underset{i=1}{X}}\; M_i\, M_{i-1} \ldots M_{i-m}. \tag{3.2}$$

Fie acum un distribuitor elementar cu canal transversal de lungime mb, unde b este distanța dintre două șiruri orizontale de orificii. Notăm cu $r_1, r_2, \ldots, r_n$ numărul de orificii din mulțimile $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ale programului simplu dat. Fie o mulțime M_i; dacă $r_j > m$, atunci construim mulțimea C_j a combinărilor cîte m ale celor r_j orificii, iar dacă $r_j \leqslant m$, atunci considerăm mulțimea C_j avînd drept element unic pe M_j.

Șirurile verticale de orificii ale cîmpurilor tuturor distribuitoarelor elementare cu canal transversal de lungime mb sînt date de termenii produsului cartezian

$$T_m = \overset{n}{\underset{i=1}{X}}\; C_i\,. \tag{3.3}$$

Fie, în sfîrșit, un canal direct a cărui reprezentare pe desfășurata cîmpului de orificii are lungimea ma; vom conveni să spunem că canalul are *lungimea convențională* ma. Un orificiu oarecare i coincide în pozițiile i și $i-m$ ale distribuitorului cu originea, respectiv cu extremitatea din dreapta a canalului (fig. 10). Prin urmare, orificiul i trebuie să apar-

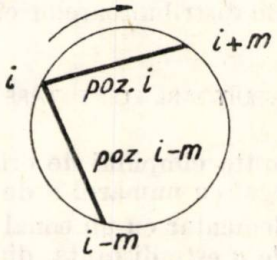


Fig. 10.

[1]) Aici și mai departe notăm intersecția a două mulțimi M_i și M_j cu $M_i\, M_j$.

ţină intersecţiei mulţimilor de contacte M_i şi M_{i-m} ale programului simplu dat. Orificiile cîmpurilor tuturor distribuitoarelor elementare cu canal direct de lungime convenţională *ma* sînt date de termenii produsului cartezian

$$D_m = \overset{n}{\underset{i=1}{X}} M_i \, M_{i-m} . \tag{3.4}$$

3.2. DISTRIBUITOARE ELEMENTARE NECICLICE

Considerăm mai întîi cazul unui distribuitor elementar cu canal longitudinal de lungime *ma*, unde $m < n$; cîmpul lui de orificii conţine $n + m$ orificii, pe care le vom numerota $1, 2, \ldots, m, m + 1, \ldots, n, n + 1, \ldots, n + m$.

Fie un orificiu i astfel încît $1 \leqslant i < m + 1$.

Canalul se suprapune peste orificiul i în primele i poziţii ale distribuitorului; prin urmare, orificiul i aparţine intersecţiei primelor i mulţimi ale programului simplu dat. În mod asemănător se arată că, dacă $n < n + i \leqslant n + m$, atunci orificiul $n + i$ aparţine intersecţiei ultimelor $m - i + 1$ mulţimi ale programului simplu dat. Fie acum un orificiu i astfel încît $m + 1 \leqslant i \leqslant n$. Canalul se suprapune peste orificiul i în poziţiile $i - m, i - m + 1, \ldots, i$; prin urmare, orificiul i aparţine intersecţiei mulţimilor $M_{i-m}, \ldots, M_i$ ale programului simplu dat. Orificiile cîmpurilor tuturor distribuitoarelor elementare cu canal longitudinal de lungime *ma* sînt date de termenii produsului cartezian

$$L_m = M_1 \times M_1M_2 \times \ldots \times M_1M_2 \ldots M_m \times (\overset{n}{\underset{i=m+1}{X}} M_{i-m} \, M_{i-m+1} \ldots$$

$$\ldots M_i) \times M_{n-m+1} \, M_{n-m+2} \ldots M_n \times \ldots \times M_{n-1} \, M_n \times M_n. \tag{3.5}$$

În mod asemănător se poate arăta că, dacă $m \geqslant n$, atunci în locul relaţiei (3.5) se obţine

$$L_m = M_1 \times M_1M_2 \times \ldots \times M_1M_2 \ldots M_{n-1} \times (\underbrace{X \, M_1M_2 \ldots}_{\text{de } m-n+2 \text{ ori } i}$$

$$\ldots M_n) \times M_n \, M_{n-1} \ldots M_2 \times \ldots \times M_n \, M_{n-1} \times M_n . \tag{3.5'}$$

Cîmpurile de orificii ale distribuitoarelor elementare cu canal transversal se determină la fel ca în cazul distribuitoarelor ciclice.

Fie acum un distribuitor elementar cu canal direct de lungime convenţională *ma*, unde $m < n$; cîmpul lui de orificii conţine $n + m$ orificii, pe care le vom numerota $1, 2, \ldots, n, n + 1, \ldots, n + m$. Canalul distribuitorului se suprapune peste orificiile $1,2, \ldots, m$ şi peste orificiile $n + 1, n + 2, \ldots, n + m$ în poziţiile $1, 2, \ldots, m$, respectiv $n - m + 1, n - m + 2, \ldots, n$ ale distribuitorului; rezultă că aceste orificii aparţin fiecare mulţimilor $M_1, M_2, \ldots, M_m$, respectiv $M_{n-m+1}, M_{n-m+2}, \ldots, M_n$ ale programului dat. Orice alt orificiu i aparţine intersecţiei mulţimilor M_i şi M_{i-m} din program; într-adevăr, canalul se suprapune peste acest orificiu în poziţiile lui i şi $i - m$. Orificiile cîmpurilor distribuitoarelor elementare cu canal direct de lungime convenţională *ma* sînt date de termenii produ-

sului cartezian

$$D_m = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_m \times \left(\overset{n}{\underset{i=m+1}{X}} M_{i-m} M_i \right) \times \ldots \times$$

$$M_{n-m+1} \times M_{n-m+2} \times \ldots \times M_n . \tag{3.6}$$

Dacă $m > n$, atunci se vede că peste un orificiu i cu $n < i < m$ nu se suprapune nici una dintre extremităţile canalului distribuitorului şi, prin urmare, acest orificiu nu-i necesar. Pentru $m = n$, în locul relaţiei (3.6) obţinem

$$D_m = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \times M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \tag{3.6'}$$

4. PROPRIETĂŢILE DISTRIBUITOARELOR ELEMENTARE

Considerăm în continuare unele proprietăţi şi observaţii relative la structura distribuitoarelor elementare şi la posibilităţile utilizării lor în vederea realizării unui program de distribuţie.

PROPRIETATEA 4.1. Distribuitoarele elementare ciclice cu n poziţii şi avînd un canal longitudinal de lungime mai mare decît $(n-2)\,a$ realizează în toate poziţiile aceleaşi conexiuni.

Într-adevăr, presupunînd că lungimea canalului este $(n-1)\,a$ sau mai mare, din (3.1) deducem că orice orificiu i trebuie să aparţină intersecţiei a $m + 1 = n - 1 + 1 = n$ mulţimi M_i, adică tuturor mulţimilor subprogramului simplu dat. Dacă intersecţia tuturor mulţimilor M_i este vidă, atunci distribuitorul nu este necesar, deoarece conectarea permanentă a orificiilor aparţinînd intersecţiei mulţimilor M_i se poate realiza, evident, şi fără ajutorul unui distribuitor.

PROPRIETATEA 4.2. Canalele directe ale distribuitoarelor elementare ciclice cu n poziţii au o lungime convenţională egală cel mult cu produsul dintre partea întreagă a lui $\frac{n}{2}$ şi a.

Rezultatul enunţat este evident.

PROPRIETATEA 4.3. Fie un subprogram simplu cu n linii şi r (unde $r \geqslant 1$) numărul de orificii al intersecţiei mulţimilor $M_1M_2, \ldots, M_n$. În aceste condiţii, distribuitoarele elementare neciclice cu canal longitudinal de lungime mai mare decît $ma = (n + r - 2)\,a$ nu pot realiza mai multe conexiuni decît distribuitoarele elementare avînd un canal de lungime $ma = (n + r - 2)\,a$.

Într-adevăr, pentru $m = n + r - 2 \geqslant n - 1$, produsul cartezian din parantezele expresiilor (3.5) sau (3.5′) vor conţine $m - n + 2 = n + r - 2 - n + 2 = r$ factori reprezentînd r orificii. Identificînd aceste orificii cu cele r orificii distincte ale intersecţiei $M_1M_2 \ldots M_n$, vom obţine un distribuitor D_1 care nu realizează mai puţine conexiuni decît un distribuitor D_2, în care unele dintre aceste r orificii sînt identice. Să presupunem acum că canalul longitudinal are o lungime $m'a > (n + r - 2)\,a$; vor rezulta distribuitoare în care un număr de $r' > r$ orificii vor trebui identificate cu cele r orificii ale intersecţiei $M_1M_2 \ldots M$. Evident că unele dintre aceste orificii vor trebui să se repete chiar dacă le

alegem distincte pe r dintre ele. Distribuitorul D'_1 astfel obținut nu va realiza, evident, alte conexiuni decît D_1.

PROPRIETATEA 4.4. Distribuitoarele elementare neciclice cu canal direct de lungime convențională $ma > na$ nu realizează mai multe conexiuni decît distribuitoarele pentru care $ma = na$.

Această proprietate este o consecință imediată a celor spuse la sfîrșitul punctului 3.

OBSERVAȚIA 4.1. Dacă unele dintre intersecțiile de mulțimi care apar în expresiile (3.2)—(3.6) sînt nule, atunci în locul corespunzător din cîmpul de orificii ori nu există orificiu, ori există un *orificiu liber*, adică un orificiu la care nu este conectată o conductă. În desene, asemenea locuri ale cîmpului de orificii se lasă neocupate sau se reprezintă printr-un orificiu nenumerotat. Un distribuitor elementar cu un număr prea mare de orificii libere poate să nu realizeze nici o conexiune; asemenea distribuitoare pot fi considerate inexistente.

PROPRIETATEA 4.5. Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ numărul de orificii al mulțimilor $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ale unui program simplu și $r = \max r_i$. Un distribuitor elementar cu canal transversal de lungime $(r-1)\,b$ al cărui cîmp de orificii este format din șiruri verticale care conțin orificiile mulțimilor M_i realizează programul simplu dat.

Proprietatea este evidentă.

PROPRIETATEA 4.6. Fie un program simplu PS și mulțimea $\{PS_i\}$ a tuturor subprogramelor lui simple care conțin într-o singură linie cîte o pereche de orificii, iar în celelalte rînduri semnul $\sim$. Fiecare subprogram simplu PS_i poate fi realizat, evident, cu ajutorul unui distribuitor elementar D_i cu canal longitudinal simplu al cărui cîmp conține perechea de orificii din programul PS_i. Mulțimea D a distribuitoarelor simple D_i realizează, evident, programul simplu dat.

PROPRIETATEA 4.7. Din proprietățile 4.5 și 4.6 rezultă un procedeu simplu de a construi distribuitoare care realizează un program compus. Pentru aceasta este suficient să se construiască distribuitoarele care realizează subprogramele simple ale programului dat; sistemul acestor distribuitoare realizează, evident, programul compus dat.

5. SINTEZA DISTRIBUITOARELOR

În virtutea proprietăților 4.5—4.7 se poate întotdeauna construi un distribuitor care realizează un program simplu sau compus. Alte distribuitoare care realizează un program dat se pot construi în modul descris mai departe. În prealabil ne vom ocupa de unele aspecte care au un rol pregătitor pentru expunerea problemei sintezei.

DEFINIȚIA 5.1. Fie o mulțime de distribuitoare $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ale căror cîmpuri de orificii reprezintă rețele superpozabile. Se numește *compunere* a celor n distribuitoare un distribuitor D care satisface condițiile:

1) cîmpul distribuitorului D poate fi obținut prin suprapunerea cîmpurilor distribuitoarelor D_i astfel încît orificiile care se suprapun sînt conectate la aceeași conductă;

2) dacă două canale se suprapun într-unul sau mai multe puncte, ele se interpretează drept un singur canal.

Dacă distribuitoarele D_i realizează subprograme ale unui program simplu sau programul dat P, atunci compunerea lor se numeşte *compatibilă cu* P dacă distribuitorul D realizează şi el un subprogram al lui P : în caz contrar, compunerea distribuitoarelor D_i este *incompatibilă cu* P.

Operaţia de compunere oferă posibilitatea construirii de distribuitoare complexe cu ajutorul unei mulţimi de distribuitoare date care pot fi în particular elementare. Pentru simplificarea exprimării vom utiliza denumirea de compunere şi pentru operaţia de asamblare a mai multor distribuitoare care realizează un program dat.

În practică, distribuitoarele se asamblează din distribuitoare elementare ori din compuneri de asemenea distribuitoare; fiecare componentă a unui ansamblu va fi numită *secţiune*. Fie un distribuitor care conţine n_1 secţiuni avînd costul c_1, n_2 secţiuni avînd costul c_2, ..., n_k secţiuni avînd costul c_k. Costul acestui distribuitor este o funcţie de c_i şi n_i :

$$c = c\,(c_1, c_2, \ldots, c_k, n_1, n_2, \ldots, n_k). \tag{5.1}$$

Distribuitoarele pentru care funcţia c are valoare minimală se numesc *optimale*.

Găsirea tuturor distribuitoarelor optimale este însoţită de mari dificultăţi de calcul; de aceea ne vom mulţumi cu determinarea distribuitoarelor *aproape optimale* în sensul definiţiei care urmează.

DEFINIŢIA 5.2. Un distribuitor al cărui cost este c_0 se numeşte *aproape optimal* dacă există un alt distribuitor care realizează acelaşi program şi care are un cost mai mare decît c_0.

Un procedeu simplu pentru determinarea distribuitoarelor aproape optimale se poate deduce cu ajutorul noţiunii de încărcare.

DEFINIŢIA 5.3. Se numeşte încărcare a secţiunii unui distribuitor raportul dintre numărul de conexiuni pe care le realizează secţiunea considerată şi numărul orificiilor ei.

O secţiune este *încărcată mult* sau are *o încărcare mare* dacă prin schimbarea notaţiilor unora dintre orificiile cîmpului ei sau prin înlocuirea unora dintre orificii cu orificii libere se obţine o secţiune cu o încărcare mai mică, dar nenulă.

În mod asemănător se defineşte *încărcarea* unui distribuitor şi distribuitorul *încărcat mult* sau cu *încărcare mare*. Este evident apoi că prin compunerea de distribuitoare cu încărcare mare se obţin secţiuni cu încărcare mare.

PROPRIETATEA 5.1. Un distribuitor D care are secţiuni cu încărcare mare poate fi *aproape optimal*.

Într-adevăr, fie un distribuitor D' obţinut din D prin micşorarea încărcării secţiunilor lui. Dacă D' nu realizează toate conexiunile pe care le realizează D, atunci prin adăugarea la D' a unor noi secţiuni se va putea obţine un distribuitor D'' care realizează aceleaşi conexiuni ca şi D, dar are un cost mai mare decît costul lui D.

În legătură cu alegerea secţiunilor care intră în componenţa unui distribuitor, menţionăm următoarele proprietăţi evidente.

PROPRIETATEA 5.2. O condiție necesară pentru ca mai multe secțiuni să poată intra în componența unui distribuitor este ca ele să realizeze cel puțin conexiunile dintre orificiile uneia dintre mulțimile M_{ij} ale programului (vezi tabela 2.1).

PROPRIETATEA 5.3. O condiție necesară pentru ca mai multe secțiuni să poată intra în componența unui distribuitor este ca ele să conțină împreună toate orificiile distribuitorului. Cu alte cuvinte, mulțimile de orificii ale acestor secțiuni trebuie *să acopere* mulțimea tuturor orificiilor. După cum se știe, (vezi [5], [6]) mulțimile de secțiuni care asigură acoperirea mulțimii tuturor orificiilor sînt date de termenii dezvoltării sub forma normală disjunctivă a expresiei

$$E = \prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} S_{ij}, \tag{5.2}$$

unde m este numărul de orificii, S_{ij} sînt secțiunile care conțin orificiul i, m_i este numărul secțiunilor S_{ij}, Π, Σ sînt conjuncția și disjuncția logică, iar S_{ij} variabile booleene bivalente.

PROPRIETATEA 5.4. O condiție suficientă pentru ca mai multe secțiuni să poată intra în componența unui distribuitor este ca ele să realizeze conexiunile dintre orificiile tuturor mulțimilor M_{ij} ale programului (vezi tabela 2.1).

Mulțimile de secțiuni care satisfac această condiție sînt date de termenii dezvoltării sub forma normală disjunctivă a expresiei

$$E = \prod_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p_i} S_{ij}, \tag{5.3}$$

unde p este numărul de conexiuni dintre toate perechile de orificii din toate mulțimile M_{ij} (vezi tabela 2.1), S_{ij} sînt secțiunile care conțin conexiunea i, p_i este numărul secțiunilor S_{ij}, iar S_{ij} sînt variabile booleene bivalente.

Dăm în continuare descrierea unui algoritm pentru sinteza distribuitoarelor care realizează un program dat P de conexiuni.

1. Dacă P este un programe compus, atunci se determină toate descompunerile lui P în programe simple. Dacă P este un program simplu, se trece la etapa următoare.

2. Fie D_1 una dintre descompunerile lui P în programe simple. Se determină distribuitoarele elementare care realizează toate subprogramele simple ale lui D_1 sau P (dacă P este un program simplu).

3. Se compun toate distribuitoarele elementare determinate la etapa 2; se continuă cu compunerea distribuitoarelor obținute pînă cînd operația de compunere nu mai poate fi aplicată sau pînă cînd se obțin distribuitoare care nu satisfac anumite condiții tehnice (număr mare de orificii, canale prea lungi sau de formă complicată etc.). Distribuitoarele obținute la etapele 2 și 3 sînt secțiuni care pot intra în componența distribuitorului căutat.

Dacă se acceptă drept secțiuni numai distribuitoarele elementare, atunci etapa 3 lipsește.

4. Se determină mulțimile de secțiuni care realizează conexiunile dintre orificiile tuturor mulțimilor M_{ij}.

5. Se identifică conexiunile realizate de mai multe ori şi se elimină orificiile suplimentare în modul descris mai departe.

6. Se reiau etapele 2, 3, 4, 5 pentru celelalte descompuneri ale programului dat P.

7. Din distribuitoarele elementare determinate la etapa 6 se aleg distribuitoarele cu cost minim.

Pentru determinarea *unora* dintre distribuitoarele care realizează un program P, algoritmul descris se modifică după cum urmează:

1′. Dacă P este un program compus, atunci se determină o descompunere D_1 a lui P în programe simple. Dacă P este un program simplu, se trece la etapa următoare.

2′. Se determină unele distribuitoare elementare care realizează subprograme simple ale lui D_1 sau P.

3′. Se compun distribuitoarele elementare determinate la etapa 2′ în modul descris la etapa 2 a primului algoritm.

4′. Se determină mulţimile de secţiuni care conţin toate orificiile distribuitorului.

5′. Dacă secţiunile determinate la etapa 4′ realizează toate conexiunile programului P, atunci se elimină orificiile suplimentare. Dacă există conexiuni nerealizate, atunci se reiau etapele 2′, 3′, 4′, 5′ pentru programul conexiunilor nerealizate pînă la obţinerea unor secţiuni care realizează toate conexiunile, după care se elimină orificiile suplimentare.

6′. Algoritmul se reia eventual şi pentru alte descompuneri ale lui P.

7′. Din distribuitoarele determinate la etapa 6′ se aleg distribuitoarele cu cost minim.

OBSERVAŢIA 5.1. Algoritmul precedent se poate începe cu etapa 5; plecînd de la distribuitoare care satisfac condiţiile enunţate într-una din proprietăţile 5.2—5.4 sau chiar distribuitoare incompatibile cu programul de distribuţie dat; în acest din urmă caz, unele dintre conexiunile pe care le realizează distribuitorul vor trebui, evident, eliminate.

Operaţia de eliminare a orificiilor suplimentare se poate efectua în felul următor:

a) se identifică mai întîi orificiile care pot fi eliminate cîte unul;

b) procesul continuă cu identificarea combinărilor de cîte două, trei etc. orificii care pot fi eliminate;

c) eliminînd la fiecare etapă combinările care pot fi completate cu noi orificii, rezultă în încheiere o mulţime de combinări maximale de orificii care pot fi eliminate.

6. SINTEZA DISTRIBUITOARELOR CU SUPAPE

Sinteza distribuitoarelor cu supape se poate efectua cu ajutorul distribuitoarelor de tipul arătat în figura 3, care joacă rolul de distribuitoare elementare. Distribuitoarele elementare au o funcţionare analogă cu contactele electrice. Datorită acestui fapt, sinteza unui distribuitor cu supape este analogă cu sinteza multipolilor şi dipolilor cu contacte de relee şi poate fi efectuată cu aceleaşi procedee; în cele ce urmează, aceste procedee se presupun cunoscute.

Dăm în continuare cîteva exemple ilustrative pentru sinteza distribuitoarelor aproape optimale.

În cadrul exemplelor vom menționa unele precizări și completări la procedeul de sinteză propus.

7. EXEMPLE

7.1. Considerăm programul compus dat de tabela 7.1 :

Tabela 7.1

1	{1,4},	{2,3}
2	{1,3},	{2,4}

Acest program admite două descompuneri în programe simple, arătate în tabelele 7.2 și 7.3 :

Tabela 7.2

1	{1,4}	{2,3}
2	{1,3}	{2,4}

Tabela 7.3

1	{1,4}	{2,3}
2	{2,4}	{1,3}

În continuare ne vom ocupa de realizarea programului dat sub forma din tabela 7.2.

Presupunem că programul dat poate fi realizat cu distribuitoare avînd sertar cu canale longitudinale. Deoarece în fiecare poziție nu sînt conectate decît două orificii, rezultă că este suficient să folosim canale simple. Cîmpurile de orificii ale distribuitoarelor care realizează subprograme ale programelor simple din tabela 7.2. sînt (vezi (3.5))

$$\{1,4\} \times \{1\} \times \{1,3\} = \{111,\ 113,\ 411,\ 413\},$$

$$\{2,3\} \times \{2\} \times \{2,4\} = \{222,\ 224,\ 322,\ 324\}.$$

Ultimilor termeni de mai sus le corespund distribuitoare cu încărcare maximă; ele sînt reprezentate convențional în figura 11 *a*. Aceste distribuitoare pot fi compuse în două moduri distincte, arătate în figura 11 *b*. Dacă canalele se realizează cu pistonașe legate prin tije și dacă așezăm orificiile pe două generatoare opuse ale cilindrului pentru pistonașe, atunci se obțin distribuitoarele arătate în figura 11 *c*.

Un distribuitor rotativ care realizează programul compus dat este arătat în figura 12 *a*; cîmpul de orificii al acestui distribuitor se obține dacă orificiile din figura 11 *b* dreapta se așază pe periferia unui cerc. Dacă orificiile extreme numerotate în figura 11 *c* cu *3* coincid, atunci se obțin distribuitoarele din figurile 12 *b* și 12 *c*; ele se deosebesc prin forma cepului și se pot roti în ambele sensuri. Dacă modul de vizualizare al poziției distribuitoarelor din figurile 12 *b* și 12 *c* nu face deosebire între cele două poziții ale cepului în care axa $x-x'$ se suprapune peste același diametru, atunci aceste distribuitoare realizează programul din tabela 7.2 ;

dacă însă cele două poziţii amintite ale axei $x-x'$ sînt considerate distincte, atunci distribuitoarele considerate realizează programul ciclic din tabela 7.4. În figurile 13 *a* şi 13 *b* sînt arătate cele două moduri de vizualizare

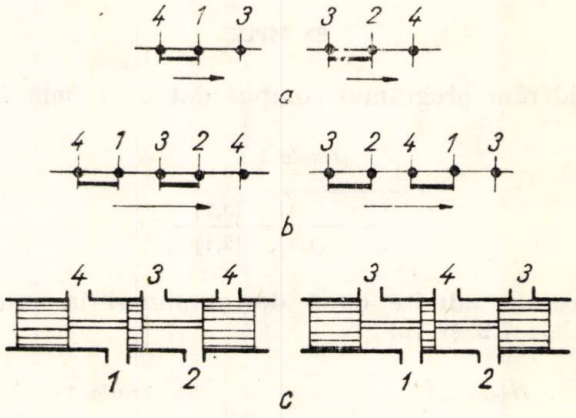


Fig. 11.

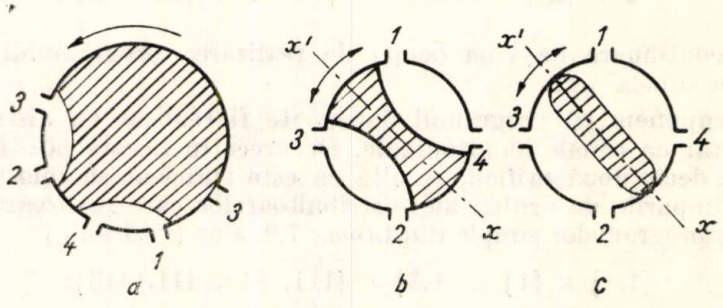


Fig. 12.

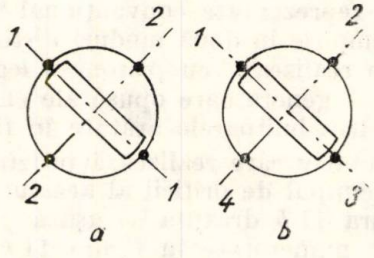


Fig. 13.

menţionate mai sus; poziţia distribuitorului este identificată în figura 13 *a* cu poziţia conturului manetei de acţionare, iar în figura 13 *b* chiar cu poziţia manetei. Mai menţionăm că, deoarece programul din tabela 7.2

are numai două poziţii, el este un program ciclic; programele ciclice cu două poziţii sînt singurele programe ciclice realizabile cu distribuitoare cu sertar.

Tabela 7.4

1	{1,4}	{2,3}
2	{1,3}	{2,4}
3	{1,4}	{2,3}
4	{1,3}	{2,4}

Distribuitoarele cu supape care realizează programul din tabela 7.2 se deduc uşor dacă se construieşte în prealabil multipolul care descrie conexiunile pe care trebuie să le realizeze supapele. Dacă se asociază celor două poziţii ale programului o variabilă x cu două valori, se obţine multipolul din figura 14 *a*.

Două realizări ale acestui multipol sînt arătate în figurile 14 *b* şi 14 *c*, unde s-a utilizat pentru supape reprezentarea din figura 6. Două realizări efective ale distribuitorului corespunzătoare figurii 14 *b* sînt arătate în figurile 14 *d* şi 14 *e*. Supapele utilizate în aceste realizări au două canale de acces; funcţionarea lor poate fi urmărită în figura 3, dreapta, dacă presupunem că unul dintre canalele 1 sau 2 a fost eliminat. O realizare efectivă a distribuitorului din figura 14 *c* este arătată în figura 14 *f*; aici s-au utilizat ambele forme ale unei supape cu trei canale, arătate în figura 3, pentru ca deplasările tijelor celor două supape să se facă în acelaşi sens.

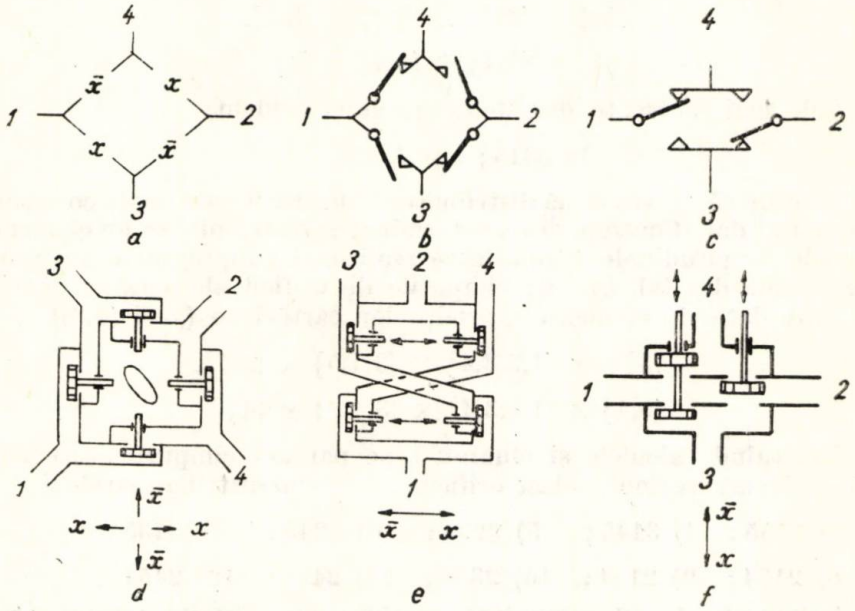


Fig. 14.

7.2. Fie programul compus din tabela 7.5 :

Tabela 7.5

1	{1, 2, 3, 4}
2	{1, 2, 3, 4, 5}
3	{3, 4, 5}
4	{2, 4}, {3, 5}

Acest program admite descompunerea din tabela 7.6 :

Tabela 7.6

1	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4}
2	{1, 2, 3, 4, 5}	{1, 2, 3, 4, 5}
3	{3, 4, 5}	{3, 4, 5}
4	{3, 5}	{2, 4}

În funcţie de faptul dacă programul din tabela 7.5 este interpretat ca fiind ciclic sau neciclic, sinteza unora dintre distribuitoarele care realizează acest program se poate efectua după cum urmează.

a) Presupunem mai întîi că programul dat este ciclic ; el va putea fi realizat cu un distribuitor rotativ. Începem cu determinarea distribuitoarelor elementare cu canal longitudinal dublu, care realizează subprograme simple ale programelor simple din tabela 7.6 ; cîmpurile de orificii ale acestor distribuitoare sînt date de elementele produselor carteziene (vezi (3.2))

$$\{3\} \times \{3\} \times \{3,4\} \times \{3,5\},$$

$$\{4\} \times \{2,4\} \times \{3,4\} \times \{4\}.$$

Cele mai încărcate distribuitoare sînt, evident,

1) 3345 ; 2) 4234.

Se vede uşor că aceste două distribuitoare nu realizează toate conexiunile programului dat. Continuăm cu determinarea distribuitoarelor elementare cu canale longitudinale simple care realizează subprograme ale programelor simple din tabela 7.6 ; cîmpurile de orificii ale acestor distribuitoare sînt date de elementele produselor carteziene (vezi (3.2))

$$\{3\} \times \{1,2,3,4\} \times \{3,4,5\} \times \{3,5\},$$

$$\{2,4\} \times \{1,2,3,4\} \times \{3,4,5\} \times \{4\}.$$

Efectuînd calculele şi eliminînd pe parcurs cîmpurile care conţin pe două locuri vecine acelaşi orificiu, obţinem distribuitoarele :

3) 3135 ; 4) 3145 ; 5) 3235 ; 6) 3245 ; 7) 3435 ;

8) 2134 ; 9) 2154 ; 10) 2354 ; 11) 2434 ; 12) 2454.

Distribuitoarele 1—12 reprezintă secţiuni ale distribuitorului căutat.

Expresia (5.2), care dă mulțimile de secțiuni necesare ale acestui distribuitor, este:

$$E = (3 + 4 + 8 + 9)(2 + 5 + 6 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12)$$
$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 10 + 11)(1 + 2 +$$
$$4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12)$$
$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 12),$$

unde în cele cinci paranteze sînt trecute numerele secțiunilor care conțin cele cinci orificii 1, 2, 3, 4, 5.

Ținînd seama că secțiunea 1 apare în ultimele trei paranteze și că ea are o încărcare mare și observînd că în primele două paranteze apar secțiunile 8 și 9, vom încerca să construim distribuitorul căutat plecînd de la perechile de secțiuni 1,8 și 1,9. Aceste secțiuni realizează programele din tablourile 7.7 și 7.8.

Tabela 7.7

1	{3, 4}, {1,2}
2	{1, 3, 4, 5}
3	{3, 4, 5}
4	{3, 5} {2, 4}

Tabela 7.8

1	{3, 4}, {1, 2}
2	{1, 3, 4, 5}
3	{3, 4, 5}
4	{3, 5} {2, 4}

Se vede că în pozițiile 1 și 2 trebuie realizate măcar una dintre conexiunile 13, 14, 23, 24, respectiv 12, 23, 24, 25. Observăm că a treia, respectiv a doua conexiune din cele două șiruri precedente conțin numai orificiile 2 și 3; aceste conexiuni conduc la programul din tabela 7.9:

Tabela 7.9

1	{2, 3}
2	{2, 3}
3	~
4	~

Completînd ultimele două rînduri cu mulțimea {3,3} și presupunînd că pentru realizarea programului precedent vom folosi distribuitoare elementare cu canal longitudinal simplu, deducem că cîmpurile de orificii sînt date de elementele produsului cartezian (vezi (3.2))

$$\{3\} \times \{2,3\} \times \{3\} \times \{3\}$$

și obținem distribuitorul

13) 3233.

Cele două distribuitoare care conțin secțiunile 1, 8, 13, respectiv 1, 9, 13 sînt reprezentate pe figurile 15 *a* și 15 *b*.

Orificiile 3_6 din figura 15 *a* și 3_5 din figura 15 *b* pot să fie, evident, eliminate; se verifică apoi că se poate elimina și orificiul 3_1 din figura 15 *a*. Realizarea efectivă a distribuitorului căutat, corespunzătoare

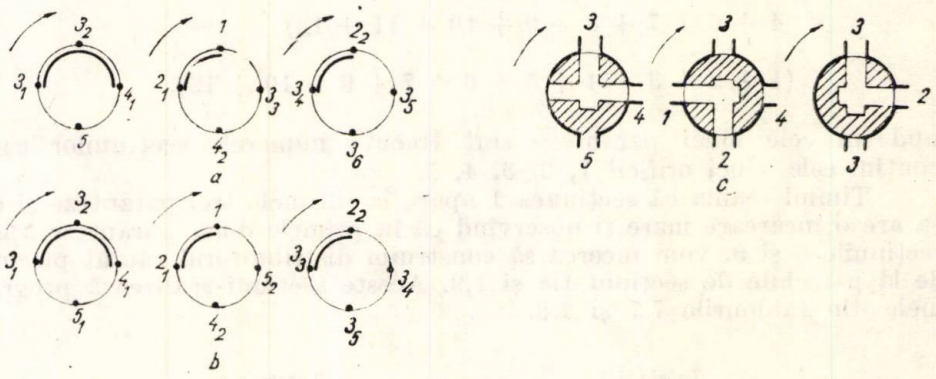


Fig. 15.

figurii 15 *a*, este arătată în figura 15 *c*, unde secțiunile au fost rotite astfel încît orificiile 3 și 4 ale secțiunilor să fie situate pe aceleași generatoare ale cilindrului care reprezintă cîmpul de orificii; această așezare a orificiilor simplifică într-o oarecare măsură realizarea tehnologică a distribuitorului.

Vom căuta acum o soluție în care sînt utilizate canale complexe avînd forma din figura 16 *a*. Distribuitoarele corespunzătoare pot fi

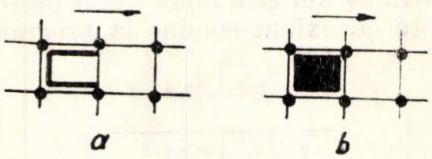


Fig. 16.

obținute prin compunerea a două distribuitoare cu canal longitudinal simplu, cu un distribuitor elementar cu canal transversal simplu; canalele acestor distribuitoare pot fi executate și sub forma din figura 16 *b*. Distribuitoarele cu asemenea canale pot fi obținute după cum am amintit prin compunerea de distribuitoare elementare sau direct în modul descris mai jos. Observăm că un canal de forma studiată conectează într-o anumită poziție cel mult patru orificii; ele sînt ori perechi de orificii, ori orificii care apar într-un același rînd al programului de conexiuni (vezi tabela 2.1).

Cîmpurile de orificii ale distribuitoarelor căutate sînt date de elementele unui produs cartezian de forma (3.2), în care fiecare mulțime M_i este înlocuită cu reuniunea dintre M_i și mulțimea combinărilor cîte două

a orificiilor lui M_i. Programul conexiunilor poate fi descompus în două subprograme simple arătate în tabela 7.10 :

Tabela 7.10

1	{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34}
2	{1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45}
3	{3, 4, 5, 34, 35, 45}
4	{3, 5, 35}

1	{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34}
2	{1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45}
3	{3, 4, 5, 34, 35, 45}
4	{2, 4, 24}

Cîmpurile de orificii ale distribuitoarelor care realizează subprograme ale programelor simple din tabela 7.10 sînt date elementele produselor carteziene (vezi (3.2))

$$\{3\} \times \{1,2,3,4, 12, 13, 14, 23, 24, 34\} \times \{3, 4, 5, 34, 35, 45\} \times$$
$$\times \{3, 5, 35\},$$
$$\{2, 4, 24\} \times \{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34\} \times$$
$$\times \{3, 4, 5, 34, 35, 45\} \times \{4\}.$$

Două secţiuni cu încărcare mare sînt

1) 3 (12) (34) (35),

2) (24) (13) (35) 4,

unde în paranteze sînt trecute perechile de orificii conectate prin canale transversale. Desfăşuratele celor două distribuitoare sînt arătate în figura 17 *a*; ele realizează subprogramele din tabela 7.11. Eliminînd din prima

Tabela 7.11

1	{1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4}
2	{1, 2, 3, 4}	{1, 3, 5}
3	{3, 4, 5}	{3, 4, 5}
4	{3, 5}	{2,4}

secţiune orificiul 3_3, din a doua secţiune orificiul 3_4, 1_2 şi 4_3 şi rotind a doua secţiune cu 90° pentru ca orificiile 2_1, 2_2 şi 5_1, 5_2 să fie situate pe aceleaşi generatoare ale cilindrului cu orificii, obţinem distribuitorul din figura 17 *b*.

b) Presupunem acum că programul dat în tabela 7.5 este neciclic. Cîmpurile de contacte ale distribuitoarelor elementare cu canale longitudinale duble şi care realizează subprograme ale programelor simple din tabela 7.6 sînt date de elementele produselor carteziene

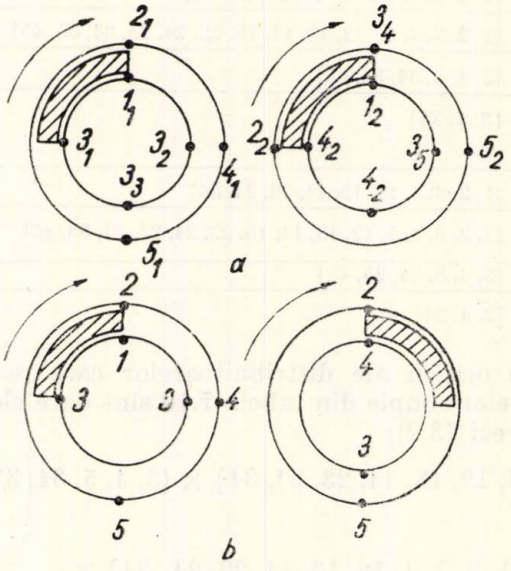


Fig. 17.

$$\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\} \times \{3,4\} \times \{3,5\} \times \{3,5\} \times \{3,5\},$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\} \times \{3,4\} \times \{4\} \times \{4\} \times \{2,4\}.$$

Ţinînd seama că încărcarea unui distribuitor este cu atît mai mare cu cît conţine mai multe orificii diferite, din al doilea produs cartezian precedent, alegem distribuitorul

1) 12 3442.

Acest distribuitor realizează subprogramul simplu din tabela 7.12. Comparînd tabelele 7.11 şi 7.12, deducem că este avantajos să alegem din

Tabela 7.12

1	{1, 2, 3}
2	{2, 3, 4}
3	{3,4}
4	{2,4}

primul produs cartezian distribuitorul:

2) 214535.

Distribuitoarele 1 şi 2, reprezentate în figura 18 *a*, realizează programul compus dat. Comparînd aceste distribuitoare şi eliminînd unele orificii, obţinem pentru distribuitorul căutat realizarea din figura 18 *b*.

Un distribuitor mai compact se obţine dacă utilizăm sertăraşe cu canale de forma arătată în figura 16, dar avînd canale de lungime dublă.

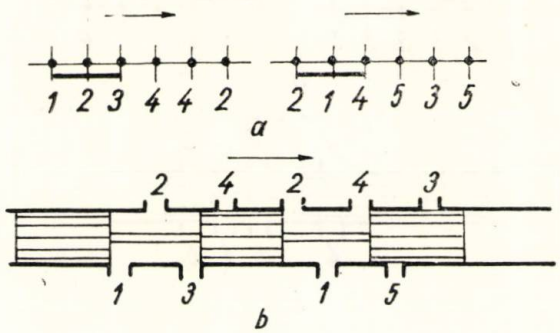


Fig 18.

Configuraţiile cîmpurilor de orificii se obţin din tabela 7.10; ele sînt date de

$$\{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34\} \times \{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34\} \times \{3, 4, 24\} \times \{3, 5, 35\} \times \{3, 5, 35\} \times \{3, 5, 35\},$$

$$\{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34\} \times \{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34\} \times \{3, 4, 34\} \times \{4\} \times \{4\} \times \{2, 4, 24\}.$$

Un distribuitor cu încărcare mare dat de primul produs cartezian este

1) (34) (12) (34) (35) (35) (35).

Acest distribuitor realizează primul program simplu din tabela 7.6; mai este necesar să se realizeze conexiunea din ultimul rînd al celui de-al doilea program.

Un distribuitor care realizează această conexiune este

2) (12) (12) (34) 44 (24).

Distribuitoarele obţinute sînt reprezentate în figura 19 *a*. Observăm că în primul distribuitor pot fi eliminate orificiile de pe ultimele două locuri şi orificiile 4 şi 3 de pe locurile unu şi trei; în al doilea distribuitor pot fi eliminate orificiile de pe primele cinci locuri, iar canalul compus se poate înlocui cu un canal transversal simplu. Distribuitorul obţinut după aceste simplificări este arătat în figura 19 *b*.

7. 3. Să se determine structura programului pe care-l poate realiza distribuitorul cu două poziţii din figura 20 a şi configuraţiile cîmpului său de orificii.

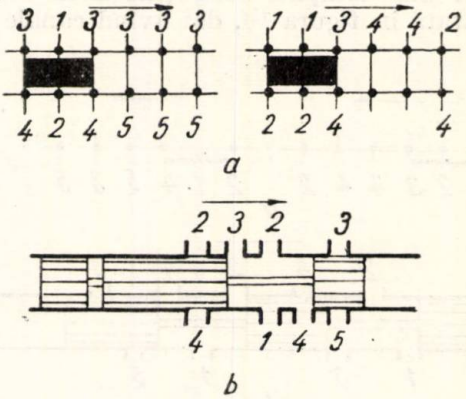


Fig. 19

Deoarece distribuitorul studiat are două canale şi două poziţii, el poate realiza subprograme ale unor programe avînd structura din tabela 7.13:

Tabela 7.13

1	M_1	M_3
2	M_2	M_4

Presupunînd că cele două canale participă fiecare la realizarea programelor simple din tabela 7. 13, deducem că orificiile 1 şi 5, 2 şi 6, 3 şi 7, 4 şi 8 trebuie să aparţină intersecţiilor

$$M_1 M_2,\ M_2 M_3,\ M_3 M_4,\ M_4 M_1.$$

Cîmpurile de contacte sînt date de elementele produsului cartezian

$$M_1 M_2 \times M_1 M_3 \times M_3 M_4 \times M_4 M_1 \times M_1 M_2 \times M_1 M_3 \times M_3 M_4 \times M_4 M_1.$$

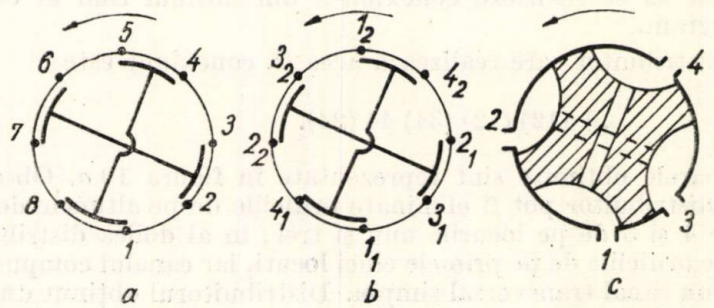


Fig. 20.

Pentru programul din tabela 7. 2 obţinem cîmpul unic

1 3 2 4 1 3 2 4.

Distribuitorul corespunzător este reprezentat în figura 20 *b*. Eliminînd orificiile 2_1, 4_1, 1_2, 3_2, rezultă un distribuitor a cărui realizare este arătată în figura 20 *c*.

7.4. În programul din tabela 7.14, orificiile 1,2 şi 3,4 apar în rîndurile 1,3, respectiv 2,4; această împrejurare sugerează utilizarea de distribuitoare cu canale directe pentru realizarea programului dat.

Tabela 7.14

1	{1, 2, 5}
2	{3, 4, 5}
3	{1, 2}
4	{3, 4}

a) Dacă programul din tabela 7.14 se referă la un distribuitor ciclic, atunci cîmpurile de orificii ale distribuitoarelor elementare cu lamelă directă dublă sînt date de elementele produsului cartezian (vezi (3.4))

$$\{1,2\} \times \{3,4\} \times \{1,2\} \times \{3,4\}.$$

Un distribuitor cu încărcare mare este

1) 1 3 2 4.

Comparînd programul realizat de acest distribuitor cu programul dat, deducem că mai este necesară realizarea subprogramului simplu din tabela 7.15 :

Tabela 7.15

1	{1, 5}
2	{3, 5}
3	~
4	~

Presupunînd că acest subprogram poate fi realizat cu un distribuitor elementar cu lamelă longitudinală simplă şi înlocuind semnele ~ din ultimele două rînduri cu {3,3}, {1,1}, obţinem cu ajutorul expresiei (3,2) distribuitorul

2) 1 5 3 Ø.

Distribuitorul căutat are deci două secţiuni; el este reprezentat în figura 21 *a*.

b) Să presupunem acum că programul din tabela 7.14 este neciclic şi că există distribuitoare elementare cu canal longitudinal dublu care realizează subprograme ale programului dat. Cîmpurile de orificii ale

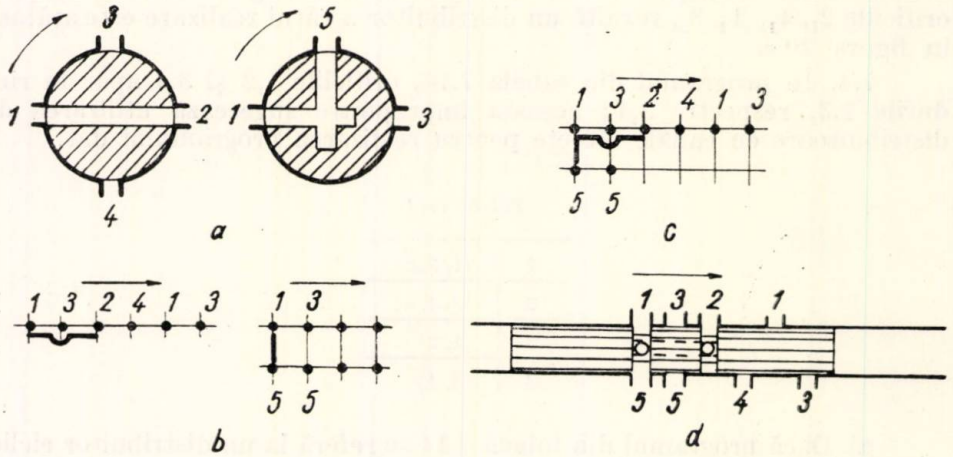


Fig. 21

acestor distribuitoare sînt date de elementele produsului cartezian (vezi (3.6′))

$$\{1, 2, 3\} \times \{3, 4, 5\} \times \{1,2\} \times \{3,4\} \times \{1,2\} \times \{3,4\}.$$

Un distribuitor cu încărcare mare este

1) 132413;

acest distribuitor este arătat în figura 21 *b*. Se vede apoi că mai este necesară realizarea subprogramului din tabela 7.16. Acest subprogram poate fi realizat, evident, cu distribuitorul cu canal transversal simplu,

Tabela 7.16

1	{1,5}
2	{3,5}
3	~
4	~

reprezentat în figura 21 *b*. Cele două distribuitoare din figura 21 *b* pot fi compuse; se obţine distribuitorul reprezentat în figura 21 *c*. Observăm că acestui distribuitor i se mai poate adăuga un canal transversal în extremitatea din dreapta a canalului direct; realizarea distribuitorului astfel obţinut este arătată în figura 21 *d*. Canalul direct este realizat sub forma unui orificiu longitudinal din interiorul pistonaşului mijlociu şi două orificii transversale în tijele care leagă pistonaşele.

7. 5. Mai sus am presupus că diferitele poziţii ale distribuitoarelor sînt poziţii de lucru, adică poziţii în care prin canalele distribuitorului circulă fluid sub presiune. Uneori se cere ca în anumite poziţii ale distribuitoarelor, numite poziţii intermediare şi cuprinse între două poziţii de lucru, să nu se realizeze nici o conexiune sau să se realizeze conexiuni care asigură micşorarea presiunii în conducte. Sinteza distribuitoarelor cu poziţii intermediare se poate efectua evident, în modul descris mai înainte. Cîteodată însă se poate obţine un distribuitor cu poziţie intermediară dacă această poziţie se asigură conexiunile necesare prin schimbarea dimensiunilor pistoanelor sertăraşului

Poziţiile intermediare se numesc *stabile* sau *nestabile* după cum sertăraşul se poate opri sau nu în aceste poziţii; poziţiile intermediare stabile se numesc *repaus* dacă în aceste poziţii conductele nu se află sub presiune.

Drept exemple de distribuitoare cu poziţie intermediară considerăm distribuitoarele care realizează cele patru programe neciclice din tabela 7. 17:

Tabela 7.17

1	{1,4}, {2,3}	{1,4}, {2,3}	{1,4}, {2,3}	{1,4}, {2,3}
int.	{1, 2, 4}	{1, 2, 3}	{1, 2, 3}	{3, 4}
2	{1,3} {2,4}	{1,3}, {2,4}	{1,3}, {2,4}	{1,3}, {2,4}

Dacă eliminăm linia intermediară din programele precedente, atunci se obţine (vezi exemplul 1) unul dintre distribuitoarele din figura 11 *e*; primul dintre ele este reprodus în figura 22 *a* într-o poziţie în care toate canalele sînt instantaneu închise.

Modul în care schimbarea dimensiunilor pistonaşelor asigură realizarea conexiunilor ale primelor trei programe se poate urmări uşor în

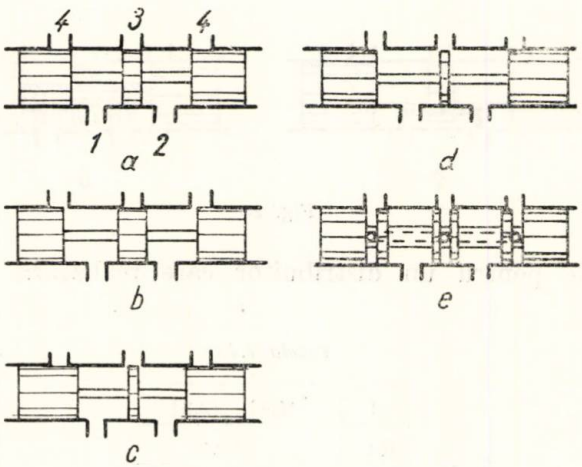


Fig. 22

figurile 22 *b*, 22 *c* şi 22 *d*. Se poate verifica uşor că ultimul program din tabela 7.17 nu poate fi realizat oricum s-ar schimba dimensiunile pistoanelor; pentru conectarea orificiilor 3 şi 4 în poziţia intermediară este necesar un canal direct, a cărui construcţie se poate urmări în figura 22 *e*.

Determinarea configuraţiei pistoanelor distribuitoarelor cu poziţie intermediară se poate efectua sistematic în modul descris mai jos :

a) se determină configuraţia sertăraşului în presupunerea că poziţia intermediară lipseşte;

b) se figurează sertăraşul în poziţie intermediară;

c) pe figura obţinută mai înainte se trasează canalele suplimentare necesare pentru realizarea conexiunilor din poziţia intermediară; lăţimea canalelor suplimentare se ia mai mică decît diametrul orificiului;

d) se elimină din sertăraşe partea lor comună cu canalele suplimentare care nu conectează spaţiile dintre pistoanele sertăraşelor; canalele suplimentare care conectează spaţiile dintre pistoanele sertăraşelor se realizează sub formă de canale independente, solidal legate cu sertăraşul.

În figurile 23 *a*—23 *d* sînt arătate canalele suplimentare pentru distribuitoarele care realizează programele din tabela 7.17, iar în figurile 24 *a* şi 24 *b* sînt arătate configuraţia canalelor suplimentare şi construcţia

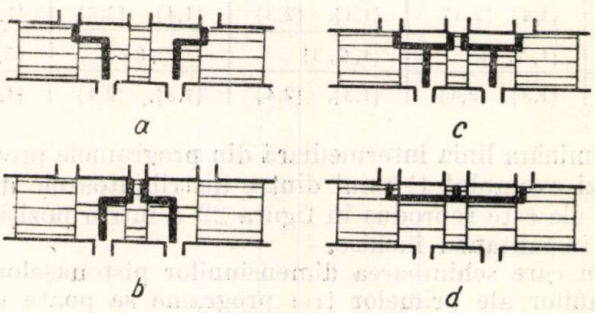


Fig. 23

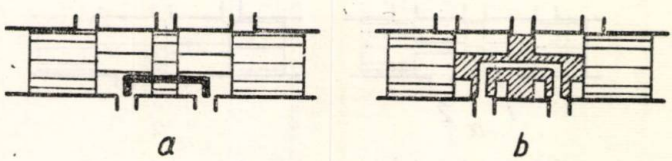


Fig. 24

acestor canale pentru un distribuitor care realizează programul din tabela 7.18 :

Tabela 7.18

1	{1,4}, {2,3}
int	{1,2}
3	{1,3} {2,4}

8. ÎNCHEIERE

Procedeul de sinteză al distribuitoarelor expus în lucrare permite, după cum rezultă din exemplele tratate, găsirea relativ uşoară a unor soluţii destul de bune. Găsirea celor mai bune soluţii este însoţită, chiar în cazurile cele mai simple, de un mare volum de calcule, după cum rezultă din cercetarea algoritmului de sinteză expus la punctul 5.

De aceea procedeele care conduc la soluţii aproape optimale merită o atenţie deosebită şi lucrarea de faţă este în acest sens incompletă. Cu toate acestea credem că ea va fi utilă proiectanţilor şi celor interesaţi în elaborarea de procedee de sinteză atît pentru distribuitoare, cît şi pentru alte obiecte cu funcţionare discontinuă.

Menţionăm că metoda de sinteză expusă în această lucrare poate fi utilizată şi pentru sinteza comutatoarelor; ne propunem să ne ocupăm de această problemă în altă lucrare.

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Botez E., *Acţionarea hidraulică a maşinilor-unelte*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1954.
2. Faisandies T., *Les mécanismes hydrauliques* Paris, Dunod, 1962.
3. Haimovici E. M., *Ghidroprivod i ghidroavtomatika stankov*, Moskva, Maşghiz, 1959.
4. Oprean A., *Hidraulica maşinilor-unelte*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1968.
5. Petrick S. R., *A direct decomposition of the irredundant forms of a boolean function from the set of prime implicants*, Techn. reports Air Force, Cambridge Reasearch Center, 1956.
6. Naslin P., *Circuits à relais et automatismes à séquences*, Paris, Dunod, 1958.

DETERMINAREA VECTORIALĂ A ECUAȚIILOR GENERALE DE MIȘCARE ALE MECANISMELOR TRIDIMENSIONALE

de A. H. SONI
Oklahoma state university stillwater,
CHR. PELECUDI
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Sînt determinate ecuațiile generale de mișcare, vectoriale și analitice, pentru mecanismele monocontur cu trei pînă la șapte axe (cuple elicoidale) și de diverse familii.

În analiza și sinteza, structurală și cinematică, a mecanismelor spațiale s-au întrebuințat diverse metode, care, începînd cu metodele grafice, utilizînd calcule vectoriale-analitice, tensoriale sau matriceale asupra mărimilor simple sau complexe (duale), și-au adus contribuția la cunoașterea mișcărilor sistemelor de corpuri legate, avînd fiecare avantaje specifice corespunzătoare anumitor domenii de utilizare.

Calculul vectorial și corespunzătoarele sale ecuații analitice necesită operații minime și simple, strict necesare problemei formulate. Rezolvarea lor se poate programa și, în cazurile generale, utilizarea metodelor iterative conduce la obținerea oricărei exactități.

Mai multe lucrări au apărut în domeniul mecanismelor spațiale pe baza utilizării aparatului vectorial. Ele cuprind ecuația vectorială de închidere a conturului schematizat al lanțului cinematic, în care vectorii se succedă unul după altul, formînd un poligon spațial fără întreruperi. Extremitățile vectorilor se corespund în puncte arbitrare sau particulare pe axele cuplelor cinematice. Pentru cazurile complicate se preferă descompunerea fiecărui vector de pe axele cuplelor cinematice ale elementului considerat și de pe normala comună la acestea. Numărul laturilor poligonului spațial se dublează, dar au particularitatea că sînt perpendiculare între ele [1]—[4].

În afară de ecuația vectorială de închidere se adaugă o serie de ecuații care caracterizează cuplele și elementele din care este format lanțul cinematic, determinînd pozițiile relative ale diferitelor figuri geometrice

spaţiale (puncte, drepte, unghiuri etc.). Aceste ecuaţii permit rezolvarea unui număr de necunoscute scalare superior celor trei, date de ecuaţia vectorială.

Zinoviev [4] proiectează aceste ecuaţii cu vectori pe axele unui sistem de coordonate trirectangular fix. Notînd cosinusurile directoare (componentele) ale vectorilor unitari prin x, y, z, componentele unui vector oarecare devin $X = V_x$, $Y = Vy$, $Z = Vz$. O altă variantă, convenabilă pentru mecanismele simple, utilizează direct coordonatele x, y, z ale extremităţilor vectorilor, obţinîndu-se numărul de ecuaţii şi de necunoscute similare. Ambele variante se pot îngloba în metoda coordonatelor carteziene, sau metoda elementelor [2], care conţine în general un număr mare de necunoscute. În unele ecuaţii intră produsele a cîte două necunoscute, iar altele cuprind pătratele unor necunoscute. Afară de ecuaţiile proiecţiilor conturului vectorial, celelalte ecuaţii cuprind numai patru termeni. Sistemul de ecuaţii este neliniar [2], [4].

Chace [5] referă vectorii la un sistem arbitrar absolut, utilizînd reprezentarea lor polară, ceea ce micşorează numerele de necunoscute şi ecuaţii. Într-adevăr, cele trei cosinusuri directoare, x, y, z, se pot exprima în funcţie de două unghiuri absolute, eliminîndu-se ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. El rezolvă ecuaţiile formate cu sume de vectori spaţiali în toate situaţiile posibile.

O reducere mai mare se poate obţine prin utilizarea coordonatelor polare relative, în care fiecare element este poziţionat faţă de cel anterior printr-o singură variabilă (cuple H). Wörle [6] a utilizat aceste coordonate pentru mecanismul cu patru axe $RCCC$ şi a derivatelor sale. Ambele variante se pot îngloba în metoda coordonatelor polare, sau metoda contururilor [2]. Pentru studiul vitezelor şi acceleraţiilor, metoda a fost utilizată de Voinea şi Atanasiu [7].

Scopul acestei lucrări este de a prezenta ecuaţiile generale de mişcare, vectoriale şi analitice, pentru mecanismele monocontur cu trei pînă la şapte axe (cuple H). Totodată, prin utilizarea coordonatelor polare şi a ecuaţiilor contururilor deformabile se obţine un număr minim de ecuaţii şi de necunoscute independente. Pe cale matriceală, Soni [8] a dat un algoritm pentru găsirea relaţiilor independente, bazat pe o serie de transformări şi de interpretări matriceale.

Într-adevăr, pe baza criteriului generalizat al mobilităţii lanţurilor cinematice de diverse familii φ aplicat numai în lanţurile cu cuple elicoidale ($k = 5$ sau $f = 1$), gradul de mobilitate se poate exprima prin

$$M_\varphi = (6 - \varphi)\, m - (5 - \varphi)\, c = M_0 + \varphi N \qquad (1)$$

sau

$$m = M_\varphi + (5 - \varphi)\, N; \quad c = M_\varphi + (6 - \varphi)\, N, \qquad (2)$$

unde $m = n - 1$ este numărul elementelor mobile (fără elementul considerat fix), c numărul cuplelor elicoidale şi $N = c - m$ numărul contururilor independente.

Întrucît fiecare element al lanţului este poziţionat printr-un singur parametru variabil ($f = 1$), numărul total de parametri corespunde cu numărul total de elemente mobile $m = n - 1$, din care, dacă scădem elementele motoare, adică parametrii corespunzători gradului de mobi-

litate M_φ, rămîn elementele conduse sau parametrii care le poziționează. Conform formulei (2), numărul acestora este $(5-\varphi)\,N$, ceea ce arată că pentru fiecare contur se vor scrie $(5-\varphi)$ ecuații independente.

De exemplu, pentru mecanismul de familia $\varphi = 0$ cu cuple de rotație R trebuie cunoscute unghiurile relative θ_2, θ_3, θ_4, θ_5, θ_6, deoarece θ_1 este dat pentru manivelă, iar θ_7 rezultă simplu dintr-o ecuație suplimentară explicită nenecesară pentru determinarea celorlalți parametri efectivi. Mai clar, în mecanismul patrulater plan ($\varphi = 3$) sînt necesare numai două ecuații de proiecții pe axe ($5-3 = 2$) care determină unghiurile θ_2 și θ_3 ale bielei și balansierului. Aici θ_1 este dat, iar θ_4 se determină pe baza faptului că suma tuturor unghiurilor interne este 360°.

Incluzînd și ecuația explicită pentru unul dintre parametrii de poziționare, cealaltă formulă din (2) confirmă faptul că numărul total de ecuații și de necunoscute este $c - M_\varphi = (6 - \varphi)N$, respectiv cîte $(6 - \varphi)$ pentru fiecare contur independent.

1. NOTAȚII ȘI FORMULE PRELIMINARE

Urmărind notația Hartenberg-Denavit [1], vom întrebuința două sisteme de însemnări, simple și marcate, după cum parcurgerea conturului cinematic se face în sens direct sau invers (fig. 1). Vom avea :

— versorii axelor cuplelor cinematice $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_7 = \bar{e}_0$
sau $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \ldots, \bar{e}_7^* = \bar{e}_0^*$;

— versorii normalelor dintre două axe ale aceluiași element $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_7 = \bar{n}_0$ și $\bar{n}_1^*, \bar{n}_2^*, \ldots, \bar{n}_7^* = \bar{n}_0^*$. Versorul $\bar{n}_i$ este îndreptat de la $\bar{e}_i$ la $\bar{e}_{i+1}$.

Versorii utilizați în cele două notații sînt opuși unii altora, adică

$$\begin{aligned}
&\bar{e}_0^* + \bar{e}_1 = 0, && \bar{n}_0^* + \bar{n}_p = 0,\\
&\bar{e}_1^* + \bar{e}_p = 0, && \bar{n}_1^* + \bar{n}_{p-1} = 0,\\
&\bar{e}_2^* + \bar{e}_{p-1} = 0, && \bar{n}_2^* + \bar{n}_{p-2} = 0, \qquad (3)\\
&\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\\
&\bar{e}_j^* + \bar{e}_i = 0, && \bar{n}_j^* + \bar{n}_{i-1} = 0, \quad i + \mathrm{j} = p + 1,
\end{aligned}$$

unde p reprezintă numărul total al axelor.

Vom mai avea :

— lungimile de încrucișare σ_i ale normalelor dintre axele $\bar{e}_i$ și $\bar{e}_{i+1}$, totdeauna pozitive ;

— deplasările axiale s_i dintre picioarele normalelor $\bar{n}_{i-1}$ și $\bar{n}_i$, măsurate pozitive în raport cu $\bar{e}_i$;

— unghiurile de încrucișare α_i dintre axele $\bar{e}_i$ și $\bar{e}_{i+1}$, măsurate pozitive în raport cu $\bar{n}_{i-1}$;

— rotațiile axiale θ_i dintre normalele $\overline{n}_{i-1}$ și $\overline{n}_i$, măsurate pozitive în sensul $\overline{e}_i$.

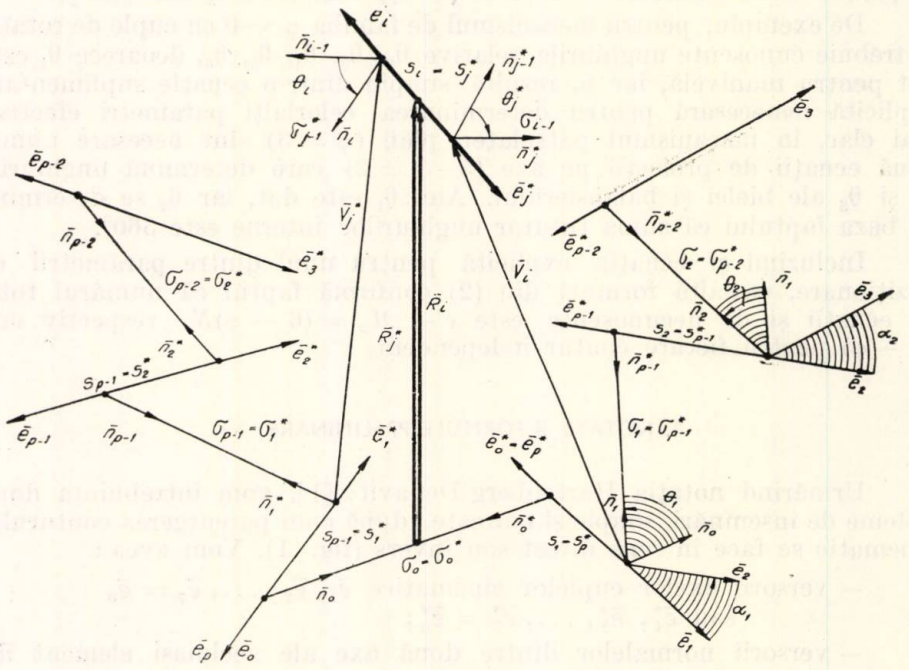


Fig. 1

Mărimile scalare s, σ, α și θ rămîn egale și de același semn în cele două notații. Astfel

$$s_j^* \, \overline{e}_j^* + s_i \, \overline{e}_i = 0 \tag{4}$$

și deci

$$s_1^* = s_p \, ; \; s_2^* = s_{p-1} \, ; \; s_3^* = s_{p-2} \, ; \; \ldots \; ; \; s_j^* = s_i \, ,$$

iar

$$\sigma_j^* \, \overline{n}_j^* + \sigma_{i-1} \, \overline{n}_{i-1} = 0, \tag{5}$$

cu

$$\sigma_0^* = \sigma_p \, ; \; \sigma_1^* = \sigma_{p-1} \, ; \; \sigma_2^* = \sigma_{p-2} \, ; \ldots ; \; \sigma_j^* = \sigma_{i-1} \, .$$

De asemenea

$$\sin \alpha_i \, \overline{n}_i = \overline{e}_i \times \overline{e}_{i+1} = (-\overline{e}_j^*) \times (-\overline{e}_{j-1}^*) = - \sin \alpha_{j-1}^* \, \overline{n}_{j-1}^* = \sin \alpha_{j-1}^* \, \overline{n}_i \tag{6}$$

și deci

$$\alpha_0^* = \alpha_p \, ; \; \alpha_1^* = \alpha_{p-1} \; ; \; \alpha_2^* = \alpha_{p-2} \, ; \ldots ; \; \alpha_{j-1}^* = \alpha_i \, ,$$

iar

$$\sin \theta_i \, \bar{e}_i = \bar{n}_{i-1} \times \bar{n}_i = (-\bar{n}_j^*) \times (-\bar{n}_{j-1}^*) = \sin \theta_j^* \, \bar{e}_j^* = \sin \theta_j^* \, \bar{e}_i, \quad (7)$$

cu

$$\theta_1^* = \theta_p; \; \theta_2^* = \theta_{p-1}; \; \theta_3^* = \theta_{p-2}; \; \ldots; \; \theta_j^* = \theta_i .$$

Pentru efectuarea diverselor operații vectoriale se aleg bazele de vectori unitari corespunzătoare fizic elementelor lanțului cinematic. Se pot considera triedrele nedeformabile oblice,

$$T_i \, [\bar{n}_i, \bar{e}_i, \bar{e}_{i+1}], \quad (8)$$

sau drepte,

$$T_i \, [\bar{n}_i, \bar{e}_i, \bar{n}_i \times \bar{e}_i] \quad \text{sau} \quad T_{i-1} \, [\bar{e}_i, \bar{n}_{i-1}, \bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1}], \quad (9)$$

precum și triedrele deformabile oblice,

$$T_i \quad \text{sau} \quad T_{i-1} \, [\bar{e}_i, \bar{n}_{i-1}, \bar{n}_i], \quad (10)$$

unde indicele i arată elementul E_i care are normala $\bar{n}_i$ și este cuprins între axele $\bar{e}_i$ și $\bar{e}_{i+1}$ și căruia i se atașează triedrul T_i. Cele mai indicate par să fie triedrele oblice ale căror axe sînt materializate fizic prin însăși construcția elementelor. Ele au dezavantajul că pot degenera dacă axele $\bar{e}_i$ și $\bar{e}_{i+1}$ sînt paralele. Totuși, într-un lanț de transformări vectoriale, acest inconvenient dispare chiar dacă vreunul dintre triedrele intermediare degenerează. Triedrele ortogonale nu prezintă de loc acest dezavantaj, dar introduc o axă nouă, separată de cele fizice ale elementelor, ceea ce face ca în calcule să apară mai mulți termeni.

Corespunzător triedrelor de mai sus, triedrele absolute cunoscute față de care se referă mișcările tuturor elementelor vor fi :

— triedrul bazei este triedrul fix în spațiu, format cu $\sin \alpha_0 \bar{n}_0 = \bar{e}_0 \times \bar{e}_1$, $\bar{e}_0$ și $\bar{e}_1$. S-ar putea considera simetric triedrul elementului motor $\sin \alpha_1 \bar{n}_1 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$, $\bar{e}_1$ și $\bar{e}_2$. Fiecare dintre aceste triedre degenerează dacă α_0 sau, respectiv, α_1 sînt nule, adică două din axe devin paralele ;

— triedrul axei motoare, deformabil în timp, este format cu $\sin \theta_1 \bar{e}_1 = \bar{n}_0 \times \bar{n}_1$, $\bar{n}_0$ și $\bar{n}_1$. Acesta poate lua forme instantanee degenerate cînd $\theta_1 = 0$ sau 180°.

S-ar putea lucra și cu triedrul format cu axele elementelor fix și conducător $\bar{e}_0$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, cînd, de asemenea, trebuie ca α_0 și α_1 să difere de zero.

Între versorii și unghiurile diverselor triedre avem relațiile

$$\begin{aligned} \sin \alpha_i \, \bar{n}_i &= \bar{e}_i \times \bar{e}_{i+1}, \\ \cos \alpha_i &= \bar{e}_i . \, \bar{e}_{i+1}, \\ \bar{e}_i^2 &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

sau

$$\begin{aligned} \sin \theta_i \, \bar{e}_i &= \bar{n}_{i-1} \times \bar{n}_i, \\ \cos \theta_i &= \bar{n}_{i-1} . \, \bar{n}_i, \\ \bar{n}_i^2 &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

($\times$ produs vectorial ; . produs scalar).

Din acestea se deduc

$$\bar{e}_{i-1} \cdot \bar{e}_{i+1} = \cos \alpha_{i-1} \cos \alpha_i - \sin \alpha_{i-1} \sin \alpha_i \cos \theta_i, \tag{13}$$

$$\bar{n}_{i-1} \cdot \bar{n}_{i+1} = \cos \theta_i \cos \theta_{i+1} - \sin \theta_i \sin \theta_{i+1} \cos \alpha_i.$$

Acum se poate descompune versorul $\bar{e}_{i+1}$ de pe baza de vectori unitari T_{i-1} $(\bar{n}_{i-1}, \bar{e}_{i-1}, \bar{e}_i)$, adică

$$\sin \alpha_{i-1} \bar{e}_{i+1} = a_{i+1} \bar{e}_{i-1} \times e_i + b_{i+1} \bar{e}_{i-1} + c_{i+1} \bar{e}_i. \tag{14}$$

Înmulțind scalar cu $\bar{e}_{i-1} \times \bar{e}_i$; $\bar{e}_{i-1}$ sau cu $\bar{e}_i$ și rezolvînd cele trei ecuații obținute, avem

$$a_{i+1} = \sin \alpha_i \sin \theta_i, \qquad b_{i+1} = - \sin \alpha_i \cos \theta_i, \tag{15}$$

$$c_{i+1} = \sin \alpha_{i-1} \cos \alpha_i + \cos \alpha_{i-1} \sin \alpha_i \cos \theta_i.$$

În mod asemănător se obține dezvoltarea versorului $\bar{n}_{i+1}$ de pe baza de vectori unitari T_i $[\bar{e}_i, \bar{n}_{i-1}, \bar{n}_i]$, adică

$$\sin \theta_i \bar{n}_{i+1} = g_{i+1} \bar{n}_{i-1} \times \bar{n}_i + h_{i+1} \bar{n}_{i-1} + k_{i+1} \bar{n}_i, \tag{16}$$

cu

$$g_{i+1} = \sin \theta_{i+1} \sin \alpha_i, \quad h_{i+1} = - \sin \theta_{i+1} \cos \alpha_i, \tag{17}$$

$$k_{i+1} = \sin \theta_i \cos \theta_{i+1} + \cos \theta_i \sin \theta_{i+1} \cos \alpha_i.$$

Se observă că la corespondența $\bar{e}_i \to \bar{n}_i$ și $\bar{n}_i \to \bar{e}_{i+1}$ se obțin corespondențele $\alpha_i \to \theta_{i+1}$, iar $\theta_i \to \alpha_i$.

2. COMPONENTELE VERSORILOR ÎN TRIEDRUL FIX $\bar{n}_0, \bar{e}_0, \bar{e}_1$

În continuare, utilizînd relațiile de recurență stabilite, se vor exprima toți versorii axelor și ai normalelor în funcție de bazele triedrului fix $\bar{n}_0, \bar{e}_0$ și $\bar{e}_1$, înlocuind din aproape în aproape versorii cunoscuți.

Astfel versorul axei $\bar{e}_2$ este

$$\sin \alpha_0 \bar{e}_2 = A_2 \bar{e}_0 \times \bar{e}_1 + B_2 \bar{e}_0 + C_2 \bar{e}_1, \tag{18}$$

cu

$$A_2 = a_2 = \sin \alpha_1 \sin \theta_1; \quad B_2 = b_2 = - \sin \alpha_1 \cos \theta_1,$$

$$C_2 = c_2 = \sin \alpha_0 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_0 \sin \alpha_1 \cos \theta_1, \tag{19}$$

$$C_2 + \cos \alpha_0 B_2 = \sin \alpha_0 \cos \alpha_1.$$

Versorul normalei $\bar{n}_1$ capătă dezvoltarea

$$\sin \alpha_0 \bar{n}_1 = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = D_1 \bar{e}_0 \times \bar{e}_1 + E_1 \bar{e}_0 + F_1 \bar{e}_1, \tag{20}$$

unde, înlocuind versorul $\bar{e}_2$, găsim

$$D_1 = - \frac{B_2}{\sin \alpha_1} = \cos \theta_1; \quad E_1 = \frac{A_2}{\sin \alpha_1} = \sin \theta_1,$$

$$F_1 = - \frac{A_2 \cos \alpha_0}{\sin \alpha_1} = - \cos \alpha_0 \sin \theta_1 = - \cos \alpha_0 F_1. \tag{21}$$

Versorul axei următoare $\bar{e}_3$ este

$$\sin \alpha_1 \bar{e}_3 = a_3 \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_1 + c_3 \bar{e}_2, \qquad (22)$$
$$\sin \alpha_0 \bar{e}_3 = A_3 \bar{e}_0 \times \bar{e}_1 + B_3 \bar{e}_0 + C_3 \bar{e}_1$$

sau, înlocuind pe $\bar{e}_2$ din (18, 19), avem

$$A_3 = \frac{a_2 c_3 - a_3 b_2}{\sin \alpha_1} \; ; \; B_3 = \frac{a_2 a_3 + b_2 c_3}{\sin \alpha_1}, \qquad (23)$$
$$C_3 = \frac{c_2 c_3 + b_3 \sin \alpha_0 - a_2 a_3 \cos \alpha_0}{\sin \alpha_1}$$

sau

$$A_3 = \cos \alpha_2 A_2 + \sin \alpha_2 (\cos \alpha_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2),$$
$$B_3 = \cos \alpha_2 B_2 + \sin \alpha_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \alpha_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2), \qquad (24)$$
$$C_3 = \cos \alpha_2 C_2 + \sin \alpha_2 (- \sin \alpha_0 \sin \alpha_1 \cos \theta_2 +$$
$$+ \cos \alpha_0 \cos \alpha_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \alpha_0 \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

sau, dezvoltat,

$$A_3 = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \theta_1 + \sin \alpha_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \times$$
$$\times \sin \theta_1 \cos \theta_2,$$
$$B_3 = - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_1 + \sin \alpha_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 -$$
$$- \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2,$$
$$C_3 = \sin \alpha_0 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2) + \qquad (25)$$
$$+ \cos \alpha_0 (\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_1 - \sin \alpha_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 +$$
$$+ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2),$$
$$C_3 + B_3 \cos \alpha_0 = \sin \alpha_0 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2) +$$
$$+ \cos \alpha_0 (\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_1 - \sin \alpha_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 +$$
$$+ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2),$$
$$C_3 + B_3 \cos \alpha_0 = \sin \alpha_0 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2).$$

Versorul normalei $\bar{n}_2$ este

$$\sin \alpha_0 \bar{n}_2 = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_2} \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = D_2 \bar{e}_0 \times \bar{e}_1 + E_2 \bar{e}_0 + F_2 \bar{e}_1 \qquad (26)$$

și, înlocuind pe $\bar{e}_2$ și $\bar{e}_3$, din (18), (19), (22), (25) avem

$$D_2 = \frac{B_2 C_3 - C_2 B_3}{\sin \alpha_0 \sin \alpha_2} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \alpha_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2, \qquad (27)$$

$$E_2 = \frac{(C_2A_3 - A_2C_3) + (B_2A_3 - A_2B_3)\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0 \sin\alpha_2} =$$

$$= \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\alpha_1 \cos\theta_1 \sin\theta_2,$$

$$F_2 = \frac{(A_2B_3 - B_2A_3) + (A_2C_3 - C_2A_3)\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0 \sin\alpha_2} =$$

$$= \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \sin\theta_2 - \cos\alpha_0 (\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\alpha_1 \cos\theta_1 \sin\theta_2),$$

$$F_2 + \cos\alpha_0 E_2 = \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \sin\theta_2.$$

Versorul axei $\bar{e}_4$ este

$$\sin\alpha_2 \bar{e}_4 = a_4\bar{e}_2 \times \bar{e}_3 + b_4\bar{e}_2 + c_4\bar{e}_3 \tag{28}$$

sau

$$\sin\alpha_0 \bar{e}_4 = A_4\bar{e}_0 \times \bar{e}_1 + B_4\bar{e}_0 + C_4\bar{e}_1,$$

în care se înlocuiește $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ și $\bar{e}_2 \times \bar{e}_3$ din (18), (19), (22), (25), (26), (27) astfel că avem

$$A_4 = a_4D_2 + \frac{b_4A_2 + c_4A_3}{\sin\alpha_2},$$

$$B_4 = a_4E_2 + \frac{b_4B_2 + c_4B_3}{\sin\alpha_2}, \tag{29}$$

$$C_4 = a_4F_2 + \frac{b_4C_2 + c_4C_3}{\sin\alpha_2},$$

cu

$$A_4 = \cos\alpha_3 A_3 + \sin\alpha_3 (-\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\theta_1 \cos\theta_3 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \times$$
$$\times \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \cos\alpha_1 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\alpha_2 \cos\theta_1 \times$$
$$\times \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3),$$

$$B_4 = \cos\alpha_3 B_3 + \sin\alpha_3 (\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\theta_1 \cos\theta_3 -$$
$$- \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 + \cos\alpha_1 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \tag{30}$$
$$+ \cos\alpha_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3),$$

$$C_4 = \cos\alpha_3 C_3 + \sin\alpha_3 (-\sin\alpha_0 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\theta_3 -$$
$$- \cos\alpha_0 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\theta_1 \cos\theta_3 - \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\theta_2 \times$$
$$\times \cos\theta_3 + \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 - \cos\alpha_0 \cos\alpha_2 \sin\theta_2 \times$$
$$\times \sin\theta_2 \cos\theta_3 - \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 - \cos\alpha_0$$
$$\sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3)$$

sau, dezvoltat,

$$A_4 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \sin\theta_1 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \sin\theta_1 \cos\theta_2 +$$
$$+ \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\theta_1 \sin\theta_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \times$$
$$\times \sin\theta_1 \cos\theta_3 + \sin\alpha_3 \cos\theta_3 \cos\theta_2 \sin\theta_3 - \cos\alpha_1 \sin\alpha_3 \times$$
$$\times \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 +$$
$$+ \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3,$$

$$B_4 = -\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\theta_1 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \sin\theta_1 \sin\theta_2 -$$
$$- \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \times$$
$$\times \cos\theta_1 \cos\theta_3 + \sin\alpha_3 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_3 \times$$
$$\times \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 -$$
$$- \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3, \qquad (31)$$

$$C_4 = \sin\alpha_0 [\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\theta_2 -$$
$$- \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\theta_3 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 \sin\theta_2 \sin\theta_3 -$$
$$- \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3] +$$
$$+ \cos\alpha_0 [\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\theta_1 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \times$$
$$\times \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \sin\theta_1 \sin\theta_2 -$$
$$- \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\theta_1 \cos\theta_3 - \sin\alpha_3 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 -$$
$$- \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 +$$
$$+ \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 -$$
$$- \cos\alpha_1 \sin\alpha_3 \cos\theta_1 \sin\theta_1 \sin\theta_3],$$

$$C_4 + B_4 \cos\alpha_0 = \sin\alpha_0 [\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \times$$
$$\times \cos\theta_2 - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\theta_3 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 \sin\theta_2 \sin\theta_3 -$$
$$- \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3].$$

Versorul normalei $\bar{n}_3$ este

$$\sin\alpha_0 \bar{n}_3 = \frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_3} \cdot \bar{e}_3 \times \bar{e}_4 = D_3 \bar{e}_0 \times \bar{e}_1 + E_3 \bar{e}_0 + F_3 \bar{e}_1, \qquad (32)$$

unde, înlocuind $\bar{e}_4$ din (14) și (15) și apoi $\bar{e}_2$ și $\bar{e}_3$, din (18), (19), (22) și (27) căpătăm

$$D_3 = \frac{a_4 (A_2 - A_3 \cos \alpha_2) - b_4 \sin \alpha_2 D_2}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3} =$$

$$= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \alpha_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 -$$

$$- \cos \alpha_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_1 \sin \theta_3 -$$

$$- \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3,$$

$$E_3 = \frac{a_4 (B_2 - B_3 \cos \alpha_2) - b_4 \sin \alpha_2 E_2}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_3} = \tag{33}$$

$$= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \alpha_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 -$$

$$- \cos \alpha_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_1 \sin \theta_3 +$$

$$+ \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3,$$

$$F_3 = \frac{a_4 (C_2 - C_3 \cos \alpha_2) - b_4 \sin \alpha_2 F_2}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_3} =$$

$$= \sin \alpha_0 (\sin \alpha_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_3 +$$

$$+ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3) -$$

$$- \cos \alpha_0 (- \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_1 \sin \theta_3 - \cos \alpha_2 \sin \theta_1 \times$$

$$\times \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 +$$

$$+ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \alpha_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3),$$

$$F_3 + \cos \alpha_0 E_3 = \sin \alpha_0 (\sin \alpha_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 +$$

$$+ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_3).$$

Deoarece toți acești vectori sînt unitari, mărimile scalare ale componentelor lor sînt legate între ele prin condițiile

$$A_i^2 \cdot \sin^2 \alpha_0 + B_i^2 + 2 B_i C_i \cos \alpha_0 + C_i^2 = \sin^2 \alpha_0,$$

$$D_i^2 \cdot \sin^2 \alpha_0 + \bar{E}_i^2 + 2 \bar{E}_i F_i \cos \alpha_0 + F_i^2 = \sin^2 \alpha_0. \tag{34}$$

Continuarea mai departe a determinării componentelor celorlalți versori se poate face în baza relațiilor de recurență de forma (29) sau (33), dar numărul termenilor din componente crește foarte mult. Ecuațiile de mișcare se pot scrie însă numai cu aceste determinări, utilizînd simetria în calculele față de cele două notații, simple sau stelate.

3. ECUAȚIILE GENERALE DE MIȘCARE

Din anularea componentelor conturului vectorial închis

$$s_1\bar{e}_1 + s_2\bar{e}_2 + \ldots + s_p\,\bar{e}_p + \\ + \sigma_1\bar{n}_1 + \sigma_2\bar{n}_2 + \ldots + \sigma_p\bar{n}_p = 0, \tag{35}$$

pe cele trei axe de versori $\bar{e}_0 \times \bar{e}_1 = \sin\alpha_0\bar{n}_0$, $\bar{e}_0$ și e_1 se obțin trei ecuații scalare, care conțin atît parametrii translației s_i sub formă liniară, cît și parametrii rotației θ_i cuprinși sub formă neliniară în expresiile versorilor. Acestea vor putea purta *numele impropriu de setul ecuațiilor de translație.* Pentru a utiliza avantajele calculelor simetrice, ecuația vectorială de închidere trebuie transmisă cu ajutorul versorilor din cele două notații, simple și stelate, adică

$$s_1\bar{e}_1 + s_2\bar{e}_2 + \ldots + \sigma_1\bar{n}_1 + \sigma_2\bar{n}_2 + \ldots = \\ = s_1^*\bar{e}_1^* + s_2^*\bar{e}_2^* + \ldots + \sigma_1^*\bar{n}_1^* + \sigma_1^*\bar{n}_2^* + \ldots, \tag{36}$$

deoarece

$$s_i\,\bar{e}_i = -s_j^*\,\bar{e}_j^* \quad \text{și} \quad \sigma_{i-1}\bar{n}_{i-1} = -\sigma_j^*\,\bar{n}_j^*. \tag{37}$$

Aceasta revine a exprima egalitatea a doi vectori, $\bar{R}$ și $\bar{R}^*$, fiecare reprezentînd însumarea vectorială a celor două părți din lanțul cinematic parcurse în cele două sensuri simetrice. Extremitățile inițiale ale vectorilor $\bar{R}$ sau $\bar{R}^*$ pot fi luate oriunde pe axa normală a bazei mecanismului, dar din motive de simetrie se preferă mijlocul acesteia. Extremitățile finale ale vectorilor $\bar{R}$ și $\bar{R}^*$ pot fi fixate de asemenea oriunde pe axa $\bar{e}_i + \bar{e}_j^* = 0$, dar, din aceleași motive de simetrie, se preferă mijlocul deplasării de trnslație. Deci avem

$$\bar{R}_i = \frac{\sigma_0}{2}\,\bar{n}_0 + s_1\bar{e}_1 + \sigma_1\,\bar{n}_1 + s_2\bar{e}_2 + \ldots + \frac{s_i}{2}\,\bar{e}_i \tag{38}$$

și simetric

$$\bar{R}_j^* = \frac{\sigma_0^*}{2}\,\bar{n}_0^* + s_1^*\,\bar{e}_1^* + \sigma_1^*\bar{n}_1^* + s_2^*\bar{e}_2^* + \ldots + \frac{s_j}{2}\,\bar{e}_j^*. \tag{39}$$

Ecuația vectorială de închidere devine

$$\bar{R}_i = \bar{R}_j^*, \qquad i + j = p + 1. \tag{40}$$

În unele cazuri (fig. 2) este convenabil să se lucreze cu vectorii

$$\bar{V}_i = \sigma_1\bar{n}_1 + s_2\bar{e}_2 + \sigma_2\bar{n}_2 + \ldots + \sigma_{i-1}\bar{n}_{i-1} \tag{41}$$

și

$$\bar{V}_j^* = \sigma_1^*n_1^* + s_2^*\bar{e}_2^* + \sigma_2^*\bar{n}_2^* + \ldots + \sigma_{j-1}^*\bar{n}_{j-1}^*, \tag{42}$$

astfel că

$$\overline{R}_i = \frac{\sigma_0}{2}\overline{n}_0 + s_1\overline{e}_1 + \frac{s_i}{2}\overline{e}_i + \overline{V}_i, \tag{43}$$

$$\overline{R}_j^* = \frac{\sigma_0^*}{2}\overline{n}_0^* + s_1^*\overline{e}_1^* + \frac{s_j^*}{2}\overline{e}_j^* + \overline{V}_j^*. \tag{44}$$

Ecuația vectorială de închidere (fig. 2) devine

$$\overline{V}_j^* = \overline{V}_i + \sigma_0\overline{n}_0 + s_1^*\overline{e}_0 + s_1\overline{e}_1 + s_i\overline{e}_i \tag{45}$$

sau

$$\overline{V}_i = \overline{V}_j^* + \sigma_0^*\overline{n}_0^* + s_1\overline{e}_0^* + s_1^*\overline{e}_1^* + s_j^*\overline{e}_j^*, \tag{46}$$

unde componentele vectorilor $\overline{V}_i$ sau $\overline{V}_j^*$ pe axele triedrului fix sînt

$$\sin\alpha_0\,\overline{V}_i = G_i\overline{e}_0\times\overline{e}_1 + H_i\,\overline{e}_0 + K_i\overline{e}_1, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} G_i &= \sigma_1 D_1 + s_2 A_2 + \sigma_2 D_2 + s_3 A_3 + \ldots + \sigma_{i-1} D_{i-1}, \\ H_i &= \sigma_1 E_1 + s_2 B_2 + \sigma_2 E_2 + s_3 B_3 + \ldots + \sigma_{i-1} E_{i-1}, \\ K_i &= \sigma_1 F_1 + s_2 C_2 + \sigma_2 F_2 + s_3 C_3 + \ldots + \sigma_{i-1} F_{i-1} \end{aligned} \tag{48}$$

și

$$\sin\alpha_0\,\overline{V}_j^* = G_j^*\overline{e}_0^*\times\overline{e}_1^* + H_j^*\overline{e}_0^* + K_j^*\overline{e}_1^*, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} G_j^* &= \sigma_1^* D_1^* + s_2^* A_2^* + \ldots + \sigma_{j-1}^* D_{j-1}^*, \\ H_j^* &= \sigma_1^* E_1^* + s_2^* B_2^* + \ldots + \sigma_{j-1}^* E_{j-1}^*, \\ K_j^* &= \sigma_1^* F_1^* + s_2^* C_2^* + \ldots + \sigma_{j-1}^* F_{j-1}^*. \end{aligned} \tag{50}$$

Alte ecuații se obțin din egalarea componentelor unuia dintre versorii axelor, de preferință cel median, față de cele două feluri de triedre ale bazei, simple sau stelate, adică

$$\overline{e}_i + \overline{e}_j^* = 0, \qquad i + j = p + 1. \tag{51}$$

Se obțin astfel numai două ecuații independente, deoarece, așa cum s-a mai spus, cele trei componente satisfac condiția că vectorii axelor sînt unitari. Pentru simetrie se pot păstra cele trei componente, alegînd arbitrar două dintre ele. Aceste ecuații cuprind numai parametrii de rotație θ_i și vor purta numele de setul ecuațiilor de rotații. Numărul total al ecuațiilor independente este cinci, suficient și corespunzător posibilităților unui contur închis.

Ecuațiile generale ale mecanismelor spațiale derivă deci din egalarea componentelor a doi versori contrari ai oricărei axe de cuplă (2 ec.) și din egalarea componentelor a doi vectori de poziție, rezultanți

ai celor două părți ale lanțului cinematic (3 ec.) pentru un punct de pe axa cuplei utilizate:

$$\bar{e} + \bar{e}^* = 0 \qquad \text{și} \qquad \bar{R} = \bar{R}^*. \tag{52}$$

Exprimînd acești vectori în componentele de pe axele fixe — simple sau stelate —, se obține

$$\sin \alpha_0(\bar{e}+\bar{e}^*)=x\bar{e}_0\times\bar{e}_1+y\bar{e}_0 + z\bar{e}_1 +x^*\bar{e}_0^*\times\bar{e}_1^* + y^*\bar{e}_0^* + z^*\bar{e}_1^* = \tag{53}$$

$$= (x - x^*)\,\bar{e}_0\times\bar{e}_1 + (y - z^*)\,\bar{e}_0 + (z - y^*)\,\bar{e}_1 = 0$$

și

$$\sin \alpha_0\,(\bar{R} - \bar{R}^*) = X\bar{e}_0\times\bar{e}_1 + Y\bar{e}_0 + Z\bar{e}_1 - X^*\bar{e}_0^*\times\bar{e}_1^* - Y^*\bar{e}_0^* - Z^*\bar{e}_1^* =$$

$$= (X + X^*)\,\bar{e}_0\times\bar{e}_1 + (Y + Z^*)\,\bar{e}_0 + (Z + Y^*)\,\bar{e}_1 = 0, \tag{54}$$

astfel că ecuațiile scalare de mișcare derivate din (52)—(54) vor fi

$$-\ 2\ \text{ec}: \quad x = x^*; \quad y = z^*; \quad z = y^*, \tag{55}$$

$$-\ 3\ \text{ec}: \quad X + X^* = 0; \quad Y + Z^* = 0; \quad Z + Y^* = 0. \tag{56}$$

Ecuația parametrică vectorială a axei cuplei respective este

$$\bar{r} = \bar{R} + \lambda\bar{e} = \bar{R}^* + \lambda^*\bar{e}^*, \tag{57}$$

unde $\lambda\,(\lambda^*)$ este parametrul care generează dreapta considerată.

În cazul general, ecuațiile acestei axe depind de cinci parametri. Aceștia pot fi:

— componentele versorului $\bar{e}$ pe axele de coordonate carteziene x, y, z cu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ și componentele vectorului $\bar{R}$ pe aceleași axe X, Y, Z;

— coordonatele polare ale versorului $\bar{e}$ și vectorului $\bar{R}$;

— parametrii care indică mobilitatea relativă a elementelor lanțului și care sînt cuprinși sub formă implicită în versorul $\bar{e}$ sau vectorul $\bar{R}$.

Dacă însă între cei cinci parametri variabili, considerați sub orice formă, se îndeplinește identic o relație, axa cuplei respective este supusă unei condiții, numărul parametrilor independenți se reduce la patru și mecanismul face parte din familia întîi. În mod asemănător, dacă supunem axa cuplei la mai multe condiții, familia mecanismului crește corespunzător. Astfel de situații se întîlnesc, de pildă, cînd în tot timpul mișcării versorul $\bar{e}$ este paralel cu una dintre axele de proiecție sau cînd vectorul $\bar{R}$ este cuprins într-un plan fix sau dacă versorul $\bar{e}$ și vectorul $\bar{R}$ rămîn în același plan variabil etc.

Prin repetarea operației de egalitate a componentelor altor versori de axe pot apărea ecuații suplimentare, dar acestea, poate mai simple, nu sînt independente.

Pe de altă parte, pentru că ecuațiile astfel scrise nu cuprind unghiul $\theta_i = \theta_j^*$, care apare ca un parametru auxiliar, se poate întocmi o ecuație suplimentară sub forma explicită

$$\cos\theta_i = \bar{n}_{i-1}\cdot\bar{n}_i \qquad \text{sau} \qquad \cos\theta_i + \bar{n}_j^*\cdot\bar{n}_i = 0, \tag{58}$$

din care unghiul respectiv se determină direct. Cu aceasta numărul ecuațiilor independente de rotații crește la trei. Fără această ecuație nu se poate exprima rotația completă a triedrului corpului mobil față de triedrul fix al bazei. Într-adevăr, nu poate fi prinsă în componente rotația triedrului în jurul axei $\bar{e}_1$, care altfel se poate exprima numai prin ecuația finală (58). Cunoașterea completă a rotației necesită trei componente de la cel puțin doi versori (sau trei) ai triedrului mobil.

4. ECUAȚIILE DE MIȘCARE PENTRU MECANISMUL CU TREI AXE $p = 3$

Pentru simetrie utilizăm axa mediană $2 \equiv 2^*$ (fig. 2), adică ecuațiile de mișcare se obțin din

$$\bar{e}_2 + \bar{e}_2^* = 0, \qquad \bar{R}_2 = \bar{R}_2^* \tag{59}$$

și deci

$$\begin{aligned} &A_2(\alpha_1\theta_1) - A_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*) = 0,\\ &B_2(\alpha_1\theta_1) - C_2^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\theta_1^*) = 0,\\ &C_2(\alpha_0, \alpha_1, \theta_1) - B_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*) = 0,\\ &\alpha_0 = \alpha_0^*, \end{aligned} \tag{60}$$

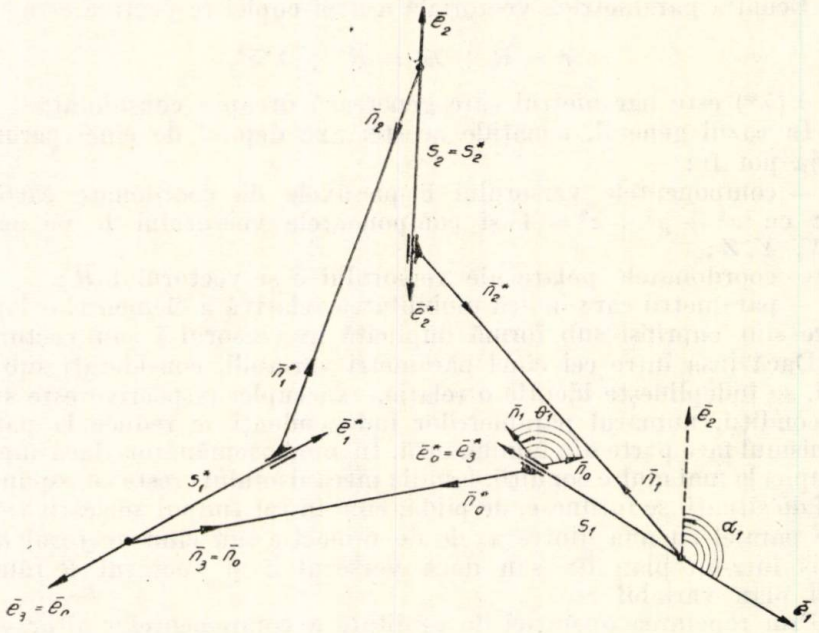


Fig. 2

$$\begin{aligned} &\sigma_0 + s_2A_2 + G_2(\theta_1\sigma_1) + G_2^*(\theta_1^*\sigma_1^*) = 0,\\ &s_1^* \sin\alpha_0 + s_2B_2 + H_2(\theta_1\sigma_1) + K_2^*(\alpha_0\theta_1^*\sigma_1^*) = 0,\\ &s_1 \sin\alpha_0 + s_2C_2 + K_2(\alpha_0\theta_1\sigma_1) + H_2^*(\theta_1^*\sigma_1^*) = 0, \end{aligned} \tag{61}$$

unde $G_2H_2K_2$ și $G_2^*H_2^*K_2^*$ sînt componentele vectorilor $\sin \alpha_0 \overline{V}_2 = \sin \alpha_0 \sigma_1 \overline{n}$ și $\sin \alpha_0 \overline{V}_2^* = \sin \alpha_0 \sigma_1^* \overline{n}_1^*$.

Atît în ecuațiile de rotații, cît și în cele de translații lipsește unghiul $\theta_2 = \theta_2^*$, pentru care se poate scrie ecuația

$$\cos \theta_2 + \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_1^* = 0 \tag{62}$$

sau

$$\sin^2 \alpha_0 \cdot \cos \theta_2 = D_1 D_1^* \sin^2 \alpha_0 + E_1 F_1^* + F_1 E_1^* + (E_1 E_1^* + F_1 F_1^*) \cos \alpha_0 \tag{63}$$

sau

$$\cos \theta_2^* = \cos \theta_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_1^* - \cos \alpha_0 \sin \theta_1 \sin \theta_1^* = \Phi_2 (\alpha_0 \theta_1 \theta_1^*). \tag{64}$$

Înlocuind funcțiile rotațiilor A, B, C și funcțiile translațiilor G, H, K, se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 \sin \theta_1 &= \sin \alpha_1^* \sin \theta_1^*, \\ -\sin \alpha_1 \cos \theta_1 &= \sin \alpha_0 \cos \alpha_1^* + \cos \alpha_0 \sin \alpha_1^* \cos \theta_1^*, \\ \sin \alpha_0 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_0 \sin \alpha_1 \cos \theta_1 &= -\sin \alpha_1^* \cos \theta_1^* \end{aligned} \tag{65}$$

și

$$\begin{aligned} &\sigma_0 + s_2 \sin \alpha_1 \sin \theta_1 \text{ (sau } s_2 \sin \alpha_1^* \sin \theta_1^*) + \sigma_1 \cos \theta_1 + \sigma_1^* \cos \theta_1^* = 0, \\ &\sin \alpha_0 s_1^* - s_2 \sin \alpha_1 \cos \theta_1 + \sigma_1 \sin \theta_1 - \sigma_1^* \cos \alpha_0 \sin \theta_1^* = 0, \\ &\sin \alpha_0 s_1 - s_2 \sin \alpha_1^* \cos \theta_1^* - \sigma_1 \cos \alpha_0 \sin \theta_1 + \sigma_1^* \sin \theta_1^* = 0. \end{aligned} \tag{66}$$

Ultimele două ecuații de rotații se transformă în

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos \alpha_0 \cos \alpha_1^* - \sin \alpha_0 \sin \alpha_1^* \cos \theta_1^*, \\ \cos \alpha_0 \cos \alpha_1 &- \sin \alpha_0 \sin \alpha_1 \cos \theta_1 = \cos \alpha_1^*. \end{aligned} \tag{67}$$

Din acestea rezultă θ_1 și θ_1^* constante. Lanțul cinematic se poate realiza numai cu cuple de translație, respectîndu-se relațiile cosinusurilor sau sinusurilor (65), (67). Dar chiar sub această formă lanțul are mobilitatea nulă, deoarece cele trei ecuații de translație livrează cele trei necunoscute s_1, s_1^* și s_2 constante.

Dacă însă $\alpha_1 = 0$ și $\alpha_1^* = 0$, ceea ce atrage și $\alpha_0 = 0$, adică toate axele sînt paralele, ecuațiile sînt verificate identic și lanțul cinematic este de familia a cincea cu două grade de mobilitate, fiecare element mișcîndu-se independent.

În aceeași situație cu $\alpha_1 = 0$, dar $\alpha_0 = \mp \alpha_1^* \neq 0$ și $\theta_1^* = 0$ sau 180°, lanțul devine de familia a patra cu un grad de mobilitate, soluție de asemenea banală.

Dacă $\theta_1 = 0$ și $\theta_1^* = 0$, lanțul este de familia a patra: $s_1^* = s_2 \dfrac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_0}$ și $s_1 = s_2 \dfrac{\sin \alpha_1^*}{\sin \alpha_0}$. Cu $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_1^* = 0$, lanțul devine plan. Fără această condiție, elementele mecanismului au mișcări plan paralele de translație.

5. ECUAȚIILE DE MIȘCARE PENTRU MECANISMELE CU CINCI AXE $p = 5$

În același mod, dar utilizînd axa mediană $3 \equiv 3^*$ (fig. 3), ecuațiile de mișcare se obțin din

$$\bar{e}_3 + \bar{e}_3^* = 0, \qquad \bar{R}_3 = \bar{R}_3^*, \tag{68}$$

adică

$$\begin{aligned} &A_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) - A_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*) = 0,\\ &B_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) - C_3^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*) = 0,\\ &C_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) - B_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*) = 0,\\ &\alpha_0 = \alpha_0^* \end{aligned} \tag{69}$$

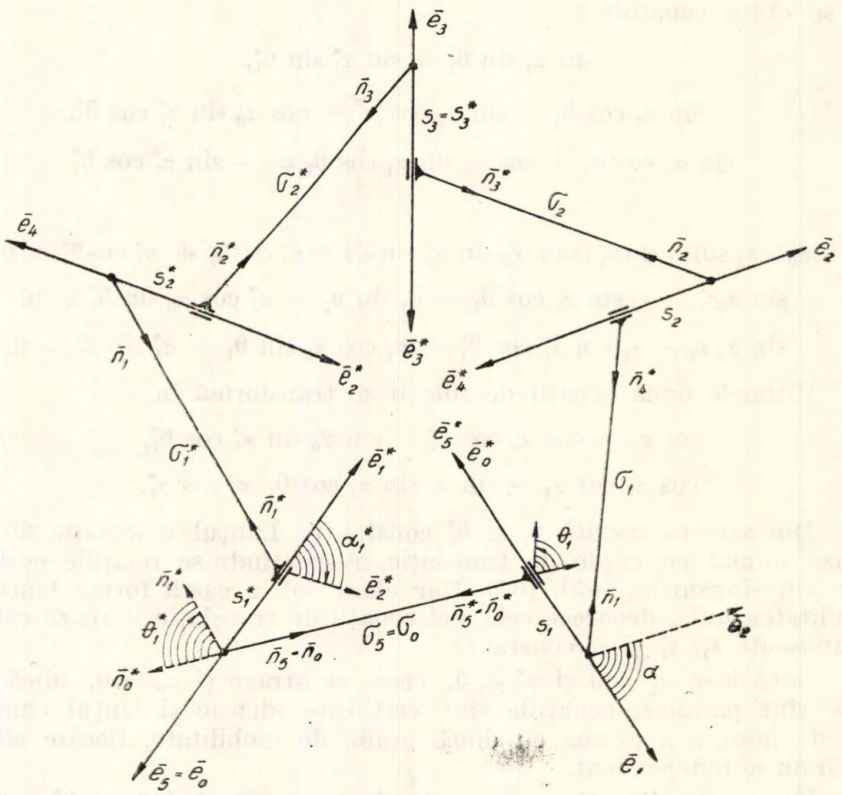


Fig. 3

și

$$\begin{aligned} &\sigma_0 + s_3A_3 + G_3(\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) + G_3^*(\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*\sigma_1^*\sigma_2^* s_2^*) = 0,\\ &s_1^* \sin\alpha_0 + s_3B_3 + H_3(\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) + K_3^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*\sigma_1^*\sigma_2^* s_2^*) = 0,\\ &s_1 \sin\alpha_0 + s_3C_3 + K_3(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) + H_3^*(\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*\sigma_1^*\sigma_2^* s_2^*) = 0, \end{aligned} \tag{70}$$

unde

$$G_3(\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) = \sigma_1 D_1 + s_2 A_2 + \sigma_2 D_2,$$
$$H_3(\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) = \sigma_1 E_1 + s_2 B_2 + \sigma_2 E_2, \tag{71}$$
$$K_3(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) = \sigma_1 F_1 + s_2 C_2 + \sigma_2 F_2$$

sînt componentele vectorului $\sin\alpha_0 \overline{V}_3 = \sin\alpha_0(\sigma_1\overline{n}_1 + s_2\overline{e}_2 + \sigma_2\overline{n}_2)$ și analog $G_3^*H_3^*K_3^*$ pentru $\sin\alpha_0\overline{V}_3^*$.

Apoi pentru determinarea unghiului $\theta_3 = \theta_3^*$ avem

$$\cos\theta_3 + \overline{n}_2 \cdot \overline{n}_2^* = 0 \tag{72}$$

sau

$$\sin^2\alpha_0 \cos\theta_3 = D_2D_2^* \cdot \sin^2\alpha_0 + E_2F_2^* + F_2E_2^* + \\ + (E_2E_2^* + F_2F_2^*)\cos\alpha_0 \tag{73}$$

sau, dezvoltat

$$\cos\theta_3 = \Phi_3(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*) =$$
$$= \sin\alpha_0 \cos\theta_3 = \sin\alpha_0(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_1^*\cos\theta_2^* +$$
$$+ \cos\theta_1\cos\theta_2\cos\alpha_1^*\sin\theta_1^*\sin\theta_2^* - \cos\alpha_1\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_1 \times$$
$$\times \cos\theta_2^* + \cos\alpha_1\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\alpha_1^*\sin\theta_1^*\sin\theta_2^*) +$$
$$+ \sin\alpha_0\cos\alpha_0(\sin\alpha_1\sin\theta_2\sin\alpha_1^*\sin\theta_2^* - \sin\theta_1\cos\theta_2 \times$$
$$\times \sin\theta_1^*\cos\theta_2^* - \cos\alpha_1\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_1^*\cos\theta_2^* -$$
$$- \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\alpha_1^*\cos\theta_1^*\sin\theta_2^* - \cos\alpha_1\cos\theta_1\sin\theta_2 \times$$
$$\times \cos\alpha_1^*\cos\theta_1^*\sin\theta_2^*) - \cos^2\alpha_0(\sin\alpha_1\sin\theta_2\sin\theta_1^*\cos\theta_2^* +$$
$$+ \sin\alpha_1\sin\theta_2\cos\alpha_1^*\cos\theta_1^*\sin\theta_2^* + \sin\theta_1\cos\theta_2\sin\alpha_1^* \times$$
$$\times \sin\theta_2^*) + \sin\theta_1\cos\theta_2\sin\alpha_1^*\sin\theta_2^* + \cos\alpha_1\cos\theta_1\sin\theta_2 \times$$
$$\times \sin\theta_1^*\cos\theta_2^* + \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\alpha_1^*\cos\theta_1^*\sin\theta_2^* +$$
$$+ \cos\alpha_1\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\alpha_1^*\cos\theta_1^*\sin\theta_2^*. \tag{74}$$

5.1. PARTICULARIZĂRI PENTRU MECANISMELE CU TREI AXE (fig. 2).

Dacă în aceste funcții se particularizează $\alpha_2 = \alpha_2^* = \theta_2 = \theta_2^* = \sigma_2 = \sigma_2^* = s_2 = s_2^* = 0$, după care se transformă s_3 în s_2, se obțin relațiile pentru mecanismul cu trei axe (59), (65). La același mecanism, utilizînd axa $3 \equiv 1^*$ sau particularizînd $\alpha_1^* = \alpha_2^* = \theta_1^* = \theta_2^* = \sigma_1^* = \sigma_2^* = s_1^* = s_2^* = 0$, se obține sistemul de ecuații de mișcare sub altă formă :

$$\overline{e}_3 + \overline{e}_1^* = 0, \qquad A_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) = 0,$$
$$B_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) = \sin\alpha_0, \tag{75}$$
$$C_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) = 0,$$

$$\overline{R}_3 = \overline{R}_1^*, \qquad \begin{aligned} &\sigma_0 + G_3(\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) = 0, \\ &s_3 \sin\alpha_0 + H_3(\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) = 0, \\ &s_1 \sin\alpha_0 + K_3(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) = 0. \end{aligned} \tag{76}$$

5.2. PARTICULARIZĂRI PENTRU MECANISMELE CU PATRU AXE (fig. 4).

Față de axa mediană $3 \equiv 2^*$ (sau $(2 \equiv 3^*)$, ecuațiile de mișcare sînt

$$\begin{aligned} &A_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) - A_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*) = 0, \\ &B_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) - C_2^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\theta_1^*) = 0, \\ &C_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) - B_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*) = 0, \\ &\alpha_0 = \alpha_0^* \end{aligned} \tag{77}$$

și

$$\begin{aligned} &\sigma_0 + s_3 A_3 + G_3(\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) + G_2^*(\theta_1^*\sigma_1^*) = 0, \\ &s_1 \sin\alpha_0 + s_3 B_3 + H_3(\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) + K_2^*(\alpha_0^*\theta_1^*\sigma_1^*) = 0, \\ &s_1 \sin\alpha_0 + s_3 C_3 + K_3(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 s_2) + H_2^*(\theta_1^*\sigma_1^*) = 0. \end{aligned} \tag{78}$$

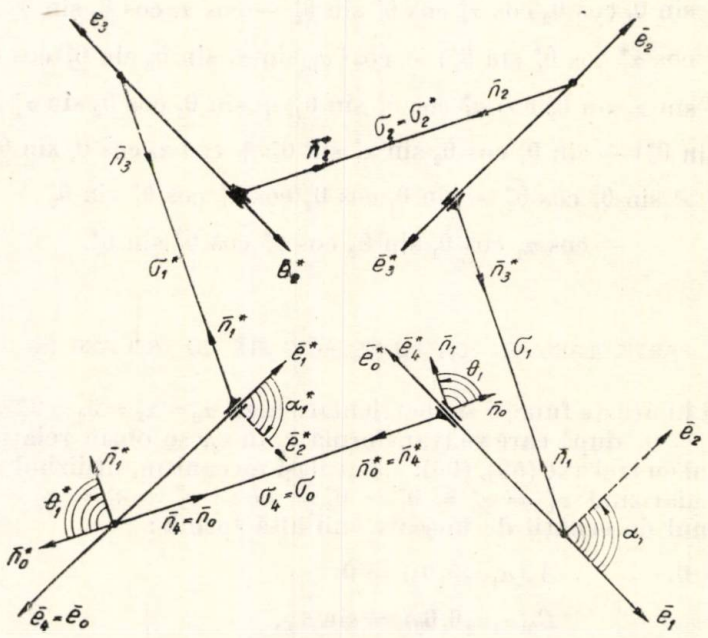


Fig. 4

Aceste ecuații se pot obține din cele anterioare prin particularizarea $\bar{e}_2^* \equiv \bar{e}_3^*$, $\alpha_2^* = \sigma_2^* = \theta_2^* = s_2^* = 0$ și apoi transformarea $s_3^* = s_3$ în s_2^*.

6. ECUAȚIILE DE MIȘCARE PENTRU MECANISMELE CU ȘAPTE AXE $p = 7$

Pentru acestea se utilizează axa mediană $4 \equiv 4^*$ (fig. 5), astfel că ecuațiile de mișcare se obțin din

$$\bar{e}_4 + \bar{e}_4^* = 0, \qquad \bar{R}_4 = \bar{R}_4^*, \tag{79}$$

adică

$$\begin{aligned} &A_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) - A_4^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\alpha_3^*\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*) = 0,\\ &B_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) - C_4^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\alpha_2^*\alpha_3^*\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*) = 0,\\ &C_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) - B_4^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\alpha_3^*\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*) = 0 \end{aligned} \tag{80}$$

și

$$\begin{aligned} &\sigma_0 + D_4A_4 + G_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) +\\ &+ G_4^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*\sigma_1^*\sigma_2^*\sigma_3^* s_2^* s_3^*) = 0,\\ &s_1^* \sin\alpha_0 + s_4B_4 + H_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) +\\ &+ K_4^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*\sigma_1^*\sigma_2^*\sigma_3^* s_2^* s_3^*) = 0,\\ &s_1 \sin\alpha_0 + s_4C_4 + K_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) +\\ &+ H_4^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*\sigma_1^*\sigma_2^*\sigma_3^* s_2^* s_3^*) = 0, \end{aligned} \tag{81}$$

unde

$$\begin{aligned} &G_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) = \sigma_1D_1 + \sigma_1D_2 + \sigma_3D_3 + s_2A_2 + s_3A_3,\\ &H_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) = \sigma_1E_1 + \sigma_2E_2 + \sigma_3E_3 + s_2B_2 + s_3B_3,\\ &K_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) = \sigma_1F_1 + \sigma_2F_2 + \sigma_3F_3 + s_2C_2 + s_3C_3 \end{aligned} \tag{82}$$

sînt componentele vectorului $\sin\alpha_0 \bar{V}_4 = \sin\alpha_0(\sigma_1\bar{n}_1 + s_2\bar{e}_2 + \sigma_2\bar{n}_2 + s_3\bar{e}_3 + \sigma_3\bar{n}_3)$ și analog G_4^*, H_4^*, K_4^* pentru $\sin\alpha_0\bar{V}_4^*$.

Pentru determinarea unghiului $\theta_4 = \theta_4^*$ avem

$$\cos\theta_4 + \bar{n}_3 \cdot \bar{n}_3^* = 0 \tag{83}$$

sau

$$\sin^2\alpha_0 \cos\theta_4 = D_3D_3^* \sin^2\alpha_0 + E_3F_3^* + F_3E_3^* + (E_3E_3^* + F_3F_3^*)\cos\alpha_0 \tag{84}$$

sau

$$\cos\theta_4 = \Phi(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*). \tag{85}$$

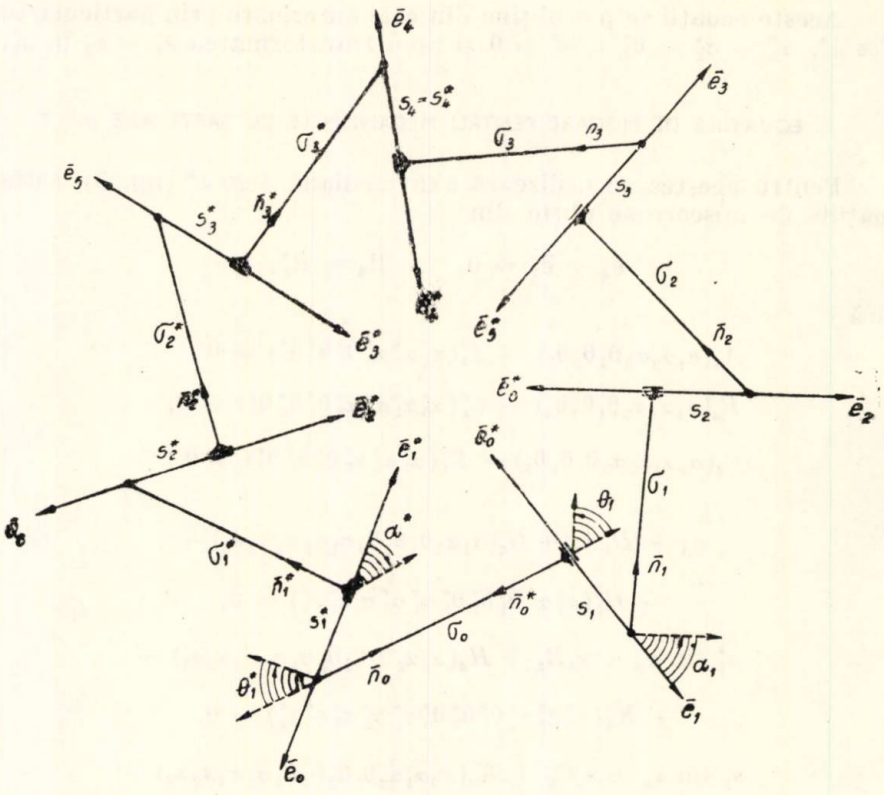


Fig. 5

6.1. PARTICULARIZĂRI PENTRU MECANISMELE CU ȘASE AXE $p = 6$

Ecuațiile de mișcare (fig. 6) se obțin din

$$\bar{e}_4 + \bar{e}_3^* = 0, \qquad \bar{R}_4 = \bar{R}_3^*, \tag{86}$$

adică

$$\begin{aligned} &A_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) - A_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*) = 0, \\ &B_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) - C_3^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*) = 0, \\ &C_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) - B_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*) = 0 \end{aligned} \tag{87}$$

și

$$\begin{aligned} &\sigma_0 + s_4A_4 + G_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2s_3) + \\ &\qquad + G_3^*(\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2\sigma_1^*\sigma_2^*s_2^*) = 0, \\ &s_1^*\sin\alpha_0 + s_4B_4 + H_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\, s_2s_3) + \\ &\qquad + K_3^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*\sigma_1^*\sigma_2^*s_2^*) = 0, \end{aligned} \tag{88}$$

$$s_1 \sin\alpha_0 + s_4 C_4 + K_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ s_2 s_3) +$$

$$+ H_3^*(\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*\sigma_1^*\sigma_2^* s_2^*) = 0.$$

Aceleași ecuații se pot obține din cele anterioare prin particularizarea $\bar{e}_3^* \equiv \bar{e}_4^*$, $\alpha_3^* = \sigma_3^* = \theta_3^* = s_3^* = 0$ și transformarea $s_4 = s_4^*$ în s_3^*.

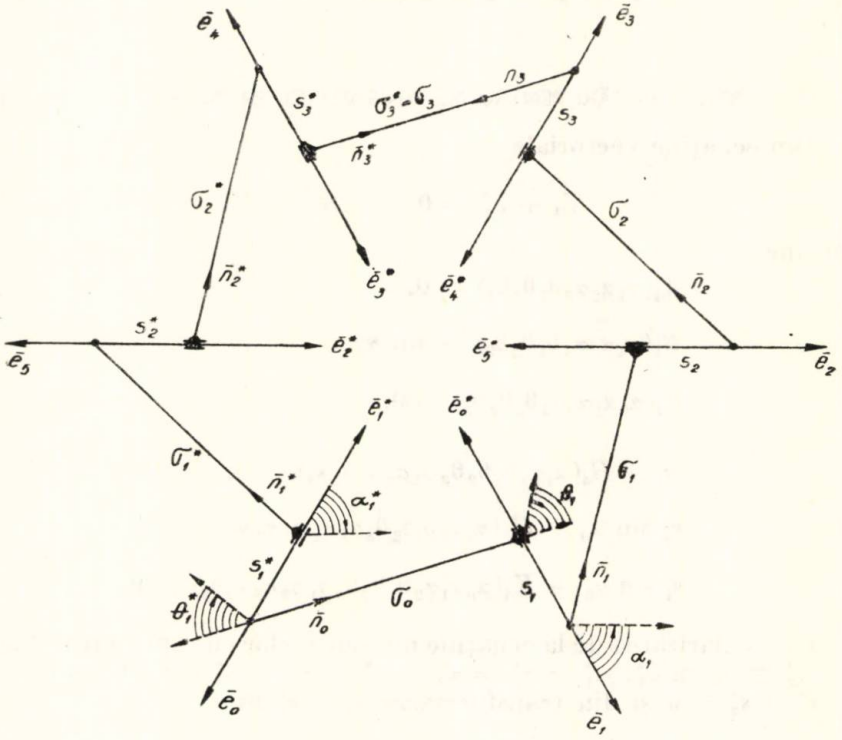


Fig. 6

6.2 PARTICULARIZĂRI PENTRU MECANISMELE CU CINCI AXE $p = 5$ (fig. 3)

Din ecuațiile vectoriale

$$\bar{e}_4 + \bar{e}_2^* = 0, \qquad \bar{R}_4 = \bar{R}_2^* \tag{89}$$

avem

$$A_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) - A_2^*(\alpha_1^*\theta_1) = 0,$$

$$B_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) - C_2^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\theta_1^*) = 0, \tag{90}$$

$$C_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) - B_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*) = 0$$

şi

$$\sigma_0 + s_4 A_4 + G_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) + G_2^*(\theta_1^*\sigma_1^*) = 0,$$

$$s_1^* \sin\alpha_0 + s_4 B_4 + H_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) + K_2^*(\alpha_0^*\theta_1^*\sigma_1^*) = 0, \quad (91)$$

$$s_1 \sin\alpha_0 + s_4 C_4 + K_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) + H_2^*(\theta_1^*\sigma_1^*) = 0.$$

În ecuaţiile mecanismelor cu şapte axe se particularizează $\bar{e}_2^* \equiv \bar{e}_3^* \equiv \bar{e}_4^*$, $\alpha_2^* = \alpha_3^* = \sigma_2^* = \sigma_3^* = \theta_2^* = \theta_3^* = s_2^* = s_3^* = 0$ şi se transformă $s_4 = s_4^*$ în s_2^*.

6.3. PARTICULARIZĂRI PENTRU MECANISMELE CU PATRU AXE $p=4$ (fig. 4).

Din ecuaţiile vectoriale

$$\bar{e}_4 + \bar{e}_1^* = 0, \qquad \bar{R}_4 = \bar{R}_1^* \quad (92)$$

se obţine

$$A_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) = 0,$$

$$B_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) = \sin\alpha_0, \quad (93)$$

$$C_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) = 0.$$

şi

$$\sigma_0 + G_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) = 0,$$

$$s_4 \sin\alpha_0 + H_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\alpha_1\sigma_2\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) = 0, \quad (94)$$

$$s_1 \sin\alpha_0 + K_4(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) = 0.$$

Particularizarea de la ecuaţiile mecanismelor cu şapte axe se face prin $\bar{e}_1^* \equiv \bar{e}_2^* \equiv \bar{e}_3^* \equiv \bar{e}_4^*$, $\alpha_1^* = \alpha_2^* = \alpha_3^* = \sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_3^* = 0$, $\theta_1^* = \theta_2^* = \theta_3^* = s_1^* = s_2^* = s_3^* = 0$ şi din transformarea $s_4 = s_4^*$ în s_1^*.

7. UTILIZAREA TRIEDRULUI DEFORMABIL $\bar{E}_1\ \bar{N}_0\ \bar{N}_1$

Acest triedru, ca şi cel anterior (2), poate servi pentru exprimarea ecuaţiilor de mişcare ale oricăror mecanisme, dar din motive de simetrie convine mecanismelor cu număr par de axe, cu patru sau şase axe. Numai în cazul derivării vectorilor cunoscuţi prin componentele lor în acest triedru trebuie să se ţină seama de variabilitatea în timp a triedrului.

Versorii axelor cuplelor şi ai normalelor elementelor se pot exprima în funcţie de versori de bază $\bar{e}$, $\bar{n}_0$, $\bar{n}_1$ prin simpla corespondenţă arătată anterior $\bar{e}_i \to \bar{n}_i$ şi $\bar{n}_i \to \bar{e}_{i+1}$, cu $\alpha_i \to \theta_{i-1}$ şi $\theta_i \to \alpha_{i-1}$.

Utilizînd aceleaşi notaţii, avem

$$\sin\theta_1\bar{n}_2 = A_2\bar{n}_0 \times \bar{n}_1 + B_2\bar{n}_0 + C_2\bar{n}_1,$$

$$\sin\theta_1\bar{n}_3 = A_3\bar{n}_0 \times \bar{n}_1 + B_3\bar{n}_0 + C_3\bar{n}_1,$$

$$\begin{aligned}
\sin\theta_1\overline{n}_4 &= A_4\overline{n}_0 \times \overline{n}_1 + B_4\overline{n}_0 + C_4\overline{n}_1,\\
\sin\theta_1\overline{e}_2 &= D_2\overline{n}_0 \times \overline{n}_1 + E_2\overline{n}_0 + F_2\overline{n}_1,\\
\sin\theta\overline{e}_3 &= D_3\overline{n}_0 \times \overline{n}_1 + E_3\overline{n}_0 + F_3\overline{n}_1,\\
\sin\theta\overline{e}_4 &= D_4\overline{n}_0 \times \overline{n}_1 + E_4\overline{n}_0 + F_4\overline{n}_1.
\end{aligned} \tag{95}$$

Componentele versorilor normalelor se obțin prin corespondența $\overline{e}_i \to \overline{n}_i$, adică din (18), (19), (22 — (25), (28) — (31), astfel:

$$\begin{aligned}
&A_2 = \sin\theta_2 \sin\alpha_1, \qquad B_2 = -\sin\theta_1 \cos\alpha_1,\\
&C_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\alpha_1,\\
&C_2 + \cos\theta_1 B_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2,
\end{aligned} \tag{96}$$

apoi

$$\begin{aligned}
A_3 &= \sin\theta_2 \cos\theta_3 \sin\alpha_1 + \sin\theta_3 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2,\\
B_3 &= -\sin\theta_2\cos\theta_3 \cos\alpha_1 + \sin\theta_3 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 - \cos\theta_2 \sin\theta_3 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2,\\
C_3 &= \sin\theta_1(\cos\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\alpha_2) + \cos\theta_1(\sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\alpha_1 -\\
&\quad - \sin\theta_3 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_3 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2),\\
C_3 &+ \cos\theta_1 B_3 = \sin\theta_1 (\cos\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\alpha_2),
\end{aligned} \tag{97}$$

de asemenea

$$\begin{aligned}
A_4 = {} & \sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 \sin\alpha_1 + \cos\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 +\\
& + \sin\theta_3 \cos\theta_4 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 - \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \sin\alpha_1 \cos\alpha_3 +\\
& + \sin\theta_4 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 - \cos\theta_2 \sin\theta_4 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 +\\
& + \cos\theta_3 \sin\theta_4 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 + \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_4 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3,\\
B_4 = {} & -\sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 \cos\alpha_1 + \sin\theta_3 \cos\theta_4 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 -\\
& - \cos\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 +\\
& + \sin\theta_4 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 + \cos\theta_2 \sin\theta_4 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 +\\
& + \cos\theta_3 \sin\theta_4 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 -\\
& - \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_4 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3,
\end{aligned} \tag{98}$$

$$C_4 = \sin\theta_1 [\cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 - \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \cos\alpha_2 -$$
$$- \cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\alpha_3 + \sin\theta_2 \sin\theta_4 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 -$$
$$- \sin\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_4 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3] +$$
$$+ \cos\theta_1[\sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 \cos\alpha_1 + \cos\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 -$$
$$- \sin\theta_3 \cos\theta_4 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 - \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 -$$
$$- \sin\theta_4 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 - \cos\theta_3 \sin\theta_4 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 +$$
$$+ \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_4 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 -$$
$$- \cos\theta_2 \sin\theta_4 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3],$$
$$C_4 + \cos\theta_1 B_4 = \sin\theta_1[\cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 - \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \cos\alpha_2 -$$
$$- \cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\alpha_3 + \sin\theta_2 \sin\theta_4 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 -$$
$$- \sin\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_4 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3].$$

Componentele versorilor axelor se determină prin corespondența $\overline{n}_i \to \overline{e}_{i+1}$ (se transformă de asemenea $D_i\, E_i\, F_i$ în $D_{i+1}\, E_{i+1}\, F_{i+1}$), adică din (20) — (21), (26) — (27), (32) — (33), astfel:

$$D_2 = \cos\alpha_1, \qquad E_2 = \sin\alpha_1, \tag{99}$$
$$F_2 = -\cos\theta_1 \sin\alpha_1 = -\cos\theta_1 E_2,$$

apoi

$$D_3 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \cos\theta_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2,$$
$$E_3 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\theta_2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2,$$
$$F_3 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\alpha_2 - \cos\theta_1 (\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\theta_2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2),$$
$$F_3 + \cos\theta_1 E_3 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\alpha_2, \tag{100}$$

de asemenea

$$D_4 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 - \cos\theta_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 -$$
$$- \cos\theta_3 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 + \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 -$$
$$- \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3,$$
$$E_4 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \cos\theta_2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 -$$
$$- \cos\theta_3 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 - \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\alpha_1 \sin\alpha_3 +$$
$$+ \cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3, \tag{101}$$

$$F_4 = \sin\theta_1 (\sin\theta_2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 + \cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin\alpha_3 +$$
$$+ \sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3) + \cos\theta_1 (\sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\alpha_1 \sin\alpha_3 +$$
$$+ \cos\theta_3 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 - \cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 -$$
$$- \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 - \cos\theta_2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3),$$

$$F_4 + \cos\theta_1 E_4 = \sin\theta_1 (\sin\theta_2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 + \sin\theta_2 \cos\theta_3 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 +$$
$$+ \cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin\alpha_3).$$

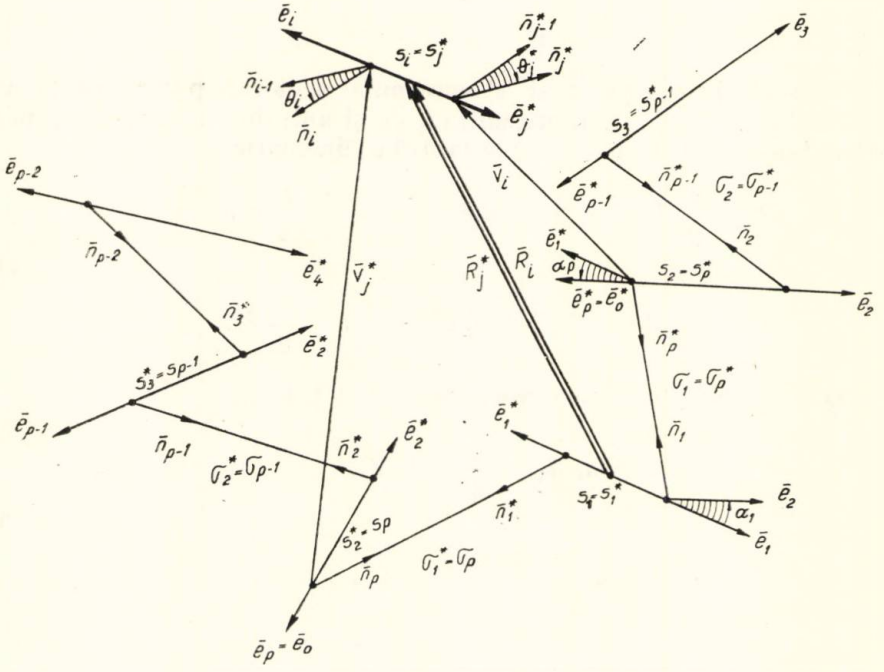


Fig. 7

Pentru simetria lanțului cinematic în cazul acestui triedru, notația stelată corespunzătoare parcurgerii conturului în sensul acelor de ceasornic diferă de cea anterioară. Astfel (fig. 7) cu $i + j = p + 2$ avem

$$\bar{e}_1^* = -\bar{e}_1, \qquad \bar{e}_2^* = -\bar{e}_p \qquad \bar{e}_3^* = -\bar{e}_{p-1}, \qquad (102)$$
$$\bar{e}_j^* = -\bar{e}_i$$

$$\bar{n}_1^* = -\bar{n}_p, \qquad \bar{n}_2^* = -\bar{n}_{p-1}, \qquad \bar{n}_3^* = -\bar{n}_{p-2} \qquad (103)$$
$$\bar{n}_j^* = -\bar{n}_{i-1}$$

$$\alpha_1^* = \alpha_p, \qquad \alpha_2^* = \alpha_{p-1}, \qquad \alpha_3^* = \alpha_{p-2}, \qquad \alpha_j^* = \alpha_{i-1}, \tag{104}$$

$$\theta_1^* = \theta_1, \qquad \theta_2^* = \theta_p, \qquad \theta_3^* = \theta_{p-1}, \qquad \theta_j^* = \theta_i, \tag{105}$$

$$s_1^* = s_1, \qquad s_2^* = s_p, \qquad s_3^* = s_{p-1}, \qquad s_j^* = s_i, \tag{106}$$

$$\sigma_1^* = \sigma_p, \qquad \sigma_2^* = \sigma_{p-1}, \qquad \sigma_3 = \sigma_{p-2}, \qquad \sigma_j^* = \sigma_{i-1}. \tag{107}$$

Vectorii de poziție $\overline{R}_i$ și $\overline{R}_j^*$ corespund aceloraşi puncte de pe axele $\overline{e}_1 = -\overline{e}_1^*$ şi $\overline{e}_i = -\overline{e}_j^*$, reprezentînd, ca şi anterior, însumările separate a celor două părţi de corpuri ale lanţului cinematic :

$$\overline{R}_i = \frac{s_i}{2}\overline{e}_i + \sigma_1 \overline{n}_1 + s_2\overline{e}_2 + \ldots + \frac{s_i}{2}\overline{e}_i,$$

$$\overline{R}_j^* = \frac{s_i^*}{2}\overline{e}_1^* + \sigma_1^* \overline{n}_1^* + s_2^* \overline{e}_2^* + \ldots + \frac{s_j^*}{2}\overline{e}_j^*. \tag{108}$$

Dacă se întrebuinţează vectorii $\overline{V}_i$ şi $\overline{V}_j^*$, avem

$$\overline{R}_i = \frac{s_1}{2}\overline{e}_1 + \sigma_1 \overline{n}_1 + \frac{s_i}{2}\overline{e}_i + \overline{V}_i,$$

$$\overline{R}_j^* = \frac{s_1^*}{2}\overline{e}_1^* + \sigma_1^* \overline{n}_1^* + \frac{s_j}{2}\overline{e}_j^* + \overline{V}_j^*, \tag{109}$$

cu

$$\overline{V}_i = s_2\overline{e}_2 + \sigma_2\overline{n}_2 + \ldots + \sigma_{i-1}\overline{n}_{i-1},$$

$$\overline{V}_j^* = s_2^*\overline{e}_2^* + \sigma_2^*\overline{n}_2^* + \ldots + \sigma_{j-1}^*\overline{n}_{j-1}^*. \tag{110}$$

Cele cinci ecuaţii de mişcare se obţin din egalarea componentelor versorilor opuşi ai aceloraşi axe, adică

$$\overline{e}_i + \overline{e}_j^* = 0, \tag{111}$$

şi din egalarea componentelor vectorilor de poziţie sumatori,

$$\overline{R}_i = \overline{R}_j^*, \qquad i + j = p + 2, \tag{112}$$

sau, respectiv,

$$\sigma_1^*\overline{n}_0 + s_1\overline{e}_1 + \sigma_1\overline{n}_1 + s_i\overline{e}_i + \overline{V}_i = \overline{V}_j^*, \tag{113}$$

unde

$$\sin\theta_1 \, \overline{V}_i = G_i \overline{n}_0 \times \overline{n}_1 + H_i \overline{n}_0 + K_i \overline{n}_1, \tag{114}$$

cu

$$\begin{aligned} G_i &= s_2 D_2 + \sigma_2 A_2 + s_3 D_3 + \ldots + \sigma_{i-1} A_{i-1}, \\ H_i &= s_2 E_2 + \sigma_2 B_2 + s_3 E_3 + \ldots + \sigma_{i-1} B_{i-1}, \\ K_i &= s_2 F_2 + \sigma_2 C_2 + s_3 F_3 + \ldots + \sigma_{i-1} C_{i-1}. \end{aligned} \tag{115}$$

Relații simetrice vor fi pentru $\sin\theta_1 \, \overline{V}_j^*$.

8. ECUAȚIILE DE MIȘCARE PENTRU MECANISMELE CU PATRU AXE $p = 4$

Utilizînd (fig. 8) axa mediană $3 \equiv 3^*$, avem

$$\overline{e}_3 + \overline{e}_3^* = 0, \qquad \overline{R}_3 = \overline{R}_3^* \tag{116}$$

sau

$$\begin{aligned} D_3(\alpha_1\alpha_2\theta_2) &= D_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_2^*), \\ E_3(\alpha_1\alpha_2\theta_2) &= F_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_2^*\theta_1^*), \\ F_3(\alpha_1\alpha_2\theta_2\theta_1) &= E_3^*(\alpha_1\alpha_2\theta_2), \\ \theta_1 &= \theta_1^* \end{aligned} \tag{117}$$

și

$$\begin{aligned} s_1 + s_3 D_3 + G_3(\alpha_1\theta_2\sigma_2 s_2) + G_3^*(\alpha_1^*\theta_2^*\sigma_2^* s_2^*) &= 0, \\ \sigma_1^* \sin\theta_1 + s_3 E_3 + H_3(\alpha_1\theta_2 s_3) + K_3^*(\alpha_1^*\theta_2^*\theta_2^*\sigma_2^* s_2^*) &= 0, \\ \sigma_1 \sin\theta_1 + s_3 F_3 + K_3(\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_2 s_2) + H_3^*(\alpha_1^*\theta_2^*\sigma_2^* s_2^*) &= 0, \end{aligned} \tag{118}$$

unde $G_3 = s_2 D_2 + \sigma_2 A_2$, $H_3 = s_2 E_2 + \sigma_2 B_2$, $K_3 = s_2 F_2 + \sigma_2 C_2$ sînt componentele vectorului $\sin\theta_1 \overline{V}_3$.

Din aceste ecuații lipsește unghiul $\theta_3 = \theta_3^*$, iar în primele ecuații din cele două grupuri de ecuații lipsește și unghiul $\theta_1 = \theta_1^*$. Acest unghi este însă dat, fiind unghiul manivelei conducătoare.

8.1. PARTICULARIZĂRI PENTRU MECANISMELE CU TREI AXE $p = 3$

Întrebuințînd axa $3 \equiv 2^*$ pentru scrierea ecuațiilor, avem

$$\overline{e}_3 + \overline{e}_2^* = 0, \qquad \overline{R}_3 = \overline{R}_2^* \tag{119}$$

sau

$$\begin{aligned} D_3(\alpha_1\alpha_2\theta_2) &= D_2^*(\alpha_1^*), \\ E_3(\alpha_1\alpha_2\theta_2) &= F_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*), \\ F_3(\alpha_1\alpha_2\theta_2\theta_1) &= E_2^*(\alpha_1^*) \end{aligned} \tag{120}$$

şi

$$
\begin{aligned}
&s_1 + s_3 D_3 + G_3(\alpha_1\theta_2\sigma_2 s_2) = 0,\\
&\sigma_1^* \sin\theta_1 + s_3 E_3 + H_3\,(\alpha_1\theta_2\sigma_2\, s_2) = 0,\\
&\sigma_1 \sin\theta_1 = s_3 F_3 + K_3(\alpha_1\theta_1\theta_2\sigma_2\, s_2) = 0.
\end{aligned}
\tag{121}
$$

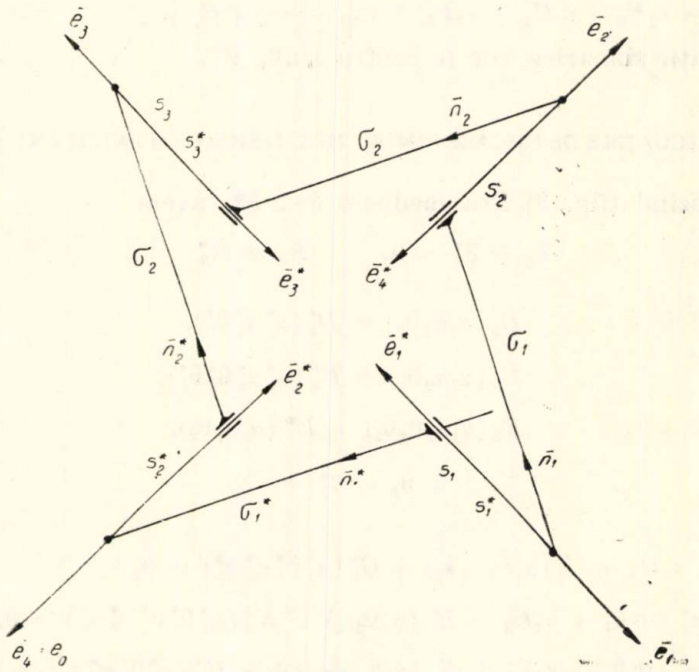


Fig. 8

Această particularizare se obţine din mecanismul cu patru elemente, luînd $\bar{e}_2^* \equiv \bar{e}_3^*$, $\alpha_2^* = \theta_2^* = \sigma_2^* = s_2^* = 0$ (fig. 8) şi transformînd $s_3 \to s_2^*$ şi $\theta_3 \to \theta_2^*$.

9. ECUAŢIILE DE MIŞCARE PENTRU MECANISMELE CU ŞASE AXE $p = 6$

În acelaşi mod, dar utilizînd (fig. 9) axa mediană $4 \equiv 4^*$, avem

$$
\bar{e}_4 + \bar{e}_4^* = 0, \qquad \bar{R}_4 = \bar{R}_4^* \tag{122}
$$

sau

$$
\begin{aligned}
&D_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\,\theta_2\theta_3) = D_4^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\alpha_3^*\theta_2^*\theta_3^*),\\
&E_4(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\theta_2\,\theta_3) = F_4^*\,(\alpha_1^*\,\alpha_2^*\,\alpha_3^*\theta_1^*\,\theta_2^*\,\theta_3^*),\\
&F_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) = E_4^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\alpha_3^*\theta_2^*\theta_3^*)
\end{aligned}
\tag{123}
$$

și

$$
\begin{aligned}
&s_1 + s_4 D_4 + G_4(\alpha_1\alpha_2\theta_2\theta_3\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) + \\
&\quad + G_4^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_2\theta_3\sigma_2^*\sigma_3^* s_2^* s_3^*) = 0, \\
&G_1^* \sin\theta_1 + s_4 E_4 + H_4(\alpha_1\alpha_2\theta_2\theta_3\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) + \\
&\quad + K_4^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*\sigma_2^*\sigma_3^* s_2^* s_3^*) = 0, \\
&\sigma_1 \sin\theta_1 + s_4 F_4 + K_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) + \\
&\quad + H_4^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_2^*\theta_3^*\sigma_2^*\sigma_3^* s_2^* s_3^*) = 0,
\end{aligned}
\tag{124}
$$

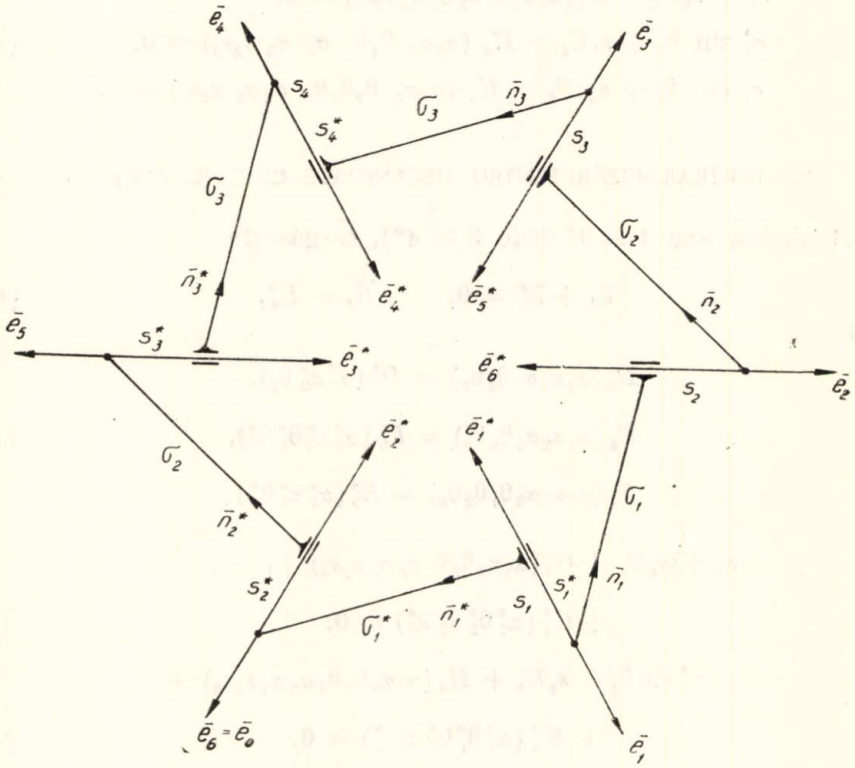


Fig. 9

unde

$$
\begin{aligned}
G_4 &= s_2 D_2 + \sigma_2 A_2 + s_3 D_3 + \sigma_3 A_3; \\
H_4 &= s_2 E_2 + \sigma_2 B_2 + s_3 E_3 + \sigma_3 B_3, \\
K_4 &= s_2 F_2 + \sigma_2 C_2 + s_3 F_3 + \sigma_3 C_3
\end{aligned}
$$

sînt componentele vectorului $\sin\theta_1 \overline{V}_4$.

9.1. PARTICULARIZĂRI PENTRU MECANISMELE CU PATRU AXE $p = 4$

Referindu-ne la axa mediană $4 \equiv 2^*$, avem

$$\bar{e}_4 + \bar{e}_2^* = 0, \qquad \bar{R}_4 = \bar{R}_2^* \tag{125}$$

sau

$$\begin{aligned} D_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_2\theta_3) &= D_2^*(\alpha_1^*), \\ E_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_2\theta_3) &= F_2^*(\alpha_1^*\theta_2^*), \\ F_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) &= E_2^*(\alpha_1^*) \end{aligned} \tag{126}$$

şi

$$\begin{aligned} &s_1 + s_4 D_4 + G_4(\alpha_1\alpha_2\theta_2\theta_3\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) = 0, \\ &\sigma_1^* \sin\theta_1 + s_4 E_4 + H_4(\alpha_1\alpha_2\ \theta_2\theta_3\ \sigma_2\ \sigma_3\ s_2 s_3) = 0, \\ &\sigma_1 \sin\theta_1 + s_4 F_4 + K_4(\alpha_1\alpha_2\ \theta_1\theta_2\theta_3\ \sigma_2\sigma_3\ s_2 s_3) = 0. \end{aligned} \tag{127}$$

9.2. PARTICULARIZĂRI PENTRU MECANISMELE CU CINCI AXE $p = 5$.

Utilizînd axa $4 \equiv 3^*$ (sau $3 \equiv 4^*$), se găseşte

$$\bar{e}_4 + \bar{e}_3^* = 0, \qquad \bar{R}_4 = \bar{R}_3^*, \tag{128}$$

adică

$$\begin{aligned} D_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_2\theta_3) &= D_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_2), \\ E_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_2\theta_3) &= F_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*), \\ F_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\theta_1\theta_2\theta_3) &= E_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_2^*) \end{aligned} \tag{129}$$

şi

$$\begin{aligned} &s_1 + s_4 D_4 + G_4(\alpha_1\alpha_2\theta_2\theta_3\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) + \\ &\quad + G_3^*(\alpha_1^*\theta_2^*\sigma_2^* s_2^*) = 0, \\ &\sigma_1^* \sin\theta_1 + s_4 E_4 + H_4(\alpha_1\alpha_2\theta_2\theta_3\sigma_2\sigma_3 s_2 s_3) + \\ &\quad + K_3^*(\alpha_1^*\theta_1^*\theta_2^*\sigma_2^* s_2^*) = 0, \\ &\sigma_1 \sin\theta_1 + s_4 F_4 + K_4(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2\theta_3\sigma_2\sigma_3\ s_2 s_3) + \\ &\quad + H_3^*(\alpha_1^*\theta_2^*\sigma_2^* s_2^*) = 0. \end{aligned} \tag{130}$$

Dezvoltările obţinute şi particularizările utilizate confirmă simplificările de determinare vectorială a ecuaţiilor de mişcare la mecanismele tridimensionale. Se obţin direct ecuaţiile independente adecvate diferitelor probleme ale mecanismelor tridimensionale: constrîngeri pasive, familii de mecanisme, locuri geometrice, probleme de analiză şi sinteză etc.

Primită la redacţie la 4 martie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. R. S. Hartenberg, J. Denavit, *Kinematic Synthesis of Linkages*, Mc Hill. Book Comp., 1964.
2. Christian Pelecudi, *Bazele analizei mecanismelor*, București, Edit. Academiei, 1967.
3. J. S. Beggs, *Advanced mechanism.* New York, Macmillan, 1966.
4. V. A. Zinoviev, *Rostransvennte mehanizmi s nizșimi parami*, Moskva, Gostehnizdat, 1966.
5. M. A. Chace, *Mechanism Analysis by Vector Mathematics*, Trans. 7 th Conf. Mech. Purdue University, Lafayette, 1962.
6. H. Wörle, *Getriebeanalytische und getriebesinthetische Unterlagen für den Entwurf zwangläufiger insbesondere viergelenkiger Raumkurbelgetriebe allgemeiner und spezieller Art*, Diss. T. H. München, 1955.
7. R. Voinea, M. Atanasiu, *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*, București, Edit. tehnică, 1964.
8. A. H. Soni, *Existent Criteria of one General Constraint Mechanism*, Thesis Oklahoma State University. Stillwater, 1967.

CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL ÎMBINĂRILOR PRIN MANDRINARE LISĂ SOLICITATE AXIAL LA ÎNTINDERE SAU COMPRESIUNE. I

de A. PAVEL
Institutul de petrol, gaze
și geologie, București

Se prezintă o metodă analitică pentru calculul de rezistență la smulgere al îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune, folosite în construcția schimbătoarelor de căldură destinate diferitelor ramuri ale activității industriale

1. INTRODUCERE

Îmbinarea prin mandrinare (fig. 1) este tipul de asamblare nedemontabilă folosit pe scară largă în construcția de utilaje pentru industriile petrolieră prelucrătoare, chimică, petrochimică, energetică etc., care, în cazul aparaturii tubulare, are ca scop realizarea unei legături rezistente și etanșe între țevile fasciculelor tubulare și corpurile locașurilor, de obicei cilindrice, din plăcile tubulare în care acestea se fixează.

Metodele de calcul la rezistență și etanșeitate elaborate pînă în prezent pentru îmbinările prin mandrinare pot fi împărțite, în general, în următoarele două grupe:

— metode bazate în principal pe date experimentale acumulate de-a lungul unei îndelungate perioade de realizări empirice [1] — [15]; în majoritate, așa cum rezultă din studiul [23], aceste metode nu sînt suficient de bine fundamentate din punct de vedere teoretic;

— metode analitice, bazate pe particularizări ale teoriei elasticității [16], [17] sau ale teoriei plasticității [18]—[22] (problema plană); aceste metode au fost numai parțial și în cazuri cu totul particulare verificate experimental, sînt foarte complicate și, din această cauză, au un domeniu restrîns de aplicare și de valabilitate.

În țara noastră, problema calculului îmbinărilor prin mandrinare nu a fost abordată pînă în prezent, deși ponderea acestor îmbinări în construc-

ţia de aparatură tubulară pentru industriile petrolieră prelucrătoare, chimică, petrochimică, energetică etc. este foarte mare, iar dificultăţile ridicate de cerinţele calitative impuse acestor îmbinări sînt deosebit de însemnate [23].

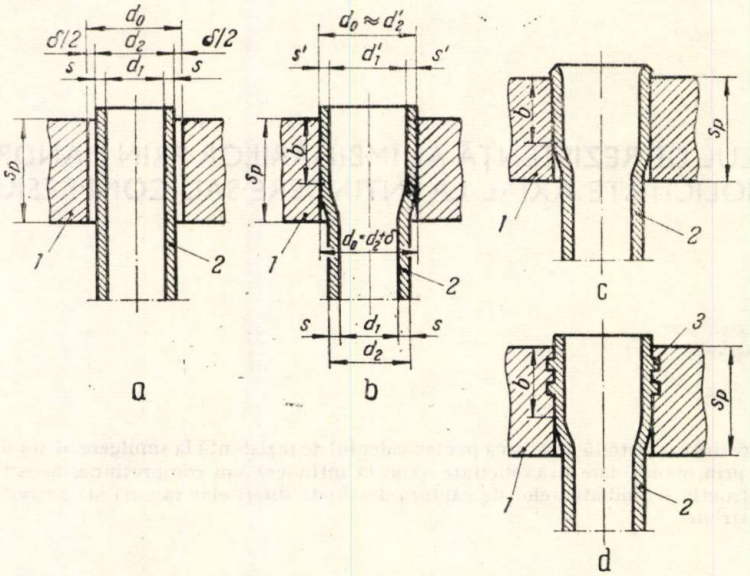


Fig. 1. Tipuri de îmbinare prin mandrinare.

a — ţeava nemandrinată;
b — mandrinare lisă în locaşuri cilindrice, fără răsfringerea capătului(capetelor) ţevii;
c — mandrinare lisă în locaşuri cilindrice, cu răsfringerea capătului (capetelor) ţevii;
d — mandrinare (cu sau fără răsfringerea capătului sau a capetelor ţevilor) în locaşuri cilindrice cu renuri.
1 — placă tubulară; *2* — ţeavă; *3* — renuri.

În cele ce urmează se va prezenta o nouă metodă analitică de calcul la rezistenţă a îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere (fig. 2*a*) sau compresiune (fig. 2*b*), elaborată special pentru cazul schimbătoarelor de căldură destinate diferitelor ramuri ale activităţii industriale.

2. IPOTEZE DE CALCUL

1. Îmbinarea prin mandrinare lisă dintre ţevi şi placa tubulară se consideră ca fiind o „îmbinare prin frecare" între două piese tubulare (fig. 3). Grosimea m' a piesei tubulare exterioare (decupate din placa tubulară) se presupune egală (din motive de rigiditate la mandrinare) cu jumătate din lăţimea minimă admisibilă (egală cu cel puţin 6 mm [23]) a punţii dintre două ţevi alăturate (fig. 3).

2. În exploatare, deci după încheierea operaţiilor de mandrinare şi punerea sub sarcină a îmbinărilor prin mandrinare, se consideră că modul de lucru al celor două elemente (piese tubulare) componente ale îmbinării corespunde unui sistem elastic, în calculele ce urmează avîndu-se în vedere numai deformaţiile elastice ale acestui sistem care apar în timpul funcţio-

nării. Rezultă, aşadar, că eforturile unitare din îmbinare nu trebuie să depăşească în nici un caz limita de curgere a materialelor din care se confecţionează elementele îmbinării pentru ca metoda ce va fi prezentată să poată fi aplicată. Se va avea în vedere că $\sigma_{ct} < \sigma_{cp}$.

3. Se consideră că în domeniul deformaţiilor elastice ţeava este suficient de rigidă, astfel că nu există pericolul pierderii stabilităţii ei nici în direcţie radială şi nici în direcţie axială.

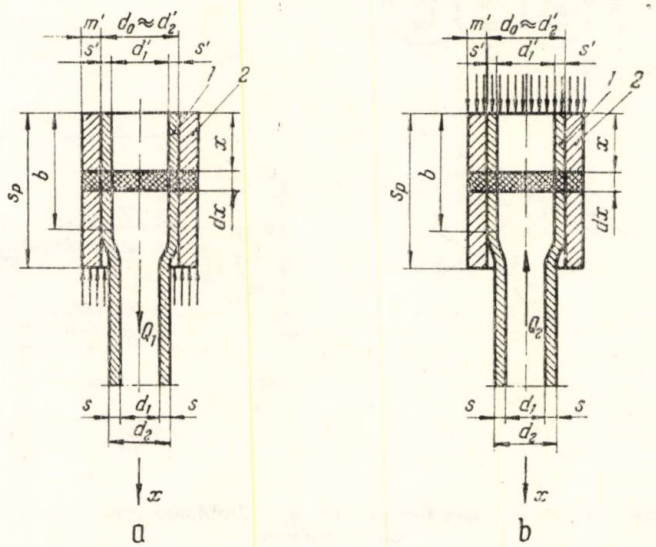


Fig. 2. Scheme de calcul ale îmbinărilor prin mandrinare lisă.

a — solicitarea la întindere a îmbinării prin mandrinare lisă; *b* — solicitarea la compresiune a îmbinării prin mandrinare lisă. *1* — ţevile mandrinate sau piesa tubulară interioară; *2* — placa tubulară sau piesa tubulară exterioară, decupată din placa tubulară.

4. Se consideră [23] de asemenea că placa tubulară este infinit rigidă.

5. Se vor considera separat şi se vor studia următoarele două cazuri de solicitare a îmbinărilor prin mandrinare lisă : solicitarea axială la întindere (fig. 2*a*, indice 1) şi solicitarea axială la compresiune (fig. 2*b*, indice 2). Studiul se va face pentru fiecare caz în parte considerînd atît mandrinarea ţevilor cu perete subţire $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} < 1{,}1\right)$, cît şi mandrinarea ţevilor cu perete gros $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} \geqslant 1{,}1\right)$. În acest din urmă caz va fi luată în consideraţie întîi starea de eforturi unitare plană şi apoi starea de eforturi unitare spaţială.

6. Eforturile unitare σ_t (valori maxime) se consideră uniform distribuite pe grosimea s' a ţevii îmbinate cu placa tubulară prin mandrinare lisă.

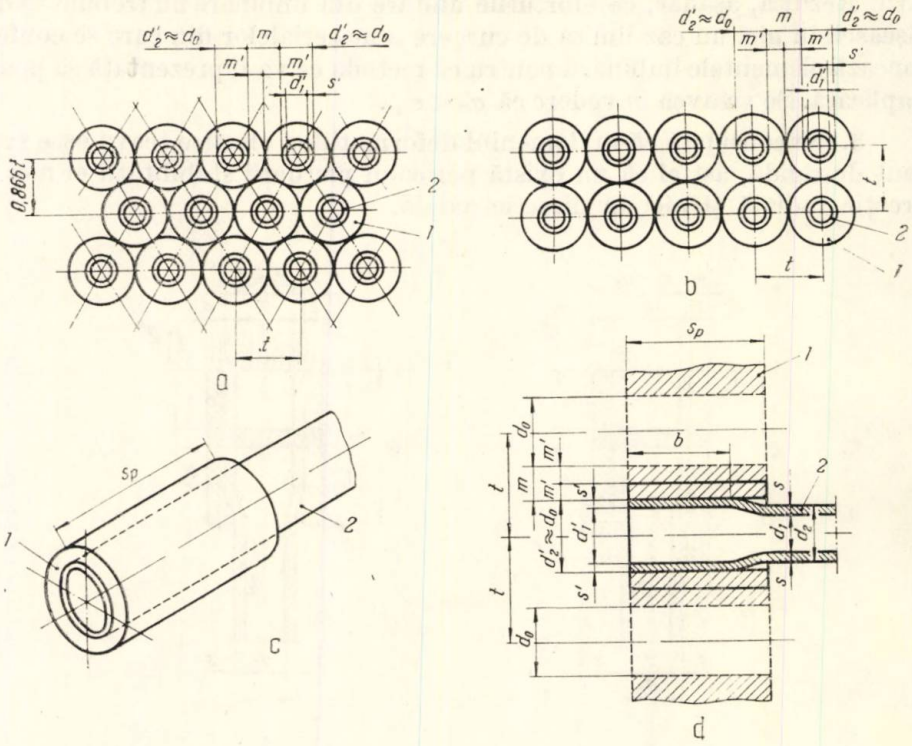


Fig. 3. Îmbinarea prin mandrinare lisă privită ca o „îmbinare prin frecare" între două piese tubulare.

a — repartiția triunghiulară a țevilor; *b* — repartiția patratică a țevilor; *c* — piese tubulare îmbinate prin frecare; *d* — secțiune longitudinală prin îmbinare. *1* — placa tubulară sau piesa tubulară exterioară, decupată din placa tubulară; *2* — țevile mandrinate sau piesa tubulară interioară.

3. FORMULE DE CALCUL PENTRU PRESIUNEA INSTANTANEE DE CONTACT

Într-o lucrare anterioară [24], pentru calculul presiunii instantanee de contact între cele două elemente (piese tubulare) îmbinate prin mandrinare au fost obținute următoarele formule:

— pentru solicitarea de întindere (fig. 2*a*):

$$\text{soluția generală}: p_1 = C_1 \cdot \exp\left(-\frac{k_1}{r_0}\, x\right); \tag{1}$$

$$\text{soluția particulară}: p_1 = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{k_1}{r_0}\, x\right); \tag{2}$$

— pentru solicitarea de compresiune (fig. 2*b*):

$$\text{soluția generală}: p_2 = C_2 \cdot \exp\left(\frac{k_2}{r_0}\, x\right); \tag{3}$$

$$\text{soluția particulară}: p_2 = p_0 \cdot \exp\left(\frac{k_2}{r_0}\, x\right) \cdot \exp\left(-\frac{k_2}{r_0}\, b\right). \tag{4}$$

Tabela 1

Formule de calcul pentru coeficienții k_1 și k_2 (vezi formulele (1—4)

Corelația dintre modulele de elasticitate longitudinale E_p și E_t	$E_p \neq E_t$		$E_p = E_t$		Notații
Solicitarea îmbinării / Tipul țevilor mandrinate	Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)	Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)	
Țevi cu perete gros. Starea de eforturi este spațială	$k_1 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 + 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1) - \mu\dfrac{E_p - E_t}{E_t}(\beta_p^2 - 1)}$	$k_2 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 - 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1) - \mu\dfrac{E_p - E_t}{E_t}\cdot(\beta_p^2 - 1)}$	$k_1 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 + 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$	$k_2 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 - 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$	$\beta_t = \dfrac{1}{1-\dfrac{s'}{r_0}}$; $\beta_p = 1 + \dfrac{m'}{r_0}$
Țevi cu perete gros. Starea de eforturi este plană	$k_1 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 + 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$	$k_2 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 - 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$			$\psi = \dfrac{E_p(\beta_p^2-1)}{E_t(\beta_t^2-1)}$ pentru $E_p \neq E_t$ $\psi = \dfrac{\beta_p^2-1}{\beta_t^2-1}$ pentru $E_p = E_t$
Țevi cu perete subțire	$k_1 = \mu f \dfrac{\psi\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)+\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$ $k_1 \approx \mu f$ pentru $\begin{cases} s' << 2r_0 \\ m' << 2r_0 \end{cases}$	$k_2 = \mu f \dfrac{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)-\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$ $k_2 \approx \mu f \dfrac{\psi-1}{\psi+1}$ pentru $\begin{cases} s' << 2r_0 \\ m' << 2r_0 \end{cases}$	$k_1 = \mu f \dfrac{\psi\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)+\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$ $k_1 = \mu f$ pentru $\begin{cases} s' << 2r_0 \\ m' << 2r_0 \end{cases}$	$k_2 = \mu f \dfrac{\psi\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)-\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$ $k_2 = \mu f \dfrac{\psi-1}{\psi+1}$ pentru $\begin{cases} s' << 2r_0 \\ m' << 2r_0 \end{cases}$	$\psi = \dfrac{m' E_p}{s' E_t}$ pentru $E_p \neq E_t$ $\psi = \dfrac{m'}{s'}$ pentru $E_p = E_t$

În tabela 1 se indică, recapitulativ, formulele de calcul ale coeficienților k_1 și k_2 în funcție de tipul țevilor mandrinate, de natura solicitării și de corelația dintre modulele de elasticitate longitudinale E_p și E_t.

Totodată se menționează că atît în lucrarea [24], cît și în lucrarea de față se consideră că eforturile unitare tangențiale pe suprafața de contact τ și presiunea instantanee de contact p, respectiv p_1 și p_2, sînt corelate între ele prin legea lui Coulomb* :

$$\tau = f \cdot p. \tag{5}$$

4. CALCULUL FORȚEI DE SMULGERE**

Pentru un element inelar dx decupat dintr-o îmbinare prin mandrinare lisă (fig. 2), forța elementară de smulgere dQ se calculează cu următoarea relație generală evidentă, indiferent de tipul țevilor mandrinate și de natura solicitărilor :

$$dQ = 2\pi r_0 f\, p\, dx, \tag{6}$$

de unde, prin integrare pe toată adîncimea de mandrinare b, se obține forța de smulgere Q :

$$Q = 2\pi r_0 f \int_0^b p\, dx. \tag{7}$$

4.1. ÎMBINĂRI PRIN MANDRINARE LISĂ SOLICITATE LA ÎNTINDERE (FIG. 2a)

Dacă se are în vedere soluția generală (1), atunci din (7) se obține următoarea formulă de calcul (soluție generală) pentru forța de smulgere Q_1:

$$Q_1 = 2\pi r_0^2 \frac{f}{k_1} C_1 \frac{\exp\left(k_1 \frac{b}{r_0}\right) - 1}{\exp\left(k_1 \frac{b}{r_0}\right)} \tag{8}$$

sau

$$Q_1 = 2\pi r_0^2 \frac{f}{k_1} C_1 \left[1 - \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right)\right]. \tag{8'}$$

---

* Cercetările experimentale efectuate de autorii lucrării [16] pe modele de îmbinare prin mandrinare lisă au arătat că valorile coeficientului de frecare sînt în general cuprinse în intervalul $f = 0{,}40 \ldots 0{,}50$, ceea ce corespunde datelor menționate și în alte lucrări de specialitate [22].

** Smulgerea se poate produce prin tragere (solicitarea de întindere) sau prin împingere (solicitarea de compresiune).

Această formulă (8) se scrie sub următoarea formă:

$$\frac{Q_1}{2\pi r_0^2 \frac{f}{k_1} C_1} = q_1 = \frac{\exp\left(k_1 \frac{b}{r_0}\right) - 1}{\exp\left(k_1 \frac{b}{r_0}\right)} \tag{9}$$

sau

$$q_1 = 1 - \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right). \tag{9'}$$

Pentru o valoare constantă k_1 și pentru diferite valori ale raportului $\frac{b}{r_0}$, deci pentru diferite mărimi ale adîncimii de mandrinare b, în tabela 2 sînt date valorile lui q_1 calculate cu formula (9'). Cu ajutorul datelor din tabela 2 a fost construit graficul din figura 4, care redă dependența lui q_1, deci a forței de smulgere Q_1, calculată cu formula (8), în funcție de adîncimea de mandrinare b.

Tabela

Valori pentru q_1 (vezi

$\frac{b}{r_0}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$k_1^* \frac{b}{r_0}$	0,00	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36
$\exp\left(k_1 \frac{b}{r_0}\right)$**	1,00000	1,06184	1,12750	1,19722	1,27125	1,34986	1,43333
$\exp\left(k_1 \frac{b}{r_0}\right) - 1$	0,00000	0,06184	0,12750	0,19722	0,27125	0,34986	0,43333
q_1	0,0000	0,0582	0,1131	0,1646	0,2125	0,2595	0,3020

* Calculele au fost făcute pentru o valoare $k_1 = 0{,}12$.

** Pentru $\frac{b}{r_0} \leqslant 10$, valorile exponențialei au fost luate din lucrarea [25]. Pentru $\frac{b}{r_0} > 10$, valorile exponențialei au fost calculate de către autor.

Din graficul figura 4 rezultă următoarea concluzie, deosebit de importantă din punct de vedere practic: în cazul solicitării la întindere a îmbinărilor prin mandrinare lisă, forța de smulgere crește (de la zero) cu creșterea adîncimii de mandrinare după o lege exponențială, tinzînd asimptotic către o anumită valoare constantă. Rezultă, așadar, că peste o anumită valoare a adîncimii de mandrinare b_{lim} forța de smulgere Q_1 practic

rămîne constantă. În consecinţă, mărirea adîncimii de mandrinare peste valoarea b_{lim} nu are practic nici un efect asupra creşterii rezistenţei îmbinării prin mandrinare; în schimb reduce productivitatea prin creşterea

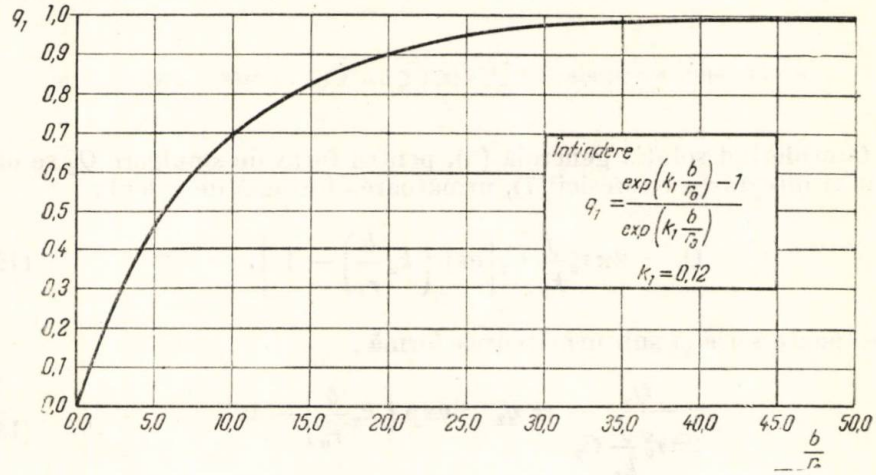


Fig. 4. Dependenţa forţei de smulgere Q_1 de adîncimea de mandri...re.

Observaţie. Graficul a fost construit pentru o valoare $k_1 = 0{,}12$.

2

formula (9b))

3,5	4,0	4,5	5,0	10,0	20,0	30,0	50,0
0,42	0,48	0,54	0,60	1,20	2,40	3,60	6,00
1,52196	1,61610	1,71600	1,82210	3,32010	11,0232	36,598	403,43
0,52196	0,61610	0,71600	0,8221	2,3201	10,0232	35,598	402,43
0,3422	0,381	0,418	0,451	0,698	0,907	0,973	0,996

timpului pe fiecare operaţie de mandrinare şi contribuie serios la sporirea preţului de cost prin creşterea consumului de materiale, energie etc.

Dacă se are în vedere soluţia particulară (2), atunci se obţin următoarele formule de calcul, aplicabile în cazul schimbătoarelor de căldură:

$$Q_1 = 2\pi r_0^2 \frac{f}{k_1} p_0 \left[1 - \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right)\right]; \tag{10}$$

$$q_1 = \frac{Q_1}{2\pi r_0^2 \frac{f}{k_1} p_0} = 1 - \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right). \tag{11}$$

Presiunea inițială de contact p_0 fiind o mărime constantă, rezultă că și în cazul formulelor (10) și (11) rămîn valabile tabela 2, figura 4 și concluziile prezentate mai înainte.

4.2. ÎMBINĂRI PRIN MANDRINARE LISĂ SOLICITATE LA COMPRESIUNE (FIG. 2b)

Considerînd soluția generală (3), pentru forța de smulgere Q_2 se obține, prin integrarea expresiei (7), următoarea formulă de calcul:

$$Q_2 = 2\pi r_0^2 \frac{f}{k_2} C_2 \left[\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0} \right) - 1 \right], \tag{12}$$

care se poate scrie și sub următoarea formă:

$$\frac{Q_2}{2\pi r_0^2 \frac{f}{k_2} C_2} = q_2 = \exp\left(k_2 \frac{b}{r_0} \right) - 1. \tag{13}$$

Tabela

Valori pentru q_2 (vezi

$\frac{b}{r_0}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$k_2^* \frac{b}{r_0}$	0,000	0,025	0,050	0,075	0,100	0,125	0,150
$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right)$**	1,00000	1,02532	1,05127	1,07788	1,10517	1,13315	1,16183
$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1$	0,00000	0,02532	0,05127	0,07788	0,10517	0,13315	0,16183
q_2 (formula 13)	0,00000	0,02532	0,05127	0,07788	0,10517	0,13315	0,16183
q_2 (formula 15)	0,00000	0,02464	0,0486	0,0722	0,0951	0,1176	0,1389

* Calculele au fost făcute pentru o valoare $k_2 = 0{,}05$.

** Pentru $\frac{b}{r_0} \leqslant 10$, valorile exponențialei au fost luate din lucrarea [25]. Pentru $\frac{b}{r_0} > 10$, valorile exponențialei au fost calculate de către autor.

În tabela 3 sînt date valorile lui q_2 calculate cu formula (13) pentru o anumită valoare a coeficientului k_2 și pentru diferite valori ale raportului $\frac{b}{r_0}$, adică pentru diferite mărimi ale adîncimii de mandrinare b.

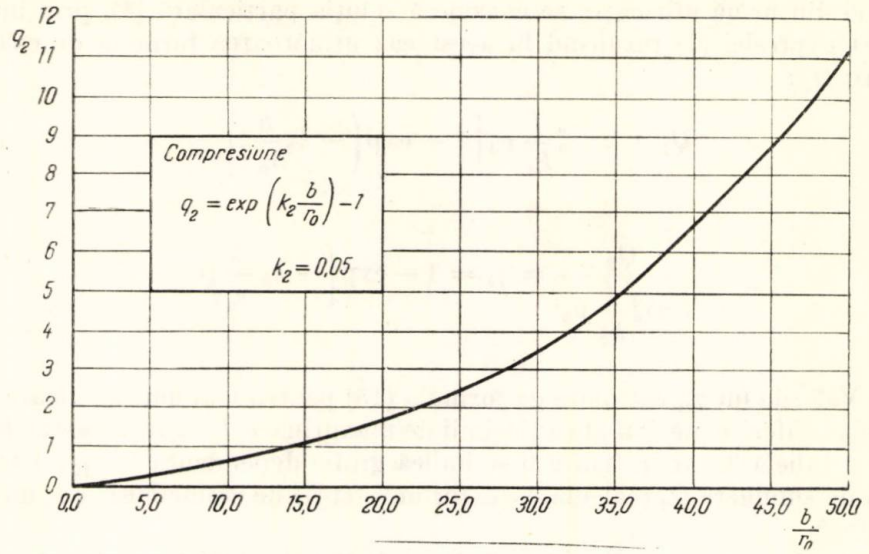


Fig. 5. Dependența forței de smulgere Q_2 (formula 12, respectiv 13) de adîncimea de mandrinare.

Observație. Graficul a fost construit pentru o valoare $k_2 = 0{,}05$

3

(formulele (13) și (15)

3,5	4,0	4,5	5,0	10,0	20,0	30,0	50,0
0,175	0,200	0,225	0,250	0,500	1,000	1,500	2,500
1,19125	1,22140	1,25232	1,28403	1,6487	2,7183	4,4817	12,1825
0,19125	0,22140	0,25232	0,28403	0,6487	1,7183	3,4817	11,1825
0,19125	0,22140	0,25232	0,28403	0,6487	1,7183	3,4817	11,1825
0,1601	0,1805	0,1998	0,221	0,394	0,633	0,777	0,919

În graficul din figura 5 este reprezentată dependența lui q_2, deci a forței de smulgere Q_2 (calculată cu formula (12)), de adîncimea de mandrinare b (vezi formula (13)). Această dependență a fost trasată pe baza datelor cuprinse în tabela 3.

După cum rezultă din figura 5, forța de smulgere Q_2, calculată cu formula (12), crește (de la zero) exponențial și nelimitat (curba admite o asimptotă verticală) cu creșterea adîncimii de mandrinare b. Este evident însă că practic acest lucru nu poate avea loc. Pentru a veni în sprijinu

acestei din urmă afirmații, se consideră soluția particulară (4), prin integrarea expresiei (7) rezultînd în acest caz următoarea formulă de calcul pentru Q_2:

$$Q_2 = 2\pi r_0^2 \frac{f}{k_2} p_0 \left[1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right)\right] \tag{14}$$

sau

$$\frac{Q_2}{2\pi r_0^2 \frac{f}{k_2} p_0} = q_2 = 1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right). \tag{15}$$

Valorile lui q_2, calculate cu formula (15) pentru o anumită valoare k_2 și pentru diferite mărimi ale adîncimii de mandrinare b, sînt de asemenea date în tabela 3, iar în figura 6 se indică grafic dependența lui q_2, deci a forței de smulgere Q_2 (calculată cu formula (14)) de adîncimea de mandrinare b.

După cum se vede din figura 6, legea de variație a lui Q_2 (în funcție de adîncimea de mandrinare b) este identică cu legea de variație a lui Q_1, deci concluziile rezultate pentru solicitarea la întindere a îmbinărilor prin mandrinare lisă sînt valabile și în cazul solicitării la compresiune.

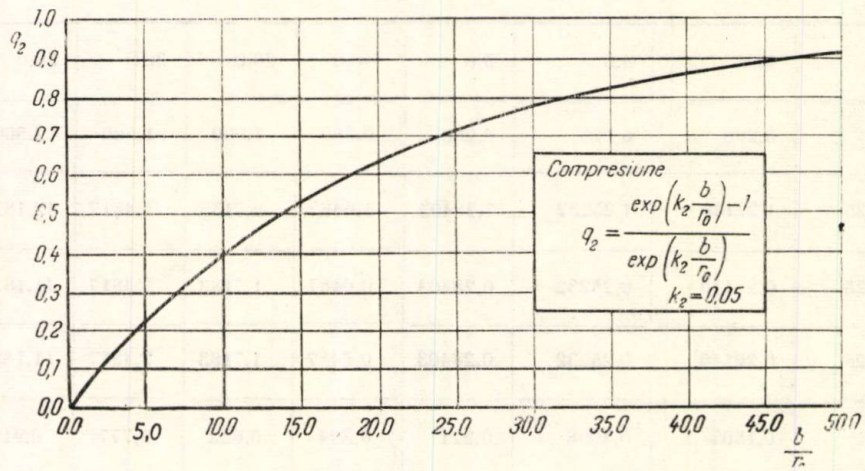


Fig. 6. Dependența forței de smulgere Q_2 (formula 14, respectiv 15) de adîncimea de mandrinare.

Observație. Graficul a fost construit pentru o valoare $k_2 = 0{,}05$

Pentru aceeași îmbinare prin mandrinare lisă solicitată succesiv la întindere sau compresiune, din figura 7, trasată tot pe baza datelor cuprinse în tabelele 2 și 3, rezultă în plus următoarele două concluzii, foarte importante din punct de vedere practic:

— deşi $q_2 < q_1$ pentru aceeaşi valoare b, se poate constata cu uşurinţă * că $Q_2 > Q_1$, ceea ce înseamnă că din punctul de vedere al rezistenţei lor îmbinările prin mandrinare lisă se comportă mai bine la solicitarea de compresiune decît la cea de întindere, această concluzie fiind în concordanţă cu cea la care se ajunge — pentru un caz particular — în lucrarea [16];

— adîncimea de mandrinare-limită b_{1lim} în cazul solicitării de întindere este mai mică decît cea din cazul solicitării de compresiune, adică

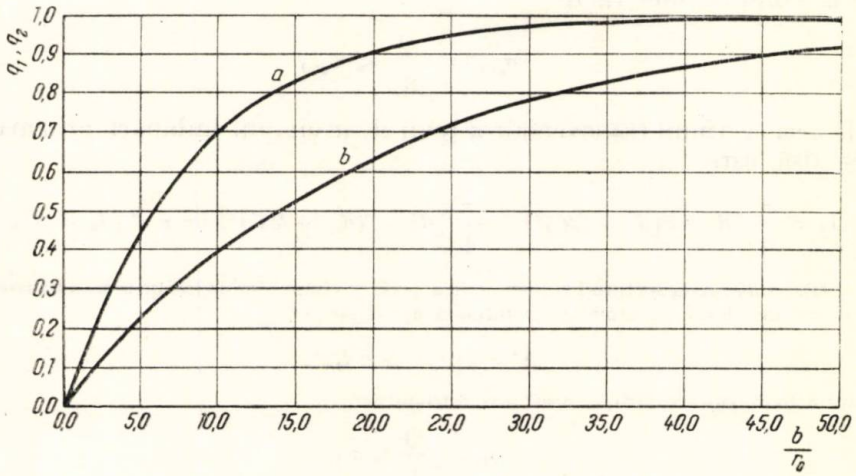


Fig. 7. Dependenţa forţei de smulgere de adîncimea de mandrinare a — solicitarea de întindere (q_1); b — solicitarea de compresiune (q_2, formula 15).

Observaţie. Graficul a fost construit pentru următoarele valori: $k_1 = 0{,}12$ şi $k_2 = 0{,}05$.

$b_{1lim} < b_{2lim}$; de acest lucru va trebui să se ţină seama în calculele practice dacă va fi cazul.

5. DOMENIUL DE VALABILITATE AL FORMULELOR DE CALCUL PENTRU FORŢA DE SMULGERE. CONDIŢII DE VERIFICARE

În conformitate cu a doua ipoteză de calcul, formulele stabilite anterior pentru evaluarea forţei de smulgere sînt valabile şi deci pot fi aplicate atunci cînd este îndeplinită următoarea condiţie generală :

---

* Calculînd raportul $\frac{Q_1}{Q_2}$, de exemplu, pentru $\frac{b}{r_0} = 5{,}0$, $k_1 = 0{,}12$ şi $k_2 = 0{,}05$ (vezi tabelele 2 şi 3 şi fig. 7) se obţine

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{q_1}{q_2}\,\frac{k_2}{k_1} = \frac{0{,}451}{0{,}221} \cdot \frac{0{,}05}{0{,}12} = 0{,}848,$$

deci

$$Q_1 < Q_2.$$

$$\sigma_{ef\,t} = < \sigma_{ct}, \tag{16}$$

ştiut fiind [23], din condiţiile tehnologice de realizare a unor îmbinări prin mandrinare corespunzătoare din punct de vedere calitativ, că în acelaşi timp trebuie să fie satisfăcută încă o condiţie generală, şi anume

$$\sigma_{ct} < \sigma_{cp}. \tag{17}$$

În consecinţă, condiţia de funcţionare în domeniul deformaţiilor elastice pentru îmbinarea prin mandrinare lisă solicitată axial la întindere sau la compresiune va fi

$$\sigma_{ef\,t} = \frac{Q}{A_t} \leqslant \sigma_{ct}, \tag{18}$$

unde aria secţiunii transversale a ţevii A_t în cîmpul îmbinării prin mandrinare lisă este

$$A_t = \frac{\pi}{4}[d_2'^2 - (d_2' - 2s')^2] = \frac{\pi}{4}[d_0^2 - (d_0 - 2s')^2] = \pi s'(d_0 - s'). \tag{19}$$

Observaţie. Aria secţiunii transversale a ţevii în cîmpul îmbinării prin mandrinare lisă se calculează de obicei cu următoarea formulă aproximativă:

$$A_t^* = 2\pi r_0 s' = \pi d_0 s', \tag{a}$$

condiţia de verificare (18) în acest caz scriindu-se

$$\sigma_{ef\,t}^* = \frac{Q}{A_t^*} \leqslant \sigma_{ct}. \tag{b}$$

Nu este însă greu de constatat că

$$A_t = A_t^* - \pi s'^2, \tag{c}$$

deci întotdeauna

$$A_t < A_t^*. \tag{d}$$

Se consideră următorul exemplu*: $d_0 = 25{,}5$ mm; $s' = 2{,}5$ mm. Se obţine în acest caz

$$A_t = 1{,}805 \text{ cm}^2,$$

$$A_t^* = 2{,}002 \text{ cm}^2,$$

$$\frac{A_t^*}{A_t} = 1{,}109, \text{ (circa 11 \%)};$$

$$\sigma_{ef\,t} = 1{,}109\, \sigma_{ef\,t}^*,$$

$$\sigma_{ef\,t} \cong 1{,}1 \frac{Q}{A_t^*} \leqslant \sigma_{ct}. \tag{e}$$

Rezultă de aici că prin folosirea formulei (b) (numită, în continuare, formulă aproximativă) şi nu a formulei (e) se ajunge la dimensionări şi verificări destul de largi (întrucît factorul de multiplicare este mai mare decît unu), din care motiv se recomandă folosirea cu precădere a formulei (18) (numită, în continuare, formulă exactă).

---

* Reprezentativ pentru aparatele de schimb de căldură folosite în industriile petrolieră prelucrătoare, petrochimică, chimică etc.

5.1. CONDIȚII DE VERIFICARE DUPĂ TEORIA ÎNTÎI DE RUPERE

5.1.1. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la întindere (fig. 2a).* Scriind condiția de rezistență (18) pentru cazul de față cu luarea în considerație a formulelor (8) și (9), după efectuarea operațiilor auxiliare de calcul se obține pentru îmbinarea prin mandrinare lisă următoarea formă generală a condiției de verificare:

$$1-\exp\left(-k_1\frac{b}{r_0}\right)=q_1\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{C_1}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_1}{f}\cdot\left(1-\frac{s'}{d_0}\right). \tag{20}$$

Pentru $s'\ll d_0=2r_0$ (țevi cu perete subțire) se poate considera aproximativ

$$1-\frac{s'}{d_0}\approx 1, \tag{21}$$

rezultînd

$$k_1=\mu f \text{ (vezi tabela 1)},$$

$$1-\exp\left(-k_1\frac{b}{r_0}\right)=q_1\leqslant\mu\frac{\sigma_{ct}}{C_1}\cdot\frac{s'}{r_0}. \tag{22}$$

Avînd în vedere formulele (10) și (11), din (20) se obține următoarea formă particulară a condiției de verificare:

$$1-\exp\left(-k_1\frac{b}{r_0}\right)=q_1\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{p_0}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_1}{f}\left(1-\frac{s'}{d_0}\right) \tag{23}$$

sau, din (22),

$$1-\exp\left(-k_1\frac{b}{r_0}\right)=q_1\leqslant\mu\frac{\sigma_{ct}}{p_0}\cdot\frac{s'}{r_0}. \tag{24}$$

Este interesant de remarcat că inegalitatea (24) — un caz cu totul particular al inegalității (20) — a fost obținută de asemenea în lucrarea [16]. De observat însă că în această din urmă lucrare nu se fac nici un fel de precizări în legătură cu domeniul de valabilitate și gradul de precizie al inegalității (24), aceasta din urmă fiind considerată general valabilă.

Se precizează totodată că în cazul aparatelor de schimb de căldură destinate industriei petroliere prelucrătoare, chimice, petrochimice etc., în general nu se poate lua în considerație aproximația (21), țevile fasciculelor tubulare încadrîndu-se de obicei în categoria celor cu perete gros $\left(\beta=\frac{d_2}{d_1}\geqslant 1{,}1\right)$.

Dacă se are în vedere condiția de rezistență (e), atunci condiția de verificare va fi

$$1-\exp\left(-k_1\frac{b}{r_0}\right)=q_1\leqslant 0{,}91\frac{\sigma_{ct}}{C_1}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_1}{f} \tag{f}$$

sau

$$1-\exp\left(-k_1\frac{b}{r_0}\right)=q_1\leqslant 0{,}91\frac{\sigma_{ct}}{p_0}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_1}{f}. \tag{g}$$

5.1.2. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la compresiune* (*fig. 2b*). Considerînd formulele (12) şi (13) şi punînd condiţia de rezistenţă pentru cazul de faţă, după efectuarea unor calcule auxiliare elementare se obţine pentru îmbinarea prin mandrinare lisă următoarea formă generală a condiţiei de verificare:

$$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1 = q_2 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f} \cdot \left(1 - \frac{s'}{d_0}\right). \tag{25}$$

Pentru $s' \ll d_0 = 2r_0$ (ţevi cu perete subţire) se poate face şi în acest caz aproximaţia (21), rezultînd

$$k_2 = \mu f \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \text{ (vezi tabela 1)},$$

$$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1 = q_2 \leqslant \mu \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{\psi - 1}{\psi + 1}. \tag{26}$$

Dacă se consideră formulele (14) şi (15), atunci din (25) se obţine următoarea formă particulară a condiţiei de verificare:

$$1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) = q_2 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f} \cdot \left(1 - \frac{s'}{d_0}\right) \tag{27}$$

sau, din (26),

$$1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) = q_2 \leqslant \mu \cdot \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{\psi - 1}{\psi + 1}. \tag{28}$$

Din condiţia de rezistenţă (e), rezultă pentru acest caz următoarea formă a condiţiei de verificare:

$$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1 = q_2 \leqslant 0{,}91 \cdot \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f} \tag{h}$$

sau

$$1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) = q_2 \leqslant 0{,}91 \cdot \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f}. \tag{i}$$

În formulele de mai sus, obţinute în conformitate cu teoria de rupere a efortului unitar normal (longitudinal) maxim (teoria I, formulată de Galilei, Rankine ş.a.), efortul unitar normal circumferenţial a fost neglijat.

În urma verificărilor experimentale s-a constatat însă, aşa cum de altfel se ştie, că concluziile la care conduce această teorie nu corespund cu rezultatele încercărilor la compresiune după toate direcţiile şi aceasta nu numai la materialele tenace, ci şi la cele casante. Această teorie corespunde rezultatelor experimentale numai în cazul întinderii materialelor casante, materiale din care nu se pot confecţiona ţevi care ulterior să fie asamblate prin mandrinare cu alte elemente.

Din acest motiv, în cele ce urmează se face apel la criteriul (condiția) de plasticitate a lui Saint-Venant, care, după cum se știe, se bazează pe ipoteza că în zona de curgere efortul unitar normal (circumferențial) maxim păstrează o valoare constantă, caracteristică materialului dat.

5.2. CONDIȚII DE VERIFICARE DUPĂ CRITERIUL DE PLASTICITATE AL LUI SAINT-VENANT

Relația de calcul în acest caz coincide, după cum este știut, cu cea care exprimă teoria de rupere a efortului unitar tangențial maxim pentru starea plană sau spațială de eforturi (teoria III, formulată de Coulomb, Guest ș.a.) și este următoarea:

$$\sigma_{ef\,t} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant \sigma_{ct}, \tag{29}$$

în care σ_1 reprezintă efortul unitar normal maxim, iar σ_3 — efortul unitar normal minim (σ_2 pentru starea plană de eforturi unitare).

5.2.1. *Mandrinarea țevilor cu perete subțire* $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} < 1{,}1\right)$. Considerînd că starea de eforturi este plană, rezultă

$$\sigma_3 = 0, \tag{30}$$

condiția de verificare fiind în acest caz

$$\sigma_{ef\,t} = \sigma_1 - \sigma_2 \leqslant \sigma_{ct}, \tag{31}$$

în care σ_2 este efortul unitar normal minim, deci cel circumferențial.

5.2.1.1. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la întindere* (*fig. 2a*). Nu este greu de arătat că pentru acest caz cele două eforturi unitare σ_1 și σ_2 au următoarele expresii generale de calcul:

$$\sigma_1 = \sigma_{t_1} = \frac{f}{k_1} C_1 \frac{r_0}{s'}\left[1 - \exp\left(-\frac{k_1}{r_0} b\right)\right] \frac{1}{1 - \frac{s'}{d_0}}, \tag{32}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{t_1}^{p_1} = -C_1 \frac{r_0 - \frac{s'}{2}}{s'} \cdot \exp\left(-\frac{k_1}{r_0} x\right). \tag{33}$$

Avînd în vedere că diferența $\sigma_1 - \sigma_2$ atinge valoarea sa maximă pentru $x = b$ și ținînd cont de formulele (32) și (33), din (31) rezultă, după efectuarea unor calcule elementare, următoarea formă generală a condiției de verificare pentru îmbinarea prin mandrinare lisă:

$$1 - \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right)\left[1 - \frac{k_1}{f} \frac{r_0 - \frac{s'}{2}}{r_0}\left(1 - \frac{s'}{d_0}\right)\right] \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_1} \frac{s'}{r_0} \frac{k_1}{f}\left(1 - \frac{s'}{d_0}\right). \tag{34}$$

Pentru $s' \ll d_0 = 2r_0$, făcînd aproximațiile

$$r_0 - \frac{s'}{2} \approx r_0, \qquad 1 - \frac{s'}{d_0} \approx 1, \tag{35}$$

rezultă

$$1 - \left(1 - \frac{k_1}{f}\right) \cdot \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right) \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_1} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_1}{f} \tag{36}$$

sau, întrucît $k_1 = \mu f$ pentru aproximația făcută (vezi tabela 1),

$$1 - (1 - \mu) \cdot \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right) \leqslant \mu \frac{\sigma_{ct}}{C_1} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \tag{37}$$

Avînd în vedere formulele (1) și (2), din (34) rezultă următoarea formă particulară a condiției de verificare (pentru $C_1 = p_0$):

$$1 - \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right) \cdot \left[1 - \frac{k_1}{f} \frac{r_0 - \frac{s'}{2}}{r_0} \left(1 - \frac{s'}{d_0}\right)\right] \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_1}{f} \cdot \left(1 - \frac{s'}{d_0}\right) \tag{38}$$

sau, din (37),

$$1 - (1 - \mu) \cdot \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right) \leqslant \mu \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \frac{s'}{r_0}. \tag{39}$$

De remarcat că condiția de verificare (39) — un caz cu totul particular al formei generale a condiției de verificare (34) — a fost obținută de asemenea în lucrarea [16]. Fără a intra în analiza unor neconcordanțe existente în această lucrare, se menționează doar că în lucrarea [16] nu sînt cuprinse nici un fel de precizări cu privire la domeniul de valabilitate și la gradul de precizie al condiției (39), aceasta din urmă fiind considerată general valabilă.

Este interesant de observat că, dacă $\sigma_2 = \sigma_{i_1}^{p_1} \approx 0$, atunci paranteza pătrată din (34) este egală cu unu și această din urmă inegalitate se transformă în inegalitatea (20).

Scriind expresiile de calcul (32) și (33) ale eforturilor unitare σ_1 și σ_2 sub forma aproximativă

$$\sigma_1 = \sigma_{i_1} = \frac{f}{k_1} C_1 \frac{r_0}{s'} \left[1 - \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right)\right], \tag{j}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{t_1}^{p_1} = -\,C_1 \cdot \frac{r_0}{s'} \cdot \exp\left(-\,k_1 \frac{b}{r_0}\right) \tag{k}$$

şi ţinînd cont de precizările şi observaţiile prezentate anterior, rezultă pentru acest caz următoarea formă a condiţiei de verificare :

$$1 - \left(1 - \frac{k_1}{f}\right) \cdot \exp\left(-\,k_1 \frac{b}{r_0}\right) \leqslant 0{,}91 \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_1}{f}. \tag{l}$$

5.2.1.2. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la compresiune* (*fig. 2b*). Pentru acest caz, aşa cum se poate constata cu uşurinţă, cele două eforturi unitare σ_1 şi σ_2 au următoarele expresii generale de calcul :

$$\sigma_1 = \sigma_{t_2} = -\,\frac{f}{k_2} \cdot C_2 \cdot \frac{r_0}{s'} \cdot \left[\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1\right] \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{s'}{d_0}}, \tag{40}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{t_2}^{p_2} = -\,C_2 \cdot \frac{r_0 - \dfrac{s'}{2}}{s'} \cdot \exp\left(\frac{k_2}{r_0} x\right). \tag{41}$$

Diferenţa $\sigma_1 - \sigma_2$ atinge valoarea sa maximă, care se introduce în condiţia de verificare (31), atunci cînd σ_2 este minim, adică pentru $x = 0$. Considerînd formulele (40) şi (41), din (31) rezultă, aşadar,

$$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1 - \frac{k_2}{f} \cdot \frac{r_0 - \dfrac{s'}{2}}{r_0} \cdot \left(1 - \frac{s'}{d_0}\right) \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f} \cdot \left(1 - \frac{s'}{d_0}\right). \tag{42}$$

Pentru $\sigma_2 = \sigma_{t_2}^{p_2} \approx 0$, aşa cum de altfel era de aşteptat, termenul în k_2/f din stînga inegalităţii (42) dispare, condiţia de verificare (42) transformîndu-se în condiţia de verificare (25).

Acceptînd aproximaţiile (35) pentru $s' \ll d_0 = 2r_0$, condiţia de verificare (42) se transformă astfel :

$$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1 - \frac{k_2}{f} \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f} \tag{43}$$

sau, deoarece $k_2 \approx \mu \cdot f \cdot \dfrac{\psi - 1}{\psi + 1}$ pentru aproximaţia făcută (vezi tabela 1),

$$\frac{\psi + 1}{\psi - 1}\left[\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1 - \mu \cdot \frac{\psi - 1}{\psi + 1}\right] \leqslant \mu \cdot \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{s'}{r_0}. \tag{44}$$

Considerînd formulele (3) şi (4), din (42) rezultă următoarea formă particulară a condiţiei de verificare pentru $C_2 = p_0 \cdot \exp\left(-\,k_2 \dfrac{b}{r_0}\right)$:

$$1-\exp\left(-k_2\frac{b}{r_0}\right)-\frac{k_2}{f}\cdot\frac{r_0-\frac{s'}{2}}{r_0}\left(1-\frac{s'}{d_0}\right)\cdot\exp\left(-k_2\frac{b}{r_0}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{p_0}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_2}{f}\left(1-\frac{s'}{d_0}\right) \tag{45}$$

sau, din (43),

$$1-\exp\left(-k_2\frac{b}{r_0}\right)-\frac{k_2}{f}\cdot\exp\left(-k_2\frac{b}{r_0}\right)\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{p_0}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_2}{f}, \tag{46}$$

iar din (44)

$$\frac{\psi+1}{\psi-1}\left[1-\exp\left(-k_2\frac{b}{r_0}\right)-\mu\cdot\frac{\psi-1}{\psi+1}\cdot\exp\left(-k_2\frac{b}{r_0}\right)\right]\leqslant\mu\cdot\frac{\sigma_{ct}}{p_0}\cdot\frac{s'}{r_0}. \tag{47}$$

În afara verificării condiției de plasticitate (31), în cazul problemei de față nu este nevoie să se insiste prea mult pentru a se arăta că, în plus, este neapărat necesară verificarea următoarelor două condiții:

$$\sigma_1\leqslant\sigma_{ct}, \tag{48}$$

$$\sigma_{2\max}=\sigma_2|_{x=b}\leqslant\sigma_{ct}, \tag{49}$$

de unde rezultă, respectiv,

$$\exp\left(k_2\frac{b}{r_0}\right)-1\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{C_2}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_2}{f}\left(1-\frac{s'}{d_0}\right) \tag{48'}$$

$$\exp\left(k_2\frac{b}{r_0}\right)\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{C_2}\cdot\frac{s'}{r_0-\frac{s'}{2}}. \tag{49'}$$

Evident, dacă este satisfăcută condiția (48'), este satisfăcută și condiția (42), această din urmă verificare nemaifiind necesară.

Dacă se fac aproximațiile (35), atunci condițiile (48') și (49') devin

$$\exp\left(k_2\frac{b}{r_0}\right)-1\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{C_2}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_2}{f}, \tag{50}$$

$$\exp\left(k_2\frac{b}{r_0}\right)\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{C_2}\cdot\frac{s'}{r_0}, \tag{51}$$

iar dacă se consideră și formulele (3) și (4), atunci rezultă pentru $C_2=p_0\cdot\exp\left(-k_2\frac{b}{r_0}\right)$

$$1-\exp\left(-k_2\frac{b}{r_0}\right)\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{p_0}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_2}{f}, \tag{50'}$$

$$1 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0}. \qquad (51')$$

Reluînd expresiile de calcul (40) și (41) sub următoarea formă aproximativă :

$$\sigma_1 = \sigma_{t_2} = -\frac{f}{k_2} \cdot C_2 \cdot \frac{r_0}{s'} \left[\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1\right],$$

$$\sigma_2 = \sigma_{t_2}^{p_2} = -C_2 \cdot \frac{r_0}{s'}$$

și ținînd cont de precizările și de observațiile anterioare, rezultă pentru acest caz următoarea formă a condiției de verificare :

$$1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) + \frac{k_2}{f} \cdot \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) \leqslant 0{,}91 \cdot \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f}. \qquad (m)$$

Pentru verificare suplimentară se va folosi în acest caz următoarea inegalitate :

$$1 \leqslant 0{,}91 \cdot \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0}. \qquad (n)$$

5.2.2. *Mandrinarea țevilor cu perete gros* $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} \geqslant 1{,}1\right)$

5.2.2.1. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la întindere* (*fig. 2a*)

5.2.2.1.1. *Starea de eforturi unitare este plană.* În acest caz, $\sigma_3 = 0$, condiția de verificare se exprimă prin relația (31), iar eforturile unitare σ_1 și σ_2 au următoarele expresii generale de calcul :

$$\sigma_1 = \sigma_{t_1} = \frac{f}{k_1} \cdot C_1 \cdot \frac{2\beta_t^2}{\beta_t^2 - 1}\left[1 - \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right)\right], \qquad (52)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{t_1}^{p_1} = -C_1 \cdot \frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1} \cdot \exp\left(-\frac{k_1}{r_0} x\right). \qquad (53)$$

Considerînd formulele (52) și (53), este evident că diferența $\sigma_1 - \sigma_2$ va fi maximă pentru $x = b$. Pentru această zonă — cea mai solicitată — a îmbinării prin mandrinare lisă, forma generală a condiției de verificare va rezulta ca fiind următoarea :

$$1 - \frac{1}{2} k_1 \cdot \left(\frac{2}{k_1} - \frac{1}{f} - \frac{1}{f \cdot \beta_t^2}\right) \cdot \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right) \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_1} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \cdot \frac{k_1}{f} \qquad (54)$$

sau

$$\frac{2\beta_t}{\beta_t + 1}\left[1 - \frac{1}{2} k_1 \cdot \left(\frac{2}{k_1} - \frac{1}{f} - \frac{1}{f \cdot \beta_t^2}\right) \cdot \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right)\right] \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_1} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_1}{f}, \qquad (55)$$

în care

$$\frac{s'}{r_0} = \frac{\beta_t - 1}{\beta_t}. \tag{56}$$

În cazul mandrinării țevilor cu perete subțire, pentru care $\beta_t \to 1$ și deci $k_1 \approx \mu f$ (vezi tabela 1), nu este greu de observat că inegalitatea (54), respectiv (55), se transformă în condiția de verificare (39).

Formele particulare ale condiției de verificare, rezultate din inegalitatea (54) și (55) în urma considerării formulelor (1) și (2) (deci pentru $C_1 = p_0$), sînt

$$1 - \frac{1}{2} k_1 \cdot \left(\frac{2}{k_1} - \frac{1}{f} - \frac{1}{f \cdot \beta_t^2} \right) \cdot \exp\left(- k_1 \frac{b}{r_0} \right) \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2 \cdot \beta_t^2} \cdot \frac{k_1}{f} \tag{57}$$

sau

$$\frac{2\beta_t}{\beta_t + 1} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} k_1 \cdot \left(\frac{2}{k_1} - \frac{1}{f} - \frac{1}{f \cdot \beta_t^2} \right) \cdot \exp\left(- k_1 \frac{b}{r_0} \right) \right] \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_1}{f}. \tag{58}$$

5.2.2.1.2. *Starea de eforturi unitare este spațială.* În forma lor generală, expresiile de calcul ale eforturilor unitare σ_1, σ_2 și σ_3 sînt pentru acest caz următoarele:

$$\sigma_1 = \sigma_{t_1} = \frac{f}{k_1} \cdot C_1 \cdot \frac{2\beta_t^2}{\beta_t^2 - 1} \left[1 - \exp\left(- k_1 \frac{b}{r_0} \right) \right]; \tag{52}$$

— pentru $x = b$:

$$\sigma_2 = \sigma_{t_1}^{p_1} = - C_1 \cdot \frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1} \cdot \exp\left(- k_1 \frac{b}{r_0} \right), \tag{53}$$

$$\sigma_3 = - p_1 = - C_1 \cdot \exp\left(k_1 \frac{b}{r_0} \right); \tag{59}$$

— pentru $x = 0$:

$$\sigma_2 = \sigma_{t_1}^{p_1} = \sigma_{2\,\max} = - C_1 \cdot \frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1}, \tag{60}$$

$$\sigma_3 = - p_1 = \sigma_{3\,\max} = - C_1. \tag{61}$$

Deși σ_1 și σ_3 au semne diferite, întrucît $|\sigma_1| > |\sigma_3|$, diferența $|\sigma_1| - |\sigma_3|$ va fi maximă atunci cînd σ_3 este minim, adică pentru $x = b$ (vezi formula 59). Transcriind relația (29) pentru acest caz, se obține următoarea formă generală a condiției de verificare pentru îmbinările prin mandrinare lisă:

$$1 - \left(1 - \frac{k_1}{f} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \right) \cdot \exp\left(- k_1 \frac{b}{r_0} \right) \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_1} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \cdot \frac{k_1}{f} \tag{62}$$

sau

$$\frac{2\beta_t}{\beta_t+1}\cdot\left[1-\left(1-\frac{k_1}{f}\cdot\frac{\beta_t^2-1}{2\beta_t^2}\right)\cdot\exp\left(-k_1\frac{b}{r_0}\right)\right]\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{C_1}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_1}{f}\cdot \tag{63}$$

Pentru ţevile cu perete subţire $\beta_t\to 1$, $k_1\approx\mu f$, şi inegalităţile (62) şi, respectiv, (63) se transformă în condiţia de verificare (22).

Considerînd formulele (1) şi (2) (adică $C_1=p_0$), din (62) şi (63) se obţin următoarele forme particulare ale condiţiei de verificare:

$$1-\left(1-\frac{k_1}{f}\cdot\frac{\beta_t^2-1}{2\beta_t^2}\right)\cdot\exp\left(-k_1\frac{b}{r_0}\right)\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{p_0}\cdot\frac{\beta_t^2-1}{2\beta_t^2}\cdot\frac{k_1}{f} \tag{64}$$

sau

$$\frac{2\beta_t}{\beta_t+1}\left[1-\left(1-\frac{k_1}{f}\cdot\frac{\beta_t^2-1}{2\beta_t^2}\right)\cdot\exp\left(-k_1\frac{b}{r_0}\right)\right]\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{p_0}\cdot\frac{s'}{r_0}\cdot\frac{k_1}{f}\cdot \tag{65}$$

Pe lîngă îndeplinirea condiţiilor de verificare prezentate mai sus se impune ca pentru acest caz să fie verificate în plus şi următoarele condiţii:

$$|\sigma_{2\max}|\leqslant\sigma_{ct}, \tag{66}$$

$$|\sigma_{3\max}|\leqslant\sigma_{ct}. \tag{67}$$

Considerînd formula (60), din condiţia de verificare suplimentară (66) rezultă:

— în forma generală:

$$\frac{\beta_t^2+1}{\beta_t^2-1}\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{C_1} \tag{68}$$

sau

$$1\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{C_1}\cdot\frac{\beta_t^2-1}{\beta_t^2+1}; \tag{68'}$$

— în forma particulară (pentru $C_1=p_0$):

$$\frac{\beta_t^2+1}{\beta_t^2-1}\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{p_0} \tag{69}$$

sau

$$1\leqslant\frac{\sigma_{ct}}{p_0}\cdot\frac{\beta_t^2-1}{\beta_t^2+1}. \tag{69'}$$

Este evident că, dacă se îndeplinesc condiţiile (68) sau (68') şi, respectiv, (69) sau (69'), condiţia (67) nu mai este necesar să fie verificată.

5.2.2.2. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la compresiune (fig. 2b)*

5.2.2.2.1. *Starea de eforturi unitare este plană.* Eforturile unitare σ_1 și σ_2 au în acest caz următoarele expresii generale de calcul :

$$\sigma_1 = -\frac{f}{k_2} \cdot C_2 \cdot \frac{2\beta_t^2}{\beta_t^2 - 1} \cdot \left[\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0} \right) - 1 \right], \tag{70}$$

$$\sigma_2 = -C_2 \cdot \frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1}. \tag{71}$$

Introducînd aceste valori pentru σ_1 și σ_2 în relația (31) și efectuînd o serie de calcule elementare, în final se obține următoarea formă generală a condiției de verificare a îmbinării prin mandrinare :

$$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0} \right) - 1 - \frac{k_2}{f} \cdot \frac{\beta_t^2 + 1}{2\beta_t^2} \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \cdot \frac{k_2}{f} \tag{72}$$

sau

$$\frac{2\beta_t}{\beta_t + 1} \cdot \left[\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0} \right) - 1 - \frac{k_2}{f} \cdot \frac{\beta_t^2 + 1}{2\beta_t^2} \right] \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f} \tag{73}$$

dacă în (72) se face substituția (56).

În cazul mandrinării unor țevi cu perete subțire pentru care $\beta_t \to 1$ și deci $k_2 \approx \mu \cdot f \cdot \frac{\psi - 1}{\psi + 1}$ (vezi tabela 1), se vede imediat că inegalitatea (72), respectiv (73), se transformă în condițiile de verificare (43) și (44).

Formele particulare ale condițiilor de verificare (72) sau (73), rezultate în urma considerării formulelor (3) și (4), adică pentru $C_2 = p_0 \cdot \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0} \right)$, sînt următoarele :

$$1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0} \right) - \frac{k_2}{f} \cdot \frac{\beta_t^2 + 1}{2\beta_t^2} \cdot \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0} \right) \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \cdot \frac{k_2}{f} \tag{74}$$

sau

$$\frac{2\beta_t}{\beta_t + 1} \left[1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0} \right) - \frac{k_2}{f} \cdot \frac{\beta_t^2 + 1}{2\beta_t^2} \cdot \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0} \right) \right] \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f} \cdot \tag{75}$$

Pe lîngă verificarea condițiilor stabilite mai sus, nu este greu de observat că în cazul problemei considerate este neapărat necesar să fie verificate în plus și următoarele două condiții :

$$|\sigma_1| \leqslant \sigma_{ct}, \tag{76}$$

$$|\sigma_{2\,max}| \leqslant \sigma_{ct}. \tag{77}$$

Considerînd formula (70), din condiția (76) rezultă:
— în forma generală:

$$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_1} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \cdot \frac{k_2}{f}; \tag{78}$$

— în forma particulară:

$$1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \cdot \frac{k_2}{f}. \tag{79}$$

Este evident că, dacă sînt satisfăcute condițiile de verificare (78) și (79), sînt îndeplinite și condițiile de verificare (72) — (73) și, respectiv, (74) — (75); rezultă deci că se poate renunța în cazul de față la aceste din urmă verificări dacă se verifică condiția (76).

Din condiția (77) rezultă

$$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{\beta_t^2 + 1} \tag{80}$$

sau, dacă se are în vedere soluția particulară, adică pentru $C_2 = p_0 \cdot \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right)$

$$1 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{\beta_t^2 + 1}. \tag{81}$$

5.2.2.2.2. *Starea de eforturi unitare este spațială.* Expresiile de calcul în forma lor generală pentru eforturile unitare σ_1, σ_2 și σ_3 sînt pentru acest caz următoarele:

$$\sigma_1 = \sigma t_2 = -\frac{f}{k_2} \cdot C_2 \cdot \frac{2\beta_t^2}{\beta_t^2 - 1}\left[\exp\left(k_2\left(\frac{b}{r_0}\right) - 1\right)\right]; \tag{82}$$

— pentru $x = b$:

$$\sigma_2 = \sigma_{2\,max} = \sigma_{t_2}^{p_2} = -C_2 \cdot \frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1} \cdot \exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right), \tag{83}$$

$$\sigma_3 = \sigma_{3\,max} = -p_2 = -C_2 \cdot \exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right); \tag{84}$$

— pentru $x = 0$:

$$\sigma_2 = \sigma_{t_2}^{p_2} = -C_2 \cdot \frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1}, \tag{85}$$

$$\sigma_3 = -p_2 = -C_2. \tag{86}$$

Întrucît σ_1 şi σ_3 au acelaşi semn, iar $|\sigma_{ct}| = |-\sigma_{ct}|$, diferenţa $|\sigma_1| - |\sigma_3|$ va fi maximă atunci cînd σ_3 va fi minim, adică pentru $x = 0$. Reluînd condiţia (29) pentru acest caz, în urma efectuării tuturor calculelor elementare ajutătoare se obţine următoarea formă generală a condiţiei de verificare pentru îmbinările prin mandrinare lisă:

$$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1 - \frac{k_2}{f} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \cdot \frac{k_2}{f} \tag{87}$$

sau

$$\frac{2\beta_t}{\beta_t + 1} \cdot \left[\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) - 1 - \frac{k_2}{f} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2}\right] \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f}. \tag{88}$$

În cazul mandrinării ţevilor cu perete subţire $\beta_t \to 1$, $k_2 \approx \approx \mu.f. \dfrac{\psi - 1}{\psi + 1}$ (vezi tabela 1) şi inegalităţile (87) şi (88) se transformă în condiţia de verificare (26).

Formele particulare ale condiţiilor de verificare se obţin din inegalităţile (87) şi (88), în care se face substituţia $C_2 = p_0 \cdot \exp\left(-k_2 \dfrac{b}{r_0}\right)$. Rezultă

$$1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) - \frac{k_2}{f} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \cdot \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \cdot \frac{k_2}{f}, \tag{89}$$

$$\frac{2\beta_t}{\beta_t + 1} \cdot \left[1 - \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) - \frac{k_2}{f} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{2\beta_t^2} \cdot \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right)\right] \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f}. \tag{90}$$

Este evident însă că, în cazul de faţă, pe lîngă verificarea condiţiilor stabilite anterior este neapărat necesar să fie verificate în plus şi următoarele două condiţii:

$$|\sigma_{2\,max}| \leqslant \sigma_{ct}, \tag{91}$$

$$|\sigma_{3\,max}| \leqslant \sigma_{ct}. \tag{92}$$

Considerînd formula (83), din inegalitatea (91) se obţin condiţiile de verificare (80) (forma generală) şi (81) (forma particulară).

Considerînd formula (84), din inegalitatea (92) rezultă:

— în forma generală:

$$\exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{C_2}; \tag{93}$$

— în forma particulară:

$$1 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0}. \tag{94}$$

După cum se observă din analiza formulelor (80), (81), (93) şi (94), dacă este satisfăcută condiţia de verificare (91), atunci nu mai este necesară verificarea condiţiei (92), deoarece

$$\frac{\sigma_{ct}}{C_2} \cdot \frac{\beta_i^2 - 1}{\beta_i^2 + 1} < \frac{\sigma_{ct}}{C_2} . \tag{95}$$

★

Aşa cum este cunoscut, criteriul de plasticitate al lui Saint-Venant (respectiv teoria III de rupere) concordă destul de bine cu rezultatele experimentale, în special pentru materialele tenace, şi este confirmat de încercările la compresiune după toate direcţiile. Obişnuit, dimensionarea sau verificarea după acest criteriu asigură dimensiuni corespunzătoare pentru elementele construcţiilor. Uneori însă dimensiunile rezultate sînt chiar ceva mai mari decît cele necesare.

Principalele dezavantaje ale acestui criteriu sînt următoarele :

— nu ţine seama sub nici o formă de influenţa pe care o are asupra comportării materialului efortul unitar normal de valoare intermediară (mai mic decît σ_1, dar mai mare decît σ_3) ;

— subapreciază pericolul pe care îl prezintă solicitarea la eforturi unitare de întindere aproximativ egale după trei direcţii principale.

Din acest motiv, în partea a doua se va face apel la criteriul (condiţia) de plasticitate a lui Mises-Huber, mai bine verificat de practică, bazat pe lucrul mecanic maxim de schimbare (modificare) a formei.

Primită la redacţie la 11 februarie 1969

CONTRIBUȚII LA STUDIUL CONLUCRĂRII SPAȚIALE A GRINZILOR DIN TABLIERELE DE PODURI SIMPLU REZEMATE FĂRĂ ANTRETOAZE ÎN CÎMP ÎN DOMENIUL ELASTIC

de N. ȚOPA
Institutul de construcții, București

Folosirea în practică a unor grinzi de poduri nesolidarizate prin antretoaze în cîmp a pus problema găsirii unor procedee pentru calculul conlucrării transversale ale acestora, conlucrare realizată numai prin placa tablierului.
Pornind de la o formulare energetică se deduce un mod unitar de a stabili diversele ecuații de condiție, dîndu-se expresiile tuturor coeficienților necunoscutelor.
Se examinează atît efectul sarcinilor fixe cît și a celor mobile, pentru cele din urmă dîndu-se indicații practice de conducere a calculului.

În practica realizării unor lucrări de poduri pe grinzi s-a dovedit în ultimii ani a fi utilă introducerea unui sistem nou de tabliere pe grinzi, și anume tabliere realizate din grinzi drepte, simplu rezemate, legătura transversală dintre ele fiind realizată numai de placă. Acest tip de tabliere este util în special în cazul grinzilor prefabricate cu deschideri mici și mijlocii, care, după cum se știe, formează marea majoritate a lucrărilor de poduri. La aceste categorii de deschideri, problema repartiției tranversale poate fi, în general, asigurată prin placă. Pe de altă parte, renunțarea la antretoazele din cîmp constituie pentru grinzile prefabricate un mare avantaj, eliminîndu-se o serie de lucrări dificile de monolitizare a acestor antretoaze în condițiile de șantier.

Aceste considerații privind avantajele sistemului sînt suficiente pentru a determina extinderea folosirii lui și poate constitui o soluție pentru tipizarea lucrărilor de poduri cel puțin în cazul deschiderilor medii și mici, care dovedesc frecvența cea mai mare.

În literatura românească de specialitate lipsește însă deocamdată un material teoretic care să prezinte elementele fundamentale de calcul al acestui tip de suprastructură. O serie de preocupări mai vechi ale autorului în această direcție [3], [4], [5] i-au permis, consultînd și rezultate străine [1], [2], să elaboreze o formulare teoretică generală a problemei după specificul școlii românești de mecanică a construcțiilor și să sistematizeze o serie de aspecte particulare care decurg din ea.

În cele ce urmează sînt redate rezultatele acestor preocupări.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 1, 1970, P. 149–172

1. FORMULAREA GENERALĂ A REZOLVĂRII TABLIERELOR DE PODURI PE GRINZI ÎN T SIMPLU REZEMATE, AVÎND ANTRETOAZE NUMAI PE REAZEM (SARCINI FIXE)

Se pleacă de la consideraţia că placa are un dublu caracter : de placă plană şi de şaibă plană. Într-o secţiune s-ar evidenţia deci cinci eforturi secţionale dintre care reţinem numai patru [1] : o forţă normală, o forţă tăietoare (normală pe planul plăcii), o forţă tangenţială (în planul plăcii) şi un moment încovoietor, avînd vectorul în lungul secţiunii. S-a neglijat deci momentul de torsiune din placă, datorită grosimii mici a plăcii, care presupune un efort unitar tangenţial paralel cu deschiderea.

Procedeul de calcul adoptat se bazează pe metoda generală a eforturilor : se alege un sistem de bază prin suprimarea unor legături, se pun în evidenţă forţele de legătură şi apoi se scriu ecuaţiile de continuitate sub efectul încărcărilor exterioare şi a necunoscutelor (forţele de legătură). După cum se ştie [6], acest lucru poate fi scris şi prin exprimarea echilibrului pe baza principiului deplasărilor virtuale (variantă adoptată în cele ce urmează).

Forma de bază se obţine cu ajutorul unor secţiuni verticale, paralele cu grinzile şi dispuse între ele, şi constă dintr-o serie de elemente independente : grinzi simplu rezemate la încovoiere şi încastrate la torsiune în antretoaza de pe reazem. Antretoaza de pe reazem se consideră infinit rigidă la încovoiere în planul ei, datorită distanţei reduse între grinzi. În ceea ce priveşte rigiditatea la torsiune, ea se consideră cea efectivă corespunzătoare secţiunii sale.

Prin secţiunile făcute se pun în evidenţă eforturile necunoscute din placă şi din antretoazele de pe reazem. În placă avem ca necunoscute eforturile secţionale pomenite mai înainte. Mai corect spus, necunoscutele sînt funcţiile acestor eforturi în lungul grinzii.

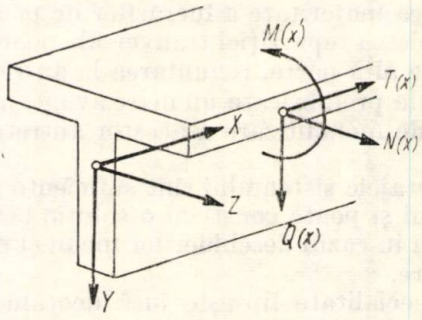


Fig. 1

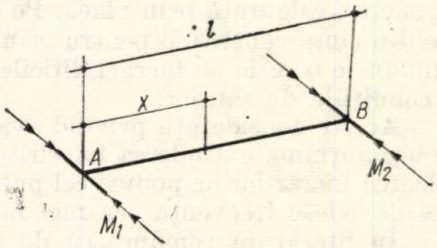


Fig. 2

Aceste funcţii sînt (fig. 1) :
— momentul încovoietor $M(x)$
— forţa normală $N(x)$,
— forţa tăietoare $Q(x)$
— forţa tangenţială $T(x)$.

$M(x)$ are dimensiunea $\frac{F \cdot L}{L} = F$, iar restul au dimensiunea $\frac{F}{L}$. Evident, mărimea acestor eforturi variază atît în lungul grinzii, cît și de la rost la rost.

În antretoazele de margine, presupunem înlăturate în forma de bază numai legăturile de continuitate la răsucire a antretoazei în fiecare interval dintre două grinzi, fără a deranja însă rigiditatea infinită la încovoiere a antretoazei. Această operație (lăsînd forma de bază ca grinzi simplu rezemate la încovoiere, dar încastrate la torsiune) pune în evidență încă două necunoscute, care sînt momentele de torsiune din antretoaze. De data aceasta nu avem de-a face cu eforturi secționale. Ele au dimensiuni de moment. O altă deosebire este că nu avem de-a face cu o funcție necunoscută, ci cu o necunoscută punctuală (cu valoare necunoscută).

Vom numi aceste eforturi M^1 și M^2 (M^1 în capătul unde este originea, M^2 în capătul opus; vezi fig. 2). În total avem deci în fiecare rost patru funcții necunoscute și două necunoscute punctuale. Pentru calcul se înlocuiesc funcțiile reale necunoscute din placă prin dezvoltări în serie trigonometrică. În acest fel rămîn necunoscuți multiplicatorii termenilor seriei.

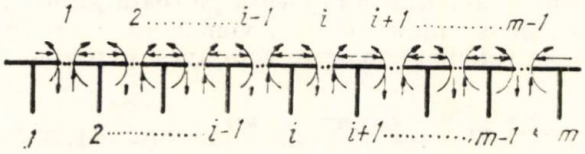


Fig. 3

Folosim notațiile:

$1, 2, \ldots, i-1, i, i+1, \ldots m-1$ — numărul de ordine al rostului (secțiunii) începînd din stînga; în același timp vom desemna și grinda din stînga rostului cu același indice (fig. 3);

$1, 2, \ldots, j-1, j, j+1, \ldots, n$ — rangul termenului din serie;

x, y, z — axele de coordonate (fig.1);

I_t, I_y, I_z — momentele de inerție ale secțiunii transversale a grinzii după axele de mai sus care trec prin centrul de greutate al secțiunii;

I_{ta} — momentul de inerție la torsiune al antretoazei;

I_{pl} — momentul de inerție pe unitatea de lungime a plăcii;

I_0 — un moment de inerție arbitrar;

m — numărul de grinzi în secțiune;

$\frac{E}{G} = \rho$;

δ = grosimea plăcii;

λ = distanța dintre axele a două grinzi.

În rostul i vom asimila funcțiile necunoscute cu următoarele serii:

$$\begin{aligned} M_i &= \sum_n m_i^n \sin \frac{n\pi}{l} x, \\ N_i &= \sum_n \nu_i^n \sin \frac{n\pi}{l} x, \\ Q_i &= \sum_n q_i^n \sin \frac{n\pi}{l} x, \\ T_i &= \sum_n t_i^n \cos \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \tag{1}$$

În aceste relații, necunoscutele sînt amplitudinile termenilor seriei, deci m_i^n, ν_i^n, q_i^n, t_i^n, al căror număr depinde de numărul de termeni considerați pe serie (n), adică de gradul de precizie dorit.

În mod analog, și forțele exterioare trebuie dezvoltate în serie trigonometrică, forma dezvoltării variind de la caz la caz. De exemplu, pentru o sarcină uniform distribuită p (aplicată pe toată grinda), care va interveni cel mai des în calculele noastre, vom avea expresia
veni cel mai des în calculele noastre, vom avea expresia

$$q(x) = \frac{2p}{\pi} \sum_n \frac{1 - \cos n\pi}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots). \tag{2}$$

Pentru alte tipuri de sarcini se dau la sfîrșit expresiile corespunzătoare (tabela 1).

Pentru scrierea ecuațiilor ne vom referi la forma de bază încărcată cu eforturile necunoscute și forțele exterioare și vom exprima echilibrul cu ajutorul principiului deplasărilor virtuale. Acestea din urmă le vom presupune ca fiind efectul unei încărcări virtuale de forma uneia dintre necunoscutele sistemului, dar avînd un singur termen în cazul necunoscutelor din (1). Întrucît în aceste ecuații de lucru mecanic virtual intervin deplasările reale pe liniile de secționare, care în cazul nostru sînt nule, ele reprezintă implicit și relații de continuitate.

Procedînd sistematic vom alege pentru fiecare tip de necunoscută din (1) o funcție-forță virtuală de tipul necunoscutei, dar avînd un singur termen.

Principiul lucrului mecanic virtual aplicat corpurilor elastice [6] conduce la

$$\overline{L}_{ext} = \overline{L}_{ef}. \tag{3}$$

Alegînd pentru exprimarea acestui principiu varianta forțelor virtuale [6], $\overline{L}_{ext}$ din (3) va exprima lucrul mecanic al forței virtuale exterioare, precum și al reacțiunilor determinate de ea, parcurgînd deplasările reale de pe direcția acestor forțe sau reacțiuni. Cum însă în cazul nostru deplasările reale pe direcția funcției-forță virtuale (adică pe direcția necunoscutelor

de calcul), precum și deplasările pe direcția reacțiunilor provocate de forța virtuală, sînt nule, rezultă

$$\overline{L}_{ext} = 0. \tag{4}$$

În final rămîne relația

$$\overline{L}_{ef} = 0, \tag{5}$$

relație în care prin $\overline{L}_{ef}$ se înțelege lucrul mecanic virtual al eforturilor virtuale provocate de forța virtuală exterioară, parcurgînd deplasările reale provocate de sistemul de forțe real (încărcări, forțe de legătură).

După cum se știe, relația (5) se mai poate scrie

$$\int_v (\bar{\sigma}_{xi} \cdot \varepsilon_x + \bar{\sigma}_{yi} \cdot \varepsilon_y + \bar{\sigma}_{zi} \cdot \varepsilon_z + \bar{\tau}_{xy,i} \gamma_{xy} + \bar{\tau}_{yz,i} \cdot \gamma_{yz} + \bar{\tau}_{xz,i} \cdot \gamma_{xz}) \, dv = 0. \tag{6}$$

Dezvoltarea relației (6) o vom face considerînd comportarea spațială a grinzii (adică ținînd seama de toate cele șase componente ale torsorului eforturilor). În cele de mai sus vom considera secțiunea transversală a grinzii ca fiind rigidă cu o singură excepție, și anume considerarea deplasării suplimentare a plăcii în raport cu secțiunea grinzii, cauzată de momentele încovoietoare din placă M_z (cu vectorul paralel cu axa x). Acest lucru este necesar, deoarece tocmai placa este elementul care asigură transmiterea deformațiilor de la o grindă la alta. S-a neglijat încovoierea inimii după momentele încovoietoare cu vectori paraleli cu deschiderea (adică momentele M_y), considerîndu-se această deformată neînsemnată în raport cu cea determinată de torsiunea întregii secțiuni. În cele de mai sus s-au notat momentele ca în teoria plăcilor, de exemplu M_z este momentul dat de σ_z etc.

La calculul lucrului mecanic se va ține seama de încovoiere și de torsiune cu o singură excepție, și anume considerarea variației lungimii grinzii (adică a lucrului mecanic al forțelor axiale din grindă).

1.1. STRUCTURA ECUAȚIEI DE TIP M_i

Pentru ecuația de tip M_i, funcția-forță virtuală va fi

$$\overline{m}_i^j = \overline{1} \cdot \sin \frac{j\pi}{l} x, \tag{7}$$

unde j este un număr întreg arbitrar. Această forță virtuală se aplică pe direcția lui M_i.

Analizînd termen cu termen elementele componente ale relației (6) determinate de forța virtuală (7), vom avea

$$\int_v (\bar{\sigma}_{xi} \varepsilon_x) \, dV = 0 \quad \text{și} \quad \int_v (\bar{\sigma}_{yi} \varepsilon_y) dV = 0, \tag{7.1}$$

întrucît forța virtuală $\overline{m}_i^j$ nu conduce la apariția de eforturi unitare normale $\bar{\sigma}_{xi}$ și $\bar{\sigma}_{yi}$ ($\bar{\sigma}_{xi} = 0$ și $\bar{\sigma}_{yi} = 0$ în toate punctele sistemului).

În continuare urmează termenul

$$\int_v (\bar{\sigma}_{zi}\varepsilon_z)\,dV \neq 0. \tag{7.2}$$

Nu luăm în considerare decît eforturile unitare $\bar{\sigma}_z^i$ din placă şi nu ţinem seama decît de momentele încovoietoare din placă ; de asemenea observăm că $\bar{\sigma}_{zi}$ provine din $\overline{M}_{pl,i}$, iar ε_z poate proveni din momentele încovoietoare din placă determinate de necunoscutele M_i, Q_i, precum şi de încărcarea exterioară q (imaginată în cele ce urmează ca o sarcină avînd un caracter oarecare în lungul grinzii, dar putînd fi exprimată tot sub forma unei serii trigonometrice; vezi tabela 1).

În acest fel, corespunzător relaţiei (7.2) vom obţine trei termeni, care vor fi exprimaţi în raport cu eforturile globale din secţiune şi nu cu cele unitare.

Termenul datorit lui M_i se va calcula ţinînd cont că într-un punct curent al plăcii (fig. 4) încărcarea (7) determină

$$\overline{M}_{pl,i} = \overline{m}_i^j = \sin\frac{j\pi}{l}x, \tag{7 a}$$

iar încărcarea din momentele din placă necunoscute determină

$$M_{pl,M} = \sum_n m_i^n \sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{7b}$$

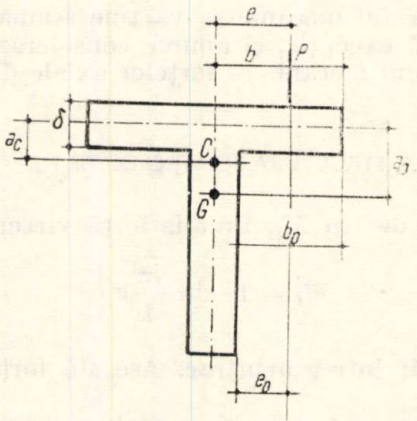


Fig. 4

Aceste relaţii conduc la

$$\frac{1}{EI_{pl}}\int_0^l\int_0^{b_0} \sin\frac{j\pi}{l}x \sum_n m_i^n \sin\frac{n\pi}{l}x\,dz\,dx = \frac{12}{E\delta^3}b_0\frac{l}{2}m_i^j. \tag{7.3}$$

Semnul $\sum$ dispare, deoarece integralele de tipul $\int_0^l \sin\frac{j\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$ sînt nule, rămînînd un singur termen corespunzător lui $k = j$.

Termenul datorit lui Q_i se va calcula ținînd cont că într-un punct curent al plăcii avem (vezi fig. 4)

$$\overline{M}_{pl,i} = \overline{m}_i^j = \sin\frac{j\pi}{l}x \qquad \text{(vezi relația (7))},$$
$$M_{pl,Q} = \left(\sum_n q_i^n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\right)z \qquad \text{(vezi relația (1))}. \tag{7c}$$

Aceste relații conduc la

$$\frac{1}{EI_{pl}}\int_0^l\int_0^{b_0} \sin\frac{j\pi}{l}x \sum_n q_i^n z \sin\frac{n\pi}{l}x\,dz\,dx = \frac{12}{E\delta^3}\cdot\frac{b_0^2}{2}\cdot\frac{l}{2}q_i^j. \tag{7.4}$$

Termenul datorit forței exterioare se va calcula ținînd cont că într-un punct curent al plăcii avem (vezi și fig. 4)

$$\overline{M}_{pl,i} = \overline{m}_i^j = \sin\frac{j\pi}{l}x, \qquad \text{(vezi relația (7))},$$
$$M_{pl,q} = \left(\sum_n \alpha_i^n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)(z - b_0 + e_0) \qquad \text{(vezi tabela 1)}. \tag{7d}$$

Aceste relații conduc la

$$\frac{1}{EI_{pl}}\int_0^l\int_{b_0-e_0}^{b_0} \sin\frac{j\pi}{l}x\left(\sum_n \alpha_i^n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)(z - b_0 + e_0)\,dz\,dx = \frac{12}{E\delta^3}\frac{e_0^2}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\alpha_i^j. \tag{7.5}$$

Ultimii trei termeni din (6) ne conduc la considerarea torsiunii grinzii (vom neglija deci lucrul mecanic efectuat de forțele tăietoare). Astfel vom obține patru termeni corespunzători momentelor de torsiune provenite din eforturile necunoscute M_t, N_t, Q_t și din forțele exterioare q.

Termenul datorit lui M_t se va calcula ținînd cont că într-o secțiune a grinzii încărcarea (7) determină

$$\overline{M}_{t,i} = \frac{l}{j\pi}\cos\frac{j\pi}{l}x. \tag{7.6}$$

Într-adevăr, grinda este încărcată cu momentul de torsiune distribuit, virtual $\overline{m}_i^j = \sin\frac{j\pi}{l}x$.

Or, se știe că

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{1}{GI_t}m_t = -\frac{1}{GI_t}\sin\frac{j\pi}{l}x,$$

ceea ce conduce la

$$\varphi = \frac{1}{GI_t}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2 \sin\frac{j\pi}{l}\,x + C_1\,x + C_2.$$

Întrucît $\varphi = 0$ pentru $x = 0$ și $x = l$, rezultă $C_1 = C_2 = 0$, de unde

$$\overline{M}_{t,i} = GI_t\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{l}{j\pi}\cos\frac{j\pi}{l}\,x.$$

În același mod vom avea și

$$M_{t,M} = \sum_n m_i^n \frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}\,x. \tag{7.7}$$

Relațiile (7.6) și (7.7) conduc la

$$\frac{1}{GI_t}\int_0^l \frac{l}{j\pi}\cos\frac{j\pi}{l}\,x\left(\sum_n m_i^n \frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}\,x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{GI_t}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\frac{l}{2}\,m_i^j. \tag{7.8}$$

Termenul datorit lui N_i se va calcula analog, ținînd cont de (7.6) și de

$$M_{t,N} = \sum_n \nu_i^n \frac{l}{n\pi}\cdot a_c\cdot\cos\frac{n\pi}{l}\,x. \tag{7.9}$$

Expresia (7.9) este dedusă analog cu cea de la (7.6). Vom obține deci

$$\frac{1}{GI_t}\int_0^l \frac{l}{j\pi}\cos\frac{j\pi}{l}\,x\left(\sum_n \nu_i^n \frac{l}{n\pi}\,a_c\cdot\cos\frac{n\pi}{l}\,x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{GI_t}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot a_c\cdot\frac{l}{2}\cdot\nu_i^j. \tag{7.10}$$

Termenul datorit lui Q_i se va calcula analog, ținînd cont de (7.6) și de

$$M_{t,Q} = \sum_n q_i^n\cdot\frac{l}{n\pi}\cdot b\cdot\cos\frac{n\pi}{l}\,x, \tag{7.11}$$

obținută analog cu (7.6). Vom obține

$$\frac{1}{GI_t}\int_0^l \frac{l}{j\pi}\cos\frac{j\pi}{l}\,x\left(\sum_n q_i^n\frac{l}{n\pi}\cdot b\cdot\cos\frac{n\pi}{l}\,x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{GI_t}\cdot\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot b\cdot\frac{l}{2}\,q_i^j. \tag{7.12}$$

Termenul datorit forței exterioare q se va calcula ținînd cont de (7.6) și de

$$M_{t,q} = \sum_n \alpha_i^n\frac{l}{n\pi}\cdot e\cdot\cos\frac{n\pi}{l}\,x, \tag{7.13}$$

obținută analog cu (7.6). Vom obține deci

$$\frac{1}{GI_t}\int_0^l \frac{l}{j\pi}\cos\frac{j\pi}{l}\,x\left(\sum_n \alpha_i^n\frac{l}{n\pi}\,e\cos\frac{n\pi}{l}\,x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{GI_t}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2 e\,\frac{l}{2}\,\alpha_i^j. \tag{7.14}$$

Observații

a) În dezvoltările de mai sus am evidențiat doar forma rezultatului exprimînd lucrul mecanic. Este clar că pot interveni mai mulți termeni de acest tip, după rostul în care este plasat efortul respectiv față de efortul virtual luat în considerare prin relația (7). De asemenea și semnul poate fi diferit. De aceste elemente se va ține seama direct în formularea finală a ecuației respective.

b) Întrucît numărul j a fost un întreg arbitrar, vom putea obține cîte n asemenea expresii ($j = 1 \dots n$), deci în fond n ecuații de continuitate pentru fiecare rost și necunoscută. De asemenea vom ține seama la formularea finală de acest lucru.

Forma finală a ecuației (6), unde forța virtuală este de tipul (7), ținînd seama de structura la care o aplicăm (fig. 3), (forma de bază încărcată cu eforturile necunoscute din figurile 1 și 2) va fi următoarea :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{(GI_t)_i}\cdot\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot\frac{l}{2}\,m_{i-1}^j+\frac{1}{(GI_t)_i}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\frac{l}{2}\,m_i^j+\frac{1}{(GI_t)_{i+1}}\cdot\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot\frac{l}{2}\,m_i^j+\\
&+\frac{12}{E\delta_i^3}b_{0i}\,\frac{l}{2}\,m_i^j+\frac{12}{E\delta_{i+1}^3}\,b_{0i+1}\,\frac{l}{2}\,m_i^j-\frac{1}{(GI_t)_{i+1}}\cdot\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot\frac{l}{2}\cdot m_{i+1}^j+\\
&+\frac{1}{(GI_t)_i}\cdot\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot a_{ci}\,\frac{l}{2}\,\nu_{i-1}^j-\frac{1}{(GI_t)_i}\cdot\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot a_{ci}\cdot\frac{l}{2}\,\nu_i^j-\frac{1}{(GI_t)_{i+1}}\cdot\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot\\
&\cdot a_{ci+1}\,\frac{l}{2}\,\nu_i^j+\frac{1}{(GI_t)_{i+1}}\cdot\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot a_{ci+1}\,\frac{l}{2}\,\nu_{i+1}^j-\frac{1}{(GI_t)_i}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot b_i\cdot\frac{l}{2}\,q_{i-1}^j-\\
&-\frac{1}{(GI_t)_i}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot b_i\cdot\frac{l}{2}\,q_i^j+\frac{1}{(GI_t)_{i+1}}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot b_{i+1}\cdot\frac{l}{2}\cdot q_i^j-\frac{12}{E\delta_i^3}\cdot\frac{b_{0i}^2}{2}\,\frac{l}{2}\,q_i^j+\\
&+\frac{12}{E\delta_{i+1}^3}\cdot\frac{b_{0i+1}^2}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot q_i^j+\frac{1}{(GI_t)_{i+1}}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2 b_{i+1}\cdot\frac{l}{2}\,q_{i+1}^j-\frac{1}{(GI_t)_i}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\cdot e_i\cdot\frac{l}{2}\cdot\alpha_i^j-\\
&-\frac{12}{E\delta_i^3}\,\frac{e_{0i}^2}{2}\cdot\frac{l}{2}\,\alpha_i^j-\frac{1}{(GI_t)_{i+1}}\cdot\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2 e_{i+1}\,\frac{l}{2}\,\alpha_{i+1}^j-\frac{12}{E\delta_{i+1}^3}\cdot\frac{e_{0i+1}^2}{2}\,\frac{l}{2}\,\alpha_{i+1}^j=0.
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

Observații

a) În ecuația (7.15) indicele inferior i, $i-1$, $i+1$ marchează fie necunoscutele respective din rosturile i, $i-1$, $i+1$, fie caracteristicile geometrice-elastice și de încărcare a grinzilor i sau $i+1$, elemente care pot fi variabile de la grindă la grindă.

b) De asemenea trebuie remarcat că brațele de pîrghie e și e_0 sînt considerate pozitive atunci cînd sînt orientate către rostul necunoscutei respective pentru care se scrie ecuația. În cazul cînd forța s-ar găsi în cîmpurile vecine cu rostul considerat, e_0 va fi nul, întrucît nu intervine în încovoierea plăcii spre rostul respectiv.

3. Pentru $j = 1, 2, \dots, n$, relația (7.15) conduce la n relații de acest tip.

Ecuația (7.15) se poate scrie într-o formă mai concisă, ordonînd-o după necunoscutele de calcul (M, N, Q, T). Pentru simplificarea exprimării coeficienților necunoscutelor, înmulțim ecuația (7.15) cu $2EI_0/l^2$ pentru a avea coeficienții adimensionali și obținem

$$B^j_{1i}\frac{m^j_{i-1}}{l}+B^j_{2i}\frac{m^j_i}{l}+B^j_{3i}\frac{m^j_{i+1}}{l}+B^j_{4i}\,\nu^j_{i-1}+B^j_{5i}\,\nu^j_i+B^j_{6i}\,\nu^j_{i+1}+B^j_{7i}\,q^j_{i-1}+$$
$$+B^j_{8i}\,q^j_i+B^j_{9i}\,q^j_{i+1}+B^j_{0i}=0. \tag{7.16}$$

Expresiile coeficienților B sînt date în tabela 2.

1.2. STRUCTURA CELORLALTE TIPURI DE ECUAȚII

Procedînd absolut analog ca în cazul ecuației de tip M_i, vom încărca forma de bază cu forțe virtuale chiar de tipul necunoscutelor și vom obține, în final, ecuații avînd coeficienți adimensionali, analoge ecuației (7.16), după cum urmează:

— ecuația de tip N_i:

$$C^j_{1i}\frac{m^j_{i-1}}{l}+C^j_{2i}\frac{m^j_i}{l}+C^j_{3i}\frac{m^j_{i+1}}{l}+C^j_{4i}\,\nu^j_{i-1}+C^j_{5i}\,\nu^j_i+C^j_{6i}\,\nu^j_{i+1}+C^j_{7i}\,q^j_{i-1}+$$
$$+C^j_{8i}\,q^j_i+C^j_{9i}\,q^j_{i+1}+C^j_{10i}\,t^j_{i-1}+C^j_{11i}\,t^j_i+C^j_{12i}\,t^j_{i+1}+C^j_{0i}=0; \tag{8}$$

— ecuația de tip Q_i:

$$D^j_{1i}\frac{m^j_{i-1}}{l}+D^j_{2i}\frac{m^j_i}{l}+D^j_{3i}\frac{m^j_{i+1}}{l}+D^j_{4i}\,\nu^j_{i-1}+D^j_{5i}\,\nu^j_i+D^j_{6i}\,\nu^j_{i+1}+D^j_{7i}\,q^j_{i-1}+$$
$$+D^j_{8i}\,q^j_i+D^j_{9i}\,q^j_{i+1}+D^j_{10i}\,t^j_{i-1}+D^j_{11i}\,t^j_i+D^j_{12i}\,t^j_{i+1}+D^j_{13i}\frac{M^1_{i-1}}{l^2}+ \tag{9}$$
$$+D^j_{14i}\frac{M^1_i}{l^2}+D^j_{15i}\frac{M^1_{i+1}}{l^2}+D^j_{16i}\frac{M^2_{i-1}}{l^2}+D^j_{17i}\frac{M^2_i}{l^2}+D^j_{18i}\frac{M^2_{i+1}}{l^2}+D^j_{0i}=0;$$

— ecuația de tip T_i:

$$F^j_{4i}\,\nu^j_{i-1}+F^j_{5i}\,\nu^j_i+F^j_{6i}\,\nu^j_{i+1}+F^j_{7i}\,q^j_{i-1}+F^j_{8i}\,q^j_i+F^j_{9i}\,q^j_{i+1}+F^j_{10i}\,t^j_{i-1}+$$
$$+F^j_{11i}\,t^j_i+F^j_{12i}\,t^j_{i+1}+F^j_{13i}\frac{M^1_{i-1}}{l^2}+F^j_{14i}\frac{M^1_i}{l^2}+F^j_{15i}\frac{M^1_{i+1}}{l^2}+F^j_{16i}\frac{M^2_{i-1}}{l^2}+ \tag{10}$$
$$+F^j_{17i}\frac{M^2_i}{l^2}+F^j_{18i}\frac{M^2_{i+1}}{l^2}+F^j_{0i}=0;$$

— ecuația de tip M_i^1 :

$$\sum_{n=1}^{n} H_{7i}^n q_{i-1}^n + \sum_{n=1}^{n} H_{8i}^n q_i^n + \sum_{n=1}^{n} H_{9i}^n q_{i+1}^n + \sum_{n=1}^{n} H_{10i}^n t_{i-1}^n + \sum_{n=1}^{n} H_{11i}^n t_i^n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{n} H_{12i}^n t_{i+1}^n + H_{13i} \frac{M_{i-1}^1}{l^2} + H_{14i} \frac{M_i^1}{l^2} + H_{15i} \frac{M_{i+1}^1}{l^2} + H_{16i} \frac{M_{i-1}^2}{l^2} + \quad (11)$$

$$+ H_{17i} \frac{M_i^2}{l^2} + H_{18i} \frac{M_{i+1}^2}{l^2} + \sum_{n=1}^{n} H_{0i}^n = 0 ;$$

— ecuația de tip M_i^2 :

$$\sum_{n=1}^{n} L_{7i}^n q_{i-1}^n + \sum_{n=1}^{n} L_{8i}^n q_i^n + \sum_{n=1}^{n} L_{9i}^n q_{i+1}^n + \sum_{n=1}^{n} L_{10i}^n t_{i-1}^n + \sum_{n=1}^{n} L_{11i}^n t_i^n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{n} L_{12i}^n t_{i+1}^n + L_{13i} \frac{M_{i-1}^1}{l^2} + L_{14i} \frac{M_i^1}{l^2} + L_{15i} \frac{M_{i+1}^1}{l^2} + L_{16i} \frac{M_{i-1}^2}{l^2} + \quad (12)$$

$$+ L_{17i} \frac{M_i^2}{l^2} + L_{18i} \frac{M_{i+1}^2}{l^2} + \sum_{n=1}^{n} L_{0i}^n = 0.$$

Se remarcă faptul că ecuațiile (8), (9), (10) reprezintă n relații pentru $j = 1, 2, \ldots, n$, pe cînd ecuațiile (11), (12) numai cîte o ecuație, dar conținînd toți coeficienții necunoscuți ai seriilor. Indicii superiori reprezintă rangul termenului din serie, iar cei inferiori rostul la care ne referim.

Expresiile coeficienților C, D, F, H, L se găsesc de asemenea în tabela 2.

1.3. FORMA FINALĂ A SISTEMULUI DE ECUAȚII

Utilizînd modul de scriere a ecuațiilor indicat în (7.16), (8)—(12), putem scrie complet sistemul de ecuații.

Dacă ne fixăm pentru precizia dorită un număr de n termeni în seriile care aproximează funcțiile-eforturi necunoscute și există un număr de m grinzi, numărul total de necunoscute va fi de $4n\,(m-1) + 2\,(m-1) = 2\,(m-1)\,(2n+1)$.

Modul cel mai sistematic de a scrie sistemul de ecuații este acela de a ne stabili o ordine de scriere a necunoscutelor și de a scrie ecuațiile corespunzătoare în această ordine.

Prin modul cum sînt scrise ecuațiile-tip citate mai sus s-a urmărit ca coeficienții notați cu B, C, D, F, H, L să aibă un caracter adimensional. Pentru acest lucru este necesară considerarea drept necunoscute mărimi avînd aceeași natură dimensională.

Astfel se explică apariția mărimilor $\frac{m_i}{l}$ și $\frac{M_i^1}{l^2}, \frac{M_i^2}{l^2}$ în sistemele de ecuații. În acest fel, mărimile necunoscute sînt

$$\begin{aligned} &\frac{m_i^j}{l} = \mu_i^j;\ \nu_i^j;\ q_i^j;\ t_i^j && (i = 1, 2, \ldots, m-1),\\ &&& (j = 1, 2, \ldots, n),\\ &\frac{M_i^1}{l^2} = \mathfrak{M}_i^1;\ \frac{M_i^2}{l^2} = \mathfrak{M}_i^2 && (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{13}$$

Aceste necunoscute de calcul au toate dimensiunea forță/lungime (t/m sau kg/cm). Sistemul de ecuații în forma cea mai generală este dat în tabela matrice 3. Din examinarea acestei matrice a coeficienților necunoscutelor de calcul se poate constata ușor (consultînd și tabela 2 a expresiilor coeficienților) simetria acestora față de diagonala principală a matricei, fapt care reflectă reciprocitatea lucrului mecanic virtual.

Observații

a) Sistemul de ecuații este alcătuit pentru cazul unor grinzi paralele, cu linia de rezemare perpendiculară pe axele de rezemare (deci l = = const.). Dacă l este variabil de la grindă la grindă în expresiile coeficienților care conțin mărimea l, acesta trebuie introdus cu indicele i sau $i + 1$, ca și celelalte mărimi din termenul în care se situează.

b) De asemenea, dacă se consideră că din modul de comportare în timp a plăcii față de grindă placa va avea o comportare diferită de a grinzii (apariție eventuală de fisuri etc.), acest lucru se poate prinde în calcul prin considerarea unui alt modul de elasticitate la încovoiere a plăcii față de modulul de elasticitate a betonului din grindă. În expresiile coeficienților vom introduce în loc de valoarea lui E o valoare diferită, E_{pl}. După sistematizările următoare, acest lucru se traduce prin multiplicare cu raportul $\frac{E}{E_{pl}}$ a tuturor termenilor din coeficienții necunoscutelor care conțin rigiditatea plăcii la numitor adică δ^3. Este vorba de termenii care conțin la numitor pe δ^3 din coeficienții

$$B_{2i}^j,\ B_{8i}^j,\ B_{0i}^j,\ D_{2i}^j,\ D_{8i}^j,\ D_{0i}^j.$$

c) În cazul unor grinzi cu caracteristici geometrice și elastice constante în sens transversal, coeficienții necunoscutelor sistemului de ecuații se simplifică ca scriere, nemaidepinzînd de indicele i (al doilea indice de jos). De asemenea toate rapoartele $\frac{I_0}{I_z}$ și $\frac{I_0}{I_y}$ devin egale cu 1.

d) În cazul tablierelor cu o lățime totală a tablierului suficient de mare în raport cu deschiderea l, deci pentru care se poate considera că placa în ansamblul ei este o șaibă plană cu rigiditate foarte mare, se poate accepta în calcul o deformare foarte mică în plan orizontal, adică se poate considera raza de curbură în plan orizontal avînd o mărime infinită. Acest lucru se poate traduce prin considerarea $I_y = \infty$ pentru toate grinzile.

e) Dacă aLtretoaza de pe reazem este elastică la torsiune și neglijăm în mod deliberat aportul ei (datorit rigidității mici la torsiune), la comportarea rețelei de grinzi sistemul de ecuații se simplifică foarte mult. Într-adevăr, nu numai că dispar două necunoscute în fiecare rost (deci dispar

în total $2m-2$ necunoscute), dar restul sistemului avînd $4n(m-1)$ necunoscute se poate scrie ca n sisteme independente a $4(m-1)$ ecuații fiecare, ceea ce constituie o reducere substanțială a calculului. Acest lucru se poate constata direct, examinînd matricea sistemului de ecuații 3, care, în absența necunoscutelor de tip $\mathfrak{M}$, arată că sistemul general poate fi descompus în n sisteme independente.

★

După rezolvarea sistemului de ecuații și obținerea valorilor necunoscutelor de calcul din relațiile (13) și după trecerea de la necunoscutele de calcul μ, $\mathfrak{M}^1$ și $\mathfrak{M}^2$ la necunoscutele m, M^1 și M^2 (vezi relațiile (13)) se trece la determinarea eforturilor din grinzile tablierului. În modul cel mai complet, în secțiunea unei grinzi vor exista, din cauza comportării spațiale a grinzii, șase eforturi, și anume N, T_{xy}, T_{xz}, $M_x = M_t$, M_y, M_z. Dintre acestea, cele mai importante sînt T_{xy}, $M_x = M_t$ și M_z, celelalte fiind efecte secundare.

Expresiile de calcul pentru grinda i sînt

$$N = \sum_{j=1}^{n} \frac{l}{j\pi}(t_{i-1}^j - t_i^j) \sin\frac{j\pi}{l} x,$$

$$T_{xy} = \sum_{j=1}^{n} \frac{l}{j\pi}(q_i^j - q_{i-1}^j + \alpha_i^j) \cos\frac{j\pi}{l} x + \frac{M_i^1 + M_i^2 - M_{i-1}^1 - M_{i-1}^2}{l},$$

$$T_{xz} = \sum_{j=1}^{n} \frac{l}{j\pi}(\nu_i^j - \nu_{i-1}^j) \cos\frac{j\pi}{l} x,$$

$$M_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{l}{j\pi}(m_i^j - m_{i-1}^j - \nu_i^j a_{ci} + \nu_{i-1}^j a_{ci} - q_i^j b_i - q_{i-1}^j b_i - \alpha_i^j e_i) \cos\frac{j\pi}{l} x, \tag{14}$$

$$M_y = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{l}{j\pi}\right)^2 \left(-\nu_i^j + \nu_{i-1}^j + \frac{j\pi}{l} \cdot b_i t_i^j + \frac{j\pi}{l} b_i t_{i-1}^j\right) \sin\frac{j\pi}{l} x,$$

$$M_z = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{l}{j\pi}\right)^2 \left(q_i^j - q_{i-1}^j + \frac{j\pi}{l} a_{0i} t_i^j - \frac{i\pi}{l} a_{0i} t_{i-1}^j + \alpha_i^j\right) \sin\frac{j\pi}{l} x +$$

$$+ (M_{i-1}^1 - M_i^1)\frac{l-x}{l} + (M_i^2 - M_{i-1}^2)\frac{x}{l}.$$

Notă. În expresia lui M_z, e_i trebuie considerat pozitiv în sensul axei z, spre deosebire de modul cum s-a specificat la coeficientul D_{0i}^j și B_{0i}^j.

Pentru aprecierea deformabilității grinzii în plan vertical se va folosi ecuația fibrei medii deformate a grinzii:

$$v_i = \frac{1}{(EI_z)_i} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{l}{j\pi}\right)^4 (\alpha_i^j + q_i^j - q_{i-1}^j + \frac{j\pi}{l} a_{0i} t_i^j - \frac{j\pi}{l} a_{0i} t_{i-1}^j) \sin\frac{j\pi}{l} x + \tag{15}$$

$$+ \frac{1}{(EI_z)_i}\left[(M_{i-1}^1 - M_i^1)\frac{lx}{6}\left(2 - \frac{3x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) + (M_i^2 - M_{i-1}^2)\frac{lx}{6}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)\right].$$

Ecuația fibrei deformate în plan orizontal este dată de relația

$$W_i = \frac{1}{(EI_y)_i} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{l}{j\pi}\right)^4 \left(v_i^j - v_{i-1}^j - \frac{j\pi}{l} b_i t_i^j - \frac{j\pi}{l} b_i t_{i-1}^j\right) \sin \frac{j\pi}{l} x. \tag{16}$$

Unghiul de răsucire a unei secțiuni în jurul axei x este

$$\varphi_i = \frac{1}{(GI_t)_i} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{l}{j\pi}\right)^2 (m_i^j - m_{i-1}^j - a_{ci} v_i^j + a_{ci} v_{i-1}^j - b_i q_i^j - b_i q_{i-1}^j - e_i \alpha_i^j) \times$$
$$\times \sin \frac{j\pi}{l} x. \tag{17}$$

2. DETERMINAREA SOLICITĂRILOR ÎN GRINZI PENTRU SARCINI MOBILE

2.1 REZOLVAREA GENERALĂ, DIRECTĂ

Mobilitatea forțelor exterioare obligă folosirea liniilor de influență sau, mai corect spus, a suprafețelor de influență. Cea mai simplă modalitate de determinare a suprafețelor de influență este rezolvarea sistematică a sistemului de ecuații din tabela-matrice 3 pentru poziția forței unitare într-un număr suficient de puncte în lungul grinzilor și transversal acestora. Acest lucru se poate face utilizînd calculatoarele electronice.

Evident se poate folosi cu succes, cînd există, simetria longitudinală și transversală.

Termeni liberi pentru cazul sarcinii unitare se vor calcula pentru valoarea $\alpha^j = 2\frac{P}{l} \cdot \sin \frac{j\pi c}{l} = \frac{2}{l} \sin \frac{j\pi c}{l}$, deoarece $P = 1$. Dezvoltarea în serie corespunzătoare sarcinii unitare va fi (conform tabelei1)

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha^j \sin \frac{j\pi x}{l}. \tag{18}$$

2.2. REZOLVĂRI SIMPLIFICATE

2.2.1. O primă posibilitate de simplificare constă în reducerea numărului de puncte distincte pe o grindă în care să se plaseze sarcina unitară la numai 3 (mijlocul și sferturile) sau eventual la numai un punct (mijlocul), restul completîndu-se cu o curbă care să aproximeze linia de influență.

2.2.2. O metodă simplificată mai uzuală este întîlnită în [1]. În cele ce urmează expunem principiul metodei, aducînd o serie de amendamente la modul de folosire a acestei metode.

Observațiile și propunerile care se vor face se vor referi în special la modul de definire a sarcinii înlocuitoare (care se va descrie în cele ce urmează).

Din motivele pe care le-am expus în paragraful 1 am asimilat variația longitudinală a sarcinilor prin dezvoltări în serie după gruparea forțelor. Apare deci mult mai comod să considerăm în calcule *un singur tip de variație longitudinală a sarcinilor* și să considerăm ca variabilă numai poziția acestei sarcini în sens transversal.

Tipul de sarcină „de referință" pe care ni-l propunem este sarcina uniform distribuită. Problemele care se pun sînt deci următoarele:

— determinarea unor „linii de influență" a diverselor mărimi statice și geometrice (eforturi sau deplasări) dintr-o grindă atunci cînd o sarcină-„etalon" uniform distribuită, de intensitate unitară, se mișcă în sens transversal tablierului;

— determinarea valorii sarcinii uniform distribuite longitudinal cu care să încărcăm liniile de influență și care trebuie să aproximeze cel mai bine grupările reale de sarcini.

În decursul calculului, sarcinile reale vor suferi deci o dublă transformare: de la gruparea reală la o sarcină uniform distribuită și apoi de la sarcina uniform distribuită la dezvoltarea în serie corespunzătoare. Acest lucru are avantajul că permite tratarea unitară a problemei liniilor de influență (care se vor referi la un tip unic de sarcină, sarcina uniform distribuită).

Dacă am trata problema direct, dezvoltînd direct în serie gruparea reală de forțe, am obține pentru fiecare grupare o altă exprimare în serie, ceea ce produce o greutate în definirea noțiunii de sarcină unitară. La aceasta mai trebuie adăugat faptul că forțele reprezentînd diverse convoaie conduc la exprimări foarte complicate pentru dezvoltarea în serie în cazul cînd pe grindă sînt mai multe forțe concentrate. Practic, acest fel de calcul ar însemna determinarea liniilor de influență *pentru fiecare tip de încărcare separat*, și aceasta nu prin exprimarea cu ajutorul sarcinii unitare, ci direct cu ajutorul sarcinilor efective.

O revenire la noțiunea clasică de linie de influență sau mai degrabă la noțiunea de suprafață de influență s-ar putea face dacă am lua în considerare și poziția variabilă a forței unitare în lungul grinzii. În acest caz ajungem la modul de calcul de la punctul 2.2.1 de mai sus.

Determinarea liniilor de influență pentru o sarcină-„etalon" uniform distribuită pe tot lungul grinzii de intensitate $q = 1$, care poate avea în secțiune transversală orice poziție, se face pe calea expusă în paragraful 1, rezolvînd sistemul de ecuații pentru un număr de poziții a forței q egal cu numărul de grinzi m. Evident, dacă avem simetrie față de axul longitudinal al tablierului, numărul de poziții distincte va fi de numai $\frac{m}{2}$ sau $\frac{m+1}{2}$ (după cum m este par sau impar). Conform tabelei 1, expresia dezvoltării în serie a încărcării va fi de tipul relației (2), unde $p = 1$. Valoarea care trebuie introdusă în calculul termenilor liberi este în acest caz

$$\alpha^j = \frac{2(1 - \cos j\pi)}{j\pi}. \tag{19}$$

Pozițiile distincte ale acestei forțe-etalon q, care au fost indicate mai sus în dreptul axelor longitudinale ale grinzilor, pot fi îndesite și cu puncte

intermediare. Aceasta ar fi necesar doar pentru cazul cînd distanța dintre axele grinzilor este mai importantă. În cazul unor grinzi dese sînt suficiente numai punctele de pe axele longitudinale ale grinzilor.

După rezolvarea sistemelor de ecuații se pot trasa liniile de influență ale necunoscutelor de calcul m_i, ν_i, q_i, t_i, M_i^1, M_i^2 și apoi cu ajutorul relațiilor (14)—(17) liniile de influență ale tuturor mărimilor fizice necesare. Evident acestea corespund unei sarcini unitare uniform distribuite.

În ceea ce privește aspectul determinării valorii sarcinii distribuite q care să aproximeze cel mai bine gruparea reală de sarcini, este de remarcat că nu se poate folosi în mod arbitrar echivalentul convoaielor care se găsește în normative, așa cum e indicat în [1].

Într-adevăr, echivalenții din standarde folosiți la calculul eforturilor la grinzi drepte simplu rezemate sînt calculați în ideea ca să realizeze echivalența de efort egal (moment sau forță tăietoare), considerînd linia de influență ca pentru o grindă simplu rezemată, adică de formă triunghiulară cu laturi drepte, în lungul grinzii. În cazul de față, dacă am trasa linia de influență în lungul unei grinzi ca la punctul 2.1, am obține evident o formă curbă, deoarece, sistemul fiind static nedeterminat, linia de influență are semnificația unei deformate.

Pe de altă parte, în cazul de față nu este indicat echivalentul de efort egal. Într-adevăr, efectul de conlucrare de la o grindă la alta se transmite prin deformațiile grinzilor, deci putem spune că pentru o anumită poziție a sarcinii reale efectul acestei grupări de sarcini asupra unei alte grinzi va fi o funcție liniară de deformațiile pe care această grupare le determină pe grinda pe care se aplică pe forma de bază, adică grinzi simplu rezemate la încovoiere, dar încastrate la torsiune. Într-adevăr, ecuațiile de bază au fost determinate pe baza principiului lucrului mecanic virtual, ceea ce face ca termenii liberi din ecuațiile de bază să aibă de fapt semnificații de deplasări reale pe anumite direcții (anume pe direcția necunoscutelor) pe forma de bază.

Dacă, așa cum ne-am propus, considerăm numai pozițiile forței în dreptul axelor grinzilor (adică nu avem excentricități), termenii liberi care rămîn exprimă deplasări pe verticală (în cazul ecuațiilor (9)), deplasări în lungul lui T (pentru (10)) sau rotiri pe reazem (pentru (11) și (12)).

Întrucît putem afirma că între săgeata la mijloc, deplasarea în sensul lui T și rotirea de pe reazem există aproximativ o dependență directă, putem considera cu oarecare aproximație că toate eforturile în acest caz depind liniar de săgeata grinzii.

În urma acestei analize conchidem că criteriul cel mai bun de determinare a intensității sarcinii echivalente q este cel al realizării unei săgeți maxime egale, adică practic săgeata la mijloc egală. Aproximația făcută este cu atît mai puțin importantă, cu cît din analiza mai multor cazuri concrete se dovedește că ponderea cea mai mare în conlucrare o deține efortul Q, care este legat direct de săgețile pe verticală. Dacă s-ar ține seama numai de legătura corespunzătoare lui Q (așa cum de altfel se poate folosi în unele cazuri), atunci concluziile de mai sus sînt strict corecte. Dar, chiar în cazul cînd ținem seama de toate legăturile, aproximația este cu atît mai mică cu cît cercetăm efecte mai depărtate de grinda pe care se aplică forțele.

În cazul forțelor care se aplică chiar pe grinda pe care se cercetează efectul, recomandăm următorul procedeu. Să presupunem că, folosind linia de influență a unui efort (de exemplu al momentului încovoietor M_z în grinda i), am găsit poziția grupării reale de sarcini în sens transversal pentru care vom obține maximul. Este clar că aproape întotdeauna vom avea o serie de forțe chiar pe grinda respectivă, iar altele pe alte grinzi (fig. 5).

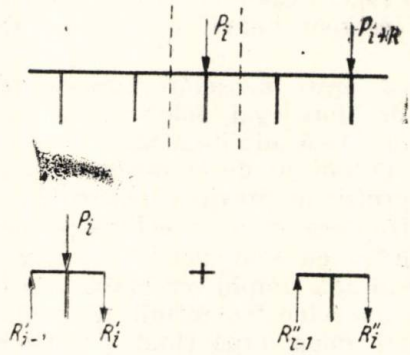


Fig. 5

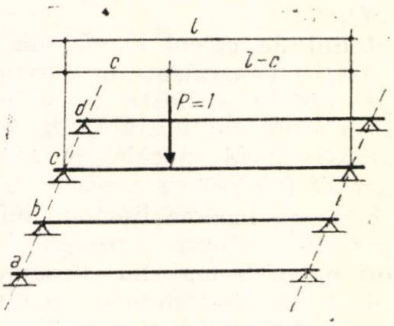


Fig. 6

În această situație desfacem legăturile dintre grinda i și grinzile vecine, înlocuindu-le cu forțele de legătură. Grinda i va fi solicitată deci de forțele exterioare P_i și de forțele de legătură (M_{i-1} și M_i, N_{i-1} și N_i, Q_{i-1} și Q_i etc.).

Suprapunerea momentelor date de fiecare dintre aceste încărcări *pe forma de bază* ne dă expresia a șasea, M_z, din (14). Partea corespunzătoare încărcării exterioare din expresia citată mai sus (termenul α) putem s-o calculăm însă direct, fără a mai fi nevoie de exprimarea în serie eventual cu ajutorul echivalenților de *efort egal* care să găsesc în normative.

Forțele de legătură din secțiunile făcute provin fie din forțele de pe grindă P_i (aceste forțe de legătură au fost notate simbolic și desenate în figura 5 cu R'), fie din forțele de pe alte grinzi (R'').

Pentru evaluarea mărimilor R', pe care le considerăm direct proporționale cu săgeata la mijloc, date din sarcinile P_i pe grinda i, precum și pentru evaluarea mărimilor R'', pe care le considerăm direct proporționale cu săgețile maxime pe grinda $i+k$ din forțele P_{i+k}, folosim, după cum am arătat, echivalentul de săgeată egală la mijloc. Aceasta revine la a calcula efortul căutat cu o expresie de tipul următor:

$$M_{z,i} = M^0_{z,i} + M^c_{z,i}, \tag{20}$$

unde $M_{z,i}$ este momentul încovoietor final pe grinda i, $M^0_{z,i}$ momentul încovoietor pe grinda i în forma de bază din sarcinile care calcă chiar pe grinda i, iar $M^c_{z,i}$ momentul de conlucrare provenit din forțele de legătură pe forma de bază. $M^c_{z,i}$ se calculează cu ajutorul liniei de influență a momentului încovoietor $M_{z,i}$, relațiile (14), în care nu se ține seama

decît de eforturile de legătură, deoarece de termenul legat de încărcare am ţinut seama în $M^0_{z,i}$. Această linie de influenţă se încarcă cu echivalentul de săgeată egală a grupării reale de forţe.

Menţionăm că pentru a estompa aproximaţiile făcute, în calculul momentelor de torsiune din antretoaze se poate considera echivalentul de rotire egală pe reazem.

Cazurile cele mai uzuale de echivalenţi necesari sînt date în lucrarea [5]. Menţionăm că putem folosi un singur tip de echivalent pentru majoritatea eforturilor, şi anume pe cel al săgeţii egale la mijlocul deschiderii, iar echivalentul de rotire egală pe reazem numai pentru calculul lui M^1 şi M^2.

Modul de calcul expus mai sus arată deosebiri importante faţă de utilizarea echivalentului curent de efort egal, folosit şi în [1]. Un exemplu simplu va ilustra acest lucru. Dacă admitem un convoi dintr-o singură sarcină concentrată (fig. 6), putem şti de la început că, atunci cînd această forţă va călca pe axa grinzii în preajma reazemului, forţa tăietoare va fi egală cu însăşi forţa. După calculul cu echivalent de efort egal, dacă am încărca linia de influenţă cu echivalentul q, care ar da aceeaşi forţă tăietoare la margine pe grinda simplu rezemată, am obţine un efort cu mult mai mic, deoarece intervine fenomenul de conlucrare, chiar dacă am descompune calculul în două după tipul dat de relaţia (20), rezultatul ar fi mai mic, deoarece din forţa tăietoare dată de primul termen al relaţiei de tip (20) se scade un termen, deci valoarea finală se micşorează. Dacă însă se introduce echivalentul de săgeată egală, al doilea termen din relaţia de tip (20) este nul, deoarece forţa concentrată la margine dă săgeata nulă la mijloc.

Primită la redacţie la 31 mai 1968

Tabela 1

Dezvoltarea în serie a încărcării exterioare (pentru cîteva tipuri uzuale de încărcare)

1. Expresia încărcării :

$$p = \sum_{j=1}^{n} \alpha^j \sin \frac{j\pi}{l} \cdot x$$

2. Expresia momentului încovoietor (în cazul rezemărilor simple) :

$$M = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{l}{j\pi}\right)^2 \alpha^j \sin \frac{j\pi}{l} \cdot x$$

3. Expresia forţei tăietoare :

$$T = \sum_{j=1}^{n} \frac{l}{j\pi} \cdot \alpha^j \cos \frac{j\pi}{l} \cdot x$$

4. Expresia săgeţii :

$$v = \frac{1}{El_z} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{l}{j\pi}\right)^4 \alpha^j \sin \frac{j\pi}{l} \cdot x$$

În relațiile de mai sus α are expresiile :

a — Sarcina uniform distribuită p : $\alpha^j = \frac{2\,(1 - \cos j\pi)}{j\pi}\,p$

$j = 1, 3, 5, \ldots$

b — Sarcina concentrată P la mijloc : $\alpha^j = 2\sin\frac{j\pi}{2}\cdot\frac{P}{l}$

$j = 1, 3, 5, \ldots$

c — Sarcina concentrată P la distanța c de reazemul din stînga : $\alpha^j = 2\sin\frac{j\pi c}{l}\,\frac{P}{l}$

$j = 1, 2, 3, \ldots$

d — Sarcina uniform distribuită q pe lungimea d plasată la „a" de reazemul din stînga : $\alpha^j = \frac{4}{j\pi}\sin\frac{j\pi}{2l}\,(2a + d)\,\sin\frac{j\pi}{2l}\,dq$

$j = 1, 2, 3,$

e — Moment concentrat M la distanța c de stînga : $\alpha^j = 2\,j\,\pi\frac{M}{l^2}\,\cos\,\frac{j\pi C}{l}$

$j = 1, 2, 3, \ldots$

Tabela 2

Expresiile coeficienților necunoscutelor sistemului general de ecuații (tabel matrice Nr. 3.)

$$B^j_{1i} = -\,\rho\,\frac{I_0}{I_{L.t}}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$B^j_{2i} = \rho\,\frac{I_0}{I_{i.t}}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2} + \rho\,\frac{I_0}{I_{i+1.t}}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2} + 12\cdot\frac{I_0}{l\delta^3_i}\cdot\frac{b_{0i}}{l} + 12\,\frac{I_0}{l\delta^3_{i+1}}\cdot\frac{b_{0\,i+1}}{l}$$

$$B^j_{3i} = -\rho\,\frac{I_0}{I_{i+1.t}}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$B^j_{4i} = \rho\,\frac{I_0}{I_{i.t}}\cdot\frac{a_{ci}}{l}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$B^j_{5i} = -\rho\,\frac{I_0}{I_{i.t}}\cdot\frac{a_{ci}}{l}\cdot\frac{1}{J^2\pi^2} - \rho\,\frac{I_0}{I_{i+1.t}}\cdot\frac{a_{ci+1}}{l}\cdot\frac{1}{J^2\pi^2}$$

$$B^j_{6i} = \rho\,\frac{I_0}{I_{i+1.t}}\cdot\frac{a_{ci}+1}{l}\cdot\frac{1}{j^2\,\pi^2}$$

$$B^j_{7i} = -\,\rho\,\frac{I_0}{I_{i.t}}\cdot\frac{b_i}{l}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$B_{8i}^{j} = -\rho\frac{I_0}{I_{i,t}}\cdot\frac{b_i}{l}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2} + \rho\frac{I_0}{I_{i+1,t}}\cdot\frac{b_{i+1}}{l}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2} - 6\frac{I_0}{l\delta_i^3}\left(\frac{b_{0i}}{l}\right)^2 + 6\frac{I_0}{l\delta_{i+1}^3}\left(\frac{b_{0i+1}}{l}\right)^2$$

$$B_{9i}^{j} = \rho\frac{I_0}{I_{i+1,t}}\cdot\frac{b_{i+1}}{l}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$B_{0i}^{j} = \alpha_i^j\left[-6\frac{I_0}{l\delta_i^3}\left(\frac{e_{0i}}{l}\right)^2 - \rho\frac{I_0}{I_{i,t}}\cdot\frac{e_i}{l}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}\right] + \alpha_{i+1}^j\left[-6\frac{I_0}{l\delta_{i+1}^3}\left(\frac{e_{0i+1}}{l}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \rho\frac{I_0}{I_{i+1,t}}\cdot\frac{e_{i+1}}{l}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}\right]$$

NOTĂ : Primul termen din parantezele mari se ia în calcul numai atunci cînd sarcina exterioară este plasată între axele grinzilor vecine rostului i.

$$C_{1i}^{j} = \rho\frac{I_0}{I_{i,t}}\cdot\frac{a_{ci}}{l}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$C_{2i}^{j} = -\rho\frac{I_0}{I_{i,t}}\cdot\frac{a_{ci}}{l}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2} - \rho\frac{I_0}{I_{i+1,t}}\cdot\frac{a_{ci+1}}{l}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$C_{3i}^{j} = \rho\frac{I_0}{I_{i+1,t}}\cdot\frac{a_{ci+1}}{l}\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$C_{4i}^{j} = -\frac{I_0}{I_{i,y}}\cdot\frac{1}{j^4\pi^4} - \rho\frac{I_0}{I_{i,t}}\left(\frac{a_{ci}}{l}\right)^2\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$C_{5i}^{j} = \frac{I_0}{I_{i,y}}\cdot\frac{1}{j^4\pi^4} + \frac{I_0}{I_{i+1,y}}\cdot\frac{1}{j^4\pi^4} + \rho\frac{I_0}{I_{i,t}}\left(\frac{a_{ci}}{l}\right)^2\frac{1}{j^2\pi^2} + \rho\frac{I_0}{I_{i+1,t}}\left(\frac{a_{ci+1}}{l}\right)^2\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$C_{6i}^{j} = -\frac{I_0}{I_{i+1,y}}\cdot\frac{1}{j^4\pi^4} - \rho\frac{I_0}{I_{i+i,t}}\left(\frac{a_{ci+1}}{l}\right)^2\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$C_{7i}^{j} = \rho\frac{I_0}{I_{i,t}}\cdot\frac{a_{ci}b_i}{l^2}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$C_{8i}^{j} = \rho\frac{I_0}{I_{i,t}}\cdot\frac{a_{ci}b_i}{l^2}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2} - \rho\frac{I_0}{I_{i+1,t}}\cdot\frac{a_{ci+1}\,b_{i+1}}{l^2}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$C_{9i}^{j} = -\rho\frac{I_0}{I_{i+1,t}}\cdot\frac{a_{ci+1}\,b_{i+1}}{l^2}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$C_{10i}^{j} = -\frac{I_0}{I_{i,y}}\cdot\frac{b_i}{l}\cdot\frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$C_{11i}^{j} = -\frac{I_0}{I_{i,y}}\cdot\frac{b_i}{l}\frac{1}{j^3\pi^3} + \frac{I_0}{I_{i+1,y}}\cdot\frac{b_{i+1}}{l}\cdot\frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$C_{12i}^{j} = \frac{I_0}{I_{i+1,y}}\cdot\frac{b_{i+1}}{l}\cdot\frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$C_{0i}^{j} = \alpha_i^j\rho\frac{I_0}{I_{i,t}}\frac{a_{ci}e_i}{l^2}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2} + \alpha_{i+1}^j\rho\frac{I_0}{I_{i+1,t}}\cdot\frac{a_{ci+i}\,e_{i+1}}{l^2}\cdot\frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$D_{1i}^{j} = \rho \frac{I_0}{I_{i,t}} \cdot \frac{b_i}{l} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$D_{2i}^{j} = -\rho \frac{I_0}{I_{i,t}} \cdot \frac{b_i}{l} \frac{1}{j^2\pi^2} + \rho \frac{I_0}{I_{i+1,t}} \cdot \frac{b_{i+1}}{l} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2} - 6 \frac{I_0}{l\delta_i^3} \left(\frac{b_{0i}}{l}\right)^2 + 6 \frac{I_0}{l\delta_{i+1}^3} \left(\frac{b_{0i+1}}{l}\right)^2$$

$$D_{3i}^{j} = -\rho \frac{I_0}{I_{i+1,t}} \cdot \frac{b_{i+1}}{l} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$D_{4i}^{j} = -\rho \frac{I_0}{I_{i,t}} \cdot \frac{b_i a_{ci}}{l^2} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$D_{5i}^{j} = \rho \frac{I_0}{I_{i,t}} \cdot \frac{b_i a_{ci}}{l^2} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2} - \rho \frac{I_0}{I_{i+1,t}} \cdot \frac{b_{i+1}\, a_{ci+1}}{l^2} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$D_{6i}^{j} = \rho \frac{I_0}{I_{i+1,t}} \cdot \frac{b_{i+1}\, a_{ci+1}}{l^2} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$D_{7i}^{j} = -\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{1}{j^4\pi^4} + \rho \frac{I_0}{I_{i,t}} \left(\frac{b_i}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$D_{8i}^{j} = \frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{1}{j^4\pi^4} + \frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{1}{j^4\pi^4} + 4 \frac{I_0}{l\delta_i^3} \left(\frac{b_{0i}}{l}\right)^3 + 4 \frac{I_0}{l\delta_{i+1}^3} \left(\frac{b_{0i+1}}{l}\right)^3 +$$

$$+ \rho \frac{I_0}{I_{i,t}} \left(\frac{b_i}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\pi^2} + \rho \frac{I_0}{I_{i+1,t}} \left(\frac{b_{i+1}}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$D_{9i}^{j} = -\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{1}{j^4\pi^4} + \rho \frac{I_0}{I_{i+1,t}} \left(\frac{b_{i+1}}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\pi^2} -$$

$$D_{10i}^{j} = -\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$D_{11i}^{j} = \frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3} + \frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i+1}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$D_{12i}^{j} = -\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i+1}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$D_{13i}^{j} = 2 \frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$D_{14i}^{j} = -2 \frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3} - 2 \frac{I_0}{I_{i+1,z}} - \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$D_{15i}^{j} = 2 \frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$D_{16i}^{j} = 2 \frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^3\pi^3}$$

$$D_{17i}^{j} = -2 \frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^3\pi^3} - 2 \frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^3\pi^3}$$

$$D^j_{18} = 2\,\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^3\pi^3}$$

$$D^j_{0i} = \alpha^j_i \left[\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{1}{j^4\pi^4} + 2\,\frac{I_0}{l\delta_i^3} \cdot \frac{e^2_{0i}(3b_0 - e_0)_i}{l^3} + \rho\,\frac{I_0}{I_{i,t}} \cdot \frac{b_i\, e_i}{l^2} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2} \right] +$$

$$+ \alpha^j_{i+1} \left[-\frac{I_0}{I_{i+1}} \cdot \frac{1}{j^4\pi^4} - 2\,\frac{I_0}{l\delta^3_{i+1}} \frac{e^2_{i+1}(3b_0 - e_0)_{i+1}}{l^3} - \rho\,\frac{I_0}{I_{i+1,t}} \cdot \frac{b_{i+1}e_{i+1}}{l^2} \frac{1}{j^2\pi^2} \right]$$

NOTĂ : Termenul al doilea din parantezele mari se ia în calcul numai atunci cînd sarcina exterioară este plasată între axele grinzilor vecine rostului „i".

$$F^j_{4i} = \frac{I_0}{I_{i,y}} \cdot \frac{b_i}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$F^j_{5i} = -\frac{I_0}{I_{i,y}} \cdot \frac{b_i}{l} \cdot \frac{1}{j^3\,\pi^3} + \frac{I_0}{I_{i+1,y}} \cdot \frac{b_{i+1}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$F^j_{6i} = -\frac{I_0}{I_{i+1,y}} \cdot \frac{b_{i+1}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$F^j_{7i} = -\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$F^j_{8i} = \frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3} + \frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i}+1}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$F^j_{9i} = -\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i+1}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$F^j_{10i} = -\frac{I_0}{l^2\,A_i} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2} - \frac{I_0}{I_{i,z}} \left(\frac{a_{0i}}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\pi^2} + \frac{I_0}{I_{i,y}} \left(\frac{b_i}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\,\pi^2}$$

$$F^j_{11i} = \frac{I_0}{l^2\,A_i} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2} + \frac{I_0}{l^2\,A_{i+1}} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2} + \frac{I_0}{I_{i,y}} \left(\frac{a_{0i}}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\,\pi^2} + \frac{I_0}{I_{i+1,z}} \left(\frac{a_{0i}+1}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\pi^2} +$$

$$+ \frac{I_0}{I_{i,y}} \left(\frac{b_i}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\pi^2} + \frac{I_0}{I_{i+1,y}} \left(\frac{b_{i+1}}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$F^j_{12i} = -\frac{I_0}{l^2 A_{i+1}} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2} - \frac{I_0}{I_{i+1,z}} \left(\frac{a_{0i+1}}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\pi^2} + \frac{I_0}{I_{i+1,y}} \left(\frac{b_{i+1}}{l}\right)^2 \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$F^j_{13i} = 2\,\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{j^2\pi^2} \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$F^j_{14i} = -2\,\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2} - 2\,\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i+1}}{l} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$F^j_{15i} = 2\,\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \left(\frac{a_{0i+1}}{l}\right) \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$F^j_{16i} = 2\,\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^2\pi^2}$$

$$F^j_{17i} = -2\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \frac{\cos j\pi}{j^2\pi^2} - 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i+1}}{l} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^2\pi^2}$$

$$F^j_{18i} = 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i+1}}{l} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^2\pi^2}$$

$$F^j_{0i} = \alpha^j_i \frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3} \alpha^j_{i+1} \cdot \frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0l+1}}{l} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$H^j_{7i} = 2\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$H^j_{8i} = -2\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3} - 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$H^j_{9i} = 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$H^j_{10i} = 2\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{1}{J^2\pi^2}$$

$$H^j_{11i} = -2\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2} \cdot -2\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i+i}}{l} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$H^j_{12i} = 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i+1}}{l} \cdot \frac{1}{j^2\pi^2}$$

$$H^j_{13i} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{I_0}{I_{i,z}} = H_{13i}$$

$$H^j_{14i} = \frac{2}{3}\frac{I_0}{I_{i,z}} + \frac{2}{3}\frac{I_0}{I_{i+1,z}} + 2\rho\frac{I_0}{I_{ta}} \cdot \frac{\lambda}{l}$$

$$H^j_{15i} = -\frac{2}{3}\frac{I_0}{I_{i+1,z}} = H_{15i}$$

$$H^j_{16i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{I_0}{I_{i,z}} = H_{16i}$$

$$H^j_{17i} = -\frac{1}{3}\frac{I_0}{I_{i,z}} - \frac{1}{3}\frac{I_0}{I_{i+1,z}} = H_{17i}$$

$$H^j_{18i} = \frac{1}{3}\frac{I_0}{I_{i+1,z}} = H_{18i}$$

$$H^j_{0i} = -2\frac{I_0}{I_{i,z}}\alpha^j_i \frac{1}{j^3\pi^3} + 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}}\alpha^j_{i+1}\frac{1}{j^3\pi^3}$$

$$L^j_{7i} = 2\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^3\pi^3}$$

$$L^j_{8i} = -2\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^3\pi^3} - 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^3\pi^3}$$

$$L^j_{9i} = 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^3\pi^3}$$

$$L^j_{10i} = 2\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^2\pi^2}$$

$$L^j_{11i} = -2\frac{I_0}{I_{i,z}} \cdot \frac{a_{0i}}{l} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^2\pi^2} - 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i+1}}{l} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^2\pi^2}$$

$$L^j_{12i} = 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}} \cdot \frac{a_{0i+1}}{l} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^2\pi^2}$$

$$L^j_{13i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{I_0}{I_{i,z}} = L_{13i}$$

$$L^j_{14i} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{I_0}{I_{i,z}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{I_0}{I_{i+1,z}} = L_{14i}$$

$$L^i_{15i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{I_0}{I_{i+1,z}} = L_{15i}$$

$$L^j_{16i} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{I_0}{I_{i,z}} = L_{16i}$$

$$L^j_{17i} = \frac{2}{3} \cdot \frac{I_0}{I_{i,z}} + \frac{2}{3}\frac{I_0}{I_{i+1,z}} + 2\rho\frac{I_0}{I_{ta}} \cdot \frac{\lambda}{l} = L_{17i}$$

$$L^j_{18i} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{I_0}{I_{i+1,z}} = L_{18i}$$

$$L^j_{0i} = -2\frac{I_0}{I_{i,z}}\alpha^j_i \cdot \frac{\cos j\pi}{j^3\pi^3} + 2\frac{I_0}{I_{i+1,z}}\alpha^j_{i+i} \cdot \frac{\cos j\pi}{j^3\pi^3}$$

NOTĂ: În expresiile de mai sus coeficientul „α" reprezintă încărcarea exterioară — (vezi tabel 1).

BIBLIOGRAFIE

1. B. E. Ulițchi, *Prostranstvenii rasciot bezdiafragmenih proletnih stroenii mostov*, Moscova, Autotransizdat, 1963.
2. B. E. Ulițchi ș.a., *Prostranstvenii rasciot bezdiafragmmenih mostov*, Avtomobilnie doroghi, *4* (1962).
3. N. Ţopa, *Preocupări actuale în calculul tablierelor de poduri realizate din grinzi fără antretoaze în cimp*, comunicare la sesiunea ştiinţifică a I.P.B., 1965.
4. P. Mazilu, N. Ţopa ș.a., *Tabliere de poduri de șosea cu grinzi longitudinale fără antretoaze*, comunicare la sesiunea ştiinţifică a I.C.T.Tc., 1965.
5. N. Ţopa, *Unele probleme legate de posibilităţile de simplificare a calculului reţelelor de grinzi pentru tabliere de poduri fără antretoaze în cimp*, Rev. constr. şi mat. constr., nr. *10 — 11* (1967).
6. P. Mazilu, *Statica construcţiilor*, vol. II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1959.

Tabel-Matrice nr. 3

Matricea coeficienților necunoscutelor grupului de ecuații scrise pt. rostul i

Ecuațiile corespunzătoare necunoscutelor :

| | Necunoscutele din rostul i − 1 | | |

CONSIDERAȚII PRIVIND ACȚIUNEA VÎNTULUI ASUPRA CONSTRUCȚIILOR ÎNALTE

de T. POPP și I. CIORĂNESCU
Oficiul pentru proiectarea construcțiilor „Carpați" București

Se analizează caracteristicile statice și dinamice ale vîntului și starea de tensiune care apare în structura de rezistență a construcțiilor înalte. Se determină, pe baza înregistrărilor existente, vitezele maxime probabile și se analizează pe machetă efectul unghiului de incidență. De asemenea se studiază vibrația construcției datorită pulsației rafalelor. Se studiază efectul de torsiune generală a construcției. Din calcule rezultă un fenomen de cvasirezonanță cu valori importante pentru factori de amortizare reduși.

1. INTRODUCERE

Exploatarea rațională a spațiilor urbane și dorința de a obține condiții funcționale și plastice optime au determinat construirea unor imobile de proporții din ce în ce mai mari. Astfel au fost realizate blocuri-turn cu schelet de beton armat de înălțimi variind între 30 și 85 m. La asemenea construcții apar probleme structurale specifice, în sensul că se modifică ponderea parametrilor care determină concepția și conformarea de detaliu al scheletului de rezistență.

În cadrul proiectului Centrului de televiziune din București, proiectat în I.P.B. sub conducerea arh. Tiberiu Ricci, blocul-turn al redacției a ridicat probleme numeroase, din care cele legate de acțiunea aerodinamică a vîntului au impus o analiză specială (fig. 1). Problema a fost soluționată prin folosirea unei machete la scara 1/100, pe care s-au determinat presiunile în diverse puncte în sufleria aerodinamică a secției de aeromecanică din Institutul de mecanică a fluidelor, condus de acad. E. Carafoli. Datele experimentale au fost prelucrate și completate cu o analiză a răspunsului construcției la acțiunea rafalelor pe un model matematic. Ca rezultate globale menționăm o reducere a forței totale cu 60% față de normele în vigoare, ceea ce totuși reprezintă o depășire a forței din cutremur cu 4,5% pentru gradul 7 de intensitate seismică. De asemenea a putut

fi analizată torsiunea construcţiei atunci cînd curentul are diverse unghiuri de incidenţă (fig. 2). O asemenea analiză nu apare în literatură şi ea prezintă interes, deoarece deasupra acestei construcţii se află o antenă menită să realizeze cu pîlnii parabolice o legătură cît mai stabilă cu staţiile

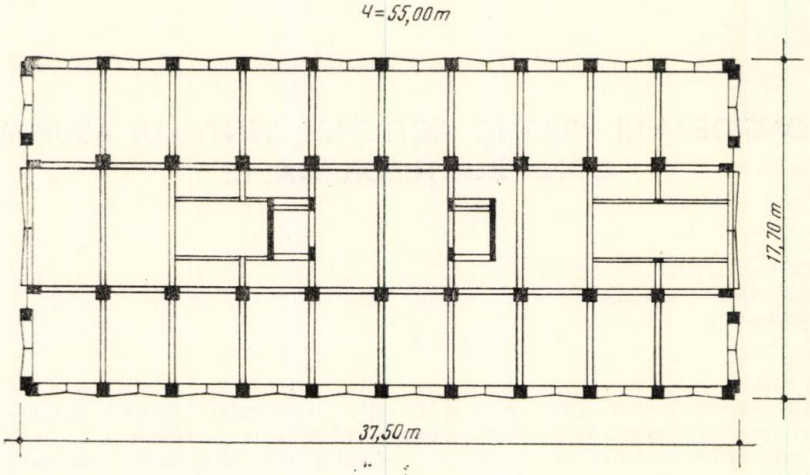


Fig. 1

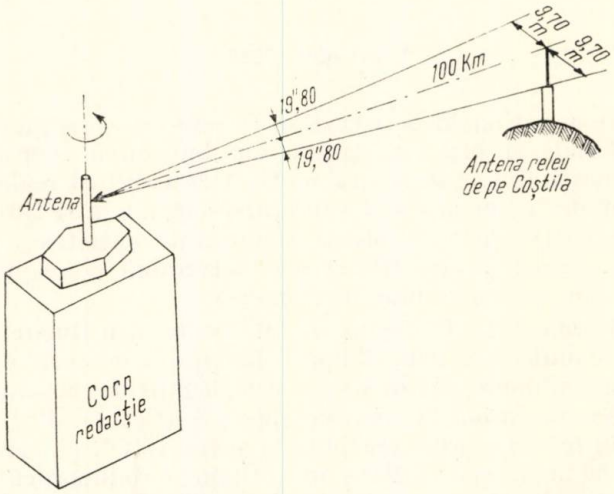


Fig. 2

releu. Cum aceste staţii se găsesc la distanţă mare, o rotire relativ redusă a planşeului ultimului nivel (unde este fixată antena) conduce la o deviere importantă a spotului şi deci la o instabilitate a imaginii.

Analiza răspunsului unei construcţii la acţiunea vîntului este diferită de cea specifică seismelor. Acestea din urmă, fiind o mişcare a bazei

construcției, conduc la eforturi care depind de rigiditatea scheletului. De aceea depășirea domeniului de lucru elastic și apariția unor zone elastoplastice prin modificările de rigiditate caracteristice acestei faze de lucru reduc mărimea forțelor, adică în cazul seismelor asistăm la o autoreglare a valorilor forțelor ca urmare a unor zone puternic solicitate. Acesta este motivul pentru care capacitatea de a rezista la cutremur se caracterizează prin volumul de energie disipat de schelet. În cazul acțiunii vîntului, plastificarea unor zone din structură nu schimbă valoarea forțelor, deoarece nu se modifică presiunile pe fațade, o asemenea situație schimbînd doar caracteristicile dinamice ale scheletului. Din acest punct de vedere rezultă clar că o apreciere a capacității portante la vînt față de cutremur, comparînd doar forțele care acționează structura, nu este concludentă și deci cele două acțiuni orizontale vor trebui studiate separat, domeniile lor avînd unele elemente comune, dar și unele distincte.

2. VITEZA VÎNTULUI

Presiunile și, respectiv, sucțiunile produse de mișcarea aerului din jurul unei construcții depind de densitatea și de viteza acestuia. Primul dintre acești parametri influențează liniar presiunea și variază relativ puțin cu temperatura și cu umiditatea aerului și de aceea vom opera cu valoarea medie. În ceea ce privește viteza vîntului, aceasta prezintă valori foarte diferite în timp și spațiu, care au rolul de bază în relația care determină presiunea. De aceea analiza statică a vitezelor vîntului va caracteriza solicitarea de care ne ocupăm și va putea să indice siguranța construcției, privită ca un fenomen aleator.

Au fost extrase vitezele maxime anuale pe o perioadă de 38 de ani în București și frecvența vitezelor maxime lunare pe aceeași perioadă (fig. 3 și 4). Valorile indicate sînt viteze mediate, adică nu se referă la aspectele rafalelor. Se observă o asimetrie a repartiției vitezelor maxime lunare, similară cu cea dată de legea obținută din prelucrarea observațiilor de la New York dintre 1884 și 1950.

Dacă viteza maximă probabilă într-o perioadă de t ani $V(t)$ este dată de

$$V_{(t)} = V + \frac{1}{a} \log t,$$

unde V este viteza maximă probabilă anuală (76 km/oră la New York), $\frac{1}{a}$ dispersia (de 16 km/oră la New York) și t timpul în ani, atunci frecvența relativă a vitezelor maxime are alura din figura 4, similară cu cea din figura 5.

Coeficienții de suprasarcină pentru vînt depind de probabilitatea de a depăși capacitatea portantă a structurii (considerată ca avînd o repartiție gaussiană) și de mărimea solicitării cu repartiția indicată mai sus.

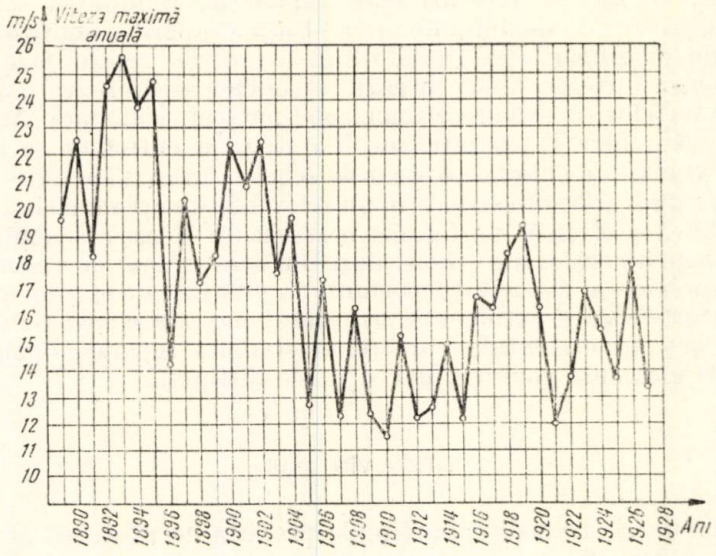


Fig. 3. — Variația anuală a maximelor de viteză a vîntului. Observații făcute la $H = 18$ m.

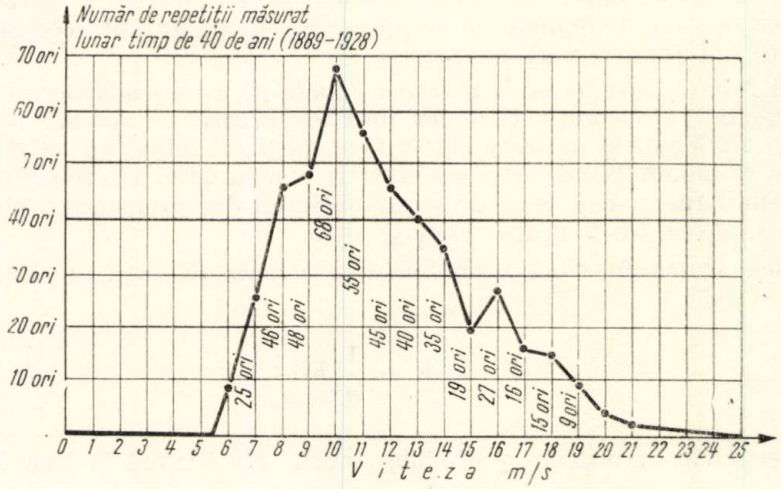


Fig. 4. — Poligonul vitezelor maxime lunare pe o perioadă de 40 de ani.

Dar, afară de vitezele medii orare, interesează viteza rafalelor. Din lipsa unui material indigen a fost considerată următoarea relație între vitezele rafalelor și cele medii orare :

$$V_R = V_0 \times 1{,}55,$$

unde V_R este viteza maximă a rafalei și V_0 viteza maximă orară, care corespunde cu determinările făcute între 1933 și 1954 la Cardington.

Pentru o analiză dinamică a răspunsului unei construcții la acțiunea unei rafale, este necesar să cunoaștem variația vitezelor sau a presiunilor pe un interval redus de timp de circa un minut. Deoarece sistemul de înregistrare din țară nu permite examinarea pulsațiilor pe un interval redus, s-a utilizat diagrama dată de A. Davenport.

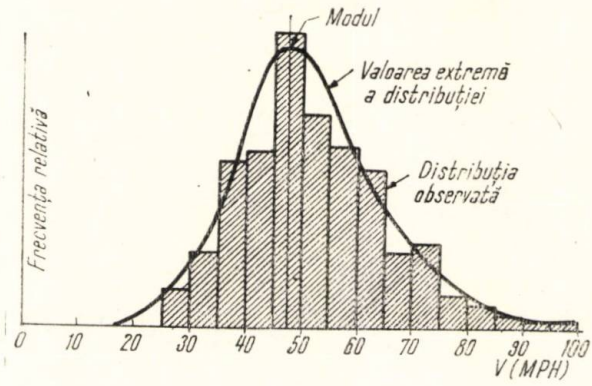


Fig. 5. — Distribuția maximelor lunare mediate pe 5 minute în orașul New York, la înălțimea de 150 m în perioada 1884 — 1950.

Din examinarea variațiilor presiunilor în timp, comparînd cu accelerograma cutremurului de la El-Centre, rezultă că variația este mai lentă în cazul vîntului și că maximele succesive se găsesc la un interval de timp apropiat de perioada de oscilație curente a structurilor de rezistență, ceea ce poate mări substanțial efectul dinamic al rafalelor asupra construcțiilor.

Deoarece aparatura actuală mediază vitezele pe un interval de 1—15 s, plecînd de la variația indicată în figura 6, s-a determinat coeficientul de spor al vitezei instantanee față de cea mediată :

$$K = 1 + \frac{S}{19} \text{ s pentru } 0 \leqslant S < 15 \text{ s}$$

$$V = K \cdot V_m,$$

$$E\% = \sqrt{S} \cdot 5{,}6,$$

unde K este coeficientul de spor al vitezei mediate, S intervalul pe care s-a făcut mediarea, V viteza instantanee, V_m viteza mediată pe S s, $E\%$ eroarea medie pătratică raportată la viteza medie cu care se calculează K.

Fiind vorba de un fenomen cu caracter aleator, este necesar să se analizeze și alte diagrame de variație a vitezelor rafalelor și să se precizeze aceste relații o dată cu obținerea datelor experimentale necesare.

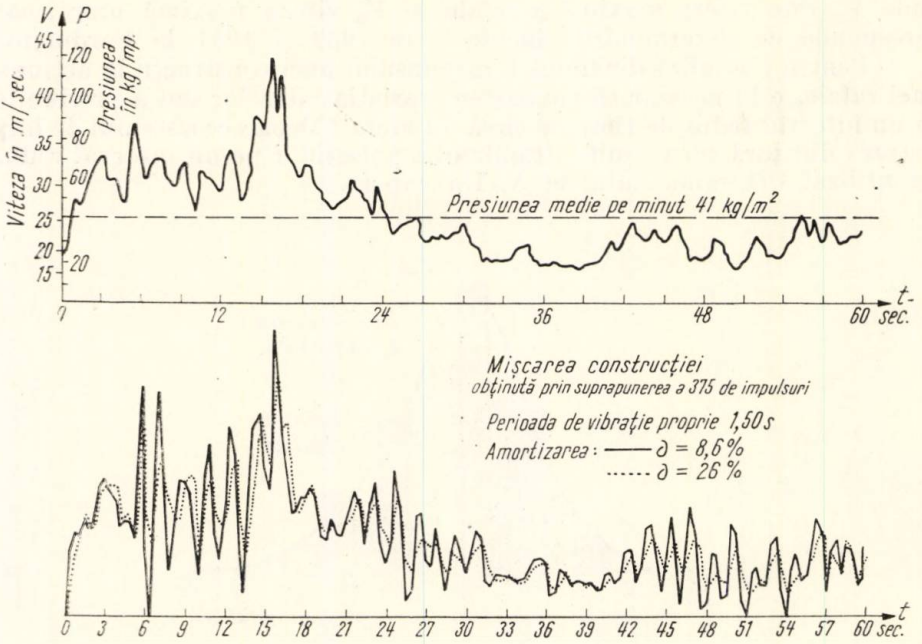


Fig. 6. — Diagrama de presiuni instantanee după A. G. Davenport, University of western Ontario,

$V_{max} = V \cdot K$, V = viteza mediată pe secundă

$K = 1 + \frac{s}{19}$ cu eroarea de E ·/. $= 5{,}6 \cdot \sqrt{s}$

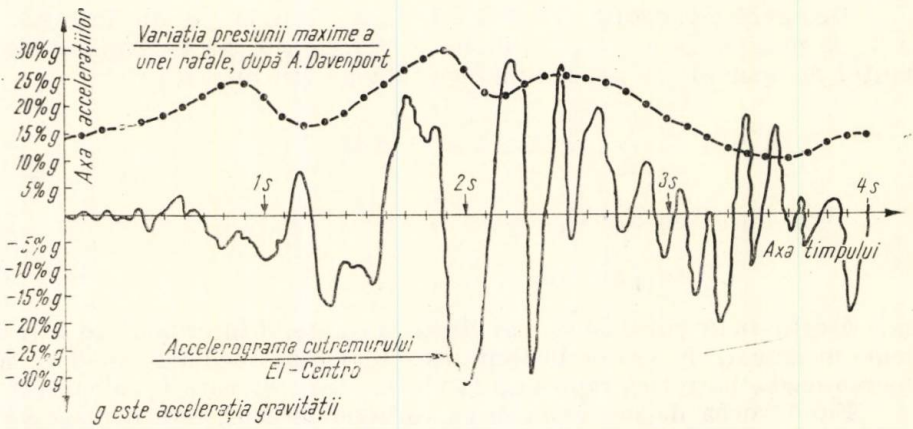


Fig. 7. — Comparație între acțiunea seismelor și a rafalelor.

3. DISTRIBUȚIA PRESIUNILOR LA DIVERSE UNGHIURI DE INCIDENȚĂ

Pe o machetă realizată din plexiglass la scara 1/100, la care un etaj interșanjabil este echipat cu duze de captare a presiunii (fig. 8), au fost făcute determinări pentru 17 unghiuri la incidență în tunelul de la I.M.A.

Determinarea coeficientului de presiune dinamică C_p pentru viteze de 20, 30 și 40 m/s a arătat că scara la care s-a executat macheta modifică valorile presiunilor în limite admisibile (fig. 9).

Integrarea presiunilor pe toată suprafața laterală a construcției conduce la aflarea forței totale F funcție de unghiul de incidență (fig. 11), iar determinarea momentelor de torsiune pe nivel permite să se afle prin cumulare solicitarea de răsucire a fiecărui etaj și deci să se determine deformația unghiulară a nivelelor (fig. 12).

Din punctul de vedere al torsiunii, construcția are o perioadă de oscilație de 2,07 s (prima armonică) și prezintă un unghi total de răsucire maximă a terasei de circa 20 s, ceea ce reprezintă o deplasare a spotului de 9,70 m la distanța care separă Bucureștiul de releul de pe Coștila.

4. RĂSPUNSUL CONSTRUCȚIEI LA ACȚIUNEA RAFALELOR

Analiza făcută pînă acum a presupus cîmpul vitezelor staționar, adică a condus la o deducere a efectului static produs de un vînt constant. Faptul că rafalele au o fluctuație de viteză face ca construcția să oscileze, ceea ce implică o variație a solicitărilor în timp între limite destul de largi. Construcția, privită ca un schelet cu n grade de libertate, vibrează sub acțiunea rafalelor după o lege care depinde de pulsația vîntului și de modurile de vibrații proprii ale scheletului de rezistență. O analiză completă face obiectul unui program de calcul redactat în Fortran IV, actualmente în curs de experimentare. Pentru a forma o imagine generală a oscilației, vom analiza vibrația construcției presupunînd că o reducem la un sistem echivalent cu masă unică, deci cu un singur grad de libertate dinamică.

Dacă considerăm acțiunea rafalei ca o succesiune de impulsuri constante pe o fracțiune de timp 0,375 s, atunci avem

$$H_0 = m \cdot V_0$$

$$H_0 = p \times \Delta t$$

unde H_0 este impulsul, m masa sistemului, v_0 viteza sistemului și p forța constantă pe intervalul de timp.

Ecuația generală a mișcării sistemului cu amortizare este

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = 0,$$

unde y este deplasarea la momentul t, ε amortizarea în $1/s$ și ω frecvența circulară a sistemului, care prin integrare conduce, presupunînd impulsul aplicat la momentul $t = 0$, la soluția

$$y = \frac{V_0}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}} \cdot e^{-\varepsilon t} \cdot \sin \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} \cdot t \quad (t > 0).$$

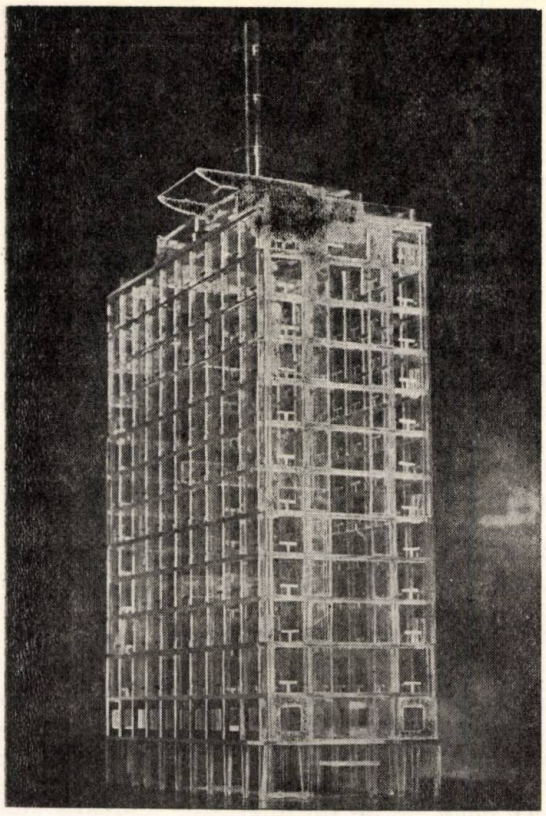


Fig. 8. — Macheta din plexiglass care a fost încercată în tunelul aerodinamic.

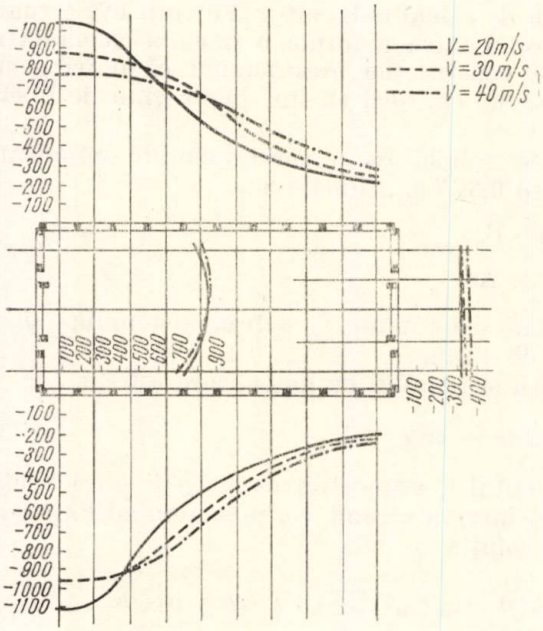


Fig. 9. — Variația distribuției coeficientului de presiune cu numărul Reynolds.

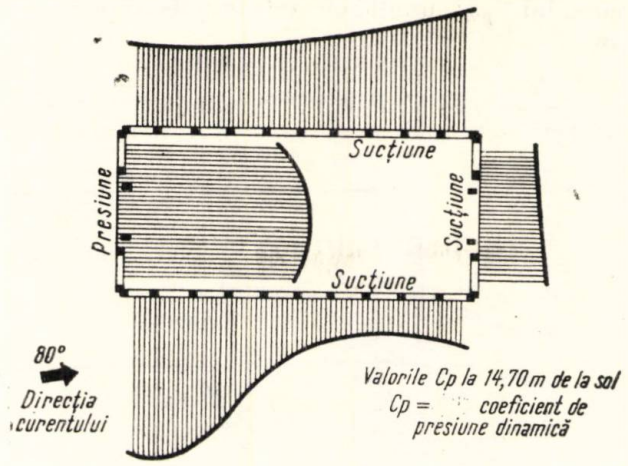


Fig. 10. — Distribuția presiunilor și a sucțiunilor la 14,70m de la sol.

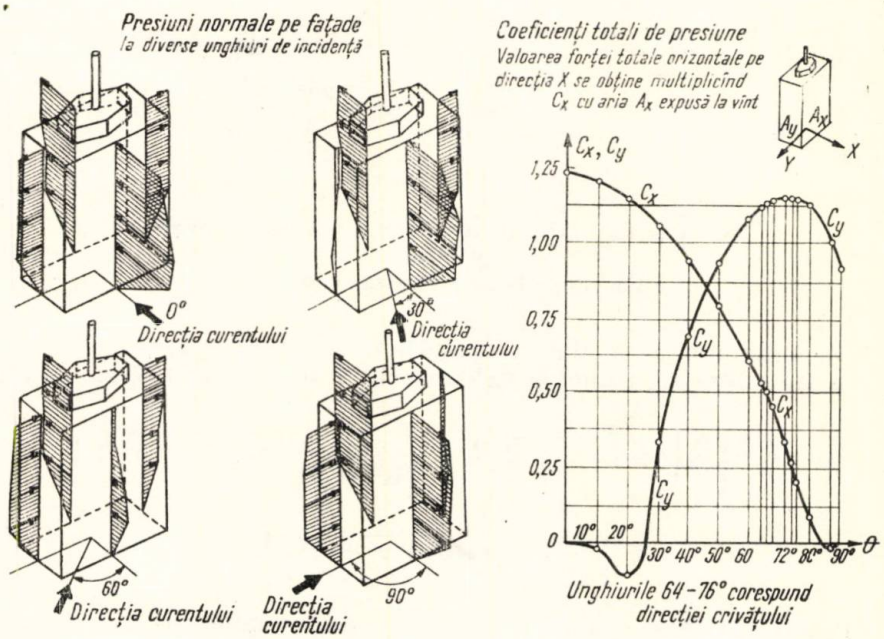


Fig. 11. — Variația presiunilor normale funcție de unghiul de incidență.

Înlocuind valoarea lui V_0 și sumînd efectele impulsurilor aplicate la momentul $t_i < t$, avem

$$y = \frac{\Delta t}{m\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}} \cdot \sum_{i=1}^{k} P_i\, e^{-\varepsilon(t-t_i)} \cdot \sin\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}\,(t - t_i).$$

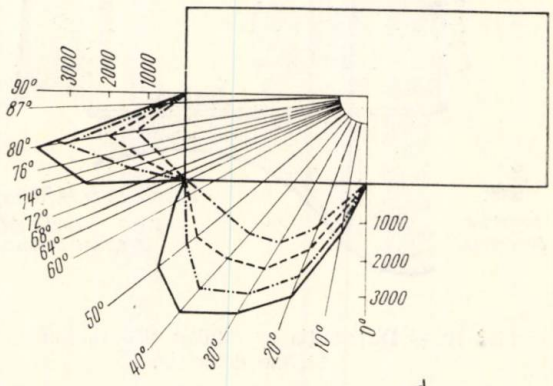


Fig. 12.

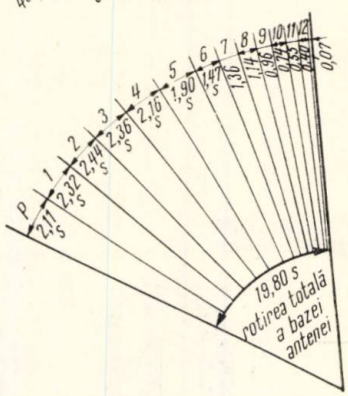


Fig. 13.

Fig. 12. — Variația momentului de torsiune funcție de unghi.

Fig. 13. — Rotirea maximă a nivelurilor.

Dacă sistemul nu se află în repaus la momentul $t = 0$, ci este deplasat cu y_1 și are viteza v_1, atunci la valoarea lui y de mai sus trebuie adăugat

$$y = e^{-\varepsilon t}\left[y_1\left(\cos\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}\cdot t + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}}\sin\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}\,t\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{v_1}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}} \cdot \sin\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}\,t \right].$$

Practic analiza vibrației s-a făcut presupunînd $y_1 = v_1 = 0$, iar valorile lui P_i au fost cele indicate de Davenport (fig. 4) pe un interval de un minut.

Calculul s-a făcut pentru perioade de vibrație proprii ale structurii de 3; 1,5 și 1,125 s, cu amortizări de $\varepsilon = 0{,}36$ 1/s, 1,08 1/s și 1,80 1/s, cele nouă cazuri corespunzînd domeniului curent din construcții. Valorile numerice au fost determinate de calculatorul digital CIFA-102, folosind produse de matrice (fig. 6).

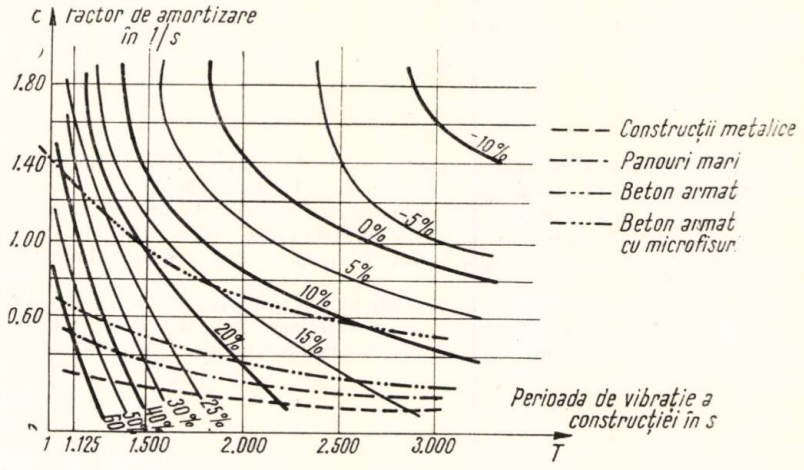


Fig. 14. — Valorile coeficientului *Ke*.

Analiza sporului adus de acțiunea dinamică față de cea statică a condus la determinarea coeficientului de impact funcție de perioada de vibrație și factorul de amortizare a scheletului construcției (fig. 14).

E. CONCLUZII

Acțiunea vîntului asupra construcțiilor înalte are o pondere importantă în concepția și în proiectarea structurilor de rezistență. Analiza acțiunii orizontale are un caracter aleator și trebuie studiată aplicînd metode statistice sau cvasistatistice care să caracterizeze cît mai corect parametrii legați de încărcare și de capacitate portantă.

Din rezolvările numerice au rezultat următoarele :

1. Forme nesimetrice în plan conduc la apariția unor momente de răsucire a construcției, al căror efect este o torsiune generală, care la imobilul studiat a reprezentat o deplsare a punctelor periferice de plus sau minus 0,2 cm.

2. Forțele din vînt au valori importante, care pentru construcții înalte și puțin dezvoltate în plan sînt determinate pentru dimensionarea secțiunilor.

3. Acțiunea rafalelor, avînd o pulsație apropiată de cea proprie construcțiilor curente, conduce la un fenomen de cvasirezonanță periculos, în special pentru factori de amortizare reduși.

4. Pentru o precizare a efectelor produse de acțiunea vîntului asupra construcțiilor este necesară obținerea unor măsurători ale rafalelor care să permită o tratare statistică în diversele puncte ale construcțiilor, ca și o analiză prin calcul a scheletelor de rezistență, pentru a se putea obține concluziile necesare unei tratări practice simplificate care să asigure o proiectare expeditivă, dar și foarte apropiată de fenomenul real.

Primită la redacție la 20 mai 1969

BIBLIOGRAFIE

1. A. G. DAVENPORT, *Buffeting of structures by gusts*, N.P.L. International Conference on the Wind Effects on Buildings and Structures London, 1963.
2. — *The relationship of wind structure to wind loading*, N. P. L. International Conference on the Wind Effects on Buildings and Structures, London 1963.
3. C. M. HARRIS și C. E. CREEDE *Shock and Vibration Handbook trad.* Editura tehnică, București, 1969.
4. L. S. JACOBSON și R. S. AYRE *Engineering Vibrations*, Mc Graw-Hill Book Company Inc. 1958,
5. K. MUTO, *Seismic analysis of reinforced concrete buildings*, I-st W.C.E.E. Berkeley, 1956.
6. T. KARMAN și M. BIOT, *Mathematical Methods in Engineering*, Mc. Graw-Hill 1940.

PRODUCEREA UNDELOR DE ŞOC DE MARE INTENSITATE, CU APLICAŢII LA GENERAREA CURGERILOR HIPERSONICE DE ENTALPIE ÎNALTĂ

de L. Z. DUMITRESCU şi C. POPESCU

Institutul de mecanică a fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Se prezintă unele rezultate experimentale obţinute la Institutul de mecanică a fluidelor, privind producerea undelor de şoc intense ($M_s = 6...8{,}5$) şi curgerilor hipersonice ($M = 4 \ldots 10$) cu entalpie înaltă ($T_0 = 5\,000 \ldots 10\,000$°K).

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Realizarea temperaturilor şi presiunilor înalte în gaze prezintă un deosebit interes pentru cercetările de aerodinamică hipersonică şi pentru studiile de cinetică chimică.

După cum se ştie, pentru a simula în laborator în mod corect fenomenele aerodinamice care au loc în mişcarea corpurilor cu viteze foarte mari (avioane moderne, rachete), nu este suficient să se asigure echivalenţa parametrilor de similitudine clasici, numărul Mach şi numărul Reynolds, ci este necesar să se reproducă şi valorile înalte ale entalpiei gazului (respectiv ale temperaturii de impact). Aceasta deoarece variaţiile de temperatură la vitezele hipersonice devin atît de mari, încît gazul nu mai poate fi considerat ideal din punct de vedere termodinamic, iar efectele de disociaţie şi de ionizare joacă un rol esenţial. Un exemplu va scoate în evidenţă importanţa acestor fenomene : într-o curgere cu Mach = 10 care are loc, să zicem, în stratosferă, unde temperatura statică T_{st} este de 218°K (−55°C), se atinge o temperatură de impact $T_0 = 4\,600$ °K. La acest nivel, oxigenul din aer este complet disociat, iar gradul de disociere al azotului atinge 0,1, cu formare de compuşi intermediari (NO, N_2O etc.). În plus, gradul de ionizare începe şi el să fie sensibil (de ordinul a 10^{-4} şi crescînd foarte repede cu temperatura).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 1 1970, P. 185–201

Pentru a se accelera gazul pînă la numărul Mach dorit, se foloseşte un ajutaj Laval avînd raportul de expansiune necesar; la intrarea în acesta trebuie asigurate valorile corespunzătoare de impact ale parametrilor gazului, în particular temperatura înaltă. În acest scop, la sufleriile hipersonice cu acţionare continuă se utilizează preîncălzirea gazului; această procedură este însă limitată de rezistenţa termică a pereţilor sufleriei şi mai ales a colului sonic al ajutajului. În plus, realizarea tehnică a preîncălzitorului pune probleme extrem de grele.

Din aceste motive, pînă în prezent nu s-au realizat suflerii cu funcţionare continuă la care să se simuleze corect temperatura de impact peste Mach = 6; cel mai adesea se renunţă la această cerinţă, încălzindu-se aerul doar atît cît este necesar pentru ca, prin expansiune, să nu se lichefieze. Chiar şi aşa însă obţinerea numerelor Mach mari este foarte dificilă.

Menţionăm că, folosind ca gaz de lucru heliul, al cărui punct de lichefiere este mult mai scăzut, s-au putut obţine curgeri hipersonice cu viteze mult mai mari (pînă la Mach = 41), dar transpunerea rezultatelor la gaze cu alte caracteristici, şi în special la aer, este destul de problematică.

Din punct de vedere teoretic, în studiul mişcărilor hipersonice distingem două aspecte, care deseori pot fi analizate separat: efectele aerodinamice şi cele termice.

În multe cazuri, determinarea cîmpului de viteze, presiuni etc. în jurul obstacolelor se poate face, în primă aproximaţie, considerînd că gazul este ideal, efectele legate de temperaturile înalte putînd fi introduse apoi separat. Rezultă de aici că realizarea experimentală a unor mişcări hipersonice „reci", la care gazul este preîncălzit numai pînă la evitarea lichefierii prin expansiunea din ajutaj, poate fi utilă, permiţînd o comparaţie directă cu rezultatele teoretice obţinute în ipoteza gazului ideal. La presiunile statice de ordinul a 0,1—1 torr ce se produc în ajutajele Laval, rezultă astfel o temperatură statică minimă $T_{st} \geqslant 50°K$.

În legătură cu aceasta trebuie precizat că necesităţile experimentale (limitele de sensibilitate ale aparaturii de vizualizare şi de măsură) cer să se urmărească obţinerea unei presiuni statice cît mai mari în camera de experienţe. Rezultă de aici că presiunile de stagnare din amontele ajutajelor Laval hipersonice trebuie să fie foarte ridicate (zeci şi chiar sute de atmosfere), ceea ce sporeşte şi mai mult dificultăţile tehnice.

Pentru investigarea efectelor legate de comportarea reală a gazului la temperaturi înalte, nu există altă soluţie decît simularea corectă a acestora. Este însă evident că obţinerea unei creşteri neînsemnate a temperaturii curgerii peste limita de lichefiere nu prezintă interes dacă nu se realizează condiţii apropiate de cele reale. De aceea la ora actuală se conturează tendinţa de a se realiza instalaţii experimentale mai mult sau mai puţin specializate pentru producerea mişcărilor hipersonice pe care le putem denumi „reci" (cu temperaturi statice limitate de punctul de lichefiere) sau „calde" (în care se caută să se atingă temperaturile de impact reale).

Pentru studiul fenomenelor discutate mai sus, tuburile de şoc constituie instalaţii experimentale deosebit de interesante, deoarece permit să se obţină cu relativă uşurinţă mişcări hipersonice cu temperaturi de

impact înalte şi, mai ales, în condiţii perfect controlate şi fără a contamina gazul de lucru cu particule de electrozi etc. Din acest motiv, ele au cunoscut o dezvoltare intensă, ajungînd să fie la ora actuală principalul tip de instalaţie pentru studiul curgerilor hipersonice şi consacrîndu-li-se o bibliografie extrem de bogată (vezi, de exemplu, [1]—[7]). În cele ce urmează ne vom ocupa pe scurt de unele aspecte teoretice ale funcţionării tuburilor de şoc pentru obţinerea temperaturilor înalte şi vom prezenta cîteva rezultate experimentale obţinute la Institutul de mecanică a fluidelor din Bucureşti.

2. PRODUCEREA TEMPERATURILOR ÎNALTE ÎN TUBURILE DE ŞOC

Pentru a putea discuta problemele care ne interesează reamintim întîi pe scurt modul de funcţionare al unui tub de şoc hipersonic cu reflexie (fig. 1). Acesta constă, în esenţă, dintr-un tub de şoc obişnuit, format din

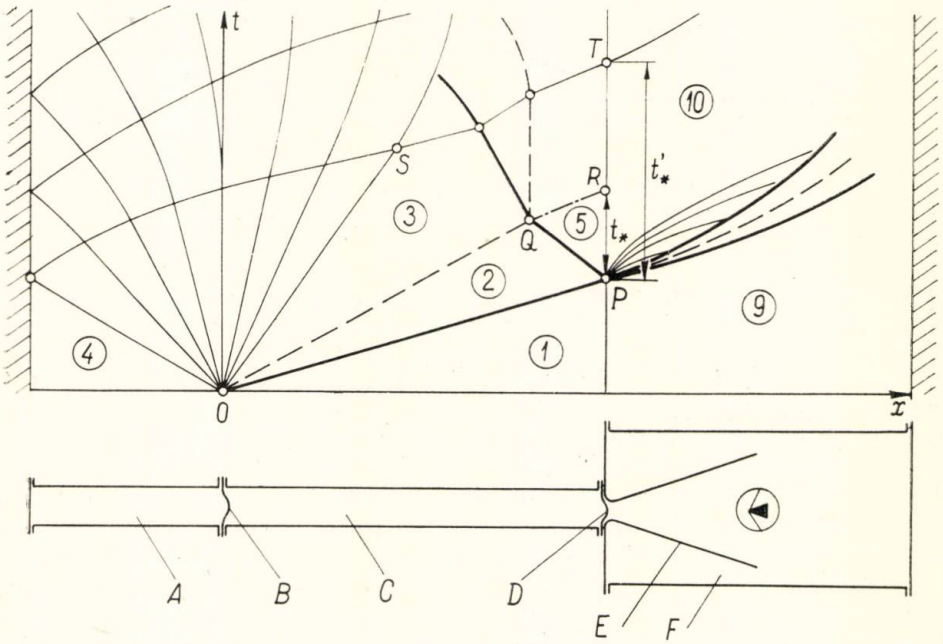


Fig. 1. — Schema unui tub de şoc hipersonic.
A — camera de înaltă presiune; *B* — diafragma principală; *C* — tubul de accelerare; *D* — diafragmă secundară; *E* — ajutajul Laval; *F* — rezervor de vid-tampon.

camera de presiune înaltă *A* şi tubul de accelerare, sau camera de joasă presiune *C*, separate prin diafragma *B*. La capătul tubului *C*, închis printr-o diafragmă subţire *D*, se află un ajutaj Laval *E*, care debuşează într-un rezervor-tampon de vid *F*, unde se plasează zona experimentală.

După spargerea diafragmei *B*, unda de şoc primară, prezentată în diagrama (x, t) prin linia OP, se propagă cu numărul Mach M_{s1} în gazul

din camera C şi, ajungînd la capătul acesteia, se reflectă, lăsînd în urmă zona de stagnare cu presiune şi temperatură înalte, 5. În continuare, diafragma D se sparge şi gazul se destinde în ajutajul Laval E, producînd curgerea hipersonică dorită, cu viteza M_{10}. Valorile p_5 şi T_5 reprezintă

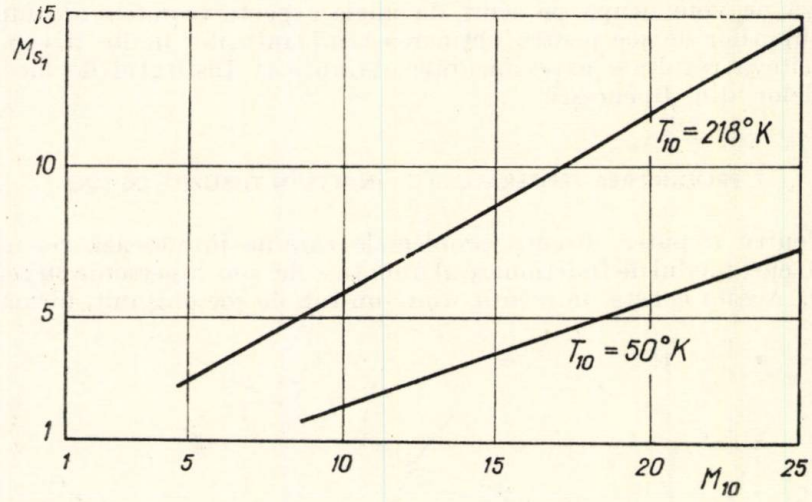


Fig. 2. — Intensitatea undei de şoc necesare pentru realizarea unei curgeri hipersonice la diferite numere Mach în cazul aerului.

parametrii de stagnare pentru mişcarea din ajutaj şi, cu ajutorul lor, se pot deduce mărimile aerodinamice din zona experimentală p_{10}, T_{10} (temperatura statică), $T'_{10} = T_5$ (temperatura de impact) etc. în funcţie de intensitatea undei de şoc primare M_{s1}. În lucrarea citată [7] se dau formulele de calcul şi diagramele necesare. Aici vom arăta doar că, dacă se fixează valoarea dorită a temperaturii statice T_{10}, de pildă la 50°K pentru curgerile hipersonice „reci" sau la 218°K pentru reproducerea entalpiei înalte a mişcărilor reale din statosferă, rezultă o relaţie între numărul Mach M_{10} al curgerii utile şi intensitatea necesară a undei de şoc M_{s1} care generează mişcarea (fig. 2).

Valoarea lui M_{s1} depinde de natura gazelor aflate iniţial în cele două compartimente ale tubului de şoc şi de raportul presiunilor iniţiale, $p_{41} = p_4/p_1$. Dacă se lucrează cu aer în ambele camere, intensitatea undei de şoc este limitată la aproximativ $M_{s1} \simeq 4$, pentru $p_{41} \cong 10^4$. Ţinînd seama de necesitatea asigurării unui nivel minim al presiunii statice din camera de experienţă pentru măsurători şi vizualizări, precum şi de faptul că presiunea p_4 nu poate fi mărită peste o limită impusă de rezistenţa mecanică a tubului de şoc, este mai realist să se considere că în combinaţia aer-aer se poate ajunge pînă la $M_{s1} \simeq 3$. Din figura 2 rezultă că, în această configuraţie, tubul de şoc permite obţinerea unor curgeri hipersonice „reci" cu Mach pînă la circa 10—12.

În paragraful următor vom prezenta cîteva rezultate experimentale obţinute în acest mod.

Pe de altă parte, observăm însă că, dacă se doreşte să se obţină numere Mach mai mari sau entalpii mai înalte, este necesar să se folosească unde de şoc sensibil mai intense. În lucrarea citată [7] se analizează diferitele metode pentru producerea undelor intense în tuburile de şoc. Dintre acestea, cele mai eficiente se bazează fie pe folosirea unui gaz motor de greutate moleculară mică (He sau H_2), fie pe producerea presiunii p_4 prin combustia unui amestec stoechiometric de H_2 şi O_2, diluat în proporţie de 70—80% cu He.

În cazul nostru am eliminat de la început utilizarea heliului, gaz scump şi greu de procurat, astfel încît ne-a rămas posibilitatea de a lucra cu hidrogenul ca gaz motor. Acesta permite să se obţină unde de şoc destul de intense ($M_{s1} = 7 \ldots 9$), dar necesită precauţii deosebit de severe, datorită pericolelor de explozie. Vom prezenta mai jos unele rezultate experimentale obţinute de noi în aceste condiţii.

Rezultă astfel că tubul de şoc oferă posibilitatea de a reproduce condiţiile reale de zbor pînă la numere Mach M_{10} de circa 15, ceea ce corespunde la temperaturi de impact de circa 10 000°K. La limita de lichefiere se poate ajunge pînă la $M = 25$ în aceste condiţii.

O altă limitare serioasă apare însă în cazul undelor de şoc intense: durata din ce în ce mai scurtă a regimului util. Într-adevăr, zona de stagnare *5* (fig. 1), în care presiunea şi temperatura au valori constante, ia sfîrşit o dată cu sosirea primei perturbaţii QR, care este reprezentată de unda reflectată înapoi ca urmare a procesului de interacţiune dintre unda de şoc reflectată PQ şi suprafaţa de contact OQ. Pe de altă parte, din durata utilă t_* (fig. 1) se mai pierde o parte prin procesul de amorsare a ajutajului Laval şi, în plus, prin durata de stabilire a regimului de curgere staţionar în jurul modelului din camera de experienţe.

Pentru a mări timpul de experimentare nu se poate lungi în mod exagerat tubul de şoc, deoarece în acest mod creşte şi atenuarea undei de şoc primare; se poate însă folosi tehnica funcţionării în regimul cu *suprafaţă de contact echilibrată* [4]*).

Prin alegerea convenabilă a gazelor din camerele tubului şi a reportului p_{41}, se poate face ca unda QR, produsă de interacţiunea dintre unda de şoc reflectată şi suprafaţa de contact, să aibă o intensitate neglijabilă, reducîndu-se la o undă Mach. În acest caz, regimul util t'_* durează pînă la sosirea undei de rarefiere ST, obţinîndu-se un cîştig substanţial.

Echilibrarea are loc la o anumită intensitate a undei de şoc primare M_{s1}, pentru care avem egalitatea următoare [7], [8]:

$$\frac{1-\mu_4^2}{1-\mu_1^2}\sqrt{\frac{1+\mu_1^2}{1+\mu_4^2}}\cdot a_{32} = \sqrt{\frac{1+\mu_4^2 p_{25}}{1+\mu_1^2 p_{25}}}, \qquad (1)$$

unde μ_1 şi μ_4 sînt funcţii de coeficienţii adiabatici $\varkappa_1$ şi $\varkappa_4$ ai gazelor din camerele tubului de şoc $\left(\mu^2 = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)$, iar $a_{32}=a_3/a_2$ şi p_{25} se pot calcula în funcţie de M_{s1}.

* În l. engleză *tailored interface*

Pentru combinația $H_2 - N_2$ (care corespunde practic și la H_2 — aer), echilibrarea se produce pentru $M_{s1} = 5{,}75$, iar pentru $H_2 - A$ la $M_{s1} = 6{,}5$.

În primul caz se asigură simularea completă a temperaturii de impact pentru o curgere cu $M_{10} \cong 8{,}4$ și se poate obține o mișcare hipersonică „rece" pînă la $M_0 \cong 18$. Temperatura de impact atinge valoarea de 3 300°K, la care gradul de disociație al oxigenului, în funcție de presiune, poate fi de 0,1—1,0, iar gradul de ionizare este de circa 10^{-6}.

În cazul folosirii argonului ca gaz de lucru, la $M_{s1} = 6{,}5$ se obține $T_5 \cong 9\,000$°K, la care gradul de ionizare este de circa 0,01, iar numărul Mach maxim realizabil depășește 23.

În ultimul paragraf al acestei lucrări vom arăta în ce măsură rezultatele experimentale obținute concordă cu datele teoretice de mai sus și vom discuta unele efecte care nu au mai fost puse în evidență pînă în prezent.

3. REZULTATELE EXPERIMENTALE PRIVIND MIȘCĂRILE HIPERSONICE LA TEMPERATURI SCĂZUTE

Considerațiile de mai sus au constituit baza teoretică a unui program de cercetări în aerodinamica hipersonică, întreprins cu ajutorul tubului de șoc IMF-2, construit la Institutul de mecanică a fluidelor din București (fig. 3). Această instalație a fost descrisă anterior [7], [9]. Caracteristicile sale principale sînt următoarele: diametrul 100 mm; lungimea camerei de înaltă presiune 300—2 000 mm; lungimea tubului de acce-

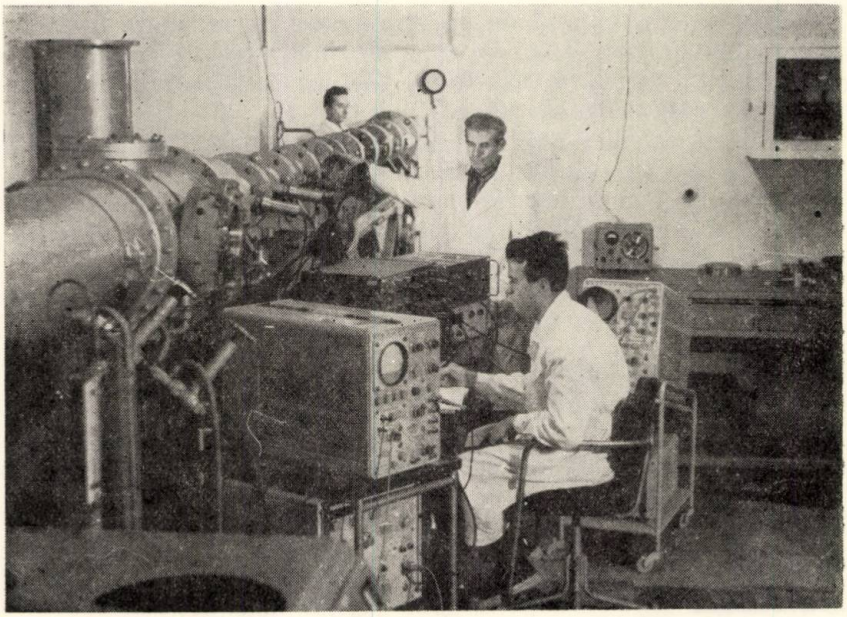


Fig. 3. — Vedere generală a tubului de șoc hipersonic IMF—2.

lerare 4000—6000 mm; presiunea maximă $p_{4max} = 150$ kgf/cm²; vid maxim în tubul de accelerare $p_{1min} = 0{,}15$ torr; diametrul camerei de experienţe 360 mm; ajutaje Laval pentru $M_{10} = 4$; 7 şi 10.

În prima etapă a studiilor s-a pus accentul pe obţinerea mişcărilor hipersonice „reci", fără a încerca să se reproducă şi temperaturile înalte de impact. Ca urmare, tubul de şoc a fost pus să funcţioneze cu aer în ambele camere; astfel, intensitatea undei de şoc primare este limitată, în cazul tubului de şoc IMF-2, la circa 4. O oarecare creştere a numărului M_{s1} se obţine în varianta de tub de şoc cu dublă diafragmă [10], dar durata curgerii utile scade mult.

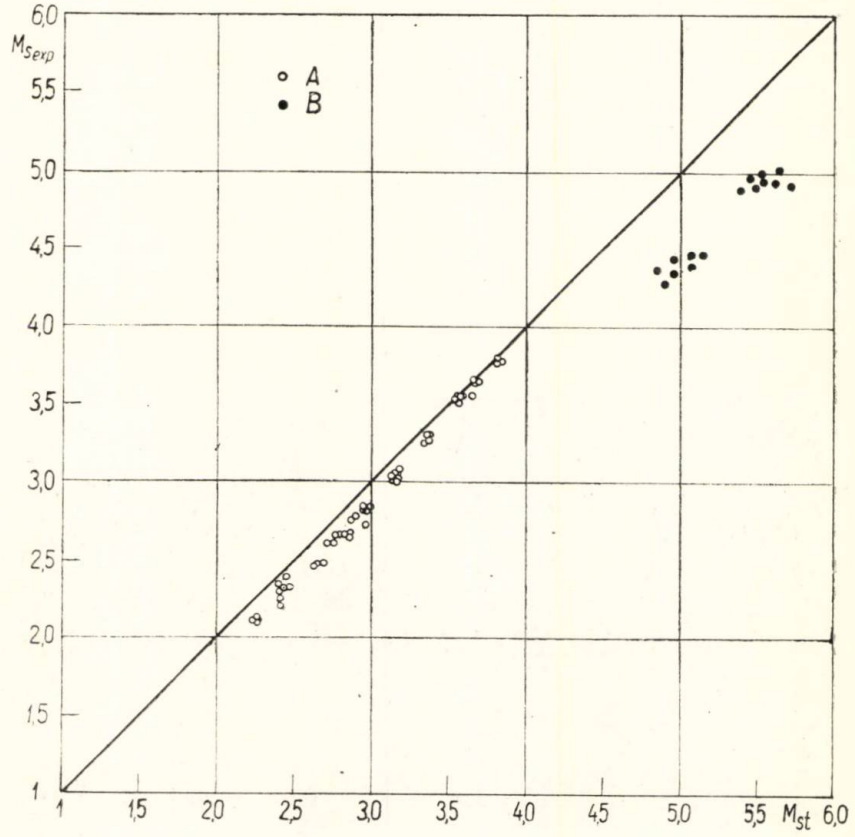


Fig. 4. — Comparaţie între valorile teoretice şi cele experimentale ale intensităţii undelor de şoc: *A* — aer-aer; *B* — aer-aer, dublă diafragmă.

În figura 4 s-au reprezentat valorile vitezei de propagare a undei de şoc măsurate în comparaţie cu cele teoretice (deduse din raportul de presiuni iniţial p_{41}), obţinute la experienţele cu configuraţia simplă a tubului de şoc (A) şi în varianta cu dublă diafragmă (B).

Se observă concordanţa dintre teorie şi experienţă; abaterea sistematică de 2—5% se datoreşte atenuării undei de şoc ca urmare a dezvol-

tării stratului-limită pe pereții tubului și se menține în limite normale în conformitate și cu datele altor autori (vezi [7]). În lucrarea citată se dau de asemenea diagrame pentru salturile de presiune măsurate p_{21} (dat de unda de șoc primară) și p_{51} (produs de unda de șoc reflectată), care sînt de asemenea în bun acord cu teoria.

În continuare, după ce experiențele precedente au dat certitudinea că tubul de șoc funcționează în conformitate cu schema teoretică, s-a trecut la verificarea existenței curgerii hipersonice în ajutajele Laval care echipează instalația. Experiențele au constat din înregistrarea simultană a presiunii într-un punct de pe peretele tubului de șoc la mică distanță de intrarea în ajutajul Laval și a presiunii de impact dată de un traductor montat într-un tub Pitot plasat în curgerea din ajutaj.

Figura 5 este una dintre oscilogramele tipice obținute în această serie de încercări. Pe curba de jos se observă cele două paliere de presiune, produse de una de șoc incidentă și cea reflectată, care se propagă în tub. Curba de sus arată că, după o scurtă perioadă în care se amorsează curgerea din ajutaj, presiunea de impact rămîne constantă timp de peste 2 ms, care constituie durata utilă a regimului de mișcare hipersonică uniformă. Durata baleiajului este de 5 ms.

Valorile presiunii de impact la diferite numere Mach au fost trecute pe diagrama din figura 6 și coincid, în limitele erorilor experimentale, cu curba teoretică. Punctele A, B, C, D corespund diferitelor ajutaje Laval cu care este echipată instalația.

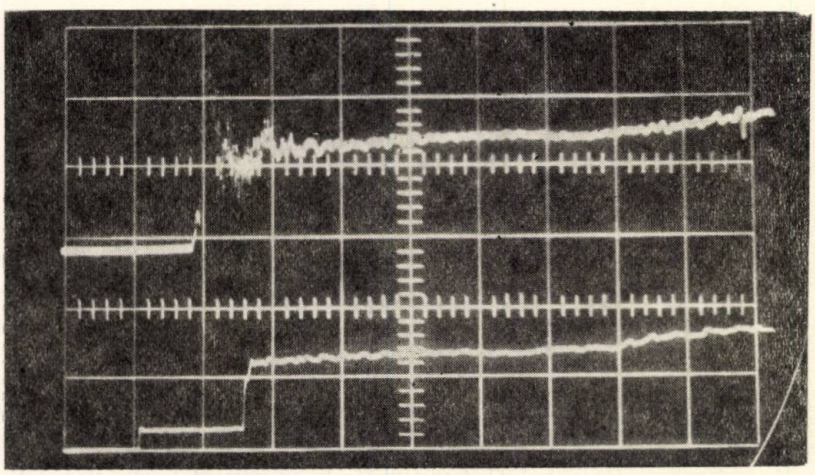


Fig. 5. — Oscilograma variației presiunilor în tubul de șoc hipersonic.
Curba de sus: presiunea de impact (Pitot) în ajutajul Laval pentru $M=7$. Sensibilitatea: 0,2 V/cm. Curba de jos: presiunea în peretele lateral al tubului la 115 mm amonte de intrarea în ajutaj. Sensibilitatea: 2 V/cm. Baza de timp: 500 μs/cm.

Posibilitățile tubului de șoc IMF-2 de a produce curgeri hipersonice de calitate corespunzătoare au fost apoi folosite la o serie de încercări privind mișcarea în jurul corpurilor geometrice simple: conuri de diferite deschideri, sfere, discuri plasate frontal.

În lucrarea citată [7] se discută pe larg rezultatele obținute; în cele ce urmează vom prezenta pe scurt cîteva dintre acestea.

Pentru exemplificare, în figurile 7, 8 și 9 s-au reprodus cîteva vizualizări tipice, în care se observă mișcarea cu undă de șoc în jurul unui

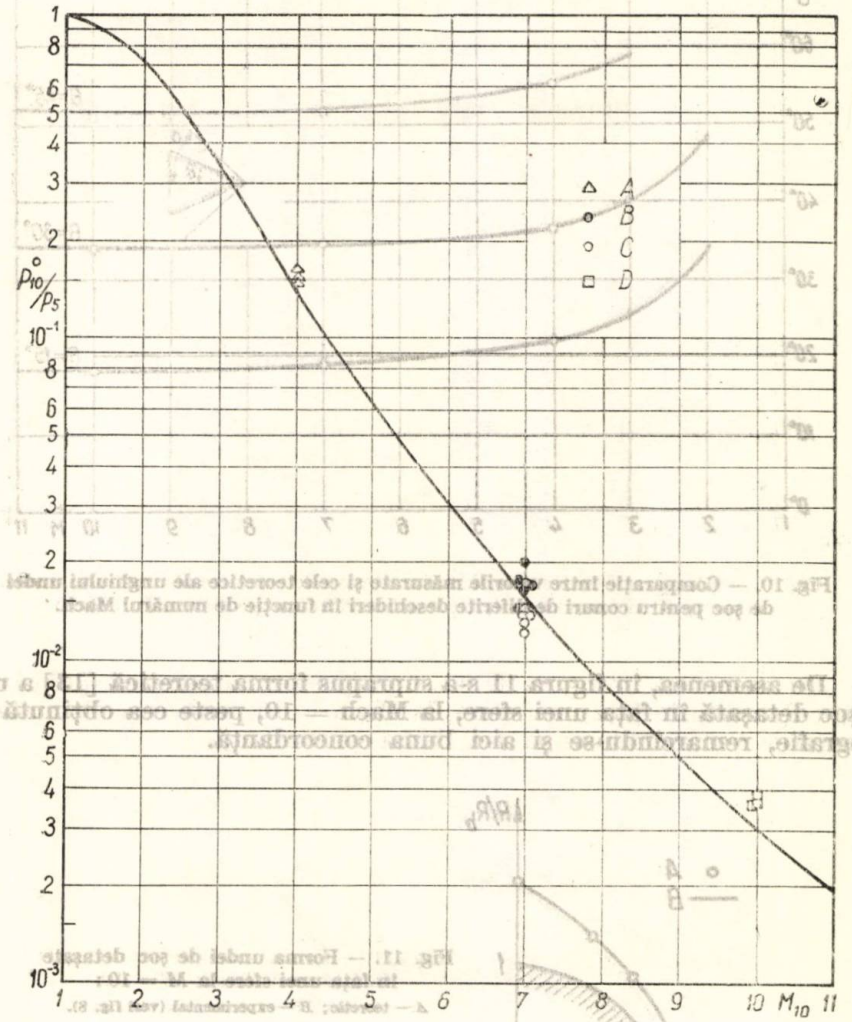


Fig. 6. — Valoarea presiunilor de impact (Pitot) măsurate în diferite ajutaje Laval și la diverse numere Mach: A — $M = 4$, ajutaj profilat; B — $M = 7$, ajutaj profilat; C — M, = 7 ajutaj conic; D — $M = 10$, ajutaj conic.

con de 60° la Mach = 7, al unei sfere la Mach = 10 și al unui disc la Mach = 7. Perturbația undei de șoc, vizibilă pe ultima imagine, se datorește unor particule de celofan, resturi ale diafragmei secundare.

Figura 10 este o comparaţie între teorie şi experienţe privind unghiul undei de şoc ataşate pe conuri de diferite deschideri în funcţie de numărul Mach [11], [12]; se constată acordul aproape perfect.

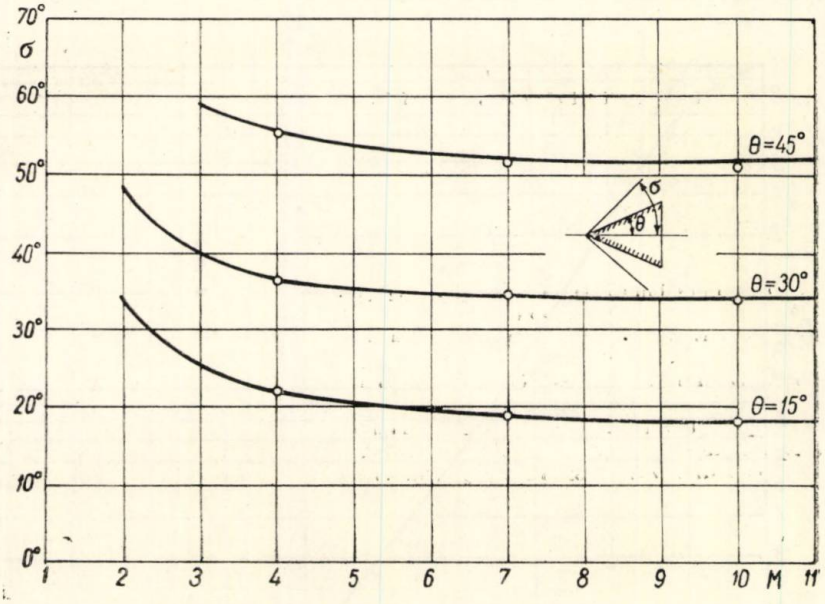


Fig. 10. — Comparaţie între valorile măsurate şi cele teoretice ale unghiului undei de şoc pentru conuri de diferite deschideri în funcţie de numărul Mach.

De asemenea, în figura 11 s-a suprapus forma teoretică [13] a undei de şoc detaşată în faţa unei sfere, la Mach = 10, peste cea obţinută prin fotografie, remarcîndu-se şi aici buna concordanţă.

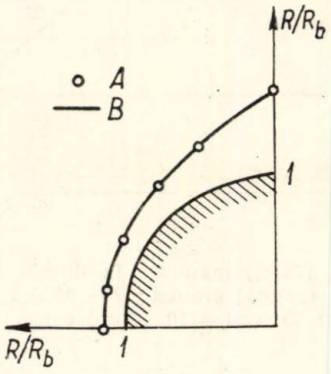


Fig. 11. — Forma undei de şoc detaşate în faţa unei sfere la $M = 10$:
A — teoretic; B — experimental (vezi fig. 8).

În sfîrşit, reproducem în figura 12 cîteva puncte experimentale privind distribuţia presiunilor aerodinamice pe conuri de diferite deschideri, la diverse numere Mach, în comparaţie cu teoria.

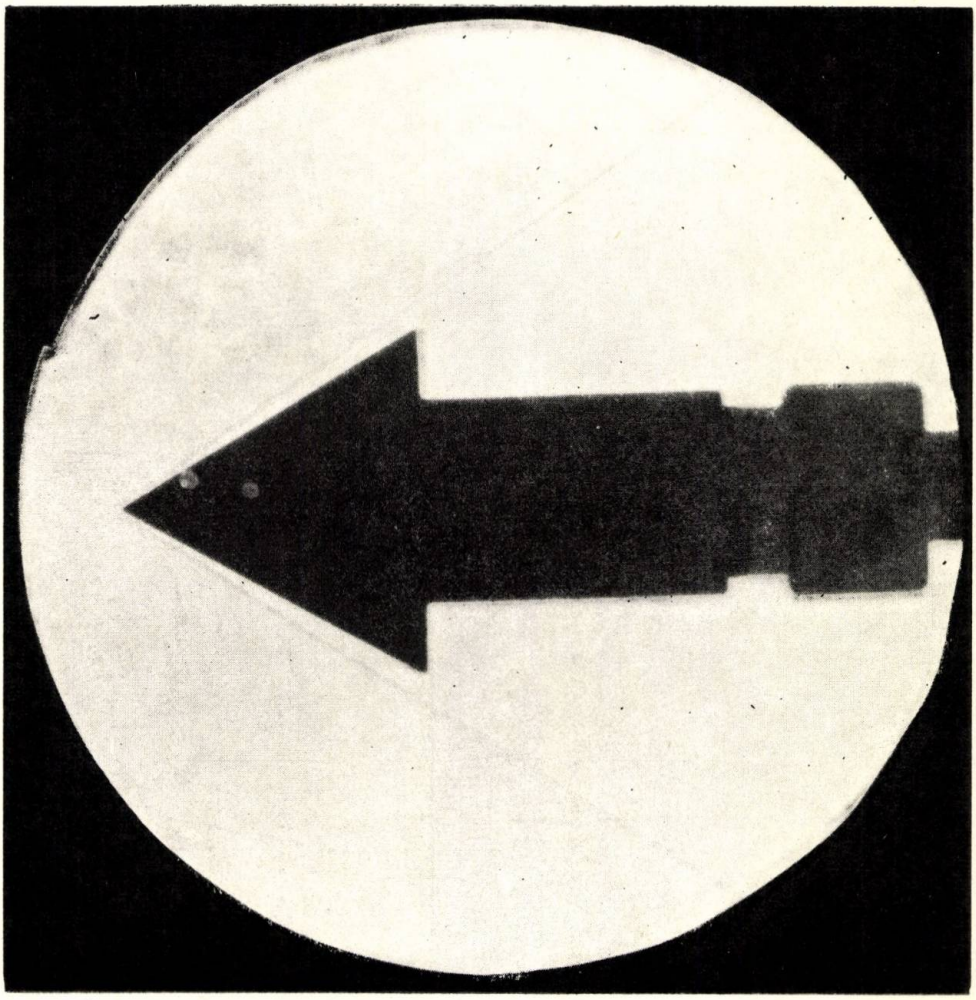


Fig. 7. — Vizualizarea mișcării cu $M = 7$ în jurul unui con de 60°.

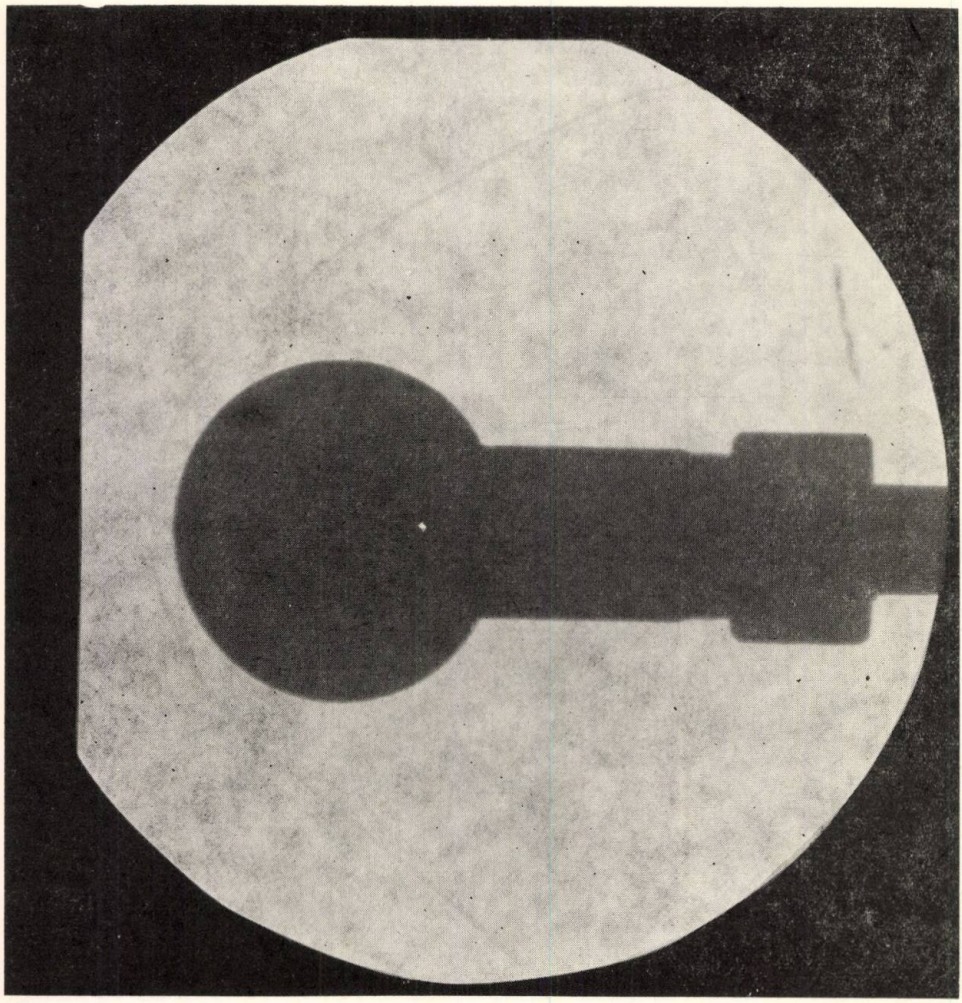


Fig. 8. — Curgerea hipersonică cu $M = 10$ în jurul unei sfere.

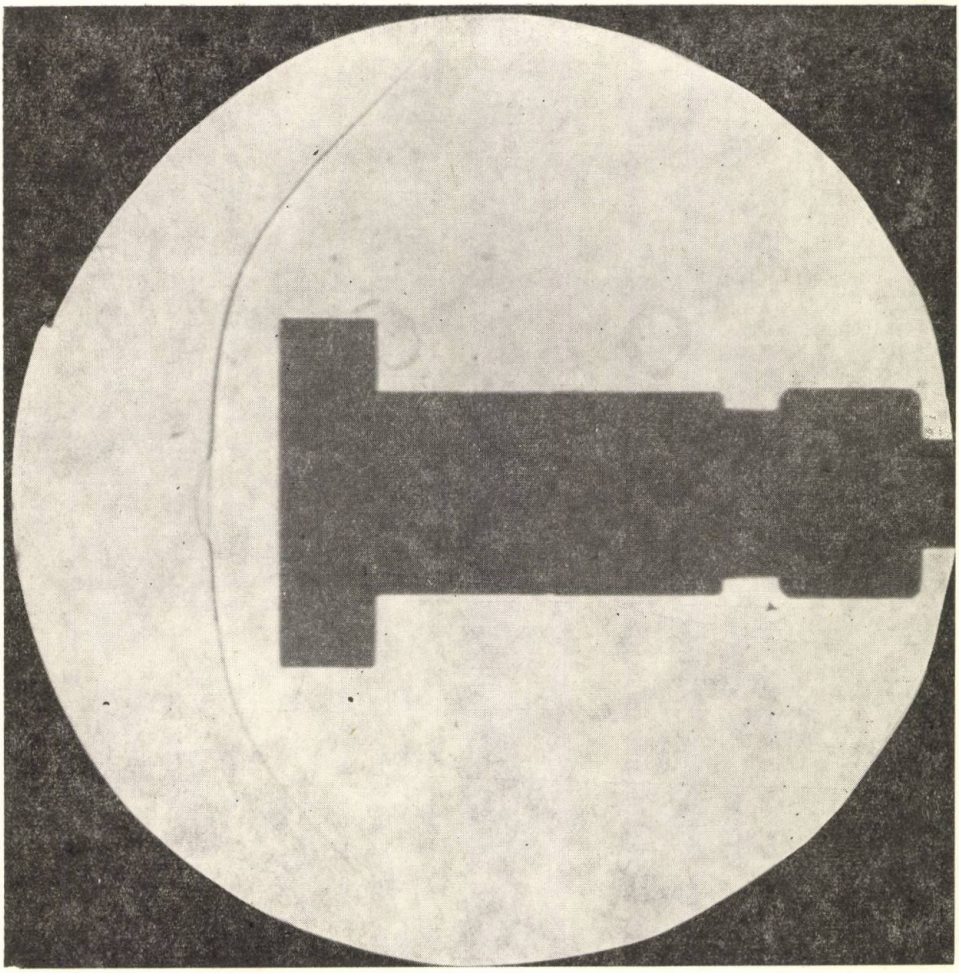


Fig. 9. — Mişcarea în jurul unui disc la $M = 7$.

Concluzia experienţelor rezumată mai sus este că realizarea unor curgeri hipersonice „reci" pînă la cel puţin Mach = 10, avînd o bună uniformitate, este pe deplin posibilă, folosind un tub de şoc simplu în

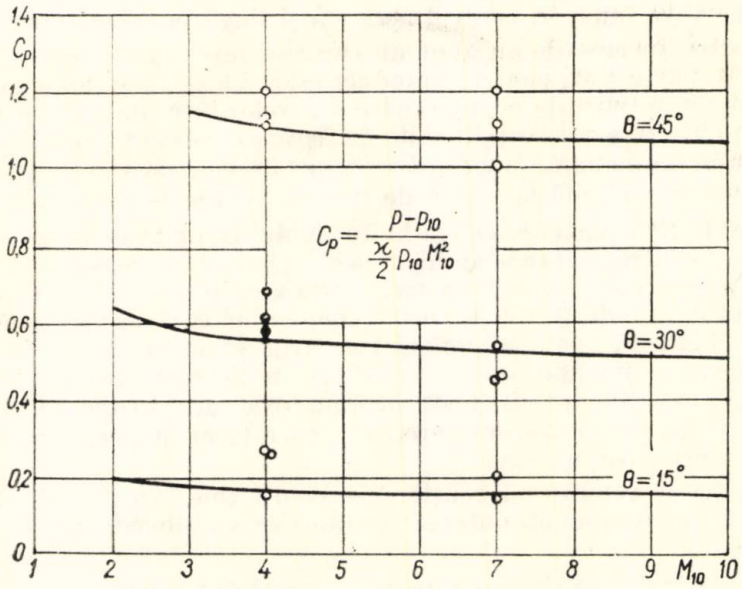


Fig. 12. — Distribuţia presiunilor aerodinamice pe conuri de diferite deschideri în comparaţie cu teoria.

care se produc unde de şoc de intensitate moderată, cu aerul ca gaz motor. Realizarea mişcărilor cu entalpie înaltă este o problemă sensibil mai dificilă, dar nu de nerezolvat, după cum vom vedea în cele ce urmează.

4. PRODUCEREA UNDELOR DE ŞOC INTENSE ÎN TUBUL DE ŞOC IMF-2

Aşa cum am arătat în paragraful 2 al lucrării de faţă, există mai multe metode pentru mărirea intensităţii undelor de şoc produse într-un tub de şoc; o analiză sistematică a acestora ne-a arătat însă că unele dintre acestea nu sînt utilizabile din motive economice (necesitînd folosirea heliului, gaz scump), iar altele sînt legate de dificultăţi tehnice însemnate (de pildă preîncălzirea gazului motor din camera de înaltă presiune). Concluzia noastră a fost că singura soluţie practică este de a se lucra cu hidrogenul ca gaz motor.

În dorinţa de a explora limitele performanţelor posibile ale instalaţiei tubului de şoc hipersonic de la Institutul de mecanică a fluidelor, s-a întreprins de aceea un program de experimentări folosind ca gaz motor hidrogenul, iar ca gaze de lucru azotul (care înlocuieşte aerul, evitînd apariţia fenomenelor de combustie parazite la suprafaţa de contact cu hidrogenul), argonul şi bioxidul de carbon.

La fiecare experiență s-au înregistrat : presiunile inițiale în compartimentele tubului de șoc, p_1 și p_4, viteza de propagare a undei de șoc primare, M_s, precum și variația presiunilor și transferului de căldură în mai multe puncte : pe peretele lateral al tubului, în apropiere de capăt, și pe placa de fund, în centrul acesteia și lîngă peretele tubului.

Astfel, încercările au avut un caracter mult mai complex decît cele cu aer ; în particular, pentru reproductibilitatea rezultatelor a fost necesar să se asigure o puritate cît mai mare a gazelor introduse în compartimentele tubului. În acest scop, înainte de fiecare experiență, cele două camere ale tubului erau supuse unor spălări repetate cu gazele respective,urmate de evacuarea lor pînă la limita de lucru a pompelor de vid.

Pe de altă parte, folosirea hidrogenului comprimat prezintă pericole evidente ; pentru evitarea accidentelor s-au luat de aceea măsuri foarte severe de precauție. Astfel s-a redus valoarea presiunii maxime de lucru a tubului de șoc de la 150 kgf/cm^2, cînd se lucrează cu aer, pînă la maximum 45 kgf/cm^2, apoi s-a controlat cu grijă etanșarea perfectă a tuturor deschiderilor, ajungîndu-se la un nivel de pierderi foarte scăzut, sub 0,4 μHg $\cdot$ m^3/min, în sfîrșit s-a acordat o atenție deosebită stabilirii și apoi respectării unei secvențe precise a operațiilor de pregătire și de efectuare a fiecărei experiențe.

În aceste condiții s-a reușit să se transforme experiențele în operații de rutină, iar reproductibilitatea rezultatelor s-a dovedit pe deplin satisfăcătoare.

Rezultatele acestui program de încercări sînt rezumate în diagramele din figurile 13, 14 și 15, în care se compară valorile experimentale ale vitezei de propagare a undei de șoc cu cele teoretice pentru combinațiile de gaze $H_2 - N_2$, $H_2 - A$ și aer $- CO_2$. Cele mai numeroase experiențe au fost făcute folosind ca gaz de lucru azotul, întrucît comportarea acestuia se apropie mai mult de cea a aerului. Se observă în toate aceste diagrame că punctele experimentale se aliniază, cu împrăștieri remarcabil de reduse, pe o curbă care prezintă o abatere sistematică față de cea teoretică datorită atenuării undei de șoc de către stratul-limită. Valorile acestei atenuări în cazul instalației noastre sînt comparabile cu cele publicate de alți autori (vezi de exemplu [14]).

Se mai constată că în tubul de șoc IMF —2 se realizează fără prea mari dificultăți unde de șoc intense ($M_s \cong 7 - 8$), care provoacă disociația și chiar ionizarea parțială a gazelor din tub.

Un număr însemnat de încercări a fost consacrat stabilirii condițiilor de funcționare ale tubului de șoc cu suprafață de contact echilibrată. S-a constatat efectiv că, în cazul azotului, la $M_s \cong 5{,}75$, unda reflectată înapoi, rezultînd din interacțiunea dintre unda de șoc reflectată și suprafața de contact, nu mai provoacă nici o variație de presiune pe fundul tubului de șoc, corespunzînd deci situației căutate. Pentru ilustrare, în figurile 16 *a*, *b*, și *c* s-au reprodus trei oscilograme ale presiunilor pentru trei numere Mach : inferior, egal și superior valorii de mai sus. Se observă că în primul caz (subadaptat) perturbația corespunde unei scăderi de presiune după circa 250 μs, iar în cazul superadaptat presiunea prezintă o creștere, deși mai puțin netă.

Rezultatele similare se obţin şi în cazul combinaţiei $H_2 - A$ la $M_s \cong 6{,}5$.

Aceste înregistrări arată că, prin folosirea tehnicii echilibrării suprafeţei de contact, durata regimului util, de presiune cvasi constantă, creşte de la circa 250 μs la circa 2 ms, asigurîndu-se astfel timpul necesar efectuării măsurătorilor.

În regimul de echilibrare avem deci, în cazul azotului, $M_{s1} = 5{,}75$; $T_5 = 3\,320°K$; $p_5 = 12\,000$ torr $\simeq 16$ atm (presiunea de stagnare la in-

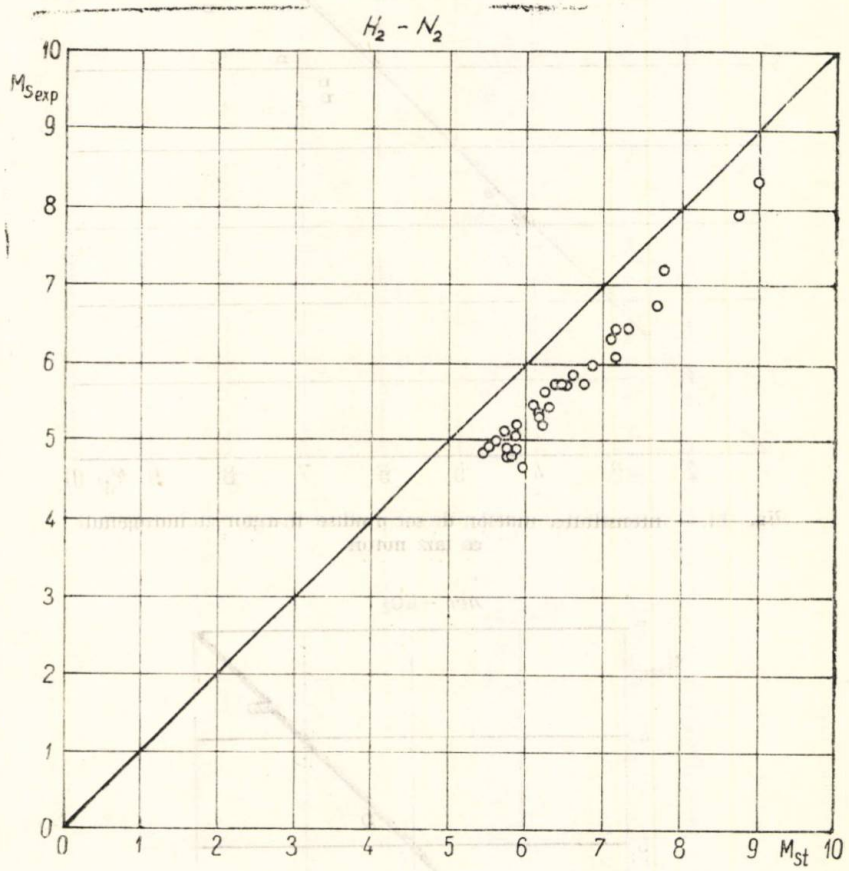


Fig. 13. — Intensitatea undelor de şoc produse în azot folosind ca gaz motor hidrogenul.

trarea în ajutaj, pentru presiunea iniţială $p_1 = 40$ torr). Reproducerea entalpiei reale se poate obţine pînă la $M = 8{,}4$, iar curgeri hipersonice „reci" se pot realiza pînă la $M = 18$.

Pe oscilograme se mai poate vedea că palierul de presiune nu este riguros constant, ci prezintă o creştere, care este tot un efect al atenuării undei de şoc primare în tub (vezi [7]). Acest fenomen apare mai accentuat

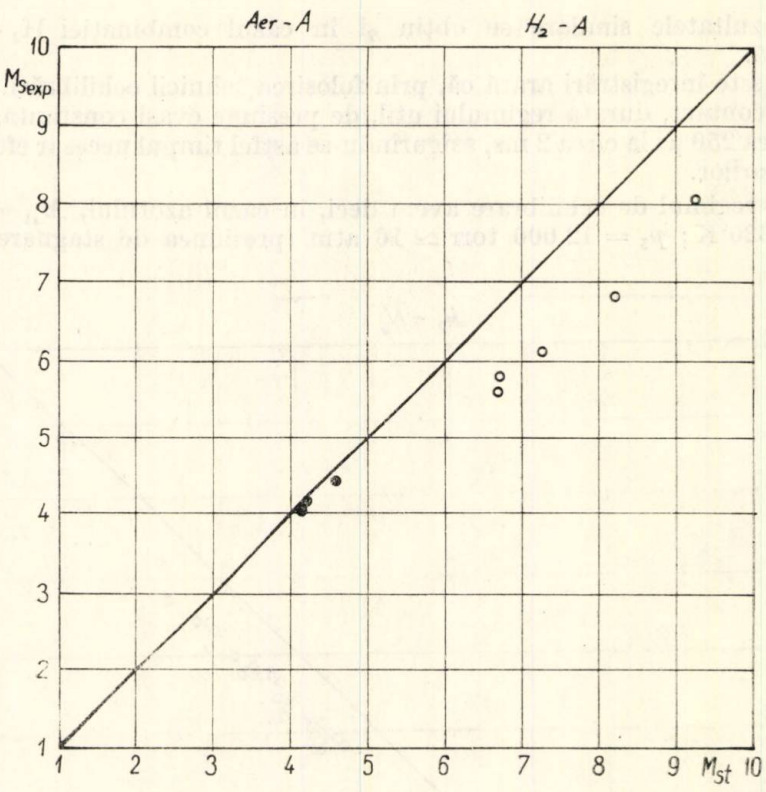


Fig. 14. — Intensitatea undelor de şoc produse în argon cu hidrogenul ca gaz motor.

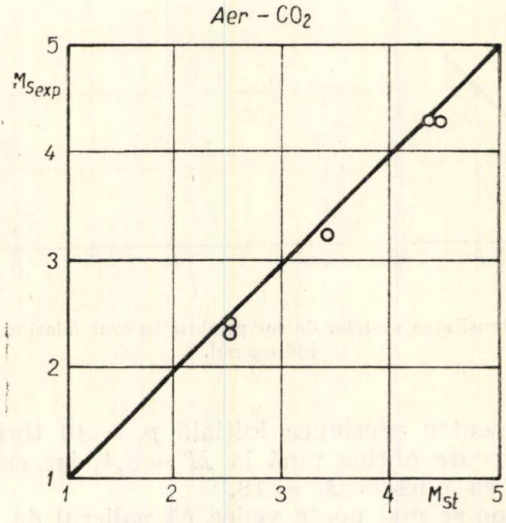


Fig. 15. — Viteza de propagare a undelor de şoc în CO_2 produse cu aer.

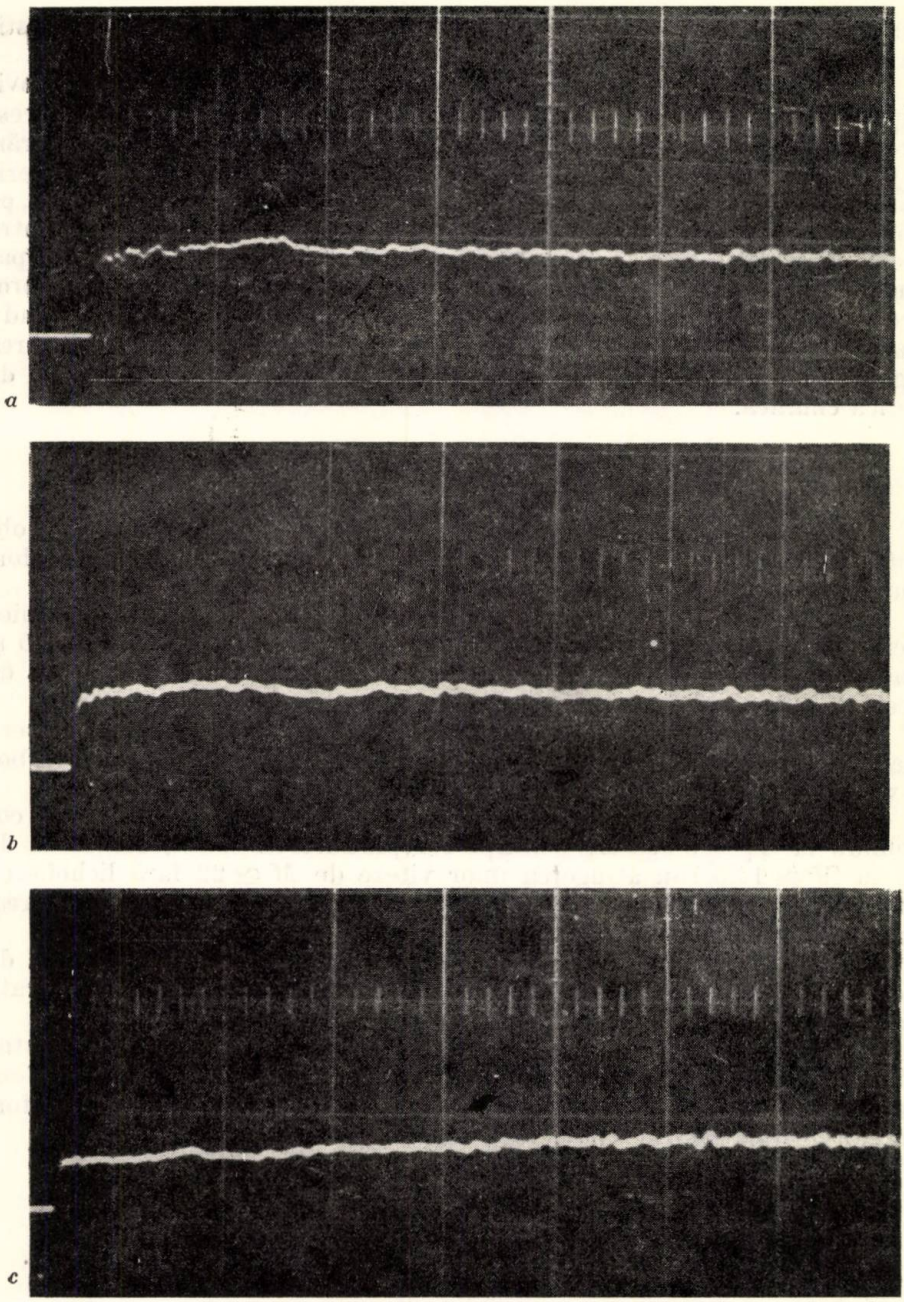


Fig. 16 *a*, *b*, *c*. — Oscilograma presiunilor pe fundul tubului de şoc în azot : *a* — M_s = 5,20 (subadaptat) ; *b* — M_s = 5,47 (la regimul de echilibrare) ; *c* — M_s = 6,10 (supraadaptat). Baza de timp : 200 μs/cm.

pe înregistrările temperaturii de stagnare pe fundul tubului de şoc şi constituie o limitare serioasă a metodei echilibrării suprafeţei de contact.

Menţionăm cu această ocazie că experienţele noastre au pus în evidenţă şi o neuniformitate a temperaturilor pe fundul tubului de şoc; acest fenomen a fost supus unui studiu amănunţit şi este prezentat în alte lucrări [15],[16]. Aici ne vom mărgini să amintim că el se datoreşte desprinderii stratului-limită din tub în urma interacţiunii cu unda de şoc reflectată, pe de o parte, şi instabilităţii suprafeţei de contact, pe de altă parte. Una dintre concluziile noastre este că, în anumite cazuri, uniformitatea în timp a parametrilor gazului în spatele undei de şoc reflectate este mai bună în apropierea peretelui lateral al tubului de şoc decît în centrul plăcii de fund; această concluzie este susceptibilă de aplicaţii practice la producerea curgerilor hipersonice şi la utilizarea tuburilor de şoc pentru cercetări de cinetică chimică.

5. CONCLUZII

În lucrarea de faţă am prezentat cîteva rezultate experimentale obţinute în cadrul unui program al cărui scop era de a stabili limitele performanţelor tubului de şoc hipersonic IMF–2.

Am arătat astfel că se pot realiza cu uşurinţă mişcări hipersonice „reci", fără a se atinge limita de lichefiere a aerului, pînă la $M = 10$ şi că aceste curgeri au o calitate suficientă pentru a permite efectuarea de cercetări.

De asemenea, experienţele pun în evidenţă posibilitatea obţinerii mişcărilor cu entalpie înaltă, care simulează condiţiile reale de zbor cu viteze hipersonice în stratosferă.

Astfel, în cazul azotului, se poate realiza pînă la $M_s = 8{,}5$, care corespunde la $T_5 = 5\,000°K$, permiţînd reproducerea condiţiilor reale de zbor la $M \cong 10{,}5$ sau atingerea unor viteze de $M \cong 22$ fără lichefierea azotului. În cazul argonului, la $M_s = 8$ se obţine $T_5 \cong 11\,000°K$, corespunzînd unui număr Mach maxim de 26.

De asemenea s-a demonstrat experimental existenţa regimului de funcţionare cu suprafaţă de contact echilibrată, care asigură o durată utilă multă mărită.

Colectivul nostru este preocupat în continuare de utilizarea acestor posibilităţi pentru efectuarea unor cercetări de aerodinamică la viteze hipersonice, concomitent cu împingerea şi mai departe a limitelor performanţelor instalaţiilor noastre.

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. H. Oertel, *Stossrohre* Viena–New York, Springer-Verlag, 1966.
2. E. L. Hessler, S. C. Lin şi A. Kantrowitz, *The Production of High-Temperature Gases in Shock-Tubes*, Journal of Applied Physics, **23**, *12*, 1390 (1952).
3. H. T. Nagamatsu şi R. E. Geiger, *The Hypersonic Shock-Tunnel*, A. R.S. Journal, **5**, 332 (1959)
4. C. E. Witliff M. R. Wilson şi A. Hertzberg, *The Tailored Interface Hypersonic Shock Tunnel*, Journal of the Aero/Space Sciences, **26**, 219 (1959).

5. A. G. Boyer, *Design, Instrumentation and Performance of the UTIAS 4 in × 7 in Hypersonic Shock Tube*, UTIAS Report, *99* (1965).
6. L. Pennelegion R. F. Cash şi D. F. Bedder, *Design und Operating Features of the NPL 6 in Shock Tunnel*, A.R.C. R & M, *3449* (1967).
7. L. Z. Dumitrescu, *Cercetări în tuburile de şoc*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1969.
8. L. Z. Dumitrescu, *Minimum Lenth of a Shock Tube for Given Working Times*, Rev. Méc. Appl. **2**, *1*, 61—77 (1957).
9. L. Z. Dumitrescu, *Tubul de şoc hipersonic IMF—2*, comunicare prezentată la simpozionul „Efectul Coandă şi unele aplicaţii speciale ale aerohidrodinamicii", Bucureşti, iunie 1967.
10. B. D. Henshall, *The Use of Multiple Diaphragms in Shock Tubes*, A. R. C. C. P. *291*, (1956).
11. G. I. Taylor şi J. W. Maccoll, *The Air Pressure on a Cone Moving at High Speeds*, Proc. Roy. Soc. London, **A. 139**, 278—311 (1933).
12. J. W. Maccoll, *The Conical Shock Wave formed by a Cone moving at a High Speed*, Proc. Roy. Soc. London, **A 159**, 452—472 (1937).
13. W. D. Hayes şi R. F. Probstein, *Hypersonic Flow Theory*, ed. 2 New York —Londra, Academic Press, 1966.
14. J. G. Hall, *Shock Tubes, Part II: Production of Strong Shock Waves. Shock Tube Aplications, Design and Instrumentation* UTIA Review *12*, part II (1958).
15. L. Z. Dumitrescu şi R. Brun, *Sur quelques propriétés de l'écoulement chaud à l'extremité d'un tube à chocs*, C. R. Ac. Sci. Paris, **268 A**, 827—830 (1969).
16. L. Z. Dumitrescu, R. Brun şi C. Popescu, *Experimental Studies of the Shock Reflection and Interaction in a Shock Tube*, comunicare prezentată la al VII-lea simpozion internaţional de tuburi de şoc, Toronto, iunie 1969.

CÎTEVA ASPECTE PRIVIND MIŞCAREA FLUIDELOR COMPRESIBILE PRIN AJUTAJE

de V. MANEA şi N. GEORGESCU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

În lucrare este tratată problema mişcării fluidelor prin ajutaje generate în diverse moduri. În prima parte se consideră mişcarea fluidelor incompresibile prin ajutaje generate de vîrtejuri şi surse. În continuare, folosind ecuaţiile de mişcare ale fluidelor compresibile prin ajutaje, se determină soluţiile aproximative ale acestora prin două metode : prima pentru un ajutaj plan ai cărui pereţi sînt curbe cu tangenţa continuă, iar a doua în cazul cînd se cunoaşte soluţia mişcării prin ajutaj a fluidului incompresibil.

INTRODUCERE

Mişcarea fluidelor compresibile prin ajutaje prezintă interes din punct de vedere atît teoretic, cît şi practic. Interesul din primul punct de vedere este determinat de faptul că, după cum este bine ştiut, studiul mişcării fluidelor compresibile prin ajutaje prezintă dificultăţi deosebite sub raportul evaluărilor cantitative precise, datorită posibilităţilor restrînse de soluţionare a ecuaţiilor de tip mixt care descriu aceste mişcări. Interesul din cel de-al doilea punct de vedere este determinat de aplicaţiile practice ale ajutajelor în construcţia sufleriilor aerodinamice, a turbinelor cu gaze, a motoarelor reactive şi rachetelor etc.

În literatura de specialitate apar în mod constant studii care contribuie la o cunoaştere cît mai în detaliu a caracterului mişcării prin ajutaje, îndeosebi în regim transonic. Un astfel de studiu este cel al lui Rîjov [1] în care se găsesc numeroase detalii şi o bibliografie amănunţită asupra problemei. În acelaşi sens trebuie amintită lucrarea lui Hall şi Suton [2] cu caracter de trecere în revistă, care posedă de asemenea o bibliografie bogată, precum şi cunoscuta monografie [3] a lui Guderley, în care sînt prezentate elementele de bază privind mişcarea în regim transonic prin ajutaje.

ST. CERC MEC. APL., TOM. 29, NR. 1, 1970, P. 203–223

În cele ce urmează vom prezenta cîteva aspecte privind mișcarea fluidelor ideale compresibile prin ajutaje și cîteva rezultate bazate pe metode de integrare aproximative.

1. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Pentru rezolvarea problemei propuse vom folosi ecuațiile care descriu mișcarea plană irotațională și permanentă a fluidelor ideale compresibile [3]:

$$(a^2 - u^2)\frac{\partial u}{\partial x} - uv\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + (a^2 - v^2)\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{a^2}{\varkappa - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\varkappa - 1} = \frac{V_{\max}^2}{2}, \tag{1.3}$$

unde u, v sînt proiecțiile vectorului-viteză pe axele sistemului de referință cartezian Oxy, a și a_0 vitezele de propagare a sunetului prin fluid în mișcare, respectiv în repaus, V și $V_{\max}$ modulul vectorului viteză, respectiv modulul vitezei maxime realizată prin detență și $\varkappa$ raportul dintre căldura specifică la volum constant și cea la presiune constantă.

Ecuația (1.2) este identic satisfăcută dacă luăm

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{1.4}$$

iar ecuația (1.1) devine

$$(a^2 - u^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2uv\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (a^2 - v^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{1.5}$$

Aceasta este ecuația a cărei soluție ne propunem s-o construim prin diferite metode aproximative în cazul particular al mișcării prin ajutaje plane.

Acestei ecuații îi atașăm condiția la limită

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = \frac{v(x, \tilde{y})}{u(x, \tilde{y})}, \tag{1.6}$$

care trebuie satisfăcută pe pereții laterali ai ajutajului, prin $\tilde{y}$ notîndu-se ordonatele punctelor acestor pereți, reprezentați prin ecuațiile

$$\begin{aligned} \tilde{y}_s &= \tilde{y}_s(x), \\ \tilde{y}_i &= \tilde{y}_i(x), \end{aligned} \tag{1.7}$$

indicele s și i corespunzînd peretelui superior, respectiv celui inferior. Soluția ecuației (1.5) va trebui să satisfacă condițiile de intrare și de ieșire din ajutaj care se referă fie la valorile presiunii, fie la distribuția vitezei.

2. MIȘCAREA FLUIDELOR INCOMPRESIBILE PRIN AJUTAJE PLANE

Din punct de vedere matematic, acest caz este cel mai simplu, iar determinarea cîmpului de viteză în interiorul său este în principiu posibilă, dificultățile care apar datorîndu-se formei pereților laterali. În vederea unui studiu comparativ asupra mișcării fluidului prin ajutaj în regim compresibil și incompresibil vom prezenta în cadrul acestui paragraf mișcarea fluidelor incompresibile prin două tipuri de ajutaje generate în mod convenabil cu ajutorul unor vîrtejuri, respectiv surse plasate într-un curent paralel.

a) Mișcarea prin ajutaje generate cu ajutorul a două vîrtejuri :

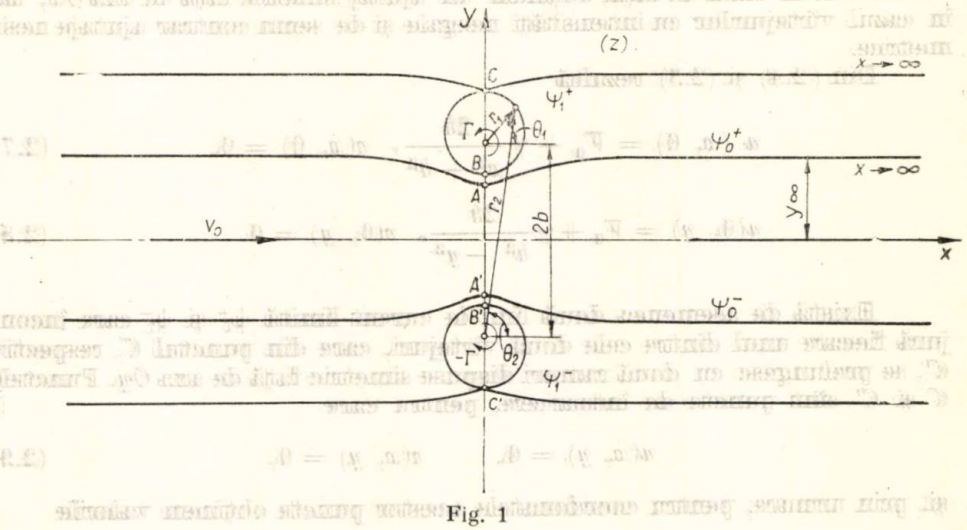


Fig. 1

Potențialul complex al acestei mișcări este

$$f(z) = V_0 z - i\gamma \ln \frac{z - ib}{z + ib}, \tag{2.1}$$

unde $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, $\gamma = \dfrac{\Gamma}{2\pi}$ (Γ fiind intensitatea vîrtejului), V_0 este viteza în amonte a curentului paralel, iar $2b$ distanța dintre vîrtejuri, dispuse pe axa Oy simetric față de originea sistemului de referință.

Ca urmare, potențialul vitezelor și funcția de curent sînt

$$\varphi = V_0 x + \gamma(\theta_1 - \theta_2), \tag{2.2}$$

$$\Psi = V_0 y - \gamma \ln \frac{r_1}{r_2}, \tag{2.3}$$

iar proiecţiile vectorului-viteză

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_0 + \gamma\left(\frac{b-y}{r_1^2} + \frac{b+y}{r_2^2}\right), \tag{2.4}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \gamma\left(\frac{x}{r_1^2} + \frac{x}{r_2^2}\right), \tag{2.5}$$

unde r_i, θ_i au semnificaţiile care rezultă din figura 1, adică

$$r_{1,2}^2 = x^2 + (y \mp b)^2, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y \mp b}{x}. \tag{2.6}$$

Se observă pe figură că între cele două vîrtejuri există două linii de curent ψ_0^+ şi ψ_0^-, delimitînd o regiune care poate fi asimilată cu un ajutaj plan. Este evident că în cazul cînd cele două vîrtejuri sînt egale şi de semn contrar, ca în cazul de faţă, obţinem un ajutaj simetric faţă de axa Ox, iar în cazul vîrtejurilor cu intensităţi neegale şi de semn contrar ajutaje nesimetrice.

Din (2.4) şi (2.5) rezultă

$$u\ (x,\ 0) = V_0 + \gamma\frac{2b}{x^2 + b^2}, \quad v(x,\ 0) = 0, \tag{2.7}$$

$$u(0,\ y) = V_0 + \gamma\frac{2b}{b^2 - y^2}, \quad v(0,\ y) = 0. \tag{2.8}$$

Există de asemenea două linii de curent-limită ψ_1^+ şi ψ_1^- care înconjură fiecare unul dintre cele două vîrtejuri, care din punctul C, respectiv C', se prelungesc cu două ramuri dispuse simetric faţă de axa Oy. Punctele C şi C' sînt puncte de întoarcere, pentru care

$$u(x,\ y) = 0, \qquad v(x,\ y) = 0, \tag{2.9}$$

şi, prin urmare, pentru coordonatele acestor puncte obţinem valorile

$$x_c = 0, \quad y_c = \sqrt{b^2 + \frac{2\gamma b}{V_0}}. \tag{2.10}$$

$$x_{c'} = 0, \quad y_{c'} = -\sqrt{b^2 + \frac{2\gamma b}{V_0}}.$$

Înlocuind aceste valori în (2.3), obţinem valoarea constantei corespunzătoare funcţiei de curent ψ_1^+, respectiv ψ_1^-,

$$C_1^{+,-} = \pm V_0 y_c - \gamma \ln\frac{\pm y_c - b}{\pm y_c + b}. \tag{2.11}$$

Liniile de curent ψ_1^+ şi ψ_1^- astfel determinate delimitează regiunea în care mişcarea fluidului prezintă caracteristicele mişcărilor prin ajutaje.

Astfel, oricare dintre liniile de curent ψ_0^+ cuprinse între axa Ox și linia de curent ψ_1^+ poate fi aleasă ca perete al unui ajutaj simetric plan, avînd secțiunea transversală minimă $\sigma_{min} = 2y_1$ și secțiunea transversală maximă $\sigma_{max} = 2y_\infty$. Trebuie observat că $y_A < y_B$, iar y_B rezultă din ecuația

$$y_B = b \operatorname{ctgh} \frac{1}{2}\left(\frac{\psi_1^+}{\gamma} - \frac{V_0 y_B}{\gamma}\right). \tag{2.12}$$

Fiind dat un ajutaj pentru care sînt cunoscute σ_{max}, σ_{min}, $\alpha_0 = U_0/V_0$, $\alpha_m = U_{max}/V_0$, unde U_0 și U_{max} reprezintă viteza în punctul (0, 0), respectiv $\left(0, \frac{\sigma_{min}}{2}\right)$, iar V_0 viteza curentului în secțiunea maximă, vom determina rapoartele ψ_0^+/V_0, $2\gamma/V_0$ și distanța b utilizînd (2.3) și (2.4) :

$$\psi^+/V_0 = \frac{\sigma_{max}}{2}, \tag{2.13}$$

$$2\gamma/V_0 = b\,(\alpha_0 - 1), \tag{2.14}$$

$$b^2 = \frac{\alpha_m - 1}{\alpha_m - \alpha_0}\left(\frac{\sigma_{min}}{2}\right)^2. \tag{2.15}$$

În acest mod, mișcarea în interiorul ajutajului generat cu ajutorul a două vîrtejuri egale și de semn contrar plasate într-un curent de viteză V_0 este complet determinată.

Se poate considera fără dificultate cazul unui sistem de două perechi de astfel de vîrtejuri, obținînd un ajutaj de forma celui din figura 2.

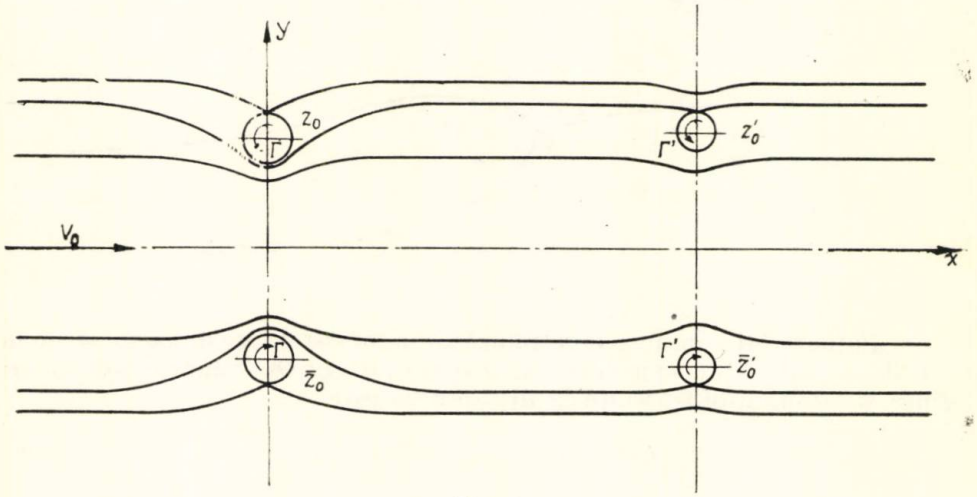


Fig. 2

Potențialul complex al unui astfel de sistem este

$$f(z) = V_0 z - i\gamma \ln \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} - i\gamma' \ln \frac{z - z_0'}{z - \bar{z}_0'},$$

unde γ' și z_0' sînt intensitatea, respectiv afixa vîrtejului din semiplanul superior, aparținînd celui de-al doilea cuplu de vîrtejuri. Rezultă

$$\varphi = V_0 x + \gamma\,(\theta_1 - \theta_2) + \gamma'\,(\theta_3 - \theta_4), \tag{2.16}$$

$$\psi = V_0 y - \gamma \ln \frac{r_1}{r_2} - \gamma' \ln \frac{r_3}{r_4}, \tag{2.17}$$

unde r_i $(i = 3, 4)$ reprezintă mărimea razelor vectoare duse din punctele z_0', respectiv $\bar{z}'_0$, la un punct curent de afixa z, iar θ_i unghiurile acestor raze vectoare cu axa reală.

Calculul elementelor care caracterizează acest ajutaj este mai dificil decît în cazul celui obținut cu ajutorul unei singure perechi de vîrtejuri. Dacă distanța l dintre cele două perechi de vîrtejuri este suficient de mare, putem considera în mod aproximativ că, într-o anumită vecinătate a fiecărei perechi de vîrtejuri, lucrurile se petrec ca și cum acestea ar fi izolate.

b) Mișcarea prin ajutaje generate cu ajutorul a două surse :

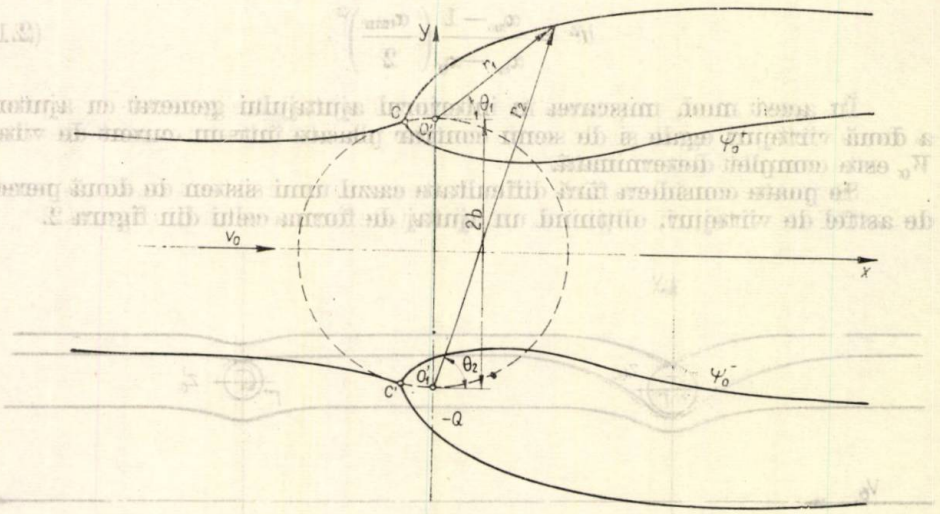


Fig. 3

Potențialul complex corespunzător unui sistem de două surse de intensitate egală și de semn contrar dispuse pe axa Oy simetric față de originea sistemului de referință la distanța $2b$ este

$$f(z) = V_0 z + q \ln(z^2 + b^2), \tag{2.18}$$

unde $q = Q/2\pi$, iar Q reprezintă intensitatea sursei.

Ca urmare, potențialul real și funcția de curent sînt

$$\varphi(x, y) = V_0 x + q \ln (r_1 r_2), \tag{2.19}$$

$$\psi(x, y) = V_0 y + q\,(\theta_1 + \theta_2), \tag{2.20}$$

iar proiecţiile vectorului-viteză

$$u = V_0 + 2q\frac{x}{r_1^2 r_2^2}(x^2 + y^2 + b^2), \tag{2.21}$$

$$v = 2q\frac{y}{r_1^2 r_2^2}(x^2 + y^2 - b^2), \tag{2.22}$$

unde r_i, θ_i, $i = 1, 2$ au semnificaţiile din figura 3, fiind definite de relaţiile (2.6).

În figura 3 am notat prin ψ_0^+, respectiv ψ_0^-, liniile de curent care separă mişcarea din vecinătatea celor două surse de restul mişcării. Ramurile apropiate de axa reală delimitează o regiune care poate fi asimilată cu un ajutaj simetric faţă de această axă (în cazul surselor de intensităţi neegale şi de semn contrar se obţin ajutaje nesimetrice). Determinarea acestei linii de curent necesită cunoaşterea punctelor de întoarcere c şi c', care sînt puncte de viteză nulă. Punînd deci $u = v = 0$ în (2.21) şi (2.22) şi rezolvînd în raport cu x şi y, obţinem

$$x_c = -\frac{q}{V_0}, \quad y_c = \sqrt{b^2 - \left(\frac{Q}{2\pi V_0}\right)^2}, \tag{2.23}$$

$$x_{c'} = -\frac{q}{V_0}, \quad y_{c'} = -\sqrt{b^2 - \left(\frac{Q}{2\pi V_0}\right)^2}.$$

Înlocuind aceste valori în (2.20), obţinem

$$C_1^{+,-} = \pm V_0 y_c + q\left(\operatorname{arctg}\frac{\pm y_c - b}{x_c} + \operatorname{arctg}\frac{\pm y_c + b}{x_c}\right) \tag{2.24}$$

şi astfel funcţiile ψ_1^+ şi ψ_1^- sînt determinate şi cu ajutorul acestora şi regiunea în care mişcarea prezintă caracteristicile mişcării prin ajutaje. Oricare dintre liniile de curent ψ_0^+ cuprinse între axa reală şi linia de curent ψ_1^+ poate fi aleasă ca perete al unui ajutaj simetric plan.

Din (2.21) şi (2.22) rezultă că

$$u(x, 0) = V_0 + 2q\frac{x}{x^2 + b^2}, \quad v(x, 0) = 0, \tag{2.25}$$

$$u(0, y) = V_0, \quad V(0, y) = \frac{2qy}{y^2 - b^2}, \tag{2.26}$$

iar

$$\begin{aligned} &\max u(x, 0) = V_0 + \frac{q}{b}, \quad \text{pentru } x = b, \\ &\min u(x, 0) = V_0 - \frac{q}{b}, \quad \text{pentru } x = -b, \end{aligned} \tag{2.27}$$

Din condiția ca $u(x, 0) \neq 0$ pentru orice x rezultă că trebuie să avem

$$b > \frac{q}{V_0}, \tag{2.28}$$

și, ca urmare,

$$\max u(x, 0) < 2V_0. \tag{2.29}$$

Pe de altă parte, din (2.22) rezultă că locul geometric al punctelor pentru care $v = 0$ este un cerc cu centrul în origine și de rază egală cu b. Din (2.27) rezultă că punctele pentru care avem $\max u(x, 0)$, respectiv $\min u(x, 0)$, se află pe acest cerc. De altfel, pe acest cerc (2.21) devine

$$u = V_0 \pm \frac{q}{\sqrt{b^2 - y^2}}, \tag{2.30}$$

semnul plus sau minus corespunzînd cu $x > 0$, respectiv, $x < 0$.

Pentru determinarea punctului de intersecție al liniei de curent Ψ_0^+ cu acest cerc, vom înlocui $x = \sqrt{b^2 - y^2}$ în expresia funcției de curent (2.20), scrisă sub forma

$$\Psi_0^+ = V_0 y + q \operatorname{arctg} \frac{2x\ y}{x^2 - y^2 + b^2}. \tag{2.31}$$

Efectuînd calculele necesare, obținem ecuația

$$\sin\left(\frac{\psi_0^+}{q} - \frac{V_0}{q} y\right) = \frac{y}{b}, \tag{2.32}$$

prin a cărei rezolvare obținem $y_{\min} = \frac{\sigma_{\min}}{2}$. Înlocuind în (2.30) y prin $y_{\min}$, obținem viteza maximă la peretele ajutajului:

$$u_{\max} = V_0 + \frac{q}{\sqrt{b^2 - y_{min}^2}}. \tag{2.33}$$

Fiind dat un ajutaj pentru care sînt cunoscute $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$, $\alpha_0 = U_0/V_0$, $\alpha_m = U_{\max}/V_0$, vom determina rapoartele ψ_0^+/V_0, $2q/V_0$ și distanța b utilizînd (2.20), (2.27) și (2.33):

$$\psi_0^+/V_0 = \frac{\sigma_{\max}}{2}, \tag{2.34}$$

$$q/V_0 = b(\alpha_0 - 1), \tag{2.35}$$

$$b^2 = \frac{(\alpha_m - 1)^2}{(\alpha_m - 1)^2 - (\alpha_0 - 1)^2}\left(\frac{\sigma_{\min}}{2}\right)^2.$$

Comparînd aceste ultime formule cu (2.13) — (2.15), se pot face aprecieri privind deosebirile dintre ajutajele generate prin metoda surselor și cea a vîrtejurilor.

3. MIȘCAREA FLUIDELOR IDEALE COMPRESIBILE PRIN AJUTAJE PLANE

În paragraful precedent am studiat mișcarea fluidelor incompresibile prin două tipuri de ajutaje, cu scopul de a pune în evidență aspectele caracteristice ale acestei mișcări cu ajutorul unor soluții exacte, pe de o parte, și

de a folosi aceste soluții în vederea studiului mișcării fluidelor ideale compresibile prin aceleași ajutaje, pe de altă parte.

Ținînd seama de dificultatea construirii soluției exacte a ecuației (1.5), ne propunem ca în cazul acestui paragraf să construim unele soluții aproximative, așa cum de altfel este abordată această problemă în literatura de specialitate. În acest scop ne propunem ca în continuare să construim astfel de soluții prin două procedee : primul procedeu constă în a construi o soluție aproximativă a ecuației (1.5) pentru un ajutaj plan ai cărui pereți sînt curbe cu tangenta continuă, iar al doilea (aplicabil în cazul în care se cunoaște soluția în cazul mișcării prin ajutaj a fluidului incompresibil) în a construi soluția ecuației de mișcare raportată la un sistem de conordonate curbilinii ortogonale, reprezentat din liniile de curent și liniile echipotențiale corespunzătoare mișcării fluidului ideal incompresibil prin ajutaj.

a) Neglijînd termenii care conțin pe v și v^2 în ecuația (1.5) și utilizînd (1.3), aceasta devine

$$\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\left[c^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left[V_{\max}^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{3.1}$$

Cum coeficientul derivatei a doua în raport cu y nu se anulează în nici un punct din interiorul ajutajului, explicitînd în raport cu $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, integrînd de două ori în raport cu y și folosind condiția $v(x, 0) = 0$ (valabilă în cazul ajutajului simetric), obținem ecuația integrală

$$\varphi(x, y)=\varphi(x,0)-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\int_0^y\left(\int_0^s\frac{c^2-\left(\frac{\partial\varphi(x,\,t)}{\partial x}\right)^2}{V_{\max}^2-\left(\frac{\partial\varphi(x,\,t)}{\partial x}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s. \tag{3.2}$$

Rezultă

$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\int_0^y\frac{c^2-\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right)^2}{V_{\max}^2-\left(\frac{\partial\varphi(x,\,t)}{\partial x}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

Folosind condiția la limită (1.6), obținem

$$-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\int_0^{g(x)}\frac{c^2-\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right)^2}{V_{\max}^2-\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}\cdot\mathrm{d}t=\frac{\partial\varphi(x,\,\tilde{y}(x))}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}\tilde{y}(x),}{\mathrm{d}x}, \tag{3.4}$$

reprezentînd o ecuație în care apar numai derivatele parțiale în raport cu x.

Vom determina o soluție formală a ecuației (3.2) prin metoda aproximațiilor succesive, șirul acestor aproximații fiind

$$\varphi_0(x, y) = f(x),$$

$$\varphi_1(x, y) = f_1(x) - \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \int_0^y \int_0^s \frac{c^2 - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2}{V_m^2 - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \cdot dt\, ds, \tag{3.5}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x, y) = f_n(x) - \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \int_0^y \int_0^s \frac{c^2 - \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x}\right)^2}{V_m^2 - \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x}\right)^3} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}}{\partial x^2} \cdot dt\, ds,$$

unde am notat

$$f_n(x) = \varphi_n(x, 0). \tag{3.6}$$

Aceste funcții urmează a fi determinate satisfăcînd condiția (3.4), adaptată procedeului de aproximare succesivă, adică condiția

$$-\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \int_0^{y(x)} \frac{c^2 - \left(\frac{\partial \varphi_n(x, t)}{\partial x}\right)^2}{V_m^2 - \left(\frac{\partial \varphi_n(x, t)}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_n(x, t)}{\partial x^2} \cdot dt = \frac{\partial \varphi_n(x, \tilde{y}(x))}{\partial x} \cdot \frac{d\tilde{y}}{dx}$$

$$(n = 0, 1, 2 \ldots), \tag{3.7}$$

care de fapt reprezintă o ecuație diferențială de ordinul doi pe care trebuie s-o satisfacă funcția $f_n(x)$; avem, prin urmare, de a face cu metoda obișnuită a aproximațiilor succesive, condiționată însă de satisfacerea unei ecuații diferențiale de ale cărei proprietăți trebuie să se țină de asemenea seama în studiul existenței și unicității soluției. Date fiind dificultățile de calcul, ne vom mărgini numai la calculul primei și celei de-a doua aproximații, lăsînd de o parte aspectele privind convergența șirului de aproximații și unicitatea soluției. Vom observa numai că, derivînd $\varphi_n(x, y)$ din (3.5) de două ori în raport cu y, obținem ecuația

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} + \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \cdot \frac{c^2 - \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x}\right)^2}{V_m^2 - \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}}{\partial x^2} = 0, \tag{3.1'}$$

corespondentă ecuației (3.1) pentru funcțiile $\varphi_n(x, y)$.

Condiţia (3.7) în cazul primei aproximaţii devine

$$-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}\cdot\frac{c^2-f_0'^2(x)}{V_{\max}-f_0'^2(x)}=\frac{1}{\tilde{y}(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}\tilde{y}(x)}{\mathrm{d}x}, \tag{3.8}$$

adică o ecuaţie diferenţială ordinară cu variabile separate. Efectuînd o cvadratură, obţinem

$$\left(\frac{f_0'(x)}{f_0'(x_0)}\right)\cdot\left(\frac{V_m^2-f_0'^2(x)}{V_m^2-f_0'^2(x_0)}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}=\frac{\tilde{y}(x_0)}{\tilde{y}(x)}. \tag{3.9}$$

Se observă că în cazul fluidelor incompresibile această ecuaţie se reduce la

$$f_0'(x)=\frac{f_0'(x_0)\cdot\tilde{y}(x_0)}{\tilde{y}(x)}, \tag{3.10}$$

regăsind ecuaţia de continuitate utilizată în cadrul teoriei mişcării unidimensionale prin tuburi. De altfel, (3.9) coincide cu ecuaţia de continuitate din mişcarea fluidelor compresibile prin tuburi. Într-adevăr, notînd cu $\sigma(x)$ secţiunea transversală a tubului în punctul de abscisă x, avem

$$\bar{\rho}(x)\cdot\bar{u}(x)\cdot\sigma(x)=\bar{\rho}(x_0)\cdot\bar{u}(x_0)\cdot\sigma(x_0)=Q, \tag{3.11}$$

unde $\bar{\rho}$, $\bar{u}$ reprezintă densitatea şi viteza medie, iar Q debitul.

Ţinînd seama de relaţia

$$\rho(x)=\rho_0\left(1-\frac{\bar{u}^2(x)}{V_m^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}, \tag{3.12}$$

unde ρ_0 reprezintă densitatea în condiţii de repaus, (3.11) devine

$$\frac{\bar{u}(x)}{V_m}\left(1-\frac{\bar{u}^2(x)}{V_m^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}=\frac{Q}{\rho_0\,\sigma(x)\,V_m}. \tag{3.13}$$

Notînd

$$\nu=\frac{\bar{u}(x)}{V_m},\quad k(\nu)=\left(\frac{Q}{\rho_0\,\sigma\,V_m}\right)^{\varkappa-1}, \tag{3.14}$$

(3.13) devine

$$\nu^{\varkappa-1}-\nu^{\varkappa+1}=k(\nu). \tag{3.15}$$

Prin calcul rezultă că mărimea $k(\nu)$ prezintă un maxim pentru $\nu=\nu_{cr}=\frac{c}{V_m}$ şi anume

$$k(\nu_{cr})=\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2}}\cdot\frac{2}{\varkappa+1} \tag{3.16}$$

Observînd graficul funcției $k(\nu)$ (fig. 4).

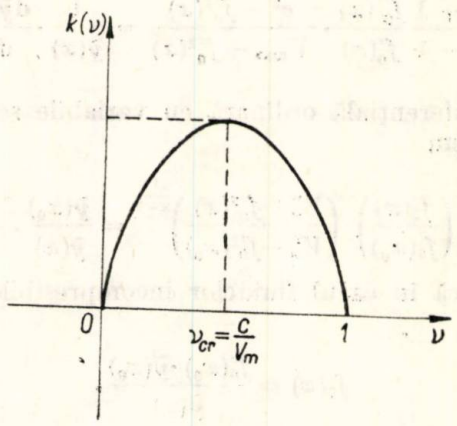


Fig. 4

rezultă că pentru a aproxima funcția $k(\nu)$ în mod convenabil în vecinătatea lui ν_{cr}, dezvoltînd în serie Taylor și reținînd primii doi termeni,

$$k_1(\nu) = k(\nu_{cr}) + \frac{1}{2} k''(\nu_{cr})(\nu - \nu_{cr})^2, \tag{3.17}$$

unde

$$k''(\nu_{cr}) = -2(\varkappa + 1)\left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2}}, \tag{3.18}$$

$k'(\nu_{cr})$ fiind, evident, egal cu zero. Rezolvînd (3.17) în raport cu ν și ținînd seama de (3.14) și (3. 16), obținem

$$\nu = \nu_{cr} \pm \sqrt{\frac{2[k_1(\nu) - k(\nu_{cr})]}{k''(\nu_{cr})}} = \nu_{cr} \pm \frac{1}{\varkappa + 1}\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma(x)}\right)^{\varkappa-1}} \tag{3.19}$$

sau

$$u = c \pm \frac{1}{(\varkappa^2 - 1)^{1/2}}\sqrt{1 - (\sigma_{cr}/\sigma(x))^{\varkappa-1}}, \tag{3.19'}$$

semnul plus fiind valabil pentru $\nu > \nu_{cr}$ (regim supersonic), iar semnul minus pentru $\nu < \nu_{cr}$ (regim subsonic). Formula aproximativă (3.19) dă erori maxime pentru $\nu = 0$ și $\nu = 1$. Se poate însă aproxima funcția $k(\nu)$ în mod separat pe fiecare dintre intervale $[0, \nu_{cr}]$, respectiv $[\nu_{cr}, 1]$ prin polinoame $y_1(\nu)$, $y_2(\nu)$, dar astfel determinate încît

$$\begin{aligned} &k_2(0) = k(0), \quad k_2(\nu_{cr}) = k_3(\nu_{cr}) = k(\nu_{cr}), \\ &k_3(1) = k(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Obținem astfel formula

$$k_2(\nu) = k(\nu_{cr})\left(2\frac{\nu}{\nu_{cr}} - \frac{\nu^2}{\nu_{cr}^2}\right), \tag{3.21}$$

valabilă pentru intervalele $[0, \nu_{cr}]$, respectiv

$$k_3'(\nu) = k(\nu_{cr})\left(1 - \frac{(\nu - \nu_{cr})}{(1-\nu_{cr})^2}\right), \tag{3.22}$$

valabilă pentru intervalul $[\nu_{cr}, 1]$,

Rezolvîndu-le în raport cu ν, obținem formula

$$\nu = \nu_{cr}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{k_2(\nu)}{k(\nu_{cr})}}\right), \tag{3.23}$$

valabilă pentru regimul subsonic, respectiv

$$\nu = \nu_{cr} + (1 - \nu_{cr})\sqrt{1 - \frac{k_3(\nu)}{k(\nu_{cr})}}, \tag{3.24}$$

valabilă pentru regimul supersonic. În formulele obținute vom înlocui în mod aproximativ $k_1(\nu)$, $k_2(\nu)$ sau $k_3(\nu)$ prin $k(\nu)$, dat de (3.14), care, în cazul că debitul prin ajutaj este maxim, $Q = Q_{cr} = \rho_{cr} \cdot c \cdot \sigma_{cr}$, devine

$$k(\nu) = \frac{2}{\varkappa + 1}\left(\sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}} \cdot \frac{\sigma_{cr}}{\sigma(x)}\right)^{\varkappa - 1}. \tag{3.14'}$$

Folosind acum (3.16), rezultă

$$\frac{k(\nu)}{k(\nu_{cr})} = \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma(x)}\right)^{\varkappa - 1}$$

și deci, (3. 23) și (3.24), dacă ținem seama și de (3.14), devin

$$\overline{u}(x) = c\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma(x)}\right)^{\varkappa - 1}}\right), \text{ pentru } \overline{u} < c, \tag{3.25}$$

respectiv

$$\overline{u}(x) = c + (V_m - c)\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma(x)}\right)^{\varkappa - 1}}, \text{ pentru } \overline{u} > c. \tag{3.26}$$

După cum am arătat deja anterior, deoarece ecuația (3.9) coincide cu ecuația (3.13), rezultă

$$f_0'(x) = \overline{u}(x) \tag{3.27}$$

şi, prin urmare,

$$f_0(x) = \int_{x_0}^{x} \bar{u}(x)\, dx, \tag{3.28}$$

iar

$$\varphi_1(x, y) = f_1(x) - \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \cdot \frac{c^2 - \bar{u}^2(x)}{V_m^2 - \bar{u}^2(x)} \cdot \bar{u}''(x) \cdot \frac{y^2}{2}, \tag{3.29}$$

cu $\bar{u}(x)$ definit conform (3.25), respectiv (3.26) sau (3.19').

Cu aceasta prima aproximaţie e complet determinată. Pentru componentele vitezei în această aproximaţie avem

$$u_1(x, y) = f_1'(x) - \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}\left\{2 \frac{c^2 - V_m^2}{(V_m^2 - \bar{u}^2(x))^2} \bar{u}(x)\, \bar{u}'(x)\, \bar{u}''(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2 - \bar{u}(x)}{V_m^2 - \bar{u}(x)^2} \bar{u}'''(x) \right\} \frac{y^2}{2}, \tag{3.30}$$

$$v_1(x, y) = -\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \cdot \frac{c^2 - \bar{u}^2(x)}{V_m^2 - \bar{u}(x)^2} \cdot \bar{u}''(x)\, y, \tag{3.31}$$

expresii în care apare $\bar{u}(x)$ împreună cu derivatele sale $\bar{u}'(x)$, $\bar{u}''(x)$, $\bar{u}'''(x)$, care, la rîndul lor, ţinînd seama de (3.25) şi (3.26), sînt date de

$$\bar{u}'(x) = -\alpha \frac{(\sigma_{cr}/\sigma)^{\varkappa}\, \sigma'(x)}{\sqrt{1 - (\sigma_{cr}/\sigma(x))^{\varkappa - 1}}}, \tag{3.32}$$

$$u''(x) = \bar{u}'(x)\, f(x), \tag{3.33}$$

$$\bar{u}'''(x) = \bar{u}''(x)\, f(x) + \bar{u}'(x)\, f'(x) = \bar{u}'(x)\, [f^2(x) + f'(x)], \tag{3.34}$$

unde

$$f(x) = \frac{\sigma''(x)}{\sigma'(x)} - \frac{\sigma'(x)}{1 - \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma(x)}\right)^{\varkappa - 1}} \left[\frac{\varkappa}{\sigma} - \frac{\varkappa + 1}{2\sigma_{cr}} \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma(x)}\right)^{\varkappa - 1}\right], \tag{3.35}$$

$$\alpha = \frac{(\varkappa - 1)c}{2\sigma_{cr}}, \text{ pentru } \bar{u} < c, \tag{3.36}$$

$$\alpha = \frac{(\varkappa - 1)}{2\sigma_{cr}} (c - V_m), \text{ pentru } \bar{u} > c. \tag{3.37}$$

Notînd x_{cr} abscisa corespunzătoare secţiunii critice, iar $\sigma^{(i)}(x_{cr}) = \sigma_{cr}^{(i)}$ şi efectuînd cîteva operaţii de trecere la limită, obţinem relaţiile

$$\bar{u}'(x_{cr}) = \left(\frac{2\sigma_{cr}''}{(\varkappa - 1)\sigma_{cr}^{n-2}} \right)^{1/2}, \tag{3.38}$$

$$f(x_{cr}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sigma_{cr}'''}{\sigma_{cr}''}, \tag{3.39}$$

$$f'(x_{cr}) = \frac{7}{12} \left(\frac{\sigma_{cr}'''}{\sigma_{cr}''} \right)^2 + \frac{5}{12} \frac{\sigma_{cr}^{IV}}{\sigma_{cr}''} + \frac{3\varkappa - 20}{12} \cdot \frac{\sigma_{cr}''}{\sigma_{cr}}, \tag{3.40}$$

cu ajutorul cărora se calculează $\bar{u}''(x_{cr})$ şi $\bar{u}'''(x_{cr})$. Rezultatul obţinut ne permite să tragem concluzia că prima aproximaţie furnizează acelaşi rezultat ca şi teoria unidimensională a mişcării fluidelor compresibile prin ajutaje. Conform (3.30) şi (3.31), deducem chiar şi o distribuţie de viteză pe direcţia transversală mişcării în cadrul acestei prime etape a procedeului aproximativ, cu observaţia că în (3.30) intervine derivata funcţiei $f_1(x)$ care urmează a fi determinată în a doua etapă.

Scriind (3.7) pentru $n = 1$, obţinem ecuaţia diferenţială ordinară

$$-\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \int_0^{\bar{y}(x)} \frac{c^2 - \left[f_1'(x) + g_0'(x) \frac{t^2}{2} \right]^2}{V_m^2 - \left[f_1'(x) + g_0'(x) \frac{t^2}{2} \right]^2} \left[f_1''(x) + g_0'' \frac{t^2}{2} \right] dt = \left[f_1'(x) + g_0'(x) \frac{\bar{y}^2(x)}{2} \right] \frac{d\bar{y}(x)}{dx}, \tag{3.41}$$

unde $g_0(x)$ este o funcţie cunoscută de x, determinată în prima etapă, fiind dată conform cu (3.29) de expresia

$$g_0(x) = -\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \frac{c^2 - \bar{u}(x)}{V_m^2 - \bar{u}(x)} \cdot \bar{u}''(x). \tag{3.42}$$

Vom scrie această ecuaţie sub forma

$$f_1''(x) = F_1(x, f_1'(x)), \tag{3.43}$$

unde

$$F_1(x, f_1'(x)) = -$$

$$\left[f_1'(x) + g_0'(x)\frac{\bar{y}(x)^2}{2}\right]\frac{d\bar{y}}{dx} + \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}g_0''(x)\int_0^{\bar{y}(x)} \frac{c^2 - \left[f_1'(x) + g_0'(x)\frac{t^2}{2}\right]^2}{V_m^2 - \left[f_1'(x) + g_0'(x)\frac{t^2}{2}\right]^2}\cdot\frac{t}{2}dt$$

$$\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\int_0^{\bar{y}(x)} \frac{c^2 - \left[f_1'(x) + g_0'(x)\frac{t^2}{2}\right]^2}{V_m^2 - \left[f_1'(x) + g_0'(x)\frac{t^2}{2}\right]^2}dt \qquad (3.44)$$

care sugerează folosirea din nou a metodei aproximațiilor succesive pentru rezolvarea ei în măsura în care funcția $F_1(x_0, f_1'(x))$ este continuă în ambele argumente și lipschitziană în raport cu al doilea argument. În ipoteza că F_1 îndeplinește aceste condiții pe intervalul $[x_0, x]$, putem scrie

$$f_1'(x) = f_1'(x_0) + \int_{x_0}^{x} F(\alpha, f'(\alpha))\, d\alpha, \qquad (3.45)$$

unde $f_1'(x_0)$ trebuie aleasă ținînd seama de condițiile de intrare în ajutaj. Integrînd încă o dată, obținem $f_1(x)$.

Pentru determinarea în continuare a funcțiilor, se procedează ca mai sus, cu observația că dificultățile de calcul sporesc o dată cu creșterea lui n. În expresia funcției $f_n'(x)$ vor apărea constante de integrare de forma $f_k'(x_0)$ provenind de la aproximațiile precedente, determinarea lor urmînd a se face în funcție de distribuția vitezei axiale în secțiunea de intrare.

Este interesant de asemenea de determinat linia sonică, adică locul geometric al punctelor pentru care viteza locală este egală cu viteza locală c a sunetului în cadrul fiecărei aproximații. Limitîndu-ne la aproximația a doua, conform formulelor (3.30) și (3.31) împreună cu (3.42), rezultă că linia sonică este dată de ecuația

$$c^2 = u_1^2 + v_1^2 = \left[f_1'(x) + g_0'(x)\frac{y^2}{2}\right]^2 + g_0(x)^2\, y^2, \qquad (3.46)$$

de unde se poate extrage y ca funcție explicită de x.

Neglijînd pe v_1^2 față de u_1^2, rezultă

$$y^2 = \frac{2(c - f_1'(x))}{g_0'(x)}. \qquad (3.47)$$

Pentru o apreciere calitativă a rezultatului se poate înlocui $f_1'(x)$ prin $f_0'(x) = \bar{u}(x)$.

b) Al doilea procedeu pe care l-am menționat la începutul acestui paragraf se referă la construirea soluției ecuațiilor de mișcare raportate la un sistem de coordonate curbilinii ortogonale, reprezentat din liniile de curent și liniile echipotențiale corespunzătoare mișcării fluidului ideal incompresibil prin ajutajul plan considerat.

Fie

$$\xi^i = \xi^i(x^j),\ i = 1, 2\ (x^1 = x,\ x^2 = y), \tag{3.48}$$

o transformare de coordonate al cărei jacobian e presupus diferit de zero în tot domeniul reprezentat de interiorul unui ajutaj plan oarecare și având derivate parțiale de ordinul doi continue în același domeniu. Vom alege pe $\xi'(x, y)$ și $\xi^2(x, y)$ astfel încît acestea să coincidă cu funcția de potențial, respectiv de curent din mișcarea fluidului ideal incompresibil, abstracție făcînd de constante multiplicative convenabil alese. Deoarece ξ' și ξ^2 sînt funcții armonice conjugate, rezultă că ele formează un sistem de coordonate ortogonale izoterme, adică notînd

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j},\ \bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi^i},\ \bar{r}^j = \nabla \xi^j, \tag{3.49}$$

$$g_{ij} = \bar{r}_i \cdot \bar{r}_j,\ g^{kl} = \bar{r}^k \cdot \bar{r}^l, \tag{3.50}$$

rezultă

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi^1}\right)^2,\ g_{12} = 0, \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi^2}\right)^2, \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} g^{11} &= \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial y}\right)^2,\ g^{12} = 0, \\ g^{22} &= \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{g_{22}}, \end{aligned} \tag{3.52}$$

iar ca urmare a faptului că ξ^1 și ξ^2 sînt conjugate armonic avem

$$g^{11} = g^{22},\ g_{11} = g_{22}. \tag{3.53}$$

Efectuînd schimbarea variabilelor independente x, y, din ecuația (1.1), conform (3.48), obținem

$$(a^2 g^{ij} - \mu^i \mu^j)\, \nabla_j \mu_i = 0,\ i, j = 1, 2, \tag{3.54}$$

unde μ_i și μ^j sînt componentele ω și contravariante ale vectorului-viteză, iar ∇_j simbolul derivatei covariante

$$\nabla_j \mu_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial \xi^j} - \mu_s\, \Gamma^s_{ij}, \tag{3.55}$$

unde Γ^s_{ij} sînt simbolii lui Cristoffel de speţa a doua.

Ecuaţia (1.2) se scrie sub forma

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \mu_2}{\partial \xi^1} = 0, \tag{3.56}$$

care este satisfăcută identic dacă luăm

$$\mu_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}, \tag{3.57}$$

ceea ce face ca (3.54) să devină

$$(a^2 g^{ij} - \mu^i \mu^j)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \mu_s \Gamma^s_{ij}\right) = 0. \tag{3.58}$$

La rîndul său, ecuaţia (1.3) devine

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\varkappa - 1}{2} V^2 = a_0^2 - \frac{\varkappa - 1}{2} \mu^i \mu_i = \frac{\varkappa - 1}{2}(V_m^2 - \mu^i \mu_i). \tag{3.59}$$

Ecuaţia (3.58), care de fapt este ecuaţia de mişcare a fluidelor compresibile într-un sistem de coordonate curbilinii oarecare, valabilă şi pentru mişcarea tridimensională dacă indicii iau valorile 1, 2 şi 3, poate fi simplificată în cazul mişcării bidimensionale raportate la un sistem de coordonate ortogonale izoterme dacă ţinem seama de relaţiile (3.52) împreună cu formulele care definesc simbolurile lui Christoffel de speţa întîi şi a doua:

$$\Gamma_{t,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ti}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{tj}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^t}\right). \tag{3.60}$$

$$\Gamma^1_{ij} = g^{st}\ \Gamma_{t,ij} \tag{3.61}$$

Mai întîi, notînd

$$\alpha = g_{11} = g_{22}, \quad \beta = g^{11} = g^{22} = \frac{1}{\alpha}, \tag{3.62}$$

pe baza formulelor precedente obţinem

$$\begin{aligned} &\Gamma_{1.11} = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi^1}, \ \Gamma_{1.12} = \Gamma_{1.21} = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi^2}, \ \Gamma_{1.22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi^1}, \\ &\Gamma_{2.11} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial \xi^2}, \ \Gamma_{2.12} = \Gamma_{2.21} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial \xi^1}, \ \Gamma_{2.22} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \tag{3.63}$$

respectiv

$$\Gamma^s_{ij} = \beta\ \Gamma_{s,ij} = \frac{1}{\alpha}\Gamma_{s,ij}. \tag{3.64}$$

În virtutea acestor ultime relaţii şi ţinînd seama că

$$\mu^i = g^{ij}\,\mu_j = \beta\mu_i, \tag{3.65}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\xi^i} = -\frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\xi^i} \tag{3.66}$$

ecuaţia (3.58) şi relaţia (3.59) devin

$$(a^2-\beta\mu_1^2)\frac{\partial^2\varphi}{(\partial\xi^1)^2} - 2\beta\,\mu_1\mu_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + (a^2-\beta^2\mu_2^2)\frac{\partial^2\varphi}{(\partial\xi^2)^2} - \\ -\frac{(\mu_1^2+\mu_2^2)}{2}\left(\mu_1\frac{\partial\beta}{\partial\xi^1}+\mu_2\frac{\partial\beta}{\partial\xi^2}\right)=0, \tag{3.67}$$

respectiv

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\varkappa-1}{2}\beta(\mu_1^2+\mu_2^2) = \frac{\varkappa-1}{2}[V_{\max}^2 - \beta(\mu_1^2+\mu_2^2)]. \tag{3.68}$$

Urmează acum găsirea soluţiei ecuaţiei (3.67) în dreptunghiul $c_1 \leqslant \xi^1 \leqslant c_1'$, $c_2 \leqslant \xi^2 \leqslant -c_2$, care reprezintă imaginea unei regiuni din planul ajutajului delimitată de pereţii acestuia (care sînt linii de curent) şi două linii echipotenţiale alese în mod corespunzător (fig. 5).

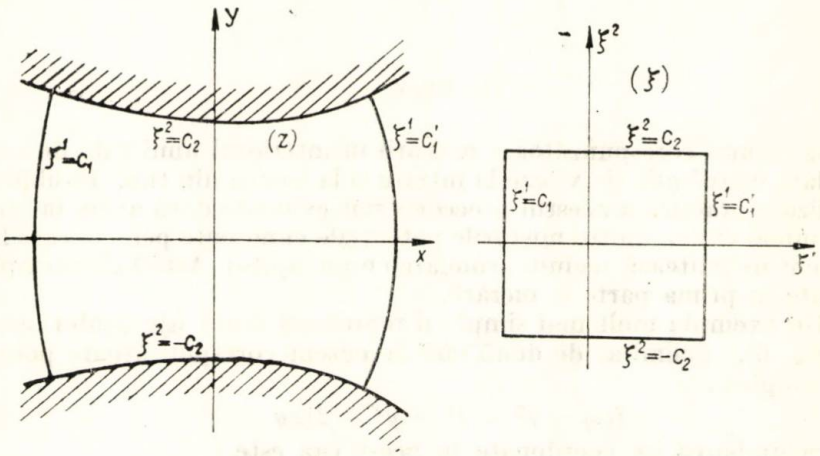


Fig. 5.

De fapt, transformarea utilizată este o transformare conformă, care reprezintă domeniul din planul (z), pe un dreptunghi în planul (ζ) şi transformă ecuaţia de mişcare (1.5) în ecuaţia (3.67), care, deşi este mai complicată decît prima, poate fi folosită în vederea obţinerii unor soluţii aproximative.

Observăm mai întîi că în cazul în care viteza sunetului a e mare în raport cu viteza particulelor, ecuația (3.67) devine

$$\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial \xi^1)^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial \xi^2)^2} = 0, \tag{3.69}$$

a cărei soluție pentru un domeniu de formă dreptunghiulară în planul $O\xi^1\xi^2$ se poate construi cu ajutorul metodei Fourier. În acest mod se de-

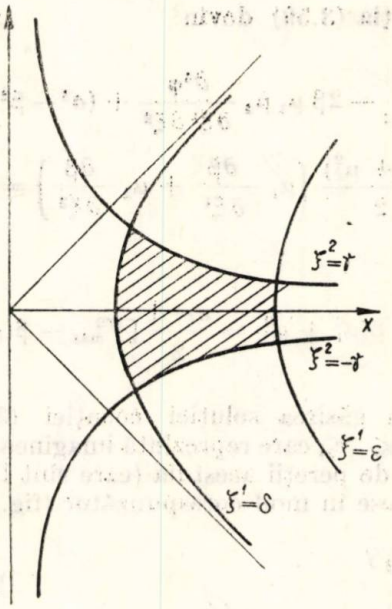


Fig. 6.

termină soluția corespunzătoare mișcării în interiorul unui tub de curent fiind dată distribuția de viteze la intrare și la ieșirea din tub. Posibilitățile de utilizare practică a acestui procedeu sînt evidente dacă avem în vedere chiar numai cîteva dintre mișcările potențiale cunoscute pentru care liniile de curent delimitează regiuni asimilate cu un ajutaj. Astfel de exemple au fost date în prima parte a lucrării.

Un exemplu mult mai simplu îl reprezintă cazul ajutajului convergent (fig. 6), delimitat de două linii de curent corespunzătoare potențialului complex :

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \tag{3.70}$$

Schimbarea de coordonate în acest caz este

$$\begin{aligned} \xi^1 &= x^2 - y^2, \\ \xi^2 &= 2xy, \end{aligned} \tag{3.71}$$

ar soluția ecuației (3.69), care se obține prin metoda Fournier, este

$$\varphi(\xi^1, \xi^2) = \sum_n^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{\gamma} \xi^1 b_n + \operatorname{sh} \frac{n\pi}{\gamma} \xi^1 \right) \cos \frac{n\pi}{\gamma} \xi^2, \tag{3.72}$$

coeficienţii, a_n şi b_n urmînd a se determina din condiţiile date la intrarea şi la ieşirea din tub pentru $\xi^1 = \delta$, respectiv $\xi^1 = \varepsilon$, referitoare la viteză $\mu_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi^1}$ în ipoteza că acestea prezintă simetrie faţă de axa Ox a ajutajului.

Revenind la ecuaţia (3.67), vom construi unele soluţii aproximative bazîndu-ne pe ipoteza că, în cazul mişcării prin ajutaje, liniile de curent corespunzătoare mişcării fluidului compresibil pot fi presupuse suficient de apropiate de cele corespunzătoare fluidului incompresibil. Se ştie că, în cazul vîrtejului şi al sursei, aceste linii coincid; în cazul ajutajului, numai pereţii acestuia şi axa sa de simetrie sînt linii de curent în ambele cazuri.

Adoptînd deci ipoteza că liniile de curent din mişcarea compresibilă nu diferă mult de cele din mişcarea incompresibilă, vom presupune $\mu_2 \approx 0$, astfel că ecuaţiile (3.67) şi (3.68) devin

$$(a^2 - \beta\mu_1^2)\frac{\partial^2\varphi}{(\partial\xi^1)^2} + a^2\frac{\partial^2\varphi}{(\partial\xi^2)^2} - \frac{\mu_1^3}{2}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\xi^1} = 0, \tag{3.73}$$

respectiv

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\varkappa - 1}{2}\beta\mu_1^2. \tag{3.74}$$

Această ecuaţie poate fi soluţionată în mod aproximativ utilizînd aceleaşi metode folosite în cazul ecuaţiei (3.1), cu avantajul că pentru $\xi^2 = \pm\gamma$ avem $\mu_2 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi^2} = 0$. Dată fiind această condiţie care trebuie satisfăcută la pereţii ajutajului, se întrevăd unele posibilităţi de folosire a unui procedeu aproximativ de tip Galerkin adaptat pentru ecuaţii cvasiliniare, căutînd succesiv soluţii de forma

$$\varphi(\xi^1, \xi^2) = \sum_{k=0}^{n} f_1(\xi^1)\cos\frac{k\pi\xi^2}{\gamma}. \tag{3.75}$$

Acest lucru poate face însă obiectul unei alte lucrări, deoarece se impun unele consideraţii de detaliu suplimentare.

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1 O. S. Rîjov, *Isledovanie transvukovth tecenii v soplah Lavalia-Vteislitelnoi Ţentr*, AN-SSSR, Moskva, 1965.
2. I. M. Hall şi P. E. Suton, *Transonic flow in ducts and nozzles; a survey-Symposium transonicum*, editor K. Oswatitsch, Berlin-Göttingen-Heidelberg Springer-Verlag, 1964.
3. K. G. Guderley, *Theorie schallnaher Strömmungen* Berlin-Götingen-Heidelberg Springer-Verlag, 1957.
4. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1957.
5. K. Oswatitsch, *Gas Dynamik*, Springer-Verlag, Viena, 1952.

ASUPRA ARIPILOR POLIGONALE PREZENTÎND ANTISIMETRIE DE INCIDENȚĂ ÎN REGIM SUPERSONIC

de DAN MATEESCU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Lucrarea tratează curgerea supersonică în jurul aripilor poligonale subțiri cu incidența distribuită antisimetric, aplicînd în acest scop o metodă de rezolvare stabilită de autor într-o lucrare anterioară [1], prin care problema este redusă la studiul unor mișcări conice și conice de ordin superior în jurul unor aripi unghiulare fictive. După determinarea vitezelor axiale de perturbație pe aripă (și deci a distribuției de presiuni), în lucrare se determină caracteristicile aerodinamice pentru o serie de aripi poligonale concrete (ca aripi în coadă de rîndunică, dublu trapezoidale, dreptunghiulare etc.), avînd incidența antisimetrică sau executînd o mișcare de rotație de ruliu.

NOTAȚII

U_∞ — viteza curentului neperturbat;
a_∞ — viteza sunetului în condițiile curentului neperturbat
$M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach, $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \frac{1}{\operatorname{tg}\mu}$;
$Ox_1\ x_2\ x_3$ — sistem triortogonal de coordonate avînd axa Ox_1 paralelă cu viteza curentului neperturbat U_∞, iar axa Ox_3 perpendiculară pe planul aripii;
$u,\ v,\ w$ — vitezele de perturbație după direcția axelor Ox_1, Ox_2, Ox_3.

1. CONSIDERAȚII GENERALE ASUPRA ARIPILOR POLIGOANELOR ANTISIMETRICE

Într-o lucrare anterioară [1] am tratat curgerea supersonică în jurul aripilor poligonale subțiri și a celor de grosime simetrică, a căror incidență și, respectiv, pantă era distribuită simetric față de axa Ox_1 de simetrie a aripii. În această lucrare ne propunem să tratăm problema aripilor poligonale subțiri prezentînd antisimetrie de incidență, problemă care intervine

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 1, 1970, p. 225–243

atît în cazul cînd aripa este torsionată antisimetric în scopul realizării unui moment de ruliu şi de giraţie, cît şi în cazul rotaţiei de ruliu a unei astfel de aripi situate într-un curent supersonic.

Să considerăm în acest sens o aripă poligonală ca cea din figura 1, plasată într-un curent supersonic de viteză U_∞, şi să considerăm că viteza verticală de perturbaţie, distribuită antisimetric faţă da axa Ox_1, ca de altfel şi incidenţa α a aripii, este dată în general sub forma unei superpoziţii de polinoame omogene de diferite ordine :

$$w = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} (\pm 1)^{k+1} \; w_{n-k-1,k} \; x_1^{n-k-1} \; x_2^k \left(\alpha = \frac{w}{U_\infty} \right), \tag{1}$$

unde semnul plus se referă la porţiunea de aripă avînd $x_2 > 0$, iar semnul minus la cea avînd $x_2 < 0$.

Ca şi în cazul oricărei alte aripi subţiri, avînd în vedere antisimetria mişcărilor de pe extradosul şi intradosul aripii, curgerea în jurul aripii poligonale considerate este caracterizată prin condiţia

$$u = 0 \tag{2}$$

pe tot restul planului Ox_1x_2 în afara aripii.

Avînd în vedere condiţiile la limită de mai sus şi procedînd într-un mod asemănător celui indicat în [1], vom putea considera în cadrul teo-

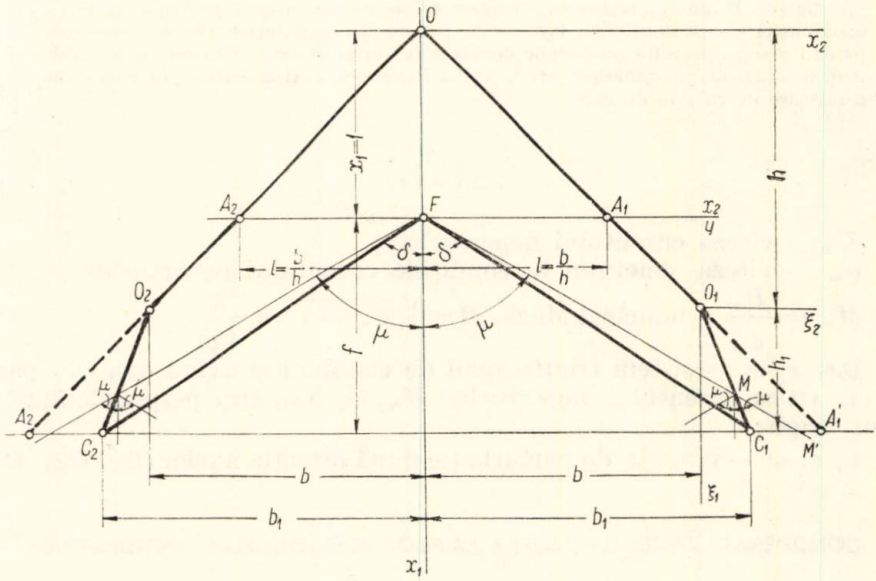


Fig. 1.

riei liniarizate că mişcarea în jurul aripii poligonale astfel definite poate fi obţinută prin superpoziţia următoarelor mişcări în jurul unor aripi triunghiulare subţiri fictive :

a) mişcarea din jurul aripii subţiri fictive $OA_1'A_2'$, definită prin viteza verticală dată de relaţia (1) şi caracterizată prin condiţia (2) pe tot restul

planului Ox_1x_2 în afara acestei aripi fictive. Pentru a le distinge, vitezele de perturbație corespunzătoare acestei mișcări vor fi notate prin u^O, v^O, w^O;

b) mișcarea din jurul aripii fictive $FC_1\ C_2$, presupusă a fi continuată în ambele părți printr-o placă fără incidență pînă în afara conului Mach generat de vîrful F, mișcare caracterizată prin condițiile

$$u^F = -u^O \tag{3}$$

pe porțiunea FC_1C_2 și

$$w^F = 0 \tag{4}$$

pe placa plană fără incidență din afara porțiunii FC_1C_2, unde am notat prin u^F și w^F viteza axială și, respectiv, verticală corespunzătoare acestei mișcări;

c) mișcarea din jurul aripii fictive $OA_1'\ C_1$, continuată către stînga pînă dincolo de conul Mach generat de vîrful O_1 printr-o placă plană fără incidență, mișcare definită prin condițiile

$$u^{\mathrm{I}} = -u^O \tag{5}$$

pe porțiunea $O_1\ A_1'\ C_1$,

$$w^{\mathrm{I}} = 0 \tag{6}$$

pe placa plană fără incidență din stînga aripii și

$$u^{\mathrm{I}} = 0 \tag{7}$$

pe porțiunea planului Ox_1x_2 din dreapta bordului O_1A_1' al acestei aripi fictive, unde am notat prin u^{I} și w^{I} viteza axială, și, respectiv, verticală din această mișcare;

d) mișcarea din jurul aripii fictive $O_2A_2'C_2$, avînd vitezele de perturbație u^{II}, v^{II}, w^{II}, care este antisimetrică în raport cu axa Ox_1 față de mișcarea în jurul aripii fictive $O_1A_1'C_1$, definită mai sus.

Ca și în cazul aripii poligonale simetrice [1], la mișcările de mai sus vor trebui adăugate mișcările corespunzătoare așa-numitelor „reflexii" ale conurilor Mach, care apar în cazul cînd unul dintre conurile Mach generate de vîrfurile O, O_1, O_2 sau F intersectează un bord subsonic al aripii. Astfel, de exemplu, în cazul cînd conul Mach din vîrful F intersectează bordul subsonic $O_1\ C_1$ în punctul M, în interiorul conului Mach cu vîrful în M apare o mișcare în jurul unei aripi fictive, caracterizată prin condițiile

$$u^M = -u^F \tag{8}$$

pe porțiunea $MM'C_1$ și

$$w^M = 0, \quad u^M = 0 \tag{9}$$

pe porțiunile planului Ox_1x_2 din stînga și, respectiv, din dreapta porțiunii $MM'C_1$, condiții care asigură în cele din urmă satisfacerea deplină a condiției (2).

La rîndul lui, conul Mach din M intersectează din nou bordul subsonic FC_1, dînd astfel naştere la „reflexii" succesive, ale căror efecte asupra aripii sînt însă din ce în ce mai mici, putînd fi astfel neglijate.

Determinarea vitezelor axiale de perturbaţie. După cum este uşor de văzut, prima mişcare în jurul aripii fictive OA_1', A_2', definită prin condiţiile (1) şi (2), reprezintă o superpoziţie de mişcări conice de diferite ordine, astfel încît viteza axială de perturbaţie poate fi determinată utilizînd metoda analogiei hidrodinamice elaborată de E. Carafoli [3], [4]. Utilizînd în acest sens planul complex x definit prin transformarea

$$x = \mathfrak{y} + i\mathfrak{z}; \quad \mathfrak{y} = \frac{y}{1 - B^2 z^2}, \quad \mathfrak{z} = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2}, \tag{10}$$

unde

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}, \tag{11}$$

viteza axială u^o poate fi scrisă sub forma

$$u^0 = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \quad u_{n-1}^0 = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \operatorname{Re} \mathcal{U}_{n-1}^0, \tag{12}$$

în care funcţiile $\mathcal{U}_{n-1}^0$, corespunzătoare mişcărilor conice de ordin n, au expresiile

$$\mathcal{U}_{n-1}^0 = \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{A_{n,2q+1}\, x^{2q+1}}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} Q_{n,2q+1}\, x^{2q+1} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{l^2}{x^2}} \tag{13}$$

în cazul bordurilor subsonice $l < \dfrac{1}{B}$ şi

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{n-1}^0 = \frac{2}{\pi} \sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}\, x^q \Bigg[& \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 - Bx)}{2B(l - x)}} - \\ & - (-1)^q \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 + Bx)}{2B(l + x)}} \Bigg] + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} Q_{n,2q+1}\, x^{2q+1} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{1}{B^2 x^2}} + \\ & + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-3}{2}\right)} D_{n,2q+1}\, x^{2q+1} \sqrt{1 - B^2 x^2} \end{aligned} \tag{14}$$

în cazul bordurilor supersonice $l > \dfrac{1}{B}$, unde am notat

$$l = \frac{b}{h}. \tag{15}$$

Constantele care apar în expresiile de mai sus se determină în modul indicat în [4]. Astfel, de exemplu, pentru mișcările conice de ordinul $n = 1$ și $n = 2$ se obțin următoarele expresii ale constantelor respective:

$$A_{11} = -\frac{2lw_{00}}{\pi}, \tag{16}$$

$$A_{21} = -\frac{l(1 - B^2l^2)}{\pi} \frac{2[2E(k) - B^2l^2 K(k)]w_{10} + \pi lw_{01}}{(2 - B^2l^2)E(k) - B^2l^2K(k)}, \tag{17}$$

$$Q_{21} = -w_{10}, \quad k = \sqrt{1 - B^2l^2} \tag{17'}$$

în cazul bordurilor subsonice, unde $K(k)$ și $E(k)$ sînt integrale eliptice complete de modul k, și

$$K_{10} = -\frac{w_{00}l}{\sqrt{B^2l^2 - 1}}, \tag{18}$$

$$K_{20} = -\frac{l}{(B^2l^2 - 1)^{3/2}}[(B^2l^2 - 2)w_{10} - lw_{01}], \tag{19}$$

$$K_{21} = -\frac{1}{(B^2l^2 - 1)^{3/2}}[w_{10} + B^2l^3w_{01}], \quad Q_{21} = -w_{10} \tag{19'}$$

în cazul bordurilor supersonice.

În ceea ce privește problema determinării mișcării definite la punctul b), aceasta, după cum rezultă din condițiile la limită (3) și (4), reprezintă o problemă de tip mixt, ceva mai dificil de determinat, deoarece viteza axială u^0 are pe porțiunea FC_1C_2 o variație mai complicată. Totuși, exprimînd viteza axială u^0 pe porțiunea FC_1C_2 sub forma unei sume de polinoame omogene de diferite ordine în funcție de coordonatele X_1 și X_2 definite sub forma

$$X_1 = x_1 - 1, \; X_2 = x_2, \tag{20}$$

problema se reduce la studiul unor probleme de tip mixt în cadrul teoriei mișcărilor conice și conice de ordin superior, care pot fi rezolvate urmînd calea indicată în [4]. Deoarece însă acest mod de rezolvare necesită dezvoltări lungi și calcule laborioase, acesta va forma obiectul unei alte lucrări, tratînd în mod special acest caz. În exemplele de calcul pe care le vom trata în cele ce urmează, vom considera numai cazul cînd bordurile de fugă FC_1 și FC_2 sînt supersonice, caz în care această mișcare nu are nici o influență asupra distribuției de viteze și de presiuni pe aripa poligonală considerată ($u^F = 0$).

Într-un mod asemănător, problema determinării mișcării definite la punctul c) reprezintă de asemenea o problemă de tip mixt foarte dificil de soluționat în cazul cînd bordul de atac OO_1 este subsonic, caz în care poate fi utilizată o metodă analogă cu cea indicată mai sus pentru mișcarea de la punctul b). Considerînd cazul cînd bordul de atac OO_1 este supersonic

(fig. 2), condiția (5) de pe porțiunea $O_1A_1'C_1$ poate fi scrisă mai simplu sub forma

$$u^{\mathrm{I}} = -\sum_{n=1}^{N}\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^{q} = -\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m-1} K_{m,k}^{\mathrm{I}}\, \xi_1^{m-k-1}\, \xi_2^{k}, \tag{21}$$

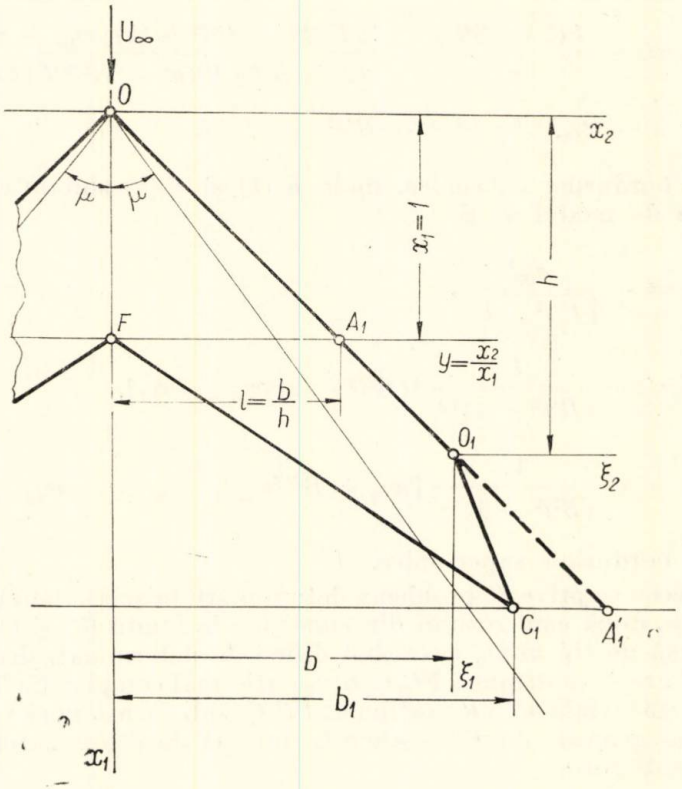


Fig. 2.

în care am introdus noile coordonate ξ_1 și ξ_2, definite sub forma

$$\xi_1 = x_1 - h, \quad \xi_2 = x_2 - b, \quad \left(\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{x_2 - b}{x_1 - h}\right), \tag{22}$$

și unde am notat

$$K_{m,k}^{\mathrm{I}} = \sum_{n=m}^{N}\sum_{q=k}^{n-1} C_{n-q-1}^{m-k-1}\, C_q^k\, h^{n-q-m+k}\, b^{q-k}\, K_{n,q}. \tag{23}$$

Ținînd seama de condiția (21), precum și de (6) și (7), este ușor de văzut că și în acest caz problema se reduce la studiul unor mișcări conice de diferite ordine în jurul unor aripi fictive, astfel încît vom putea

scrie analog cu (12)

$$u^{\mathrm{I}} = \sum_{n=1}^{N} \xi_1^{n-1}\, u_{n-1}^{\mathrm{I}} = \sum_{n=1}^{N} \xi_1^{n-1}\ \mathrm{Re}\ \mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{I}}. \tag{24}$$

Utilizînd acum planul complex ξ, definit printr-o transformare analogă cu (10), care pe aripă ($x_3 = 0$) ne conduce la relația

$$\xi = \eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \tag{25}$$

și aplicînd metoda analogiei hidrodinamice pentru rezolvarea problemei mixte care apare în cadrul mișcării conice de ordin n, vom putea deduce pentru funcția $\mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{I}}$ expresiile generale

$$\mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{I}} = -\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}^{1}\ \xi^q \operatorname{are\,cos}\sqrt{\frac{(1-B\xi)\,(1+Bl)}{2B\,(l-\xi)}} + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{n-1} G_{n,q}^{\mathrm{I}}\ \xi^q \operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{(1-B\xi)\,(1+Bl_1)}{2B\,(l_1-\xi)}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_{n,q}^{\mathrm{I}}\ \xi^q \sqrt{1-B^2\xi^2} \tag{26}$$

în cazul cînd bordul O_1C_1 este supersonic $\left(l_1 > \frac{1}{B}\right)$ și

$$\mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{I}} = -\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}^{\mathrm{I}}\ \xi^q \operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{(l_1-\xi)\,(1+Bl)}{(1+Bl_1)\,(l-\xi)}} + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} A_{n,q}^{\mathrm{I}}\ \xi^q \sqrt{\frac{1+B\xi}{B\,(l_1-\xi)}} \tag{27}$$

în cazul cînd bordul O_1C_1 este subsonic $\left(l_1 < \frac{1}{B}\right)$, unde am notat

$$l_1 = \frac{b_1 - b}{1+f-h}. \tag{28}$$

Un caz interesant pentru formele uzuale de aripi poligonale îl constituie cazul cînd $l_1 = 0$ pentru funcția $\mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{I}}$ are expresia

$$\mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{I}} = -\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}^{\mathrm{I}}\ \xi^q \operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{\xi\,(1+Bl)}{\xi-l}} + \sum_{q=1}^{n-1} A_{n,q}^{\mathrm{I}}\ \xi^q \sqrt{\frac{1+B\xi}{-B\xi}} \tag{29}$$

unde am introdus $A_{n,0}^{\mathrm{I}} = 0$, care rezultă dintr-o condiție analogă cu condiția lui Jukovski din incompresibil impusă pe bordul O_1C_1 pentru a evita unele incompatibilități de ordin fizic.

Constantele care apar în expresiile de mai sus se determină în modul indicat în [4]. Astfel, de exemplu, pentru mişcările conice de ordinul $n = 1$ şi $n = 2$ constantele care intervin în expresiile (26) şi (29) sînt date de relaţiile

$$K_{10}^{I} = K_{10} + hK_{20} + bK_{21}, \quad G_{10}^{I} = K_{10}^{I}\sqrt{\frac{B^2 l^2 - 1}{B^2 l_1^2 - 1}}, \tag{30}$$

$$K_{20}^{I} = K_{20}, \quad G_{20}^{I} = -\frac{l_1}{(B^2 l_1^2 - 1)^{3/2}}[(B^2 l_1^2 - 2)\, w_{10} - l_1 w_{01}], \tag{30'}$$

$$K_{21}^{I} = K_{21}, \quad G_{21}^{I} = -\frac{1}{(B^2 l_1^2 - 1)^{3/2}}[w_{10} + B^2 l^3 w_{01}], \tag{30''}$$

$$D_{20}^{I} = \left(\frac{l_1}{1 - B^2 l_1^2} - \frac{l}{1 - B^2 l^2}\right)\frac{w_{10}}{\pi} + \left(\frac{l_1^2}{1 - B^2 l_1^2} - \frac{l^2}{1 - B^2 l^2}\right)\frac{w_{01}}{\pi}, \tag{30'''}$$

$$A_{21}^{I} = -\frac{2}{\pi}(BK_{20}^{I} - K_{21}^{I})\sqrt{\frac{Bl}{Bl + 1}} \quad (A_{10}^{I} = A_{20}^{I} = 0), \tag{31}$$

unde constantele K_{10}, K_{20}, K_{21} sînt date de relaţiile (18), (19).

În ceea ce priveşte viteza axială u^{II}, avînd în vedere antisimetria mişcării în jurul aripii poligonale considerate, aceasta va fi antisimetrică faţă de u^{I} în raport cu axa Ox_1.

Cît priveşte determinarea mişcărilor corespunzătoare „reflexiilor" conurilor Mach, după cum se vede din condiţiile (8) şi (9) aceasta se reduce de asemenea la studiul unor probleme de tip mixt care se rezolvă în modul indicat pentru determinarea mişcării definite la punctul b). Deoarece însă efectul acestor „reflexii" ale conului Mach asupra distribuţiei de presiuni pe aripa poligonală nu este mare, afectînd suprafeţe destul de mici ale aripii, în cele ce urmează vom neglija acest efect.

Avînd în vedere cele stabilite mai sus, viteza axială totală de perturbaţie va fi dată pe aripa poligonală considerată de relaţia

$$u = u^{0} + u^{I} + u^{II}. \tag{32}$$

Cazul rotaţiei de ruliu. Să considerăm acum cazul unei aripi poligonale subţiri constituite dintr-o placă plană fără incidenţă, executînd o mişcare de rotaţie de ruliu caracterizată prin viteza unghiulară ω. În acest caz, condiţia (1) pe aripă, care defineşte şi mişcarea în jurul aripii fictive $OA_1' A_2'$, poate fi scrisă sub forma

$$w = \omega x_2, \tag{33}$$

din care este uşor de văzut că în acest caz mişcarea în jurul aripii fictive $OA_1' A_2$ este o mişcare conică de ordinul $n = 2$. Vom putea scrie în acest caz

$$u^{0} = x_1 u_1^{0} = x_1 \operatorname{Re} \mathcal{U}_1^{0}, \tag{34}$$

unde funcția $\mathcal{U}_1^0$ are expresiile

$$\mathcal{U}_1^0 = \frac{A_{21}x}{\sqrt{l^2 - x^2}} \tag{35}$$

în cazul bordurilor de atac subsonice și

$$\mathcal{U}_1^0 = \frac{2}{\pi}(K_{20} + K_{21}x) \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} -$$

$$-\frac{2}{\pi}(K_{20} - K_{21}x) \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}} \tag{36}$$

în cazul bordurilor de atac supersonice, unde

$$A_{21} = -\frac{1 - B^2l^2}{(2 - B^2l^2)E(k) - B^2l^2K(k)} l^2\omega \quad (k = \sqrt{1 - B^2l^2}), \tag{37}$$

$$K_{20} = \frac{l^2\omega}{(B^2l^2 - 1)^{3/2}}, \quad K_{21} = -\frac{B^2l^3\omega}{(B^2l^2 - 1)^{3/2}}, \tag{37'}$$

În mod asemănător, observînd că relația (21) poate fi scrisă pe porțiunea $OA_1'C_1$ sub forma

$$u^{\mathrm{I}} = -x_1(K_{20} + K_{21}y) = -K_{10}^{\mathrm{I}} - \xi_1(K_{20} + K_{21}\eta), \tag{38}$$

unde

$$K_{10}^{\mathrm{I}} = hK_{20} + bK_{21}, \tag{39}$$

este ușor de văzut că mișcarea în jurul aripii fictive $OA_1'C_1$ este de fapt suprapunerea a două mișcări conice de ordinul $n = 1$ și $n = 2$, putînd astfel scrie

$$u^{\mathrm{I}} = u_0^{\mathrm{I}} + \xi_1 u_1^{\mathrm{I}} = \mathrm{Re}\,(\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} + \xi_1 \mathcal{U}_1^{\mathrm{I}}). \tag{40}$$

Expresiile funcțiilor $\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}}$ și $\mathcal{U}_1^{\mathrm{I}}$ corespunzătoare problemelor mixte din cele două mișcări conice se pot deduce din cele stabilite mai sus (26), (27). Astfel, de exemplu, în cazul cînd bordul O_1C_1 este paralel cu curentul supersonic neperturbat ($l_1 = 0$), se obțin pentru $\mathcal{U}_0^I$ și $\mathcal{U}_1^I$ expresiile

$$\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} = -\frac{2K_{10}^I}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{\xi(1+Bl)}{\xi - l,}}, \tag{41}$$

$$\mathcal{U}_1^{\mathrm{I}} = -\frac{2}{\pi}(K_{20} + K_{21}\xi) \arccos \sqrt{\frac{\xi(1+Bl)}{\xi - l}} + A_{21}^* \sqrt{-\xi(1+B\xi)}, \tag{41'}$$

unde

$$A_{21}^* = \frac{2}{\pi}(BK_{20} - K_{21}) \sqrt{\frac{l}{Bl+1}}. \tag{42}$$

Caracteristicile aerodinamice. Pentru aripi cu antisimetrie de incidență, caracteristicile aerodinamice care interesează în mod deosebit sînt coeficienții momentului de ruliu și momentului de girație. Pornind de la expresia coeficientului de presiune în ipoteza micilor perturbații,

$$C_p = -2\frac{u}{U_\infty}, \tag{43}$$

și ținînd seama de antisimetria aripii, coeficienții momentelor de ruliu și de tangaj vor putea fi determinați cu ajutorul relațiilor

$$\mu_1 = \frac{4}{SHU_\infty}\int_S ux_2\,\mathrm{d}S, \tag{43'}$$

$$\mu_3 = -\frac{4}{SHU_\infty^2}\int_S uwx_2\,\mathrm{d}S, \tag{43''}$$

unde am notat prin S suprafața unei jumătăți de aripă și prin H_0 lungimea de referință, care poate fi coarda sau semianvergura aripii.

În mod asemănător, coeficientul rezistenței de undă se va determina din relația

$$C_d = -\frac{4}{SU_\infty^2}\int_S uw\,\mathrm{d}S. \tag{44}$$

În cele ce urmează vom determina expresiile coeficienților aerodinamici de mai sus pentru o serie de aripi poligonale de formă uzuală, prezentînd antisimetrie de incidență.

2. ARIPA ÎN COADĂ DE RÎNDUNICĂ

Să considerăm aripa în coadă de rîndunică din figura 3, avînd bordurile de fugă FC_1 și FC_2 supersonice. Ținînd seama de cele arătate mai sus, vom observa că în acest caz viteza axială de perturbație va fi dată de relația

$$u = u^o = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1}\,\mathcal{U}_{n-1}^o, \tag{45}$$

unde expresiile funcțiilor $\mathcal{U}_{n-1}^o$ sînt cele date în relațiile (13) și (14).

Ținînd seama de expresiile (1) și (45), precum și de forma aripii, și aplicînd relațiile de calcul (43) și (44), coeficienții de moment de ruliu

și de giratie și coeficientul rezistenței de undă pot fi scrișI sub forma

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{N} \mu_1^{o(n)}, \quad \mu_3 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \mu_{3m}^{o(n)}, \tag{46}$$

$$C_d = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} C_{dm}^{o(n)} \tag{46'}$$

unde coeficienții $\mu_1^{o(n)}$, $\mu_{3m}^{o(n)}$, $C_{dm}^{o(n)}$ se calculează cu ajutorul relațiilor

$$\mu_1^{o(n)} = \frac{4}{(n+2)\, Sh U_\infty} \int_0^l \frac{u_{n-1}^o \, y dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^{n+2}}, \tag{47}$$

$$\mu_{3m}^{o(n)} = -\frac{4}{(m+n+1)\, Sh U_\infty^2} \int_0^l \left(\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k}\, y^k \right) \frac{u_{n-1}^o \, y dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^{m+n+1}}, \tag{47'}$$

$$C_{dm}^{o(n)} = -\frac{4}{(m+n)\, S U_\infty^2} \int_0^l \left(\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k}\, y^k \right) \frac{u_{n-1}^o \, dy}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^{m+n}}, \tag{47''}$$

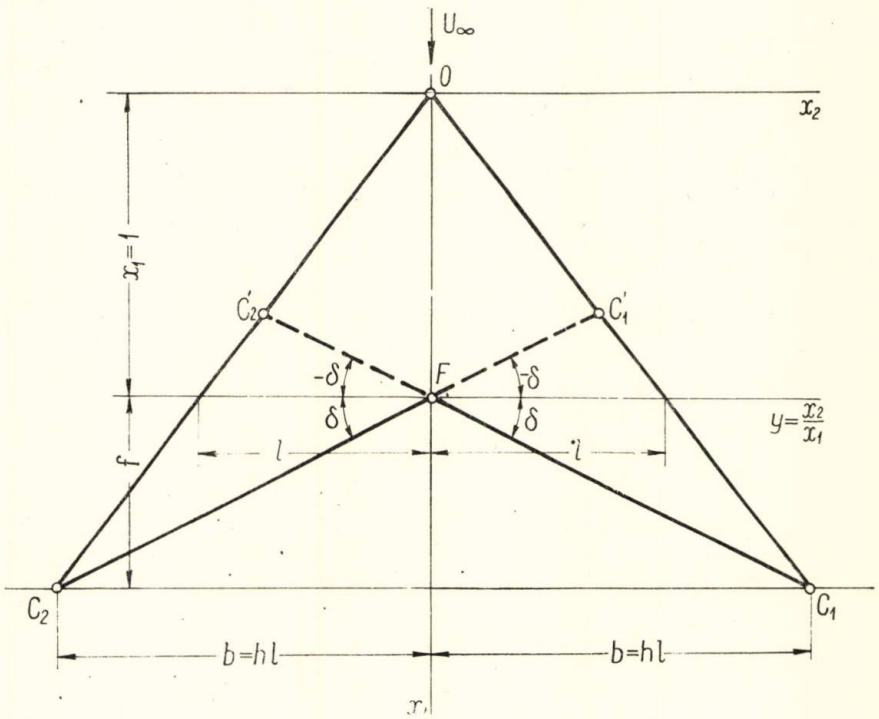


Fig. 3.

unde

$$S = \frac{l}{2\,(1 - l \operatorname{tg} \delta)}, \quad h = \frac{1}{1 - l \operatorname{tg} \delta}, \quad l = \frac{b}{h}, \quad h = 1 + f. \tag{48}$$

După efectuarea calculelor se vor obține pentru coeficienții aerodinamici de mai sus expresiile

$$\mu_1^{O(n)} = \frac{4}{(n+2)\,Sh\,U_\infty}\left[\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{n,2q+1}\,(\operatorname{ctg}\delta)^{2q+2}\sum_{r=0}^{2q+2}(-1)^r\frac{(2q+2)!}{r!(2q+2-r)!}I_{n+2-r}+\right. \tag{49}$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} Q_{n,2q+1}\,(\operatorname{ctg}\delta)^{2q+2}\sum_{r=0}^{2q+2}(-1)^r\frac{(2q+2)!}{r!\,(2q+2-r)!}\,\frac{l}{n+1-r}\sum_{p=0}^{n+1-r} I_p\right],$$

$$\mu_{3m}^{O(n)} = -\frac{4}{(m+n+1)\,Sh\,U_\infty^2}\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k}\times$$

$$\times\left[\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{n,2q+1}\,(\operatorname{ctg}\delta)^{k+2q+2}\sum_{r=0}^{k+2q+2}(-1)^r\frac{(k+2q+2)!}{r!\,(k+2q+2-r)!}\,I_{m+n+1-r}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} Q_{n,2q+1}\,(\operatorname{ctg}\delta)^{k+2q+2}\sum_{r=0}^{k+2q+2}(-1)^r\frac{(k+2q+2)!}{r!(k+2q+2-r)!}\,\frac{l}{m+n-r}\sum_{p=0}^{m+n-r} I_p\right], \tag{49'}$$

$$C_{dm}^{O(n)} = -\frac{4}{(m+n)\,SU_\infty^2}\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k}\times$$

$$\times\left[\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{n,2q+1}\,(\operatorname{ctg}\delta)^{k+2q+1}\sum_{r=0}^{k+2q+1}(-1)^r\frac{(k+2q+1)!}{r!\,(k+2q+1-r)!}\,I_{m+n-r}+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} Q_{n,2q+1}\,(\operatorname{ctg}\delta)^{k+2q+1}\sum_{r=0}^{k+2q+1}(-1)^r\frac{(k+2q+1)!}{r!\,(k+2q+1-r)!}\times$$

$$\left.\times\frac{l}{m+n-1-r}\sum_{p=0}^{m+n-1-r} I_p\right] \tag{49''}$$

în cazul bordurilor subsonice $\left(l<\frac{1}{B}\right)$ și

$$\mu_1^{O(n)} = \frac{4}{(n+2)\,Sh\,U_\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}(\operatorname{ctg}\delta)^{q+1}\sum_{r=0}^{q+1}(-1)^r\frac{(q+1)!}{r!\,(q+1-r)!}\,E_{n+2-r,q+1}+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} Q_{n,2q+1}\,(\operatorname{ctg}\delta)^{2q+2}\sum_{r=0}^{2q+2}(-1)^r\frac{(2q+2)!}{r!\,(2q+2-r)!}\,\frac{1}{n+1-r}\sum_{p=0}^{n+1-r} J_p+$$

$$+\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-3}{2}\right)} D_{n,2q+1}(\operatorname{ctg}\delta)^{2q+2}\sum_{r=0}^{2q+2}(-1)^r\frac{(2q+2)!}{r!\,(2q+2-r)!}\,\frac{1}{n+1-r}\times$$

$$\left.\times[-\operatorname{ctg}\delta+(J_{n+1-r}-J_{n-r})\,B^2\operatorname{ctg}^2\delta]\right\}, \tag{50}$$

$$\mu_{3m}^{0(n)} = -\frac{4}{(m+n+1)\,Sh\,U_\infty^2}\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} \times$$

$$\times\left[\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}(\operatorname{ctg}\delta)^{k+q+1}\sum_{r=0}^{k+q+1}(-1)^r\frac{(k+q+1)!}{r!(k+q+1-r)!}E_{m+n+1-r,q+1}+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} Q_{n,2q+1}(\operatorname{ctg}\delta)^{k+2q+2}\sum_{r=0}^{k+2q+2}(-1)^r\frac{(k+2q+2)!}{r!(k+2q+2-r)!}\frac{1}{m+n-r}\sum_{p=0}^{m+n-r}J_p+$$

$$+\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-3}{2}\right)} D_{n,2q+1}(\operatorname{ctg}\delta)^{k+2q+2}\sum_{r=0}^{k+2q+2}(-1)^r\frac{(k+2q+2)!}{r!(k+2q+2-r)!}\times$$

$$\left.\times\frac{1}{m+n-r}\left[-\operatorname{ctg}\delta+(J_{m+n-r}-J_{m+n-1-r})\,B^2\operatorname{ctg}^2\delta\right]\right\}, \qquad (50')$$

$$C_{dm}^{0(n)} = -\frac{4}{(m+n)\,SU_\infty^2}\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} \times$$

$$\times\left\{\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}(\operatorname{ctg}\delta)^{k+q}\sum_{r=0}^{k+q}(-1)^r\frac{(k+q)!}{r!(k+q-r)!}E_{m+n-r,q+1}+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} Q_{n,2q+1}(\operatorname{ctg}\delta)^{k+2q+1}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{k+2q+1}(-1)^r\frac{(k+2q+1)!}{r!(k+2q+1-r)!}\frac{1}{m+n-1-r}\sum_{p=0}^{m+n-1-r}J_p+$$

$$+\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-3}{2}\right)} D_{n,2q+1}(\operatorname{ctg}\delta)^{k+2q+1}\sum_{r=0}^{k+2q+1}(-1)^r\frac{(k+2q+1)!}{r!(k+2q+1-r)!}\times$$

$$\left.\times\frac{1}{m+n-1-r}\left[-\operatorname{ctg}\delta+(J_{m+n-1-r}-J_{m+n-2-r})\,B^2\operatorname{ctg}^2\delta\right]\right\} \qquad (50'')$$

în cazul bordurilor supersonice $\left(l>\frac{1}{B}\right)$, în care I_p, $E_{t,q+1}$ și J_p au expresiile date în anexa de calcul.

REMARCĂ. Toate expresiile de mai sus sînt valabile și în cazul aripii rombice $OC_1'FC_2'$ (fig. 3), pentru care δ trebuie înlocuit prin $-\delta$.

3. ARIPA DUBLU TRAPEZOIDALĂ

Să considerăm acum ca exemplu de calcul aripa dublu trapezoidală cu bordurile de atac și de fugă supersonice (fig. 4), constituită din două plăci plane bracate antisimetric, pentru care viteza verticală este dată

de relaţia

$$w = \pm w_0 = \mp \alpha_0 U_\infty, \tag{51}$$

unde semnul plus se referă la porţiunea de aripă avînd $x_2 > 0$, iar semnul minus la cea avînd $x_2 < 0$.

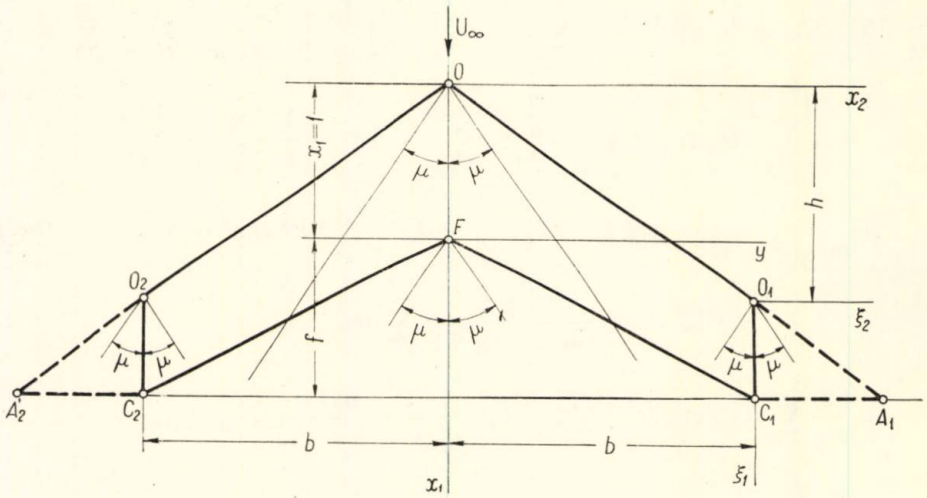


Fig. 4.

În acest caz, viteza axială de perturbaţie va fi dată de relaţia

$$u = u^o + u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}}, \tag{52}$$

în care

$$u^o = \mathrm{Re}\,\mathcal{U}_0^o = \mathrm{Re}\,\frac{2K_{10}}{\pi}\left[\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} - \right.$$

$$\left. - \arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}}\right], \tag{53}$$

$$u^{\mathrm{I}} = \mathrm{Re}\,\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} = -\,\mathrm{Re}\,\frac{2K_{10}}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{\xi(1+Bl)}{\xi - l}}, \tag{53'}$$

unde

$$K_{10} = -\frac{w_0 l}{\sqrt{B^2l^2-1}} = \frac{\alpha_0 U_\infty l}{\sqrt{B^2l^2-1}}. \tag{54}$$

În ceea ce priveşte viteza axială u^{II}, aceasta se poate deduce cu uşurinţă din u^{I}, datorită antisimetriei mişcării faţă de axa Ox_1.

Ţinînd seama de relaţia (52) şi avînd în vedere antisimetria mişcării faţă de axa Ox_1, coeficienţii aerodinamici vor fi daţi în acest caz de

relațiile

$$\mu_1 = \mu_1^o + \mu_1^I, \quad \mu_3 = -\frac{w_0}{U_\infty}\mu_1 = \alpha_0(\mu_1^o + \mu_1^I), \tag{55}$$

$$C_a = C_a^o + C_a^I, \tag{55'}$$

în care coeficienții aerodinamici corespunzători celor două mișcări conice vor avea expresiile

$$\mu_1^o = \frac{8K_{10}}{3\pi SHU_\infty}[L(E_3^o - E_2^o) + b^3F_2^o], \tag{56}$$

$$C_a^o = -\frac{4w_0K_{10}}{\pi SU_\infty^2}[E_2^o + b^2F_2^o], \tag{56'}$$

$$\mu_1^1 = -\frac{4h_1^2K_{10}}{\pi SHU_\infty}\left[\frac{2}{3}h_1LE_3^I + \left(b - \frac{2}{3}h_1L\right)E_2^I\right], \tag{56''}$$

$$C_a^I = \frac{4h_1^2w_0K_{10}}{\pi SU_\infty^2}E_2^I, \tag{56''}$$

unde am notat prin E_i^o, F_2^o și E_i^I expresiile date în anexa de calcul și unde

$$S = \frac{(2+f-h)b}{2}, \quad h_1 = 1+f-h, \quad L = \frac{b}{f} = \frac{h}{f}l. \tag{57}$$

4. ARIPA TRAPEZOIDALĂ

Să considerăm aripa trapezoidală din figura 5, constituită de asemenea din două plăci plane bracate antisimetric, pentru care viteza verticală este dată de relația (51).

Vom observa că și în acest caz viteza axială de perturbație este dată de relația (52), în care însă vitezele u^o și u^I se deduc din relațiile (53) și (26) sau (27), făcînd pe l să tindă către infinit ($l \to \infty$). Se va

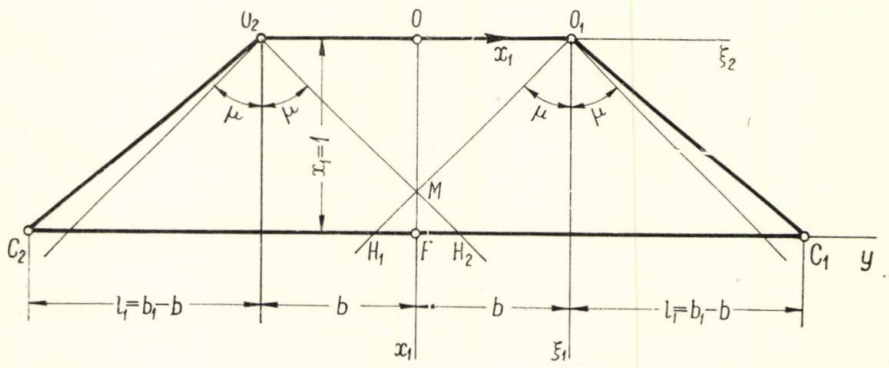


Fig. 5.

obține astfel pentru u^o expresia

$$u^o = -\frac{w_0}{B} \quad (w_0 = -\alpha_0 U_\infty), \tag{58}$$

iar pentru u^{I} expresiile

$$u^{\mathrm{I}} = \frac{2w_0}{\pi B} \operatorname{Re}\left[\arccos \sqrt{\frac{1-B\xi}{2}} - G \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-B\xi)}{2B(l_1-\xi)}}\right] \tag{59}$$

în cazul bordului O_1C_1 supersonic $\left(l_1 > \frac{1}{B}\right)$ și

$$u^{\mathrm{I}} = \frac{2w_0}{\pi B} \operatorname{Re}\left[\arccos \sqrt{\frac{B(l_1-\xi)}{1+Bl_1}} - A \sqrt{\frac{1+B\xi}{B(l_1-\xi)}}\right] \tag{60}$$

în cazul bordului O_1C_1 subsonic $\left(l_1 < \frac{1}{B}\right)$, unde

$$G = \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2l_1^2-1}}, \quad A = \frac{Bl_1}{Bl_1+1}, \quad l_1 = b_1 - b, \quad [\xi]_{\text{aripă}} = \eta = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{x_2-b}{x_1}. \tag{61}$$

Coeficienții aerodinamici vor fi dați și în acest caz de relațiile (55), în care însă μ_1^o și C_d^o vor avea acum expresiile

$$C_d^o = \frac{4w_0^2}{BU_\infty^2} = \frac{4\alpha_0^2}{B}, \tag{62}$$

$$\mu_1 = \frac{4\alpha_0}{BSH}\left(b^2 + bl_1 + \frac{l_1^2}{3}\right), \quad \left(S = b + \frac{l_1}{2}, \quad H = 1\right), \tag{62'}$$

iar μ_1^{I} și C_d^{I} au expresiile

$$C_d^{\mathrm{I}} = 0,$$

$$\mu_1^{\mathrm{I}} = -\frac{2B^2l_1^2+1}{3B^2SH}\frac{\alpha_0}{B} \tag{63}$$

în cazul bordului O_1C_1 supersonic $\left(l_1 > \frac{1}{B}\right)$ și (63')

$$C_d^{\mathrm{I}} = -\frac{\alpha_0^2}{B^2S}(1 - Bl_1) \tag{64}$$

$$\mu_1^{\mathrm{I}} = \frac{\alpha_0}{12B^3SH}(3 + 2Bl_1 - 17\ B^2l_1^2) - \frac{b}{H\alpha_0} C_d^{\mathrm{I}} \tag{64'}$$

în cazul bordului O_1C_1 subsonic $\left(l_1 < \frac{1}{B}\right)$.

Observînd că, datorită antisimetriei, efectul conului Mach generat de vîrful O_2 asupra porțiunii MH_1F este egal ca valoare cu cel al conului Mach generat de vîrful O_1 asupra porțiunii MH_2F, expresiile stabilite mai sus pentru coeficienții aerodinamici sînt valabile și în cazul cînd conurile Mach din vîrfurile O_1 și O_2 se intersectează pe aripă $\left(b < \frac{1}{B} < 2b + b_1\right)$.

Vom observa de asemenea că, făcînd $l_1 = 0$ în aceste ultime relații și în (60), se poate deduce cu ușurință soluția problemei pentru cazul aripii dreptunghiulare constituită din două plăci plane bracate antisimetric.

5. ARIPA DREPTUNGHIULARĂ AVÎND O ROTAȚIE DE RULIU

Să considerăm acum cazul aripii dreptunghiulare plane din figura 6 avînd o mișcare de rotație de ruliu cu viteza unghiulară ω în jurul axei Ox_1, ceea ce corespunde unei viteze verticale dată de relația (33).

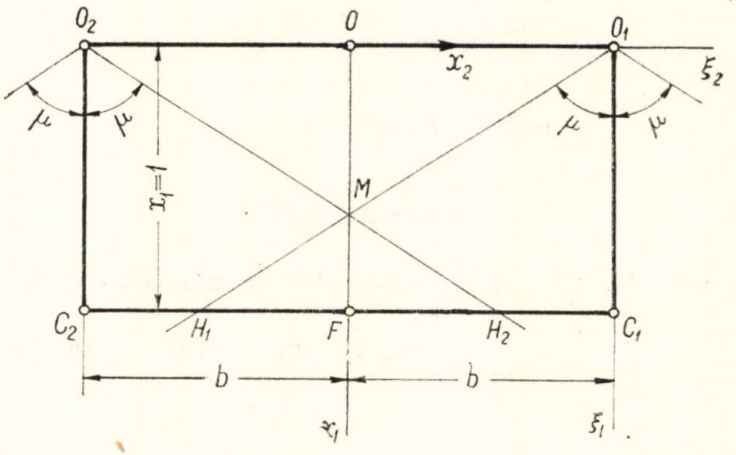


Fig. 6.

După cum am arătat mai sus, în cazul rotației de ruliu viteza axială de perturbație va fi dată de relația

$$u = x_1 u_1^o + u_0^I + \xi_1 u_1^I = \mathrm{Re}\,[x_1 \mathcal{U}_1^o + \mathcal{U}_0^I + x_1 \mathcal{U}_1^I], \tag{65}$$

în care însă expresiile funcțiilor $\mathcal{U}_1^o$, $\mathcal{U}_0^I$ și $\mathcal{U}_1^I$ se deduc din cele stabilite în relațiile (36) și (41), făcînd pe l să tindă către infinit ($l \to \infty$). Procedînd în acest mod, se obțin expresiile

$$x_1 u_1^o = x_1 \,\mathrm{Re}\,\mathcal{U}_1^o = -\frac{\omega}{B} x_2, \tag{66}$$

$$\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} = \frac{2b}{\pi}\frac{\omega}{B}\arccos\sqrt{-B\xi}, \tag{66'}$$

$$\mathcal{U}_1^{\mathrm{I}} = \frac{2}{\pi}\frac{\omega}{B}\left[\xi\arccos\sqrt{-B\xi} + A^*\sqrt{-\xi(1+B\xi)}\right], \tag{66''}$$

unde

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{B}},\quad [\xi]_{\text{aripă}} = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{x_2 - b}{x_1} \tag{67}$$

Pentru acest caz coeficientul momentului de ruliu care interesează în mod deosebit va fi dat de relaţia

$$\mu_1 = \mu_1^o + \mu_1^{\mathrm{I}} = \mu_1^o + \mu_1^{\mathrm{I}(1)} + \mu_1^{\mathrm{I}(2)} \tag{68}$$

în care

$$\mu_1^o = -\frac{4b^3}{3SHU_\infty}\frac{\omega}{B},\quad (S = b,\quad H = 1) \tag{69a}$$

$$\mu_1^{\mathrm{I}(1)} = \frac{b(4Bb-1)}{4B^2SHU_\infty}\frac{\omega}{B}, \tag{69b}$$

$$\mu_1^{\mathrm{I}(2)} = \frac{4Bb-1}{48B^3SHU_\infty}\frac{\omega}{B} \tag{69c}$$

ANEXA DE CALCUL

Expresiile I_p, $E_{t,q+1}$ şi J_p care intervin în relaţiile (49) şi (50).

$$I_p = \frac{1}{(p-1)(1-l^2\operatorname{tg}^2\delta)}\left[l\operatorname{tg}\delta + (2p-3)I_{p-1} - (p-2)\ I_{p-2}\right], \tag{70 a}$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1-l^2\operatorname{tg}^2\delta}}\left[\pi - \arccos(l\operatorname{tg}\delta)\right], \tag{70b}$$

$$E_{t,q+1} = \frac{\operatorname{ctg}\delta}{2\ (t-1)}\left\{\left[\frac{(1+l\operatorname{tg}\delta)^{t-1} + (-1)^{q+1}(1-l\operatorname{tg}\delta)^{t-1}}{(1-l^2\operatorname{tg}^2\delta)^{t-1}} - 1 - (-1)^{q+1}\right]\arccos\frac{1}{Bl} + \sqrt{B^2l^2-1}\sum_{p=1}^{t-1}\frac{(1-l\operatorname{tg}\delta)^{t-p} + (-1)^{q+1}(1+l\operatorname{tg}\delta)^{t-p}}{(1-l^2\operatorname{tg}^2\delta)^{t-p}}J_p\right\}, \tag{71}$$

unde

$$J_p = \frac{B^2}{B^2 - \operatorname{tg}^2\delta}\left[\frac{\operatorname{tg}\delta}{(p-1)B^2} + \frac{2p-3}{p-1}J_{p-1} - \frac{p-2}{p-1}J_{p-2}\right], \tag{72 a}$$

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{B^2 - \operatorname{tg}^2\delta}}\left[\pi - \arccos\frac{\operatorname{tg}\delta}{B}\right]. \tag{72 b}$$

Expresiile E_t^o, F_2^o *și* E_t^l $(t = 2,3)$ *care intervin în relațiile (56).*

$$E_2^o = \frac{2L^2 l}{L^2 - l^2}\left[\arccos\frac{1}{Bl} + \sqrt{\frac{B^2l^2 - 1}{B^2L^2 - 1}}\left(\pi - \arccos\frac{1}{BL}\right)\right] + \tag{73 a}$$

$$+ \frac{\pi L}{2}\left[1 + f - \frac{h}{h - f}\right],$$

$$E_3^o = \frac{L^4 l}{(L^2 - l^2)^2}\left[\arccos\frac{1}{Bl} + \left(2 + \frac{B^2(L^2 - l^2)}{B^2L^2 - 1}\right)\sqrt{\frac{B^2l^2 - 1}{B^2L^2 - 1}}\left(\pi - \arccos\frac{1}{BL}\right) + \right. \tag{73 b}$$

$$\left. + \frac{L^2 - l^2}{2L^2}\sqrt{\frac{B^2l^2 - 1}{B^2L^2 - 1}}\right] + \frac{\pi L}{4}\left[(1 + f)^2 - \left(\frac{h}{h - f}\right)^2\right],$$

$$F_2^o = \frac{\pi}{2}\frac{1 + f - h}{hl}, \tag{74}$$

$$E_2^l = \frac{\pi}{2}\frac{L^2}{L - l}\left[\sqrt{\frac{l(Bl + 1)}{L(BL + 1)}} - \frac{l}{L}\right], \tag{75 a}$$

$$E_3^l = \frac{\pi}{4}\frac{L^3}{(L - l)^2}\left[\frac{1}{2}\left(2 - \frac{l}{L} + \frac{B(L - l)}{1 + BL}\right)\sqrt{\frac{l(Bl + 1)}{L(BL + 1)}} - \frac{l}{L}\left(2 - \frac{l}{L}\right)\right]. \tag{75 b}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Dan Mateescu, *Supersonic Flow Around Polygonal Wings. Thin Wings and Wings of Symetrical Thickness*, Rev. Roum. Sci. Tehn. — Mécanique Appliquée, *3*, (1966).
2. — *Aerodynamic Characteristics of Polygonal Wings of Symetrical Thickness in Supersonic Flow*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Mécanique Appliquée, *4* (1966).
3. Elie Carafoli, *High Spees Aerodynamics*, București Edit. tehnică, 1956.
4. Elie Carafoli Dan Mateescu, Adriana Năstase, *Wing Theory in Supersonic Flow*, Pergamon-Press, 1969.

ASUPRA EFECTULUI DISPERSIEI TRANSVERSALE ÎN SCURGEREA FLUIDELOR MISCIBILE PRIN MEDII POROASE

de TEODOR OROVEANU
Institutul de petrol, Ploieşti

Lucrarea are ca scop studiul pătrunderii apei sărate într-un strat acvifer şi al dezlocuirii petrolului dintr-un strat productiv cu ajutorul unui fluid miscibil. Se urmăreşte rezolvarea problemei pentru un strat de grosime finită, orizontal şi limitat la bază şi acoperiş de strate impermeabile. Se presupune mai întîi că stratul are o lungime infinită şi apoi o lungime finită şi se caută soluţiile în cazul în care se ţine seama şi de efectul dispersiei transversale. Rezultatele găsite pot permite, în urma efectuării unor calcule numerice, să se aprecieze efectul dispersiei transversale, de multe ori neglijat în problemele de acest gen.

1. INTRODUCERE

Scurgerea simultană a fluidelor miscibile prin medii poroase se poate produce în situaţii destul de diferite, fie spontan, fie ca urmare a unui proces dirijat. În prima categorie se încadrează, de exemplu, penetraţia apelor sărate de mare în stratele acvifere cu care vin în contact, fie din cauze strict naturale, aşa cum este cazul în formarea lentilelor Ghyben-Herzberg, studiate din acest punct de vedere, pentru prima oară, de G. F. Carrier [8], fie ca urmare a exploatării stratelor acvifere. În a doua categorie, putem cita ca principale exemple dezlocuirea petrolului cu ajutorul solvenţilor, studiată teoretic şi experimental într-un mare număr de lucrări [18], operaţiile de transfer de masă din industria chimică ce se petrec în cadrul scurgerii fluidelor din paturi fixe compuse din particule solide, de asemenea studiate de numeroşi cercetători [18], şi depozitarea subterană a apelor reziduale [1]).

[1]) Vezi de exemplu, lucrarea [15], care conţine şi o bibliografie destul de bogată asupra acestei probleme.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29. NR. 1, 1970, P. 245–256

Studiile teoretice asupra uneia sau alteia dintre problemele amintite mai sus, plecînd de la concepții destul de diferite, au condus aproape fără excepție la o concluzie comună, și anume că ecuația

$$\frac{\partial C}{\partial t} + g^{ij}\,\overline{w}_j \frac{\partial C}{\partial \zeta^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} K_{jk}\, g^{kl} \frac{\partial C}{\partial \zeta^l}\right), \tag{1}$$

scrisă într-un sistem de coordonate curbilinii ζ^i, este aceea pe care o satisface concentrația C într-unul din cele două fluide miscibile în prezență. În această ecuație, $\overline{w}_j$ reprezintă componentele covariante ale vitezei medii reale, obținute împărțind componentele vitezei de filtrare cu porozitatea, iar K_{jk} componentele covariante ale tensorului de dispersie. De asemenea am notat cu g valoarea absolută a determinantului tensorului metric g_{ij} și cu g^{ij} componentele tensorului contravariant asociat tensorului metric.

Într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale x_i, ecuația (1) ia forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \overline{w}_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j}\right), \tag{2}$$

în scrierea ei fiind, utilizată, ca și mai sus, convenția indicelui de sumare. Trebuie de asemenea precizat că, pentru a se ajunge la ecuațiile precedente, ambele fluide sînt presupuse incompresibile.

Chiar dacă mediul poros este izotrop, fenomenul de dispersie are un caracter anizotrop, fapt care a fost pus în evidență de mai mulți cercetători [1], [2], [16], [17], [21], [22]. În cele ce urmează ne vom mărgini la studiul unor mișcări în care viteza medie reală are o singură componentă, scurgerea medie fiind deci paralelă cu una dintre axele de coordonate, de exemplu Ox_1 ($\overline{w}_1 = \overline{w}$, $\overline{w}_2 = \overline{w}_3 = 0$); mai mult încă, datorită geometriei mișcărilor studiate, viteza $\overline{w}$ este constantă. În aceste condiții se poate arăta că ecuația (2) devine

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \overline{w}\,\frac{\partial C}{\partial x_1} = K_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} + K_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}, \tag{3}$$

coeficientul de dispersie longitudinală K_1 și cel de dispersie transversală K_2 fiind constanți. Într-adevăr, atît din studiile teoretice menționate mai sus, cît și dintr-o serie de cercetări experimentale [3], [4], [6], [7], [11]—[13], [20], a rezultat că toți coeficienții de dispersie depind de viteză, iar în cazurile de care ne ocupăm aceasta din urmă are o valoare constantă. Putem de asemenea să includem și efectul difuziei moleculare, utilizînd unele formule propuse în acest sens în lucrările menționate.

Ecuația (3) este de tip parabolic, iar Scheidegger, care a efectuat o lucrare experimentală [24] pentru a verifica dacă această ecuație reprezintă corect fenomenul, considerînd însă numai dispersia longitudinală, a ajuns la concluzii afirmative. Pe de altă parte, același cercetător a dedus pentru studiul dispersiei în medii poroase o ecuație de tip hiperbolic [23] și, din considerente asemănătoare cu acelea pe care le-am expus în altă parte [19] referitor la unele probleme de natură diferită, s-ar părea că și fenomenul de dispersie este mai corect reprezentat de o astfel de ecuație,

în care intervine și derivata de ordinul doi în raport cu timpul a concentrației. Dificultățile legate de stabilirea unei expresii cantitativ exacte a coeficientului acestei derivate și faptul că din lucrarea citată mai sus [23] rezultă că acesta este mult mai mic decît unitatea, ne obligă să utilizăm ecuația (3), care, după cum am arătat, dă rezultate în bună concordanță cu datele experimentale.

În cea mai mare parte, studiile teoretice au luat în considerație numai efectul dispersiei longitudinale, care este într-adevăr mai important, în timp ce în unele lucrări s-a studiat numai efectul dispersiei transversale. Printre primele cercetări în care s-a ținut seama de ambii coeficienți de dispersie, putem aminti, în afară de [4], și pe aceea efectuată de Hiby și Schümmer [14], însă cu ipoteza că nu există o variație în timp a concentrației. Înlăturînd această presupunere, vom considera ecuația (3) sub forma ei completă și vom studia două cazuri particulare, care își pot găsi aplicații în anumite probleme practice.

Una dintre aceste probleme este pătrunderea apei sărate într-un mediu poros saturat cu apă dulce și se poate întîlni atunci cînd este vorba de scurgerea într-un strat acvifer care se găsește în contact într-un mod oarecare cu apa de mare. Atît timp cît nu există scurgere, numai difuzia moleculară este aceea care poate face să apară o oarecare concentrație în săruri în stratul acvifer. În cazul cînd acesta din urmă este pus în exploatare, apa sărată pătrunde efectiv în el și fenomenul de dispersie, mult mai activ decît difuzia moleculară, dă naștere la o distribuție a concentrației în săruri, care prezintă un caracter nestaționar.

O a doua problemă este aceea a dezlocuirii petrolului, care saturează un mediu poros, cu ajutorul unui fluid miscibil cu el. În acest caz, evident nu există un efect inițial al difuziei moleculare iar fenomenul de dispersie se petrece în aceleași condiții ca și în problema precedent formulată.

2. SCURGEREA ÎNTR-UN STRAT ORIZONTAL DE LUNGIME INFINITĂ

Vom considera mai întîi un caz particular destul de simplu, pentru a putea studia, fără prea mari complicații de ordin matematic, influența simultană a dispersiei longitudinale și a celei transversale asupra distribuției concentrației. Apariția dispersiei este legată, așa cum am menționat mai sus, de producerea scurgerii, pe care o vom presupune staționară.

Cazul particular ales este acela al unui strat permeabil orizontal, de lărgime destul de mare. În situația în care stratul este saturat inițial cu apă dulce, una dintre extremitățile lui se găsește în contact cu apa de mare, în timp ce extremitatea cealaltă se află la infinit. Stratul are o înălțime constantă h și este delimitat la bază și la acoperiș de strate impermeabile (fig. 1). Contactul inițial dintre apa dulce și cea sărată se găsește într-un plan vertical, supoziție simplificatoare pe care o găsim suficient de justificată. Într-adevăr, lungimea stratului fiind foarte mare, teoretic infinită, forma contactului inițial nu poate avea o influență determinantă asupra distribuției concentrației. Precizăm de asemenea că scurgerea este paralelă cu baza stratului, avînd viteza medie constantă

$\bar{w}$. Pentru a evita complicațiile datorită prezenței unei suprafețe libere, vom admite că scurgerea se produce sub presiune.

În ceea ce privește situația în care stratul este inițial saturat cu petrol, iar dezlocuirea se efectuează cu ajutorul unui fluid miscibil,

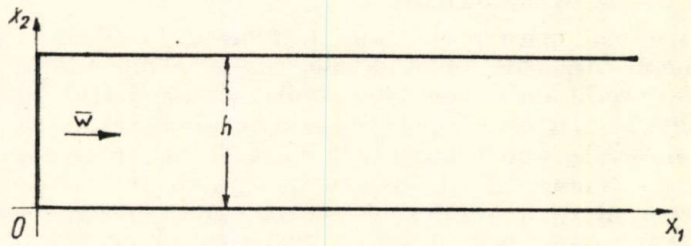


Fig. 1

formularea problemei este identică, singura deosebire datorîndu-se naturii celor două fluide.

Concentrația satisface deci ecuația (3), coordonata x_1 aflîndu-se în planul bazei stratului și avînd ca sens pozitiv pe acela al scurgerii, în timp ce coordonata x_2 are direcția verticală cu sensul pozitiv, coincizînd cu acela al verticalei ascendente (fig. 1).

Condiția inițială este

$$t = 0, \qquad C = 0, \tag{4}$$

în timp ce condițiile la limită au forma

$$x_1 = 0, \qquad C = C_0 \tag{5}$$

și

$$x_2 = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x_2} = 0; \quad x_2 = h, \quad \frac{\partial C}{\partial x_2} = 0, \tag{6}$$

C_0 fiind concentrația, presupusă constantă, în planul vertical de contact inițial ($x_1 = 0$).

Dacă introducem variabilele fără dimensiuni

$$\tau = \frac{\bar{w}t}{h}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{h}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{h}, \tag{7}$$

ecuația (3) devine

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\partial C}{\partial \xi_1} = \frac{1}{P_1}\frac{\partial^2 C}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{P_2}\frac{\partial^2 C}{\partial \xi_2^2}, \tag{8}$$

în care

$$P_1 = \frac{\bar{w}h}{K_1}, \qquad P_2 = \frac{\bar{w}h}{K_2} \tag{9}$$

reprezintă numărul lui Péclet de dispersie longitudinală, respectiv de dispersie transversală. De asemenea condițiile (4), (5) și (6) iau forma

$$\tau = 0, \quad C = 0, \tag{10}$$

respectiv

$$\xi_1 = 0, \qquad C = C_0 \tag{11}$$

și

$$\xi_2 = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \xi_2} = 0; \qquad \xi_2 = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial \xi_2} = 0. \tag{12}$$

Pentru a ușura calculele vom efectua schimbarea de funcție

$$C = C' \, e^{\frac{P_1}{2} \xi_1}, \tag{13}$$

care ne conduce la ecuația

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} = \frac{1}{P_1} \frac{\partial^2 C'}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{P_2} \frac{\partial^2 C'}{\partial \xi_2^2} - \frac{P_1}{4} C' \tag{14}$$

și trebuie să găsim soluția acesteia care satisface condiția inițială

$$\tau = 0, \quad C' = 0 \tag{15}$$

și condițiile la limită

$$\xi_1 = 0, \quad C' = C_0, \tag{16}$$

respectiv

$$\xi_2 = 0, \quad \frac{\partial C'}{\partial \xi_2} = 0; \qquad \xi_2 = 1, \quad \frac{\partial C'}{\partial \xi_2} = 0. \tag{17}$$

Aplicarea transformării lui Laplace

$$\overline{C}' = \int_0^\infty C' \, e^{-s\tau} \, d\tau \tag{18}$$

ne dă, ținînd seama de (15), ecuația

$$\frac{1}{P_1} \frac{\partial^2 \overline{C}'}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{P_2} \frac{\partial^2 \overline{C}'}{\partial \xi_2^2} - \left(s + \frac{P_1}{4} \right) \overline{C}' = 0, \tag{19}$$

în timp ce condiția (16) devine

$$\xi_1 = 0, \quad \overline{C}' = \frac{C_0}{s}. \tag{20}$$

Soluția ecuației (19) poate fi găsită cu ușurință cu ajutorul metodei separării variabilelor. Obținem astfel

$$\overline{C}' = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \, e^{-\xi_1 \sqrt{P_1\left(s + \frac{P_1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)}} \cos n\pi\xi_2, \tag{21}$$

expresie care satisface condițiile pentru $\xi_2 = 0$ și $\xi_2 = 1$, care păstrează aceeași formă după transformare.

Pentru a determina constantele A_n trebuie utilizată condiția (20), care poate fi scrisă sub forma

$$\xi_1 = 0, \quad \overline{C}' = \frac{2C_0}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi\xi_2. \tag{22}$$

Punînd $\xi_1 = 0$ în (21) și comparînd apoi rezultatul cu (22), găsim imediat

$$\overline{C}' = \frac{2C_0}{s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\xi_1 \sqrt{P_1\left(s + \frac{P_1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)}} \cos n\pi\xi_2. \tag{23}$$

După ce efectuăm revenirea la funcția originală [10], avem

$$C' = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-\xi_1 \sqrt{\frac{P_1^2}{4} + n^2\pi^2 \frac{P_1}{P_2}}} \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{P_1}{\tau}} - \right.\right.$$

$$\left. - \sqrt{\left(\frac{P_1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)\tau}\right] + e^{\xi_1 \sqrt{\frac{P_1^2}{4} + n^2\pi^2 \frac{P_1}{P_2}}} \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{P_1}{\tau}} + \right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\left(\frac{P_1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)\tau}\right]\right\} \cos n\pi\xi_2 \tag{24}$$

și este ușor de verificat că expresia astfel găsită a lui satisface și condiția (16) dacă ținem seama de relația

$$\operatorname{erfc}\left[\sqrt{\left(\frac{P_1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)\tau}\right] + \operatorname{erfc}\left[-\sqrt{\left(\frac{P_1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)\tau}\right] = 2. \tag{25}$$

Relația (13) ne dă apoi soluția căutată, care este

$$C = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{\frac{P_1}{2}\xi_1\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\,n^2\pi^2}{P_1 P_2}}\right)} \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{P_1}{\tau}} - \right.\right.$$

$$\left. - \sqrt{\left(\frac{P_1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)\tau}\right] + e^{\frac{P_1}{2}\xi_1\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\,n^2\pi^2}{P_1 P_2}}\right)} \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{P_1}{\tau}} + \right. \tag{26}$$

$$\left.\left. + \sqrt{\left(\frac{P_1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)\tau}\right]\right\} \cos n\pi\xi_2.$$

Dacă se ţine seama de dezvoltarea asimptotică a funcţiei erfc, se poate arăta fără nici o dificultate că la infinit avem $C = 0$, cum este de altfel şi firesc.

3. SCURGEREA ÎNTR-UN STRAT ORIZONTAL DE LUNGIME FINITĂ

Vom considera acum cazul în care stratul are dimensiuni finite atît în ceea ce priveşte lungimea, cît şi înălţimea. Dacă ne referim mai întîi la un strat acvifer presupus orizontal, acesta va avea drept secţiune paralelă cu direcţia scurgerii un dreptunghi cu baza l şi înălţimea h. Una dintre laturile mici ale acestui dreptunghi se găseşte în contact cu apa sărată, a cărei concentraţie în săruri este C_0, în timp ce cealaltă latură mică este aceea prin care apa iese din strat. Laturile mari reprezintă baza şi acoperişul stratului şi se află în contact cu strate impermeabile (fig. 2). În acest fel se poate admite că scurgerea, presupusă staţionară, are o viteză medie $\bar{w}$ paralelă cu baza stratului. În sfîrşit, şi de rîndul acesta vom considera o scurgere sub presiune, pentru a evita complicaţiile provocate de prezenţa unei suprafeţe libere.

Schema astfel prezentată corespunde scurgerii într-un strat orizontal a cărui lărgime este suficient de mare, exploatat printr-un şir de puţuri destul de apropiate unul de celălalt. În aceste condiţii, scurgerea reală corespunde cu o precizie suficient de bună cu aceea simplificată pe care am descris-o mai sus. Aproximaţiile cele mai discutabile sînt acelea care se referă la contactul dintre strat şi apa sărată, care nu se face de obicei după un plan vertical, şi la poziţia şirului de puţuri, care nu se găseşte în mod obligatoriu la cealaltă extremitate a stratului. Dar dacă lungimea l a stratului este destul de mare, forma geometrică a contactului cu apa sărată nu are o influenţă importantă asupra fenomenului studiat. De asemenea, atunci cînd şirul de puţuri se găseşte dincoace de cealaltă extremitate a stratului, scurgerea în vecinătatea puţurilor este mai complexă, dar credem că şi de data aceasta diferenţa nu este esenţială. Eliminarea acestor aproximaţii ar avea de altfel ca

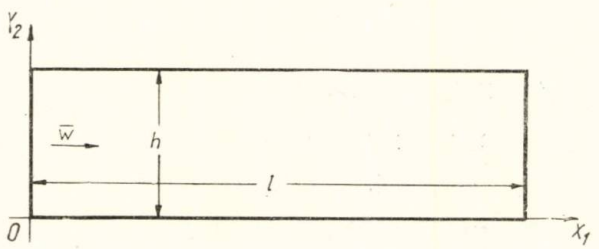


Fig. 2

efect apariţia unor dificultăţi de ordin matematic, prin care problema ar deveni şi mai complicată.

Dacă ne referim acum la un strat saturat iniţial cu petrol şi supus unei dezlocuiri cu ajutorul unui fluid miscibil, formularea de mai sus a problemei se păstrează cu anumite deosebiri. Astfel contactul cu fluidul

de dezlocuire se află inițial în dreptul unui șir de sonde de injecție, iar la cealaltă extremitate a stratului se găsește un șir de sonde de exploatare. Sondele din aceste două șiruri sînt presupuse suficient de apropiate pentru ca schema adoptată să reprezinte o aproximație acceptabilă.

Axele de coordonate fiind alese în același mod ca și în problema precedentă (fig. 2), ecuația (3) trebuie rezolvată cu condiția inițială

$$t = 0, \qquad C = C_i, \tag{27}$$

C_i fiind o constantă eventual nulă, și cu condițiile la limită

$$x_1 = 0, \quad \overline{w}\, C_0 = \overline{w}\, C - K_1 \frac{\partial C}{\partial x_1}; \; x_1 = l, \quad \frac{\partial C}{\partial x_1} = 0, \tag{28}$$

respectiv

$$x_2 = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \xi_2} = 0; \quad x_2 = h, \quad \frac{\partial C}{\partial \xi_2} = 0, \tag{29}$$

C_0 reprezentînd concentrația constantă din planul de contact inițial.

Condițiile la limită (28) sînt de tipul propus de Danckwerts [9] și par cele mai adecvate pentru un mediu poros de lungime finită.

Pentru ușurarea calculelor vom introduce funcția

$$C' = \frac{C - C_0}{C_i - C_0} \tag{30}$$

și variabilele fără dimensiuni

$$\tau = \frac{\overline{w}t}{l}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{l}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{h}, \tag{31}$$

ca și notația

$$\lambda = \frac{l}{h}. \tag{32}$$

Funcția C' satisface ecuația

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} + \frac{\partial C'}{\partial \xi_1} = \frac{1}{P_1} \frac{\partial^2 C'}{\partial \xi_1^2} + \frac{\lambda}{P_2} \frac{\partial^2 C'}{\partial \xi_2^2}, \tag{33}$$

în care P_1 și P_2 au semnificațiile cunoscute.

Condiția inițială este

$$\tau = 0, \quad C' = 1, \tag{34}$$

iar condițiile la limită iau forma

$$\xi_1 = 0, \quad C' - \frac{1}{P_1} \frac{\partial C'}{\partial \xi_1} = 0; \; \xi_1 = 1, \quad \frac{\partial C'}{\partial \xi_1} = 0, \tag{35}$$

respectiv

$$\xi_2 = 0, \quad \frac{\partial C'}{\partial \xi_2} = 0\,; \quad \xi_2 = 1, \quad \frac{\partial C'}{\partial \xi_2} = 0. \tag{36}$$

Procedînd ca Brenner [5], care s-a ocupat însă numai de dispersia longitudinală, vom pune

$$C' = f(\xi_1, \xi_2, \tau) e^{\frac{P_1}{4}(2\xi_1 - \tau)}, \tag{37}$$

funcţia $f(\xi_1, \xi_2, \tau)$ fiind deci soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{P_1}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \frac{\lambda}{P_2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2}, \tag{38}$$

cu condiţia iniţială

$$\tau = 0, \qquad f_0 = e^{-\frac{P_1}{2}\xi_1} \tag{39}$$

şi cu condiţiile la limită

$$\xi_1 = 0, \quad f - \frac{2}{P_1}\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = 0\,; \quad \xi_1 = 1, \quad f + \frac{2}{P_1}\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = 0, \tag{40}$$

respectiv

$$\xi_2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_2} = 0\,; \quad \xi_2 = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_2} = 0. \tag{41}$$

Dacă aplicăm ecuaţiei (38) cosinus-transformarea finită a lui Fourier,

$$\bar{f}_c = \int_0^1 f \cos n\pi\xi_2 \, d\xi_2, \tag{42}$$

găsim cu uşurinţă, ţinînd seama de condiţiile (41),

$$\frac{\partial \bar{f}_c}{\partial \tau} = \frac{1}{P_1}\frac{\partial^2 \bar{f}_c}{\partial \xi_1^2} - \lambda \frac{n^2\pi^2}{P_2}\bar{f}_c, \tag{43}$$

ecuaţie a cărei soluţie trebuie să satisfacă şi condiţiile (40), a căror formă nu se schimbă în urma transformării. Găsim astfel

$$f_c = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left[\frac{2\alpha_m}{P_1}\cos(\alpha_m \xi_1) + \sin(\alpha_m \xi_1)\right] e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{P_1} + \lambda\frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)\tau} \tag{44}$$

valorile proprii α_m rezultînd din ecuaţia

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{4P_1\alpha_m}{4\alpha_m^2 - P_1^2}. \tag{45}$$

Pentru determinarea constantelor A_m utilizăm condiția inițială (39), care se mai scrie

$$\tau = 0, \quad f_0 = 2e^{-\frac{P_1}{2}\xi_1} \sum_{q=0}^{\infty} \cos q\pi\xi_2 \tag{46}$$

și care devine, după aplicarea transformării (42),

$$\tau = 0, \quad \bar{f}_{0c} = e^{-\frac{P_1}{2}\xi_1}. \tag{47}$$

Se poate arăta cu ușurință că funcțiile $\frac{2\alpha_m}{P_1}\cos(\alpha_m \xi_1) + \sin(\alpha_m \xi_1)$ formează un sistem ortogonal în [0,1]. Este deci posibil să se dezvolte $\bar{f}_{0c}$ într-o serie de aceste funcții și să se identifice apoi coeficienții dezvoltării cu constantele A_m după ce punem $\tau = 0$ în (44). În acest mod găsim

$$A_m = \frac{\alpha_m P_1^2}{\left(\alpha_m^2 + \frac{P_1^2}{4}\right)\left(\alpha_m^2 + \frac{P_1^2}{4} + P_1\right)} \tag{48}$$

și, după introducerea în (44), obținem

$$\bar{f}_c = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m P_1^2}{\left(\alpha_m^2 + \frac{P_1^2}{4}\right)\left(\alpha_m^2 + \frac{P_1^2}{4} + P_1\right)} \left[\frac{2\alpha_m}{P_1}\cos(\alpha_m \xi_1) + \right.$$

$$\left. + \sin(\alpha_m \xi_1)\right] e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{P_1} + \lambda \frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)\tau}. \tag{49}$$

Teorema de inversiune cunoscută ne dă

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m P_1^2}{\left(\alpha_m^2 + \frac{P_1^2}{4}\right)\left(\alpha_m^2 + \frac{P_1^2}{4} + P_1\right)} [2\alpha_m \cos(\alpha_m \xi_1) +$$

$$+ P_1 \sin(\alpha_m \xi_1)]\, e^{-\frac{\alpha}{P_1}\tau} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m P_1}{\left(\alpha_m^2 + \frac{P_1^2}{4}\right)\left(\alpha_m^2 + \frac{P_1^2}{4} + P_1\right)} \times\right.$$

$$\left. \times [2\alpha_m \cos(\alpha_m \xi_1) + P_1 \sin(\alpha_m \xi_1)]\, e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{P_1} + \lambda \frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)\tau}\right\} \cos n\pi\xi_2, \tag{50}$$

iar după ce utilizăm relaţia (37) ajungem la rezultatul final, care este

$$C' = e^{\frac{P_1}{4}(2\xi_1-\tau)}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha_m P_1}{\left(\alpha_m^2+\frac{P_1^2}{4}\right)\left(\alpha_m^2+\frac{P_1^2}{4}+P_1\right)}[2\alpha_m\cos(\alpha_m\xi_1)+\right.$$

$$+P_1\sin(\alpha_m\xi_1)]\,e^{-\frac{\alpha_m^2}{P_1}\tau}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha_m P_1}{\left(\alpha_m^2+\frac{P_1^2}{4}\right)\left(\alpha_m^2+\frac{P_1^2}{4}+P_1\right)}\times\right.$$

$$\left.\left.+[2\alpha_m\cos(\alpha_m\xi_1)+P_1\sin(\alpha_m\xi_1)]\,e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{P_1}+\lambda\frac{n^2\pi^2}{P_2}\right)\tau}\right\}\cos n\pi\xi_2\right\}. \quad (51)$$

Este uşor de verificat că această expresie a lui C' satisface atît condiţia iniţială (34), cît şi condiţiile la limită (35) şi (36).

4. CONCLUZII

Soluţiile pe care le-am găsit permit să se calculeze distribuţia concentraţiei ţinînd seama şi de efectul dispersiei transversale. Calculele sînt destul de lungi faţă de cele necesare în soluţia binecunoscută, care nu face să intervină decît dispersia longitudinală. În cazul în care mediul poros este de lungime finită, soluţia se prezintă sub forma unei serii trigonometrice duble, ceea ce îngreuiază şi mai mult calculele. Pentru aprecierea cantitativă a efectului dispersiei transversale apare necesar să se obţină rezultate de calcul pentru mai multe valori ale numerelor P_1 şi P_2, precum şi ale parametrului λ.

Primită la redacţie la 25 august 1969

BIBLIOGRAFIE

1. J. Bear, *On the tensor form of dispersion in porous media*, Journal of Geophysical Research, **66**, *4* (1961).
2. J. Bear, I. Bachmat, *The general equations of hydrodynamic dispersion in homogeneous, isotrop, porous mediums*, Journal of Geophysical Research, **69**, *12* (1964).
3. R. J. Blackwell, J. R. Rayne, W. M. Terry, *Factors influencing the effeiciency of miscible displacement*, Transactions AIMF, **216** (1959).
4. R. J. Blackwell, *Laboratory studies of microscopic dispersion phenomena*, Transactions AIME, **225** (1962).
5. H. Brenner, *The diffusion model of longitudinal mixing in beds of finite length*, Chemical Engineering Sciences. Génie Chimique, **XVII**, *4* (1962).
6. W. E. Brigham, P. V. Reed, J. N. Dew, *Experiments on mixing by fluid flow in porous media*, SPE Journal, **1**, *1* (1961).
7. J. J. Carberry, R. H. Bretton, *Axial dispersion of mass in flow through fixed beds*, AIChE Journal, **4**, *3* (1958).
8. G. T. Carrier, *The mixing of ground water and sea water in permeable subsoils*, Journal of Fluid Mechanics, **4**, *5* (1958).

9. P. V. Danckwerts, *Continous flow systems. Distribution of residence times*, Chemical Engineering Science. Génie Chimique, **2**, *1*, (1953).
10. V. A. Ditkin, P. I. Kuznețov, *Spravocinik po operaționnomu iseisleniiu*, GITTL, Moscova, 1951, p. 158.
11. Earl A. Ebach, Robert R. White, *Mixing of fluids flowing through beds of packed solids*, AIChE Journal, **4**, 2 (1958).
12. D. R. F. Harleman, P. F. Mehlhorn, R. R. Rumer Jr., *Dispersion-permeability correlation in porous media*, Proceedings of the American Society of Civils Engineers, Journal of the Hydraulics Division, **89**, HY 2, 1 (1963).
13. D. R. F. Harleman, R. R. Rumer, *Longitudinal and lateral dispersion in an isotropic porous medium*, Journal of Fluid Mechanics, **16**, 3 (1963).
14. J. W. Hiby, P. Schümmer, *Zur Messung transversalen effektiven Diffusion in durchströmten Füllkörpersäulen*, Chemical Engineering Science. Génie Chimique, **XIII**, 2(1960).
15. John A. Hoopes, Donald R. F. Harleman, *Wastewater recharge and dispersion in porous media*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division, **93**, HY 5, (1967).
16. G. de Josselin de Jong, *Longitudinal and transversal diffusion in granular deposits*, Transactions of American Geophysical Union, **39**, 1 (1958).
17. V. N. Nikolaevski, *Konvektivnaia diffuziia v poristîh sredah*, Prikladnaia matematika i mehanika, **XXIII**, 6 (1959).
18. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, București, Editura Academiei, 1966, p. 431–564.
19. T. Oroveanu, *Asupra utilizării metodei caracteristicilor în studiul unor scurgeri lente ale gazelor*, St. cerc. mec. apl. **27**, 4 (1968).
20. H. O. Pfannkuch, *Contributions à l'étude des déplacements des fluides miscibles dans un milieux poreux*, Revue de l'Institut Français du Pétrole et Annales des combustibles liquides, **XVIII**, 2 (1963).
21. P. G. Saffman, *A theory of dispersion in a porous medium*, Journal of Fluid Mechanics, **6**, 3 (1959).
22. A. E. Scheidegger, *General theory of dispersion in porous media*, Journal of Geophysical Research, **66**, 10 (1961).
23. A. E. Scheidegger, *The random-walk model with autocorrelation in flow through porous media*, Canadian Journal of Physics, **36**, 6 (1958)
24. A. E. Scheidegger, *An evaluation of the accuracy of the diffusivity equation for describing miscible displacement in porous media*, Proceedings of the Theory of Fluid Flow in Porous Media Conference, Oklahoma, Norman, 1959

— MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE —

A CINCEA CONFERINŢĂ INTERNAŢIONALĂ DE OSCILAŢII NELINIARE

KIEV, 25 AUGUST—5 SEPTEMBRIE 1969, ACADEMIA DE ŞTIINŢE A U.R.S.S., ACADEMIA DE ŞTIINŢE A R.S.S. UCRAINA, INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

de D. MANGERON
Institutul politehnic, Iaşi

Adîncirea neîncetată a studiului fenomenelor naturii a condus şi conduce din ce în ce mai pregnant la modelări matematice ale fenomenelor naturii şi ale proceselor făurite de geniul uman, exprimate prin sisteme de *ecuaţii neliniare* (algebrice, diferenţiale ordinare, cu derivate parţiale, integro-diferenţiale, cu diferenţe finite ş.a.).

Punerea în evidenţă a proprietăţilor calitative şi cantitative ale unor atare ecuaţii neliniare, constituind o preocupare de seamă a matematicienilor şi mecanicienilor de pretutindeni, se face într-un ritm din ce în ce mai rapid datorită maşinilor electronice de calcul, iar schimbul de experienţă şi de imbolduri noi în domeniu se cristalizează, printre altele, atît în şiruri neîncetate de lucrări ce se susţin la congrese, conferinţe, colocvii sau simpozioane consacrate *mecanicii neliniare*, cît şi în note şi memorii publicate în revistele de specialitate din toate colţurile Terrei, printre care se situează în primă linie, începînd cu 1966, tînără şi importantă publicaţie periodică „*JOURNAL OF NON-LINEAR MECHANICS*".

Referentul, regretînd faptul că nu a putut participa activ la lucrările celei de-a cincea conferinţe internaţionale de oscilaţii neliniare, cu toate că a primit invitaţie din partea preşedintelui comitetului organizatoric, acad. Iu. A. Mitropolski, de a face o expunere de specialitate în cadrul sesiunii plenare a conferinţei, îşi propune să prezinte mai jos cititorilor noştri tematica dezbătută, oprindu-se succint doar la cîteva detalii privitoare la unele subiecte deosebit de interesante de mecanica neliniară a vibraţiilor [1]).

[1] În 1932 acad. N. N. Bogoliubov şi acad. N. M. Krîlov au denumit teoria oscilaţiilor neliniare—acest domeniu de seamă al fizicii matematice la a cărui dezvoltare au contribuit din plin—mecanică neliniară. În accepţia actuală, mecanica neliniară îmbrăţişează studiul fenomenelor modelate matematic prin sisteme de ecuaţii neliniare, teoria oscilaţiilor neliniare sau mecanica neliniară a vibraţiilor constituind o parte de seamă a mecanicii neliniare.

După expunerile făcute în sesiunea plenară consacrate metodei de medie în mecanică neliniară (acad. Iu. A. Mitropolski) și sistemelor evolutive cu ereditate neliniară (T. Vogel), lucrările conferinței s-au desfășurat în patru secții : I. Metode analitice în teoria oscilațiilor neliniare ; II. Metode calitative în teoria oscilațiilor neliniare ; III. Aplicații în mecanică ale teoriei oscilațiilor neliniare și IV. Aplicații în inginerie electrică și electronică ale teoriei oscilațiilor neliniare.

În ordinea cronologică a expunerilor prezentate, tematica dezbătută în cadrul secției I se prezintă după cum urmează : M. A. Krasnoselski, *Metode de analiză funcțională în teoria oscilațiilor neliniare.* Autorul trece în revistă contribuții recente în domeniu datorate școlii matematice din Voronej, realizate în parte în colaborare cu A. D. Mîșkis, subliniind totodată și o serie de probleme încă nerezolvate ; H. A. Antosiewicz, *O teoremă de punct fix și existența soluțiilor periodice* ; S. Maezawa, *Vibrații superarmonice în sisteme fragmentar liniare cu caracteristice nesimetrice.* Rezultatele esențiale se găsesc cuprinse într-un manuscris al autorului în curs de tipărire în paginile „Buletinului Institutului politehnic din Iași" ; I. I. Ghihman, *Teoria statistică a oscilațiilor neliniare cu traiectorii discontinue* ; J. Mawhin, *Soluții periodice ale sistemelor diferențiale strict neliniare* ; V. K. Melnikov, *Asupra existenței soluțiilor condiționat periodice ale sistemului hamiltonian* ; E. A. Grebennikov, *Asupra existenței soluțiilor condiționat periodice cu aproape perioadă 2π a sistemului polifrecvențial posedînd rezonanță de frecvență strictă* (definiție dată de autor) ; Iu. A. Reabov și I. L. Tolmașov, *Construcția soluțiilor condiționat periodice pentru probleme de oscilații neliniare folosind mașini electronice cifrice de calcul* ; G. Boiadziev, *Soluții periodice ale unui sistem cvasiliniar de ecuații diferențiale în cazul critic* ; J. Szadkowski, *Asupra unei probleme de sinteză pentru ecuații diferențiale de ordinul doi neliniare* ; N. A. Tihonov, *Asupra unei probleme inverse pentru ecuație neliniară* ; A. Halanay, *Unele noi rezultate și probleme privitoare la soluții periodice și aproape periodice pentru sisteme cu argument întîrziat.* Autorul folosește cu acest prilej unele evaluări datorite lui M. V. Popov privitoare la stabilitate absolută ; Yu. G. Borisovici, *Asupra teoriei soluțiilor periodice și mărginite pentru ecuații diferențiale cu diferențe* ; S. N. Șimanov, *Asupra teoriei oscilațiilor periodice a sistemelor cvasiliniare neautonome cu argument întîrziat periodic* ; D. Graffi, *Asupra metodelor de aproximație pentru rezolvarea unor ecuații neliniare cu termeni ereditari* ; M. Z. Litvin-Sedoi, *Unele evaluări pentru mișcare dată prin sisteme neliniare* ; O. B. Lokova, *Varietăți integrale ale ecuațiilor diferențiale neliniare cu un mic parametru în spațiul Banach* ; Ia. S. Baris și V. I. Fodciuk, *Asupra varietăților integrale pentru sisteme neregulate perturbate diferențiale în spațiul Banach* ; V. M. Volosov, G. N. Medvedev și B. I. Morgunov, *Metodă de medie în unele sisteme cu argument întîrziat conținînd variabile încete și repezi* ; V. G. Kolomiеț, *Asupra principiului de medie pentru sisteme stohastice cu postefect* ; S. T. Zavalișcin, *Oscilații discontinue ale sistemelor fără portretul fazic* ; V. I. Arnold, *Probleme banale* ; A. M. Samoilenko, *Contribuții la teoria perturbațiilor varietăților invariante ale sistemelor dinamice* ; K. G. Valeev, *Aplicarea transformatei Laplace la studiul sistemelor liniare* ; A. Van der Burgh, *Aproximare asimptotică de ordinul doi a soluțiilor ecuațiilor diferențiale neliniare* ; H. H. Denman, *Aproximări prin poli-*

noame ortogonale în oscilații neliniare; Yu. S. Kolesov, *Asupra unei noi metode de demonstrație a existenței soluțiilor periodice stabile*; P. R. Sethna, *Sisteme conținînd explicit timpul cu variație înceată*; F. Verhulst, *Unele probleme neliniare în mecanica cerească*; V. A. Brusin, *Unele proprietăți globale ale sistemelor dinamice autonome neliniare, uniforme în raport cu clase neliniare și excitații exterioare*; A. N. Filatov și G. S. Larionov, *Asupra metodelor de medie în ecuații diferențiale neliniare și ecuații integro-diferențiale*; A. B. Vasilieva și A. A. Plotnikov, *Ecuații de tip neutru cu mic argument întîrziat în cazuri critice*; A. N. Șarkovski, *Soluții netede ale ecuațiilor funcționale și diferențiale cu diferențe*; V. I. Fodciuk, *Varietăți integrale pentru ecuații diferențiale neliniare cu argument întîrziat*; A. M. Zverkin, *Asupra varietăților integrale pentru sisteme cu argument întîrziat*; S. B. Norkin, *Asupra comportării mișcării unui sistem oscilatoriu cu argument întîrziat autocontrolat*; C. Corduneanu, *Soluții periodice și aproape periodice privitoare la unele ecuații de convoluție*. Rezultatele principale obținute de autor se referă la existența soluțiilor periodice (măsurabile) sau existența soluțiilor aproape periodice în sensul lui Stepanov; M. Imanaliev și K. Kakișov, *Metode asimptotice în teoria soluțiilor periodice ale sistemelor ereditare singulare perturbate în cazul critic*; V. I. Rojkov, *Proprietăți asimptotice ale soluțiilor periodice privitoare la ecuații de tip neutru cu mic argument întîrziat*; M. G. Krein și Iu. L. Daleţki, *Unele rezultate și probleme de teorie a stabilității și comportării asimptotice a soluțiilor ecuațiilor diferențiale în spațiul Banach*; J. A. Baticle, *Studiul structurilor slab neliniare*; Al. Kelley, *Schimbări de variabilă în sisteme analitice hamiltoniene cu coeficienți periodici*; D. D. Bainov, *Ecuații asimptotice pentru o problemă de contur*; S. A. Lomov, *Asupra unei metode generale de determinare a soluției asimptotice a ecuațiilor diferențiale*; Ott. Götz, *Comparația comportării asimptotice a soluției de echilibru în sisteme de ecuații diferențiale reale și complexe*; A. N. Erugin, *Unele probleme asimptotice*; R. Gutowski și B. Radziszewski, *Comportare asimptotică a soluțiilor unui șir de ecuații diferențiale de ordinul doi*; A. D. Briuno, *Forma normală a oscilațiilor neliniare*; A. B. Vasilieva, V. A. Tupciev, A. N. Iarkin, *Soluții periodice ale sistemelor diferențiale cu un mic parametru în derivate, apropiate de soluții discontinue*; J. A. Morrison, *Aplicarea unor scheme de medie la cîteva probleme neliniare de rezonanță*; V. M. Volosov și B. I. Morgunov, *Asupra fenomenului de rezonanță în sisteme neliniare cu mișcări încete și rapide*; V. S. Burd, P. P. Zabreiko, I. S. Kolesov și M. A. Krasnoselski, *Mici oscilații de combinație și principiul de medie*; P. E. Sobolevski și V. A. Pogorelenko, *Asupra soluțiilor periodice ale ecuațiilor hiperbolice*; V. M. Fridman, *Aplicarea metodelor de analiză funcțională la probleme de oscilații neliniare periodice autonome și neautonome*; N. S. Kurpel, *Asupra aproximării bilaterale a soluțiilor periodice ale ecuațiilor diferențiale*; M. Schäfer și D. Behr, *Metode de iterație de analiză funcțională în calculul oscilațiilor neliniare cu mai multe grade de libertate și îmbunătățirea erorilor de calcul*; V. V. Strîghin, *Teoremele referitoare la interdependență între soluțiile periodice ale unui sistem autonom diferențial ordinar de primul ordin*; E. I. Roitenberg, *Asupra unei metode de determinare a stării de fază a sistemului neliniar*; N. A. Bobîlev și E. M. Muhamadiev, *Funcții de direcție și oscilație în sisteme cu largi neliniarități*; M. Boiadzieva, *Oscilații*

neliniare ale unui sistem mecanic cu un parametru cu variație înceată și o mare forță de rezistență; I. T. Kikuradze, *Asupra oscilațiilor soluțiilor ecuațiilor ordinare diferențiale neliniare*; N. I. Șkil, *Asupra soluțiilor periodice ale sistemelor de ecuații diferențiale cu un mic parametru pe lîngă derivate*; P. M. Senik, *Asupra oscilației staționare în sisteme esențial neliniare*; E. F. Faidzibaev și O. B. Bekmurzaev, *Asupra oscilațiilor neliniare într-un sistem cu două grade de libertate*; T. A. Burton, *Oscilații în sisteme neliniare de ordinul* doi; L. W. Neustadt, *Existență și teoreme de continuă dependență pentru unele ecuații cu operatori*; E. I. Smoliar, *Asupra evaluării și comportării soluțiilor unui sistem de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți periodici*; N. N. Vcerașniuk și P. P. Vcerașniuk, *Asupra unei metode de aproximare a soluției ecuației diferențiale neliniare de ordinul doi*; I. N. Blinov, *Metoda convergenței suprarapide și aplicarea ei la problema de reducere a sistemelor cu coeficienți aproape periodici*; B. M. Bogatîrev și O. B. Lîkova, *Asupra problemei de reducere a ecuației diferențiale neliniare în spațiul Banach*; L. S. Gnoenski, *Asupra deviației maxime în unele sisteme neliniare controlate supuse la oscilații forțate și în sisteme cu argument întîrziat*; I. I. Pleșkan și K. S. Sibirski, *Asupra izocronismului sistemelor diferențiale.*

Tematica dezbătută în cadrul secției a II-a se prezintă după cum urmează : E. A. Lentovici-Andronova și L. P. Șilnikov, *Asupra stadiului actual al teoriei bifurcațiilor sistemelor dinamice*; E. A. Barbașin, *Sisteme dinamice cu spațiul de fază cilindric*; R. Faure, *Asupra existenței ciclurilor pentru ecuații diferențiale*; V. A. Pliss, *Asupra structurii șirurilor invariante asimptotic stabile de sisteme de ecuații diferențiale periodice și autonome*; P. Seibert, *Asupra stabilității relative față de un șir sau față de întreg spațiu*; V. N. Kasperov și A. N. Șarkovski, *Asupra stabilității orbitale*; W. Bogusz, *Stabilitatea tehnică a sistemelor neliniare perturbate aleatoriu prin perturbații constante*; N. Rouche, *Condiții suficiente de stabilitate bazate pe leme globale*; L. Reizin, *Soluții stabile bilateral (Leapunov) și periodice ale sistemelor diferențiale*; C. Hayashi, Y. Ueda și H. Kawakami, *Soluții periodice ale ecuației Duffing și legătura lor cu soluții dublu asimptotice*; M. L. Cartwright, *Soluții aproape periodice ale ecuațiilor diferențiale și frecvențele lor fundamentale*; I. S. Kukles, *Asupra unor probleme de teorie a oscilațiilor neliniare*; J. Skowroński, *Cu privire la formularea jocurilor diferențiale calitative*; J. Argémi, *Traiectoriile unui sistem dinamic definit în vecinătatea originii prin două polinoame de grade distincte și omogene*; L. N. Beliustina, *Asupra unor probleme neliniare de sincronizare a oscilațiilor*; N. N. Bautin, *Asupra aproximărilor și stabilității structurale a spațiului parametric al sistemelor dinamice*; V. M. Alekseev, *Oscilații cvasistohastice*; C. Djaja, *Asupra secțiunilor transversale și a șirurilor-limită pentru familii de sisteme dinamice în mișcare*; B. A. Șcerbakov, *Existența modurilor oscilatoare generalizate ale ecuațiilor diferențiale*, autorul înțelegînd prin noțiunea introdusă cea mai extensivă generalizare a conceptului de periodicitate (Poincaré); L. G. Hazin, *Problema stabilității sistemelor hamiltoniene și rezonanțe*; I. H. Ku, *Stabilitate stohastică în sisteme neliniare oscilatorii.* Referentul menționează cu acest prilej utilitatea fixării ideilor privitoare și la aceste noi noțiuni introduse în timpul conferinței, și anume : stabilitate structurală (Bautin), tehnică (Bogusz), stohastică (Ku); R. Gabasov, F. M. Kirillova și

V. A. Srociko, *Asupra teoriei controlului singular optim*; E. S. Peatnițki, *Absolută stabilitate a sistemelor de control neliniare cu neliniaritate nestaționară*; J. A. Yorke, *Funcții Leapunov neliniare*; V. B. Kolmanovski și V. R. Nosov, *Stabilitatea sistemelor oscilatorii neliniare descrise prin ecuații de tip neutru*; M. Jean, *Asupra sistemelor evolutive: definiție și existență*; G. A. Kamenski, *Sisteme dinamice netede și soluții aproape periodice ale ecuațiilor diferențiale neliniare cu argument întîrziat*; R. D. Driver, *Problemă inversă pentru un sistem diferențial cu argument întîrziat din cadrul electrodinamicii clasice*; N. Chafee, *O problemă de bifurcație pentru ecuații diferențiale funcționale cu întîrziere finită*; V. N. Șevelo, *Influența întîrzierii temporale asupra oscilației soluțiilor ecuațiilor diferențiale neliniare de ordin superior*; O. N. Odarich și V. N. Șevelo, *Criterii de oscilație* (nonoscilație), *a soluțiilor ecuației diferențiale neliniare de ordinul doi*; I. Kudrewicz, *Aplicarea teoremei lui Rouché la evaluarea erorii în metode de aproximație și teoremă de existență a vibrațiilor periodice în sisteme neliniare*; M. A. Aizerman, *Probleme de stabilitate absolută în unghiul lui Hurwitz*; V. A. Iakubovici, *Criterii frecvențiale privitoare la variate comportări calitative ale soluțiilor ecuațiilor diferențiale neliniare*; I. I. Blehman și R. F. Nagaev, *Sincronizarea obiectelor dinamice slab cuplate și criteriul de stabilitate integral privitor la mișcări sincrone*; V. Lakshmikantham, *Mai multe funcții Leapunov*; A. P. Proskureakov, *Asupra stabilității soluțiilor periodice ale sistemelor autonome cvasiliniare cu mai multe grade de libertate*; I. I. Neumark, *Asupra unei clase de sisteme dinamice*; T. Yoshisawa, *Existența soluțiilor aproape periodice ale ecuațiilor funcționale-diferențiale*; L. Markus și K. Meyer, *Proprietăți translatorii ale sistemelor hamiltoniene generice*; D. V. Anosov, *Asupra unei clase de șiruri invariante de sisteme dinamice netede*; G. Seifert, *Soluții aproape periodice pentru sisteme periodice limitate*; K. R. Schneider, *Teoremă relativă la evaluare bilaterală a perioadei oscilațiilor neliniare*; V. Ia. Skorobogatko, *Geometrie n-dimensională mecanică ținîndu-se seama de derivate de ordin superior și probleme de oscilație a soluțiilor ecuațiilor diferențiale ordinare*; A. Olas, *A metodă tehnică de sinteză cinetică a sistemului mecanic cu un grad de libertate avînd o proprietate dată de mișcare*; M. A. Wolanowski, *Domeniul de ieșire privitor la unele clase de sisteme dinamice*; D. G. Magiros, *Stabilitatea unei clase de fenomene de precesie în sens Leapunov, Poincaré și Lagrange*; N. A. Pustovoitov, *Construcția funcției Leapunov pentru sisteme nestaționare cu un mic parametru*; A. K. Lopatin, *Condiții de stabilitate pentru ecuații diferențiale neautonome*; A. Szadkowski, *Asupra posibilității de determinare a funcției Leapunov făcîndu-se analogie între sistemul dinamic și curgerea mediului continuu*; G. A. Los, *Ecuația caracteristică* $-\frac{\pi}{y}$ *și stabilitatea soluțiilor unui sistem diferențial cu coeficienți periodici*; A. A. Martîniuk, *Asupra stabilității soluțiilor aproximative ale sistemelor neliniare și unele probleme învecinate*; A. Huaux, *Asupra construcțiilor funcțiilor Leapunov*; C. Coleman, *Puncte staționare hiperbolice*; S. K. Aranson, *Sisteme dinamice ale variatăților bidimensionale*; A. N. Șarkovski, *Asupra problemei izomorfismului sistemelor dinamice*; L. M. Lerman și L. P. Șilnikov, *Asupra existenței și stabilității tuburilor aproape periodice*; A. D. Morozov, *Asupra sistemelor fragmentar*

netede conținînd curbe homociclice; V. S. Afraimovici, *Unele proprietăți ale entropiei topologice*; A. B. Katok, *Cîteva exemple noi de sisteme ergodice netede*; R. A. Vinograd și N. A. Izobov, *Primă aproximație a soluției problemei lui Leapunov*; W. Müller, *O teoremă de stabilitate privitoare la ecuații de oscilație neautonome*; A. P. Stokes, *Asupra aproximării și stabilității oscilațiilor neliniare*; E. N. Rosenwasser, *Studiu analitic al stabilității oscilațiilor periodice ale sistemelor discontinue*; K. G. Valeev și R. F. Ganiev, *Criteriul integral de stabilitate și aplicațiile sale*; Iu S. Bogdanov, *Aplicarea șirurilor finite recurente în studiul asimptotic al sistemelor perturbate*; M. I. Almukhamedov, *Centre-focare de clase superioare*; K. R. Latipov, *Studiul caracteristicilor sistemului constituit din trei ecuații, comportare la infinit și globală*; L. V. Șarkova, *Studiul unui sistem autonom*; I. G. Roset, *Studiul calitativ al unei oscilații neliniare particulare.*

Referentul, trimițînd pe cititor, pentru tematica dezbătută la conferință în cadrul celorlalte două secții, la paginile „Buletinului Institutului politehnic din Iași", subliniază interesul deosebit al unui mare număr de lucrări expuse și scoate în evidență continuitatea în muncă a multor cercetători și oameni de știință, care, timp de aproape un deceniu, se ocupă de oscilații neliniare, prezintă lucrări la conferințele internaționale succesive și le inserează apoi în paginile volumelor ce se editează cu acest prilej [1]—[4].

Primită la redacție la 12 septembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Fifth International Conference on Nonlinear Oscillations*, Abstract of papers, Academy of Sci. of the USSR, Kiev, 1969, 267 p.
2. D. Mangeron, *Din problemele actuale ale Mecanicii neliniare a vibrațiilor (I)*, Bul. Inst. politehn. Iași, **VII**, *3 — 4*, 347—359 (1957).
3. D. Mangeron, *Neue graphisch-analytische Methoden zum Studium der nicht-linearen Schwingungen*, III. Internationale Konferenz über Nicht-Linearen Schwingungen, DAW, Berlin, 25—30 mai 1964, Akademie-Verlag, I, p. 76—90.
4. D. Mangeron și R. Chaléat, *Approximations d'ordre supérieur dans l'étude des mouvements perturbés des oscillateurs*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **10**, *4*, 791—825 (1965).

RECENZII

W. von BRAUN şi F. I. ORDWAY, *Histoire Mondiale de l'Astronautique*, Illustrations de H. H.-K. Lange, Introduction de F. C. Durant, Préface de P. Auger, Paris-Match, LAROUSSE, 1968, 339 p.

Cu ocazia unor recente congrese de astronautică, subsemnatul a scos în evidenţă aportul adus de diferite ţări şi popoare la cucerirea spaţiului cosmic şi a afirmat cu justificări adecvate : „Sîntem mîndri că, în pofida condiţiilor foarte puţin propice pentru dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii din ţara noastră în perioada anterioară ultimului sfert de veac, am putut da prinosul nostru de contribuţie printr-un Traian Vuia, Aurel Vlaicu, Gogu Constantinescu, Hermann Oberth, Henri Coandă ş.a.*) la făurirea premiselor zborului omului în cosmos", iar cu prilejul unui ciclu de 12 conferinţe pe care le-a ţinut în ultimele luni asupra progreselor actuale ale astronauticii a jalonat rolul de mîine de covîrşitoare importanţă socială a acestei ramuri de ştiinţă. Menţionăm doar faptul că medicina spaţială oferă de pe acum posibilităţi de control medical automatizat şi la distanţă.

Este surprinzător că istoria fuzeelor şi a astronauticii este încă atît de puţin cunoscută de marele public, cu toate că recenta aselenizare a primilor terrieni Armstrong şi Aldrin a fost vizionată de circa un miliard de oameni, iar subiectele referitoare la cucerirea spaţiului cosmic pasionează mai bine de jumătate din întreaga omenire. Consideraţiile de mai sus au stat la baza hotărîrii librăriei „Larousse" şi „Paris-Match" de a publica în traducere franceză operă capitală recenzată în aceste rînduri, apărută în original sub titlul *History of Rocketry and Space Travel* în 1966.

Autorii lucrării erau cei mai calificaţi să prezinte publicului cititor istoria astronauticii privită sub toate aspectele, universală şi în bună parte inedită. Găsim în acest extrem de interesant volum : concepţiile asupra universului în antichitate ; progresele treptate ale construcţiei fuzeelor în China, în ţările arabe şi în Europa medievală ; utilizarea fuzeelor în scopuri militare în secolul al XIX-lea ; apariţia rachetelor lansate din avioane în timpul primului război mondial (1914—1918) ; marii pionieri din primele decenii ale secolului al XX-lea (Ţiolkovski, Goddard, Oberth, Esnault-Pelterie) ; progresele considerabile săvîrşite între primul şi al doilea război mondial, în particular la Peenemünde, primul centru mondial pentru construcţia şi încercarea fuzeelor. Bilanţul complet al realizărilor din ultimul sfert de secol în U.R.S.S., S.U.A., Franţa, Marea Britanie, Japonia este splendid ilustrat graţie expunerii problematicii referitoare la cel dintîi „sputnik", la sondele spaţiale trimise spre Marte şi Venus, la primele drame în cucerirea spaţiului cosmic.

Nici o altă lucrare cu caracter istoric nu este atît de bogată în detalii şi documente privitoare la zborul fuzeelor, la întregul ansamblu măreţ al grandioasei aventuri tehnice şi umane, încoronată pînă acum prin cea dintîi călătorie a lui „Apollo" 11, care deschizînd porţile

*) Aceasta fără a mai vorbi de şirul de lucrări de seamă mai vechi, ca, de exemplu, lucrarea despre rachete, veche de secole, datorită magului de la Sibiu, descoperită la filiala Arhivelor Statului de acolo şi descrisă recent în presa noastră ştiinţifică şi de popularizare a ştiinţei.

viitorului, a avut o cu totul altă menire decît aceea a lui Columb. Omul nu mai caută să revină la punctul de unde a plecat şi omenirea are în faţa sa un orizont fără limită şi un ţel fără sfîrşit.

Lucrarea conţine o foarte bogată bibliografie, o listă extinsă de asociaţii de astronautică din întreaga lume (cu adresele lor) şi un vast indice care permite o consultare uşoară. Parcurgînd volumul, cititorul rămîne ferm convins că pînă la finele acestui secol Terra se va vedea înconjurată de nenumărate centuri de sateliţi artificiali neobosiţi cărora li se vor încredinţa multe funcţiuni vitale interesînd întreaga omenire.

După cum subliniază foarte just în prefaţă Pierre Auger, autorii lucrării „reuşesc să nu slăbească fie chiar pentru o singură secundă atenţia cititorului, care rămîne mereu încordată la maximum, şi acest „m e r s c ă t r e s t e l e" pe cărările ştiinţei şi tehnicii rămîne mereu extrem de captivant".

D. Mangeron

EMIL TOCACI

ASPECTE ALE UTILIZĂRII TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN MECANICĂ

În lucrare sînt analizate atît modalitatea de utilizare a teoriei distribuțiilor în studiul mișcărilor de viteze discontinue, cît și consecințele care decurg din aplicarea acestei metode.
Sînt, de asemenea, cercetate modalități de evitare a dezavantajelor provocate de idealizarea matematică potrivit căreia șocurile trebuie considerate ideale (pentru a putea fi introdusă în calcul distribuția lui Dirac), obținîndu-se astfel o mai mare apropiere de fenomenul real.

St. cerc. mec. apl. tom. 29, nr. 1, 1970, p. 27—45
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

L. LIVOVSCHI

SINTEZA DISTRIBUITOARELOR HIDRAULICE

Se studiază sinteza distribuitoarelor hidraulice după programul de conexiuni dintre conductele de acces. Determinarea configurației canalelor unui distribuitor se reduce la rezolvarea unei probleme de acoperire a mulțimii conexiunilor pe care le realizează un sistem de distribuitoare elementare.
Distribuitoarele elementare se deduc din programul dat de conexiuni; prin compunerea lor se obține distribuitorul care realizează acest program.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 1, 1970, p. 63—89
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

GEORGE BĂRĂNESCU, DINU TARAZA

TUDIUL ECHILIBRAJULUI MOTOARELOR ÎN LINIE CU AJUTORUL PROGRAMĂRII LINIARE

În lucrare se prezintă o metodă de calcul privind îmbunătățirea echilibrajului motoarelor policilindrice în linie cu ajutorul programării liniare. Aplicîndu-se principiile metodei Simplex se calculează distanțele la care trebuie plasați cilindrii consecutivi în scopul obținerii unui anumit grad de echilibrare a momentelor forțelor de inerție, respectîndu-se condiția menținerii unei lungimi minime a motorului. Metoda prezentată conduce la o micșorare considerabilă a volumului de calcul necesar rezolvării problemei pentru motoare cu număr mare de cilindri.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 1, 1970, p. 47—61
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

A. H. SONI, CHR. PELECUDI

DETERMINAREA VECTORIALĂ A ECUAȚIILOR GENERALE DE MIȘCARE ALE MECANISMELOR TRIDIMENSIONALE

Sînt determinate ecuațiile generale de mișcare, vectoriale și analitice, pentru mecanismele monocontur cu trei pînă la șapte axe (cuple elicoidale) și de diverse familii.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 1, 1970, p. 91—121
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

A. PAVEL

CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL ÎMBINĂRILOR PRIN MANDRINARE LISĂ SOLICITATE AXIAL LA ÎNTINDERE SAU COMPRESIUNE. I

Se prezintă o metodă analitică pentru calculul de rezistență la smulgere al îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune, folosite în cazul schimbătoarelor de căldură destinate diferitelor ramuri ale activității industriale.
După ce se precizează ipotezele de calcul și formulele pentru determinarea presiunii instantanee de contact, în baza teoriilor de rezistență și a criteriilor de plasticitate se procedează la stabilirea și interpretarea unor noi formule de calcul pentru forțele de smulgere atît pentru solicitarea axială de întindere, cît și pentru solicitarea axială de compresiune.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 1, 1970, p. 123—147
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

T. POPP, I. CIORĂNESCU

CONSIDERAȚII PRIVIND ACȚIUNEA VÎNTULUI ASUPRA CONSTRUCȚIILOR ÎNALTE

Se analizează caracteristicele statice și dinamice ale vîntului precum și starea de tensiune care apare în structura de rezistență a construcțiilor înalte. Se determină pe baza înregistrărilor existente vitezele maxime probabile și se analizează pe machetă efectul unghiului de incidență. De asemeni se studiază vibrația construcției datorită pulsațiilor rafalei.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 1, 1970, p. 173—184
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. ȚOPA

CONTRIBUȚII LA STUDIUL CONLUCRĂRII SPAȚIALE A GRINZILOR DIN TABLIERELE DE PODURI SIMPLU REZEMATE FĂRĂ ANTRETOAZE ÎN CÎMP ÎN DOMENIUL ELASTIC

Folosirea în practică a unor grinzi de poduri nesolidarizate prin antretoaze în cîmp a pus problema găsirii unor procedee pentru calculul conlucrării transversale ale acestora, conlucrare realizată numai prin placa tablierului.
Pornind de la o formulare energetică se deduce un mod unitar de a stabili diversele ecuații de condiție, dîndu-se expresiile tuturor coeficienților necunoscutelor.
Se examinează atît efectul sarcinilor fixe cît și a celor mobile pentru cele din urmă dîndu-se indicații practice de conducere a calculului.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 1, 1970, p. 149—172
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

L. Z. DUMITRESCU, C. POPESCU

PRODUCEREA UNDELOR DE ȘOC DE MARE INTENSITATE, CU APLICAȚII LA GENERAREA CURGERILOR HIPERSONICE DE ENTALPIE ÎNALTĂ

Se prezintă unele rezultate experimentale obținute de Institutul de mecanică a fluidelor privind producerea undelor de șoc intense ($M_s = 6 \ldots 8{,}5$) și curgerilor hipersonice ($M = 4 \ldots 10$) cu entalpie înaltă ($T_0 = 5\,000 \ldots 10\,000°K$).

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 1, 1970, p. 185—201
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

V. MANEA, N. GEORGESCU

CÎTEVA ASPECTE PRIVIND MIŞCAREA FLUIDELOR COMPRESIBILE PRIN AJUTAJE

În lucrare este tratată problema mişcării fluidelor prin ajutaje generate în diverse moduri. În prima parte se consideră mişcarea fluidelor incompresibile prin ajutaje generate de vîrtejuri şi surse. În continuare, folosind ecuaţiile de mişcare ale fluidelor compresibile prin ajutaje, se determină soluţiile aproximative ale acestora prin două metode : prima pentru un ajutaj plan ai cărui pereţi sînt curbi cu tangenţa continuă, iar a doua în cazul cînd se cunoaşte soluţia mişcării prin ajutaj a fluidului incompresibil.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 1, 1970, p. 203—223
Redacţia : Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

TEODOR OROVEANU

ASUPRA EFECTULUI DISPERSIEI TRANSVERSALE ÎN SCURGEREA FLUIDELOR MISCIBILE PRIN MEDII POROASE

Lucrarea are ca scop studiul pătrunderii apei sărate într-un strat acvifer şi al deslocuirii petrolului dintr-un strat productiv, cu ajutorul unui fluid miscibil. Se urmăreşte rezolvarea problemei pentru un strat de grosime finită, orizontal şi limitat la bază şi acoperiş de strate impermeabile. Se presupune mai întîi că stratul are o lungime infinită şi apoi că are o lungime finită şi se caută soluţiile în cazul în care se ţine seama şi de efectul dispersiei transversale. Rezultatele găsite pot permite, în urma efectuării unor calcule numerice, să se aprecieze efectul dispersiei transversale, de multe ori neglijat în problemele de acest gen.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 1, 1970, p. 245—256
Redacţia : Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

DAN MATEESCU

ASUPRA ARIPILOR POLIGONALE PREZENTÎND ANTISIMETRIE DE INCIDENŢĂ ÎN REGIM SUPERSONIC

Lucrarea tratează curgerea supersonică în jurul aripilor poligonale subţiri cu incidenţa distribuită antisimetric, aplicînd în acest scop o metodă de rezolvare stabilită de autor într-o lucrare anterioară [1], prin care problema este redusă la studiul unor mişcări conice şi conice de ordin superior în jurul unor aripi unghiulare fictive. După determinarea vitezelor axiale de perturbaţie pe aripă (şi deci distribuţiei de presiuni), în lucrare se determină caracteristicile aerodinamice pentru o serie de aripi poligonale concrete (ca aripi în coadă de rîndunică, dublu trapezoidale, dreptunghiulare etc.), avînd incidenţa antisimetrică sau executînd o mişcare de rotaţie de ruliu.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 1, 1970, p. 225—243
Redacţia : Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● Astrodinamica (optimizarea traiectorilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

*

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, sectorul 7.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

T. HACKER, Stabilitate și comandă în teoria zborului, 1968, 322 p., 21,50 lei.

V. V. GHIA, Recirculația gazelor la cuptoare, 1968, 336 p., 29 lei.

ȘT. N. SĂVULESCU, Tranziția de la scurgerea laminară la cea turbulentă, 1968, 312 p., 15 lei.

DAN TEODORESCU, Servomotorul amplificator și aplicațiile lui în automatizări; 1968, 260 p., 12,50 lei.

A. MILLION și C. MILLION, Hidrogenul în oțeluri și în îmbinări sudate, 1968, 354 p., 27 lei.

GH. BUZDUGAN, Dinamica fundațiilor de mașini, 1968, 368 p., 24 lei.

PAUL DIMO, Analiza nodală a sistemelor electroenergetice, 1968, 628 p., 44 lei.

I. S. GHEORGHIU și AL. FRANSUA, Tratat de mașini electrice, vol. I. Mașini de curent continuu, 1968, 412 p., 27 lei.

R. C. BOGDAN și DAN LARIONESCU, Analiza armonică complexă și mecanoelectrică a mecanismelor plane, 1968, 432 p., 29 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, Aplicații industriale ale lagărelor cu aer, 1968, 282, 16,50 lei.

MIRCEA SOARE, Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri, 1968, 622 p., 33 lei.

L. LIBRESCU, Statica și dinamica structurilor elastice anizotrope și eterogene, 1969, 320 p., 18,50 lei.

LUCIAN Z. DUMITRESCU, Cercetări în tuburile de șoc, 1969, 306 p., 21 lei.

F. DINCĂ și C. TEODOSIU, Vibrații neliniare și aleatoare, 1969, 462 p., 24 lei.

V. VISARION și C. STĂNESCU, Calculul stărilor de tensiune în teoria plăcilor curbe, 1969, 714 p., 32 lei.

C. ȘORA, Introducere în studiul generatorului Hall, 1969, 310 p., 18,50 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ȘI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29. NR. 1, p. 1—264, București, 1970

I.P. „Informația" — c. 4000

43832

Lei 40. —

F-2557

F2557

3
TOMUL 29
1970

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948
1970 OKT 2

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacţie

Acad. **E. CARAFOLI** — *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** — *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ŞTEFAN BĂLAN,**
Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.
Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU C. BOGDAN,**
Conf. **DAN PAVELESCU**
Prof. **T. OROVEANU,** *secretar de redacţie.*

În ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Centrala cărţii, Oficiul de comerţ exterior, căsuţa poştală 134—135 (Calea Victoriei 126) Bucureşti România **sau la reprezentanţii săi din străinătate.**

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă, se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacţia : Bucureşti,

Str. Const. Mille 15, tel. 13.83.26

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ

Bucureşti, 23—27 iunie 1969

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 29, nr. 3 1970

SUMAR

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ

Bucureşti, 23—27 iunie 1969

Pag.

TEORIA PLĂCILOR ŞI STRUCTURILOR CURBE

N. D. POPESCU, Stabilitatea dinamică a plăcilor dreptunghiulare solicitate de sarcini mobile 523

TEORIA VIBRAŢIILOR

SERGIU CHIRIACESCU, Autovibraţii la strunjirea axelor zvelte 547

TEORIA MECANISMELOR ŞI DINAMICA MAŞINILOR

N. I. MANOLESCU, GH. POPA, Cubica polilor relativi de rotaţie la mecanismul manivelă-piston 569

CHR. PELECUDI, I. SAVA, Studiul experimental al dinamicii mecanismelor cu came 587

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

LEON LIVOVSCHI, Identificarea sistemelor critice 615

VIRGILIU FLORIAN, NICOLAE ŢOPA, Contribuţii la calculul structurilor multietajate oarecare acţionate orizontal 635

FLUIDE INCOMPRESIBILE

SIMION HÂNCU, LUCIA PREDESCU, VIOREL MARINESCU, Cu privire la mişcarea fluidelor în jurul unei reţele de plăci plane 661

DINAMICA GAZELOR ŞI MAGNETOFLUIDODINAMICĂ

Pag

N. N. PATRAULEA, C. OPREANU, Asupra performanţelor pompelor turbomoleculare în cazul reflexiei oglindă 683

IOAN FILIMON, Cîteva consideraţii asupra aplicării unei metode hodografice în dinamica gazelor (Cazul profilului circular) 689

DAN MATEESCU, Curgerea supersonică nepermanentă în jurul sistemelor aripă cruciformă-fuzelaj avînd mişcări oscilatorii 699

FLUIDE VÎSCOASE, STRAT-LIMITĂ, TURBULENŢĂ, TRANSFER DE CĂLDURĂ

V. IONESCU, C. COZMA, Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase pe domenii multiplu conexe 713

TRIBOLOGIE

VICTOR CALCAN, LEONTIN CIGAN, NICOLAE RĂDĂCINĂ, Utilizarea textolitului în construcţia ghidajelor 725

RECENZII 741

STABILITATEA DINAMICĂ A PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE SOLICITATE DE SARCINI MOBILE

de N. D. POPESCU
INSTITUTUL DE MINE PETROȘENI

Luîndu-se în considerație forțele de inerție de care sînt animate elementele de masă ale plăcilor și ale corpurilor cărora li se datoresc forțele mobile, precum și factorii dinamici suplimentari (ca, de exemplu, forțele Coriolis, forțele centrifuge și forțele rezistente, provocate de frecările interne ale materialului), se stabilește ecuația diferențială a mișcării de vibrație, care este o ecuație neomogenă și cu coeficienți periodici.
Rezolvarea acestei ecuații diferențiale a pus în evidență faptul că pentru anumite valori ale vitezei de deplasare a sarcinilor mobile, numite „viteze critice", are loc o creștere în timp a amplitudinii mișcării de vibrație, ceea ce arată că s-a produs fenomenul de rezonanță, care marchează apariția instabilității dinamice a plăcii.
Se stabilesc expresiile vitezelor critice, a săgeților și a coeficienților dinamici și se constată că vitezele critice sînt din domeniul vitezelor de circulație în curs de realizare.

1. INTRODUCERE

Este cunoscut faptul că la trecerea unui tren pe un pod elementele componente ale podului încep să vibreze, amplitudinea elementelor de masă în mișcare depinzînd de viteza de circulație a trenului pe pod. Pentru o anumită viteză, numită viteză critică V_c, se produce fenomenul de rezonanță, caracterizat printr-o creștere în timp a amplitudinii mișcării de vibrație.

Pentru o singură forță concentrată, care se deplasează pe o grindă simplu rezemată cu o viteză constantă, în cazul neglijării masei corpului căreia i se datorește forța, viteza critică se determină cu ușurință, problema fiind tratată integral în lucrările lui Timoshenko.

Ordinul de mărime al vitezei critice, calculată cu formulele stabilite în acest fel este de peste 300 m/s, ceea ce arată că pentru forțe concentrate lipsite de masă fenomenul de rezonanță la grinzi simplu rezemate nu poate avea loc în mod practic. Dacă la stabilirea expresiei vitezei cri-

tice se ia însă în considerație și masa corpului căreia i se datorește forța, valoarea acestei viteze scade în mod simțitor, apropiindu-se de vitezele în curs de realizare [3].

Sporirea continuă a vitezei de circulație a sarcinilor mobile și a greutății acestora mărește pericolul producerii fenomenului de rezonanță în special la trecerea convoaielor de sarcini mobile pe poduri, ceea ce impune restudierea acestui fenomen în scopul luării în considerație a tuturor factorilor care influențează asupra valorii vitezei critice.

Problemele legate de vibrația grinzilor solicitate de convoaie de sarcini mobile au fost tratate integral în lucrarea [3].

În lucrarea [1] s-a prezentat un studiu referitor la vibrația plăcilor dreptunghiulare simplu rezemate pe contur, solicitate de o singură forță concentrată mobilă, în ipoteza că masa corpului căreia i se datorește forța este neglijabilă, stabilindu-se următoarea expresie pentru viteza critică:

$$V_c = \frac{\pi a h}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}}. \tag{1}$$

Pentru plăci pătrate ($a = b$), relația (1) devine

$$V_c = \frac{\pi h}{a}\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}}, \tag{2}$$

unde a, b și h sînt dimensiunile plăcii (fig. 1), E este modulul de elasticitate, μ coeficientul de contracție transversală, iar ρ densitatea materialului.

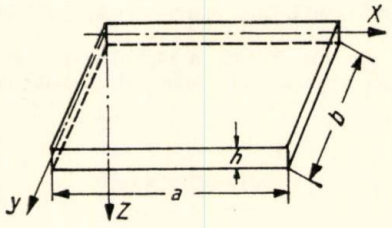


Fig. 1

În cazul podurilor dalate, greutatea sarcinilor fiind de același ordin de mărime cu greutatea plăcii podului, masa corpului căreia i se datorește sarcina nu mai poate fi neglijată, iar vitezele critice sînt mult mai mici decît cele obținute cu ajutorul expresiilor (1) sau (2).

În prezenta lucrare se analizează cazul plăcilor dreptunghiulare simplu rezemate pe contur, solicitate de un convoi de sarcini concentrate care se deplasează prin rostogolire, luîndu-se în considerație și masa forțelor la stabilirea expresiilor vitezelor critice.

2. STABILIREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A MIȘCĂRII DE VIBRAȚIE

Dacă L_e este lucrul mecanic efectuat de către forțele exterioare care acționează asupra plăcii (inclusiv forțele de inerție și forțele rezistente), iar W este energia potențială de deformație acumulată de placă,

ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie se obţine cu ajutorul relaţiei [2]

$$L_e = W. \tag{3}$$

Pentru placa reprezentată în figura 1, energia potenţială de deformaţie W va fi dată de expresia

$$W = \frac{1}{2}\iint D\left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\mu)\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]\right\} dx\,dy, \tag{4}$$

unde z este săgeata plăcii, iar D este dat de expresia

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \tag{5}$$

Dacă pe contur săgeţile sînt nule (de exemplu în cazul plăcii încastrate sau rezemate pe contur), integrala pe toată suprafaţa plăcii a termenului al doilea este egală cu zero, astfel că expresia (4) devine

$$W = \frac{1}{2}\iint D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy. \tag{6}$$

Dacă m este masa unităţii de suprafaţă a plăcii, F_0, F_1, F_2, ..., F_i, ..., F_n sînt forţele convoiului de sarcini mobile (distanţele dintre prima forţă F_0 şi restul forţelor convoiului fiind respectiv d_1, d_2, ..., d_i, ..., d_n), z este săgeata unui punct oarecare al plăcii, iar z_i săgeata punctului de aplicaţie a unei forţe a convoiului, forţele de inerţie vor avea expresiile

$$\left.\begin{aligned} &-m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},\\ &-\frac{F_i}{g}\frac{d^2 z_i}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

În afară de forţele de inerţie, din cauza frecării interne a materialului apar şi forţele rezistente, care se opun deformaţiei plăcii. Aceste forţe depind, după cum arată experienţele, de valorile maxime ale eforturilor unitare (şi nu de viteza de variaţie a acestora), astfel că, ţinînd seama de faptul că deformaţiile sînt proporţionale cu eforturile, se poate considera că forţele rezistente sînt proporţionale cu săgeţile ($-cz$).

Luînd ca origine a timpului momentul intrării pe placă a primei forţe (F_0) a convoiului (a cărei viteză de deplasare este constantă şi egală cu V), rezultă că la un moment dat t abscisa punctului de aplicaţie a forţei F_0 va avea expresia

$$x_0 = Vt. \tag{8}$$

Deci abscisa punctului de aplicație a unei forțe oarecare F_i a convoiului se poate scrie sub forma

$$x_i = x_0 - d_i = Vt - d_i. \tag{9}$$

Ținînd seama de relația (9), termenul $\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}t^2}$ va avea expresia

$$\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_i \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_i^2}. \tag{10}$$

Se constată că primul termen reprezintă accelerația sarcinilor mobile în mișcarea de vibrație efectuată împreună cu placa, al doilea accelerația Coriolis, iar al treilea accelerația centrifugă.

Rezultă următoarea expresie pentru L_e:

$$L_e = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=n} F_i z_i - \frac{1}{2} \iint m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{F_i}{g} \left(\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + 2V \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_i \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_i^2} \right) z_i - \frac{1}{2} \iint cz^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{11}$$

Avînd în vedere caracterul mișcării de vibrație al plăcii, se va alege pentru săgeata z o expresie de forma

$$z = TXY, \tag{12}$$

unde T este o funcție necunoscută care depinde exclusiv de timp (variabila t), X o funcție care depinde exclusiv de variabila x, iar Y o funcție care depinde exclusiv de variabila y.

Substituind pe z dat de relația (12), în expresiile (6) și (11), ecuația de condiție (3) devine

$$C_1 \ddot{T}_{(t)} + C_2 \dot{T}_{(t)} + C_3 T_{(t)} = C_4, \tag{13}$$

unde

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= m \int_0^a \int_0^b X^2 Y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{i=n} F_i X_i^2 Y_i^2, \\
C_2 &= \frac{2V}{g} \sum_{i=0}^{i=n} F_i \dot{X}_i X_i Y_i^2, \\
C_3 &= D \int_0^a \int_0^b (\ddot{X}Y + X\ddot{Y})^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \frac{V^2}{g} \sum_{i=0}^{i=n} F_i \ddot{X}_i X_i Y_i^2 + \\
&\quad + c \int_0^a \int_0^b X^2 Y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \\
C_4 &= \sum_{i=0}^{i=n} F_i X_i Y_i.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Relația (13) reprezintă ecuația diferențială a mișcării de vibrație. Rezolvarea ei, respectiv determinarea funcției T, necesită cunoașterea funcțiilor X și Y, care, la rîndul lor, depind de condițiile de fixare a marginilor plăcii.

La plăci simplu rezemate săgețile și momentele încovoietoare fiind nule pe contur, rezultă următoarele condiții la limită:

$$\left.\begin{aligned} &- \text{pentru } x = 0 \text{ și } x = a, \quad z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \\ &- \text{pentru } y = 0 \text{ și } y = b, \; z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Deoarece săgeata z dată de expresia (12) trebuie să satisfacă condițiile la limită (15) în orice moment, rezultă că și funcțiile $X_{(x)}$ și $Y_{(y)}$ trebuie să satisfacă aceleași condiții (adică, $X = \ddot{X} = 0$ pentru $x = 0$ și $x = a$, și $Y = \ddot{Y} = 0$ pentru $y = 0$ și $y = b$), astfel că, dacă ne limităm numai la oscilația fundamentală a plăcii și neglijăm influența armonicilor, funcțiile X și Y vor avea expresiile

$$\left.\begin{aligned} X &= \sin\frac{\pi x}{a}, \\ Y &= \sin\frac{\pi y}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Dacă convoiul de sarcini mobile se deplasează pe placă după dreapta $OB\left(\text{de ecuație } y_0 = \sigma\frac{b}{2}\right)$ în sensul axei X (fig. 2), expresiile (14) se pot scrie sub forma

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{mab}{4} + \frac{\sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}{g}\sum_{i=0}^{i=n} F_i \sin^2\frac{\pi x_i}{a}, \\ C_2 &= \frac{\pi V \sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}{ga}\sum_{i=0}^{i=n} F_i \sin\frac{2\pi x_i}{a}, \\ C_3 &= \frac{abD\pi^4}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{ab}{4}c - \frac{\pi^2 V^2 \sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}{ga^2}\sum_{i=0}^{i=n} F_i \sin^2\frac{\pi x_i}{a}, \\ C_4 &= \sin\frac{\pi\sigma}{2}\sum_{i=0}^{i=n} F_i \sin\frac{\pi x_i}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ţinînd seama de relaţiile (17), ecuaţia diferenţială (13) devine

$$\left[\frac{mab}{4}+\frac{\sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}{g}\sum_{i=0}^{i=n}F_i\sin^2\frac{\pi x_i}{2}\right]\ddot{T}_{(t)}+\frac{\pi V\sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}{ga}\sum_{i=0}^{i=n}F_i\sin\frac{2\pi x_i}{a}\dot{T}_{(t)}+$$

$$+\left[\frac{abD\pi^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{ab}{4}c-\frac{\pi^2V^2\sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}{ga^2}\sum_{i=0}^{i=n}F_i\sin^2\frac{\pi x_i}{a}\right]T_{(t)}= \tag{18}$$

$$=\sin\frac{\pi\sigma}{2}\sum_{i=0}^{i=n}F_i\sin\frac{\pi x_i}{a}.$$

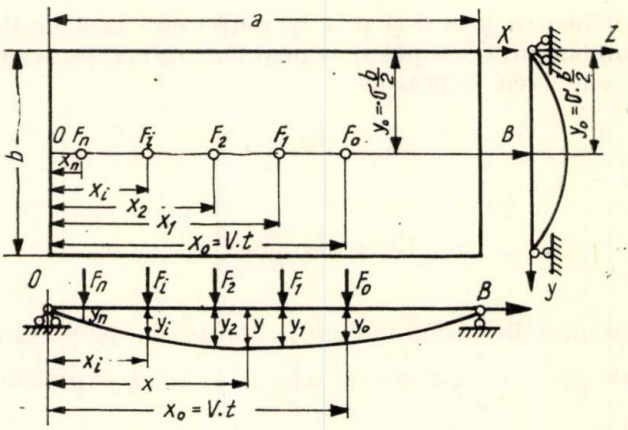


Fig. 2

Făcînd notaţiile

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\pi V}{a}=\varepsilon,\\&\frac{\pi d_i}{a}=\beta_i,\\&mabg=G,\\&\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2\frac{D}{m}+\frac{\pi^4}{a^4b^4}(a^2+b^2)\frac{Eh^3}{12\,m\,(1-\mu^2)}=\omega^2\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

şi ţinînd seama de relaţiile

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\pi x_i}{a} = \frac{\pi V t}{a} - \frac{\pi d_i}{a} = \varepsilon t - \beta_i, \\ &2\sin^2(\varepsilon t - \beta_i) = 1 - \cos 2(\varepsilon t - \beta_i), \\ &\sin 2(\varepsilon t - \beta_i) = \sin 2\varepsilon t \cos 2\beta_i - \cos 2\varepsilon t \sin 2\beta_i, \\ &\cos 2(\varepsilon t - \beta_i) = \cos 2\varepsilon t \cos 2\beta_i + \sin 2\varepsilon t \sin 2\beta_i, \\ &\frac{c}{m} = \frac{\delta\omega}{\pi} \qquad (\delta \text{ fiind decrementul logaritmic}) \end{aligned}\right\}, \tag{20}$$

ecuaţia diferenţială (18) se poate scrie astfel:

$$(1 + \eta_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon t - \eta_2 \sin 2\varepsilon t)\,\ddot{T}_{(t)} + 2\varepsilon\,(\eta_1 \sin 2\varepsilon t - \eta_2 \cos 2\varepsilon t)\,\dot{T}_{(t)} + \\ + (\theta^2 - \varepsilon^2\eta_0 + \varepsilon^2\eta_1 \cos 2\varepsilon t + \varepsilon^2\eta_2 \sin 2\varepsilon t)\,T_{(t)} = 2g\eta_3 \sin \varepsilon t - \\ - 2g\eta_4 \cos \varepsilon t, \tag{21}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{2\sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}{G}\sum_{i=0}^{i=n} F_i, \\ \eta_1 &= \frac{2\sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}{G}\sum_{i=0}^{i=n} F_i \cos 2\beta_i, \\ \eta_2 &= \frac{2\sin^2\frac{\pi\sigma}{2}}{G}\sum_{i=0}^{i=n} F_i \sin 2\beta_i, \\ \eta_3 &= \frac{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}{G}\sum_{i=0}^{i=n} F_i \cos \beta_i, \\ \eta_4 &= \frac{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}{G}\sum_{i=0}^{i=n} F_i \sin \beta_i, \\ \theta^2 &= \omega^2 + \frac{\delta\omega}{\pi}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Expresia (21) reprezintă ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie pentru placa dreptunghiulară simplu rezemată de contur şi acţionată de un convoi de sarcini mobile.

3. STABILIREA EXPRESIEI DEFORMAŢIILOR ŞI A COEFICIENTULUI DINAMIC

Deformaţiile se pot calcula cu uşurinţă cu ajutorul relaţiei (12) dacă se cunoaşte expresia funcţiei $T_{(t)}$. Aceasta se obţine prin rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (21).

Făcînd notaţiile

$$\Delta_{(t)} = 1 + \eta_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon t - \eta_2 \sin 2\varepsilon t, \tag{23}$$

$$Q_{0(t)} = \frac{2\varepsilon(\eta_1 \sin 2\varepsilon t - \eta_2 \cos 2\varepsilon t)}{1 + \eta_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon t - \eta_2 \sin 2\varepsilon t} = \frac{\dot{\Delta}_{(t)}}{\Delta_{(t)}}, \tag{24}$$

$$Q_{1(t)} = \frac{\theta^2 - \varepsilon^2\eta_0 + \varepsilon^2\eta_1 \cos 2\varepsilon t + \varepsilon^2\eta_2 \sin 2\varepsilon t}{1 + \eta_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon t - \eta_2 \sin 2\varepsilon t} = \frac{\theta^2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^2\Delta_{(t)}}{\Delta_{(t)}}, \tag{25}$$

$$Q_{2(t)} = \frac{2g}{\Delta_{(t)}}(\eta_3 \sin \varepsilon t - \eta_4 \cos \varepsilon t), \tag{26}$$

ecuaţia diferenţială (21) se poate scrie sub forma

$$\ddot{T}_{(t)} + Q_{0(t)}\dot{T}_{(t)} + Q_{1(t)}T_{(t)} = Q_{2(t)}. \tag{27}$$

Dacă în ecuaţia diferenţială

$$\ddot{y}_{(\gamma)} + y_{(\gamma)} = F_{(\gamma)} \tag{28}$$

se fac substituţiile

$$\left.\begin{aligned} y_{(\gamma)} &= T_{(t)}\Phi_{(t)}, \\ \gamma &= \Lambda_{(t)} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

şi se admite ipoteza că derivata de ordinul doi a funcţiei $\Lambda_{(t)}$ este nulă ($\ddot{\Lambda}_{(t)} = 0$), se obţine

$$\ddot{T}_{(t)} + \frac{2\dot{\Phi}_{(t)}}{\Phi_{(t)}}\dot{T}_{(t)} + \left(\frac{\ddot{\Phi}_{(t)}}{\Phi_{(t)}} + \dot{\Lambda}^2_{(t)}\right)T_{(t)} = F_{(\gamma)}\frac{\dot{\Lambda}^2_{(t)}}{\Phi_{(t)}}. \tag{30}$$

Ecuaţia diferenţială (28) şi deci ecuaţia diferenţială (30) admite următoarea soluţie generală:

$$y_{(\gamma)} = A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma + \int_{\gamma_0}^{\gamma} F_{(u)} \sin(\gamma - u)\, du, \tag{31}$$

unde A_1 și A_2 sînt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale, iar u este definit de relația

$$u = \Lambda_{(\tau)}, \tag{32}$$

unde

$$0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Ecuația diferențială (27), respectiv ecuația diferențială a mișcării de vibrație (21), fiind similară cu ecuația diferențială (30), va admite o soluție generală de tipul (31) dacă sînt satisfăcute condițiile

$$Q_{0(t)} = 2\frac{\dot{\Phi}_{(t)}}{\Phi_{(t)}}, \tag{33}$$

$$Q_{1(t)} = \frac{\ddot{\Phi}_{(t)}}{\Phi_{(t)}} + \dot{\Lambda}^2_{(t)}, \tag{34}$$

$$Q_{2(t)} = F_{(\gamma)}\frac{\dot{\Lambda}^2_{(t)}}{\Phi_{(t)}}. \tag{35}$$

Deoarece $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \dot{\Lambda}_{(\tau)}$, ținînd seama de expresiile (29), (31) și (35), se obține

$$T_{(t)} = \frac{1}{\Phi_{(t)}}\left[A_1 \cos \Lambda_{(t)} + A_2 \sin \Lambda_{(t)} + \int_0^t \frac{Q_2(\tau)\,\Phi_{(\tau)}}{\dot{\Lambda}_{(\tau)}} \sin(\Lambda_{(t)} - \Lambda_{(\tau)})\,\mathrm{d}\tau\right]. \tag{36}$$

Pentru determinarea constantelor A_1 și A_2 se pun condițiile inițiale (care, pentru $t = 0$, sînt $T_{(0)} = \dot{T}_{(0)} = 0$), obținîndu-se

$$\left.\begin{aligned} A_1 \cos \Lambda_{(0)} + A_2 \sin \Lambda_{(0)} &= 0, \\ -A_1 \sin \Lambda_{(0)} + A_2 \cos \Lambda_{(0)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Determinantul format cu coeficienții necunoscutelor A_1 și A_2 fiind diferit de zero, rezultă

$$A_1 = A_2 = 0, \tag{38}$$

deci expresia (36), care este soluția ecuației diferențiale (21), devine

$$T_{(t)} = \frac{1}{\Phi_{(t)}}\left[f_{1(t)} \sin \Lambda_{(t)} - f_{2(t)} \cos \Lambda_{(t)}\right], \tag{39}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} f_{1(t)} &= \int_0^t \frac{\Phi_{(\tau)}}{\dot{\Lambda}_{(\tau)}} Q_{2(\tau)} \cos \Lambda_{(\tau)} \, \mathrm{d}\tau, \\ f_{2(t)} &= \int_0^t \frac{\Phi_{(\tau)}}{\dot{\Lambda}_{(\tau)}} Q_{2(\tau)} \sin \Lambda_{(\tau)} \, \mathrm{d}\tau. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Se constată că funcţia $T_{(t)}$ este perfect determinată dacă se cunosc expresiile funcţiilor $\Phi_{(t)}$ şi $\Lambda_{(t)}$, care se obţin prin rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale (33) şi (34). Din ecuaţia (33) rezultă

$$\Phi_{(t)} = \sqrt{\Delta_{(t)}} = \sqrt{\alpha_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon t - \eta_2 \sin 2\varepsilon t}. \tag{41}$$

De asemenea, din ecuaţia (34), în care se substituie expresiile (25) şi (41), se obţine

$$\Lambda_{(t)} = \int_0^t \sqrt{\frac{K^2 - \Omega^2 (\eta_1 \cos 2\varepsilon\tau + \eta_2 \sin 2\varepsilon\tau)}{(\alpha_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon\tau - \eta_2 \sin 2\varepsilon\tau)^2}} \, \mathrm{d}\tau, \tag{42}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 + \eta_0, \\ \Omega^2 &= \theta^2 + \varepsilon^2, \\ K^2 &= \alpha_0 \theta^2 + (\eta_1^2 + \eta_2^2 - \alpha_0 \eta_0) \, \varepsilon^2. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} Vt &= a, \\ \varepsilon\tau = \frac{\pi V \tau}{a} &= \frac{\pi x_0}{a}, \end{aligned} \tag{44}$$

expresia (42) se poate scrie sub forma

$$\Lambda_{(t)} = \frac{1}{V} \int_0^a \sqrt{\frac{K^2 - \Omega^2 \left(\eta_1 \cos \dfrac{2\pi x_0}{a} + \eta_2 \sin \dfrac{2\pi x_0}{a}\right)}{\left(\alpha_0 - \eta_1 \cos \dfrac{2\pi x_0}{a} - \eta_2 \sin \dfrac{2\pi x_0}{a}\right)^2}} \, \mathrm{d}x_0. \tag{45}$$

Reprezentînd grafic funcţia ce se integrează (x_0 fiind abscisa punctului de aplicaţie a forţei F_0, care variază între limitele $x_0 = 0$ şi $x_0 = a$), rezultă o curbă foarte apropiată de cea obţinută prin reprezentarea grafică a funcţiei

$$f_{(x_0)} = \frac{\sqrt{K^2 - \eta_1\Omega^2}}{\alpha_0 - \eta_1} - \left(\frac{\sqrt{K^2 - \eta_1\Omega^2}}{\alpha_0 - \eta_1} - \frac{\sqrt{K^2 + \eta_1\Omega^2}}{\alpha_0 + \eta_1}\right)\sin\frac{\pi x_0}{a}. \tag{46}$$

Deci expresia (45) devine

$$\Lambda_{(t)} \simeq \frac{1}{V}\int_0^a f_{(x_0)}\,\mathrm{d}x_0 = \frac{1}{V}\,Sa = St, \tag{47}$$

unde

$$S = \frac{1-e}{\alpha_0 - \eta_1}\sqrt{K^2 - \eta_1\Omega^2} + \frac{e}{\alpha_0 + \eta_1}\sqrt{K^2 + \eta_1\Omega^2}, \tag{48}$$

$$e = \frac{2}{\pi}. \tag{49}$$

Se constată că ipoteza făcută în legătură cu anularea derivatei a doua a funcţiei $\Lambda_{(t)}$ se confirmă.

Ţinînd seama de expresiile (23), (26), (41) şi (47), funcţiile (40) devin

$$\begin{aligned} f_{1(t)} &= \frac{2g}{S}\int_0^t \frac{(\eta_3 \sin\varepsilon\tau - \eta_4\cos\varepsilon\tau)\cos S\tau}{\sqrt{\alpha_0 - \eta_1\cos 2\varepsilon\tau - \eta_2\sin 2\varepsilon\tau}}\,\mathrm{d}\tau, \\ f_{2(t)} &= \frac{2g}{S}\int_0^t \frac{(\eta_3 \sin\varepsilon\tau - \eta_4\cos\varepsilon\tau)\sin S\tau}{\sqrt{\alpha_0 - \eta_1\cos 2\varepsilon\tau - \eta_2\sin 2\varepsilon\tau}}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{50}$$

După efectuarea substituţiei

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_0 - \eta_1\cos 2\varepsilon\tau - \eta_2\sin 2\varepsilon\tau}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha_0 - \eta_1}}\left[1 - \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0 - \eta_1}{\alpha_0 + \eta_1}}\right)\sin\varepsilon t\right], \tag{51}$$

expresiile (50) se pot scrie sub forma

$$\left.\begin{aligned} f_{1(t)} &= \frac{2g}{S\sqrt{\alpha_0 - \eta_1}}\int_0^t \left[1 - \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0 - \eta_1}{\alpha_0 + \eta_1}}\right)\sin\varepsilon\tau\right]\times \\ &\quad \times (\eta_3\sin\varepsilon\tau - \eta_4\cos\varepsilon\tau)\cos S\tau\,\mathrm{d}\tau, \\ f_{2(t)} &= \frac{2g}{S\sqrt{\alpha_0 - \eta_1}}\int_0^t \left[1 - \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0 - \eta_1}{\alpha_0 + \eta_1}}\right)\sin\varepsilon\tau\right]\times \\ &\quad \times (\eta_3\sin\varepsilon\tau - \eta_4\cos\varepsilon\tau)\sin S\tau\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Substituind relațiile (41), (47) și (52) în expresia (39), după efectuarea calculelor se obține

$$T_{(t)} = \frac{2g\eta_3}{(S^2 - \varepsilon^2)\sqrt{(\alpha_0 - \eta_1)(\alpha_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon t - \eta_2 \sin 2\varepsilon t)}} \left\{ \sin \varepsilon t - \right.$$

$$- \frac{\varepsilon}{S} \sin St - \frac{\eta_4}{\eta_3} (\cos \varepsilon t - \cos St) - \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0 - \eta_1}{\alpha_0 + \eta_1}}\right)(S^2 - \varepsilon^2)}{2(S^2 - 4\varepsilon^2)} \left[1 - \right.$$

$$\left. \left. - \cos 2\varepsilon t - \frac{4\varepsilon^2}{S^2} (1 - \cos St) - \frac{\eta_4}{\eta_3} (\sin 2\varepsilon t - \frac{2\varepsilon}{S} \sin St) \right] \right\}. \quad (53)$$

S-a obținut soluția ecuației diferențiale (21). Deci săgeata într-o secțiune curentă a plăcii, conform relației (12), va avea expresia

$$z_{(x,y,t)} = \frac{2g\eta_3 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{(S^2 - \varepsilon^2)\sqrt{(\alpha_0 - \eta_1)(\alpha_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon t - \eta_2 \sin 2\varepsilon t)}} \left\{ \sin \varepsilon t - \right.$$

$$- \frac{\varepsilon}{S} \sin St - \frac{\eta_4}{\eta_3} (\cos \varepsilon t - \cos St) - \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0 - \eta_1}{\alpha_0 + \eta_1}}\right)(S^2 - \varepsilon^2)}{2(S^2 - 4\varepsilon^2)} \left[1 - \right.$$

$$\left. \left. - \cos 2\varepsilon t - \frac{4\varepsilon^2}{S^2} (1 - \cos St) - \frac{\eta_4}{\eta_3} (\sin 2\varepsilon t - \frac{2\varepsilon}{S} \sin St) \right] \right\}. \quad (54)$$

La mijlocul plăcii $\left(x = \frac{a}{2} \text{ și } y = \frac{b}{2} \right)$, expresia săgeții devine

$$z_{\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right)} = \frac{2g\eta_3}{(S^2 - \varepsilon^2)\sqrt{(\alpha_0 - \eta_1)(\alpha_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon t - \eta_2 \sin 2\varepsilon t)}} \left\{ \sin \varepsilon t - \right.$$

$$- \frac{\varepsilon}{S} \sin St - \frac{\eta_4}{\eta_3} (\cos \varepsilon t - \cos St) - \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0 - \eta_1}{\alpha_0 + \eta_1}}\right)(S^2 - \varepsilon^2)}{2(S^2 - 4\varepsilon^2)} \left[1 - \right.$$

$$\left. \left. - \cos 2\varepsilon t - \frac{4\varepsilon^2}{S^2} (1 - \cos St) - \frac{\eta_4}{\eta_3} \left(\sin 2\varepsilon t - \frac{2\varepsilon}{S} \sin St \right) \right] \right\}. \quad (55)$$

Pentru $\varepsilon = S$ şi pentru $2\varepsilon = S$, în expresia (55) intervine cîte o formă nedeterminată $\left(\frac{0}{0}\right)$. După ridicarea nedeterminării se obţine

$$z_{\substack{\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ t\right)\\ \varepsilon = S}} = \frac{g\eta_3}{\varepsilon^2 \sqrt{(\alpha_0 - \eta_1)(\alpha_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon t - \eta_2 \sin 2\varepsilon t)}} \left\{ \sin \varepsilon t - \right.$$

$$- \varepsilon t \left(\cos \varepsilon t - \frac{\eta_4}{\eta_3} \sin \varepsilon t\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0 - \eta_1}{\alpha_0 + \eta_1}}\right)\left[3 + \cos 2\varepsilon t - 4 \cos \varepsilon t - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\eta_4}{\eta_3}(\sin 2\varepsilon t - 2 \sin \varepsilon t)\right]\right\}, \tag{56}$$

$$z_{\substack{\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ t\right)\\ 2\varepsilon = S}} = \frac{g\eta_3}{3\varepsilon^2 \sqrt{(\alpha_0 - \eta_1)(\alpha_0 - \eta_1 \cos 2\varepsilon t - \eta_2 \sin 2\varepsilon t)}} \left\{ 2 \sin \varepsilon t - \right.$$

$$- \sin 2\varepsilon t - \frac{2\eta_4}{\eta_3}(\cos \varepsilon t - \cos 2\varepsilon t) - \frac{3}{4}\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0 - \eta_1}{\alpha_0 + \eta_1}}\right)\left[1 - \cos 2\varepsilon t - \right.$$

$$\left.\left. - \varepsilon t \sin 2\varepsilon t + \frac{\eta_4}{\eta_3}\left(\varepsilon t \cos 2\varepsilon t - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon t\right)\right]\right\}. \tag{57}$$

Expresiile (56) şi (57) fiind funcţii directe de variabila t (nu numai prin intermediul funcţiilor trigonometrice sinus şi cosinus), rezultă că săgeţile vor creşte în timp şi, ca atare, pentru cazul că ε este numeric egal cu S sau 0,5 S se produce fenomenul de rezonanţă, care marchează începutul instabilităţii dinamice a plăcii.

Deci vitezele critice V_c se determină din următoarele ecuaţii de condiţie :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= S, \\ \varepsilon &= 0{,}5\ S. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Ţinînd seama de expresiile (43) şi (48), din prima ecuaţie (58) se determină următoarele două viteze critice :

$$\left.\begin{aligned} V_{c,\,\mathrm{I}} &= \frac{a\theta}{\pi}\sqrt{\frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}}, \\ V_{c,\,\mathrm{II}} &= \frac{a\theta}{\pi}\sqrt{\frac{B - \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}}, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} A &= (1-\mu_0-\mu_1)^2 - 4\mu_0\,\mu_1, \\ B &= \frac{2\,e^2}{\alpha_0+\eta_1}(3\mu_0+\mu_1-1) - \frac{2\,(1-e)^2}{\alpha_0-\eta_1}(\mu_0-\mu_1-1), \\ C &= \frac{6e^2\,(1-e^2)}{\alpha_0^2-\eta_1^2} - \frac{e^4}{(\alpha_0-\eta_1)^2} - \frac{(1-e)^4}{(\alpha_0-\eta_1)^2}, \\ \mu_0 &= \frac{(1-e)^2\,(\eta_1^2+\eta_2^2-\alpha_0\eta_0-\eta_1)}{(\alpha_0-\eta_1)^2}, \\ \mu_1 &= \frac{e^2\,(\eta_1^2+\eta_2^2-\alpha_0\eta_0+\eta_1)}{(\alpha_0+\eta_1)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Din a doua ecuație (58) se obțin expresiile pentru încă două viteze critice :

$$\left.\begin{aligned} V_{c.\,III} &= \frac{a\theta}{\pi}\sqrt{\frac{B_1+\sqrt{B_1^2+4A_1C}}{2A_1}}, \\ V_{c.\,IV} &= \frac{a\theta}{\pi}\sqrt{\frac{B_1-\sqrt{B_1^2+4A_1C}}{2A_1}}, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

unde A_1 și B_1 se obțin din expresiile lui A, respectiv B, prin înlocuirea termenului unitar cu 4.

Coeficienții μ_0 și μ_1 depinzînd de numărul forțelor de pe placă, rezultă că la intrarea fiecărei forțe a convoiului pe placă se poate produce fenomenul de rezonanță dacă viteza de deplasare este egală cu una dintre vitezele critice date de expresiile (59) și (61).

Ținînd seama de relațiile

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon t &= \frac{\pi V t}{a} = \frac{\pi x_0}{a} = \pi\xi \left(\text{unde } \xi = \frac{x_0}{a}\right), \\ 2g &\simeq \frac{G\,a^3 b^3\,(1-\mu^2)\,\omega^2}{4\,E\,h^3\,(a^2+b^2)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

expresia (55) se poate scrie sub forma

$$z_{\left(\frac{a}{2},\,\frac{b}{2},\,\xi\right)} = \frac{G\,a^3 b^3\,(1-\mu^2)\,\omega^2\,\eta_3}{4\,Eh^3(a^2+b^2)^2(S^2-\varepsilon^2)\sqrt{(\alpha_0-\eta_1)\,(\alpha_0-\eta_1\cos 2\pi\xi-\eta_2\sin 2\pi\xi)}} \times$$

$$\times\left\{\sin\pi\xi-\frac{\varepsilon}{S}\sin\frac{S}{\varepsilon}\pi\xi-\frac{\eta_4}{\eta_3}\left(\cos\pi\xi-\cos\frac{S}{\varepsilon}\pi\xi\right)-\right.$$

$$-\frac{\left(1-\sqrt{\frac{\alpha_0-\eta_1}{\alpha_0+\eta_1}}\right)(S^2-\varepsilon^2)}{2\,(S^2-4\varepsilon^2)}\left[1-\cos 2\pi\xi-\frac{4\varepsilon^2}{S^2}\left(1-\cos\frac{S}{\varepsilon}\pi\xi\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\eta_4}{\eta_3}\left(\sin 2\pi\xi-\frac{2\varepsilon}{S}\sin\frac{S}{\varepsilon}\pi\xi\right)\right]\right\}. \tag{63}$$

Săgeata statică Z_{st} din mijlocul plăcii putîndu-se calcula cu ajutorul relației

$$Z_{st}=\frac{a^3b^3\,(1-\mu^2)\sin\dfrac{\pi\sigma}{2}\sum\limits_{i=0}^{i=n}\sin\dfrac{\pi x_i}{a}}{2\,Eh^3\,(a^2+b^2)^2}, \tag{64}$$

coeficientul dinamic ψ, dat de raportul dintre săgeata dinamică și săgeata statică, va avea următoarea expresie pentru viteze diferite de vitezele critice :

$$\psi_{\left(\frac{a}{2},\,\frac{b}{2},\,\xi\right)}=\frac{G\,\omega^2\,\eta_3\left(\sin\dfrac{\pi\sigma}{2}\sum\limits_{i=0}^{i=n}F_i\sin\dfrac{\pi x_i}{a}\right)^{-1}}{2\,(S^2-\varepsilon^2)\sqrt{(\alpha_0-\eta_1)\,(\alpha_0-\eta_1\cos 2\pi\xi-\eta_2\sin 2\pi\xi)}}\times$$

$$\times\left\{\sin\pi\xi-\frac{\varepsilon}{S}\sin\frac{\varepsilon}{S}\pi\xi-\frac{\eta_4}{\eta_3}\left(\cos\pi\xi-\cos\frac{S}{\varepsilon}\pi\xi\right)-\right.$$

$$-\frac{\left(1-\sqrt{\frac{\alpha_0-\eta_1}{\alpha_0+\eta_1}}\right)(S^2-\varepsilon^2)}{2\,(S^2-4\varepsilon^2)}\left[1-\cos 2\pi\xi-\frac{4\varepsilon^2}{S^2}\left(1-\cos\frac{S}{\varepsilon}\pi\xi\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\eta_4}{\eta_3}\left(\sin 2\pi\xi-\frac{2\varepsilon}{S}\sin\frac{S}{\varepsilon}\pi\xi\right)\right]\right\}. \tag{65}$$

De remarcat faptul că termenii S și S^2 care intervin în expresiile (63) și (65) se calculează cu ajutorul formulei (48) numai atîta timp cît este satisfăcută inegalitatea

$$V<V_f=\frac{a\theta}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha_0-\eta_1}{\alpha_0\,\eta_0+\eta_1-\eta_1^2-\eta_2^2}}\neq V_c\,. \tag{66}$$

În caz că această inegalitate nu este satisfăcută, respectiv dacă

$$V > V_f \neq V_c\,, \tag{67}$$

termenii S și S^2 vor conține cîte o parte reală și alta imaginară și, ca atare, în expresiile (63) și (65) se vor introduce termenii $\bar{S}$ și $\bar{S}^2$, care conțin numai partea reală și care se calculează cu ajutorul relațiilor

$$\left.\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{e}{\alpha_0 + \eta_1}\sqrt{K^2 + \eta_1\Omega^2}\,, \\ \bar{S}^2 &= \frac{(1-e)^2\,(K^2 - \eta_1\Omega^2)}{(\alpha_0 - \eta_1)^2} + \frac{e^2\,(K^2 + \eta_1\Omega^2)}{(\alpha_0 + \eta_1)^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Dacă viteza de deplasare a convoiului de forțe este egală cu una dintre vitezele critice, săgețile și coeficienții dinamici se vor calcula cu ajutorul expresiilor următoare:

— *pentru* $V = V_{c.\,I}$ *sau* $V = V_{c.\,II}$:

$$z_{\left(\frac{a}{2},\,\frac{b}{2},\,\xi\right)} =$$

$$= \frac{G\,a^3\,b^3\,(1-\mu^2)\,\omega^2\,\eta_3}{8\,Eh^3\,(a^2+b^2)^2\,\varepsilon^2\sqrt{(\alpha_0-\eta_1)\,(\alpha_0-\eta_1\cos 2\pi\xi-\eta_2\sin 2\pi\xi)}}\times$$

$$\times\left\{\sin\pi\xi - \pi\xi\left(\cos\pi\xi + \frac{\eta_4}{\eta_3}\sin\pi\xi\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0-\eta_1}{\alpha_0+\eta_1}}\right)\left[3 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos 2\pi\xi - 4\cos\pi\xi + \frac{\eta_3}{\eta_4}(\sin 2\pi\,\xi - 2\sin\pi\xi)\right]\right\}, \tag{69}$$

$$\psi_{\left(\frac{a}{2},\,\frac{b}{2},\,\xi\right)} = \frac{G\,\omega^2\,\eta_3\left(\sin\dfrac{\pi\sigma}{2}\sum\limits_{i=0}^{i=n} F_i\sin\dfrac{\pi x_i}{a}\right)^{-1}}{4\,\varepsilon^2\sqrt{(\alpha_0-\eta_1)\,(\alpha_0-\eta_1\cos 2\pi\xi-\eta_2\sin 2\pi\xi)}}\left\{\sin\pi\xi - \right.$$

$$- \pi\xi\left(\cos\pi\xi + \frac{\eta_4}{\eta_3}\sin\pi\xi\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0-\eta_1}{\alpha_0+\eta_1}}\right)\left[3 + \cos 2\pi\xi - \right.$$

$$\left.\left. - 4\cos\pi\xi + \frac{\eta_3}{\eta_4}(\sin 2\pi\xi - 2\sin\pi\xi)\right]\right\}; \tag{70}$$

— *pentru* $V = V_{c,\,III}$ *sau* $V = V_{c,\,IV}$:

$$z_{\left(\frac{a}{2},\,\frac{b}{2},\,\xi\right)} =$$

$$= \frac{G a^3 b^3 (1-\mu^2)\,\omega^2 \eta_3}{24\,Eh^3 (a^2+b^2)^2 \varepsilon^2 \sqrt{(\alpha_0-\eta_1)(\alpha_0-\eta_1\cos 2\pi\xi-\eta_2\sin 2\pi\xi)}} \times$$

$$\times\left\{2\sin\pi\xi-\sin 2\pi\xi-\frac{2\eta_4}{\eta_3}(\cos\pi\xi-\cos 2\pi\xi)-\frac{3}{4}\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{\frac{\alpha_0-\eta_1}{\alpha_0+\eta_1}}\right)\left[1-\cos 2\pi\xi-\pi\xi\sin 2\pi\xi+\frac{\eta_4}{\eta_3}\left(\pi\xi\cos 2\pi\xi-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{2}\sin 2\pi\xi\right)\right]\right\}, \qquad (71)$$

$$\psi_{\left(\frac{a}{2},\,\frac{b}{2},\,\xi\right)} = \frac{G\omega^2\eta_3\left(\sin\frac{\pi\sigma}{2}\sum_{i=0}^{i=n}F_i\sin\frac{\pi x_i}{a}\right)^{-1}}{12\,\varepsilon^2\sqrt{(\alpha_0-\eta_1)(\alpha_0-\eta_1\cos 2\pi\xi-\eta_2\sin 2\pi\xi)}}\left\{2\sin\pi\xi-\right.$$

$$-\sin 2\pi\xi-\frac{2\eta_4}{\eta_3}(\cos\pi\xi-\cos 2\pi\xi)-\frac{3}{4}\left(1-\sqrt{\frac{\alpha_0-\eta_1}{\alpha_0+\eta_1}}\right)\left[1-\right.$$

$$\left.\left.-\cos 2\pi\xi-\pi\xi\sin 2\pi\xi+\frac{\eta_4}{\eta_3}\left(\pi\xi\cos 2\pi\xi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\xi\right)\right]\right\}. \qquad (72)$$

Rezolvarea unui număr mare de probleme a arătat că numai fenomenul de rezonanță provocat de vitezele critice $V_{c,\,I}$ prezintă un pericol real pentru stabilitatea dinamică a grinzii.

Pentru exemplificarea modului de folosire a formulelor stabilite în această lucrare, se va prezenta în continuare un exemplu de calcul.

4. APLICAȚIE

Placa unui pod de cale ferată simplu rezemată pe contur este realizată din oțel, cu modulul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², decrementul logaritmic $\delta = 0{,}09$, coeficientul de contracție transversală $\mu = 0{,}30$, iar dimensiunile plăcii sînt : lungimea $a = 20$ m, lățimea $b = 3{,}85$ m și grosimea $h = 5$ cm (fig. 3). Rezultă deci că masa unității de suprafață a plăcii va fi $m = 4 \cdot 10^{-5}$ kgf/s².cm³, iar greutatea proprie a plăcii $G = 30$ tf.

Convoiul de sarcini mobile care acționează această placă este format din cinci forțe concentrate ce se deplasează (prin rostogolire) după o

dreaptă dată de ecuația $y_0 = \frac{b}{2}$ (deci $\sigma = 1$), distanța dintre forțe fiind $d = 2$.

Se cere să se determine legea de variație a coeficientului dinamic $\psi_{\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \xi\right)}$ și a săgeților $Z_{\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \xi\right)}$ pentru viteze de deplasare de 50, 100, 200 și 278 km/h în ipoteza că raportul dintre dublul unei forțe a convo-

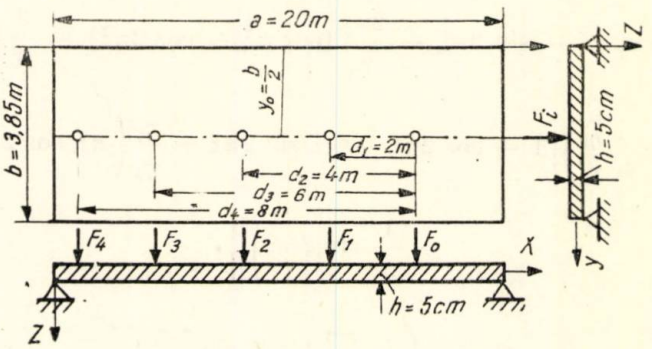


Fig. 3

iului și greutatea totală a plăcii $\left(\alpha = \frac{2F_i}{G}\right)$ este egal cu 0,5, 1,0 și 2,0. De asemenea se vor determina vitezele critice $V_{c.I}$.

Elementele caracteristice ale plăcii vor fi

$$\omega^2 = 2.732 \text{ Hz},$$

$$\theta^2 = \omega^2 + \frac{\delta\omega}{\pi} = 2.810 \text{ (deci } \theta = 53{,}09).$$

Vitezele critice $V_{c.I}$, calculate cu prima expresie (59), au fost date în tabela 1, iar reprezentarea lor grafică s-a făcut în figura 4.

Tabela 1

Vitezele critice $V_{c.I}$ (km/h)

α	x_0(m) / $F = \frac{\alpha G}{2} tf$	La intrarea forțelor pe placă					La ieșirea forțelor de pe placă				
		0—2	2—4	4—6	6—8	8—20	20—22	22—24	24—26	26—28	>28
0,5	7,5	506	498	426	352	278	352	426	498	506	—
1,0	15,0	500	427	357	324	212	324	357	427	500	—
2,0	30,0	435	352	284	200	155	200	284	352	435	

Se observă că, dacă forțele convoiului sînt egale cu 7,5 tf, fenomenul de rezonanță se produce la intrarea primei forțe pe placă, sau la ieșirea penultimei forțe de pe placă în caz că viteza de deplasare a convoiului de forțe este egală cu 506 km/h. În caz că viteza convoiului este de 498 km/h, fenomenul de rezonanță are loc atunci cînd a intrat a doua forță pe placă sau cînd a ieșit antepenultima forța de pe placă; dacă viteza se menține constantă, fenomenul de rezonanță încetează imediat ce a intrat pe placă sau a ieșit de pe placă forța următoare.

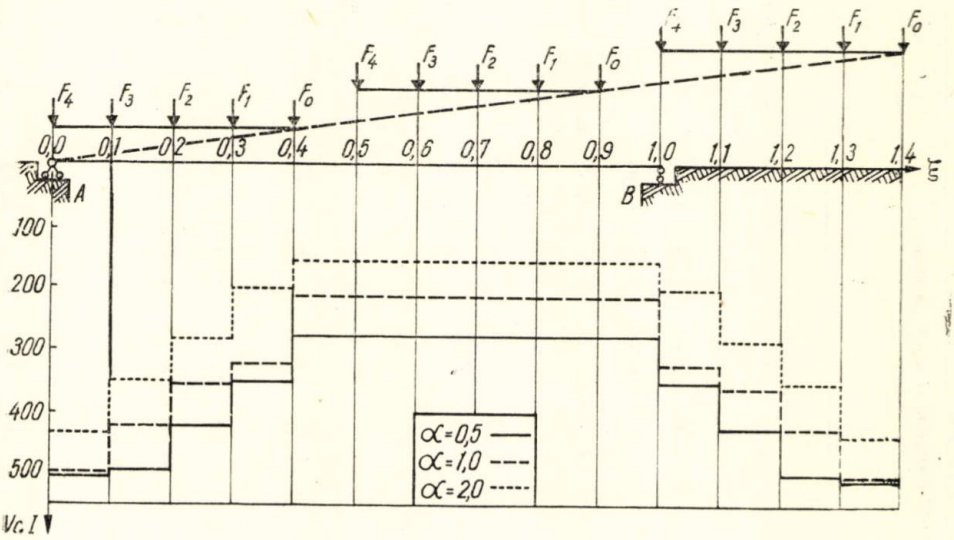


Fig. 4

Pentru cazul analizat, fenomenul de rezonanță prezintă cel mai mare pericol atunci cînd viteza de deplasare este de 278 km/oră, deoarece el se produce la intrarea ultimei forțe pe placă și durează pînă la ieșirea primei forțe de pe placă, ceea ce corespunde timpului necesar ca prima forță a convoiului să parcurgă o distanță de 12 m (în restul cazurilor fenomenul de rezonanță durează numai timpul necesar deplasării forței pe o distanță de 2 m).

Cu ajutorul relației (64) s-au calculat săgețile statice (Z_{st}) corespunzătoare centrului plăcii pentru diferite valori ale raportului $\alpha = \frac{2F_i}{G}$ și pentru diferite poziții ale convoiului de sarcini pe placă. Valorile acestor săgeți (măsurate în mm) au fost date în tabela 2, în liniile corespunzătoare unei viteze de deplasare egale cu zero.

În aceeași tabelă s-au înscris și săgețile dinamice corespunzătoare aceleiași situații pentru care s-au determinat săgețile statice, folosindu-se în acest scop formula (63) pentru $V \neq V_c$ și formula (69) pentru $V = V_{c.I}$.

Tabela 2

Variaţia săgeţilor din centrul plăcii (în mm).

$\alpha = \frac{2F_i}{G}$	V km/h \ ξ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
0,5	0	0,56	1,63	3,10	4,82	6,64	7,80	8,20	7,80	6,64	4,82	3,10	1,63	0,56	0,00
	50	0,85	1,86	0,32	5,81	6,75	9,23	2,23	9,41	7,45	11,79	−1,55	−5,10	−2,83	−2,22
	100	0,59	2,72	4,68	1,64	2,56	10,96	6,78	2,92	11,01	8,19	−2,56	−0,92	−7,80	−2,63
	200	0,26	0,98	2,65	6,18	2,53	5,43	9,91	4,99	1,61	13,04	7,21	−6,56	−2,29	−2,56
	278	0,15	0,23	0,13	0,18	−5,80	5,13	20,85	43,33	72,29	138,22	5,8	3,96	−6,41	−3,94
1,0	0	1,12	3,26	6,20	9,64	13,28	15,60	16,40	15,60	13,28	9,64	6,20	3,26	1,12	0,00
	50	2,03	2,32	10,97	10,92	0,89	17,17	3,58	2,84	12,44	−2,51	16,63	−0,74	−8,99	−4,07
	100	1,26	5,47	16,32	9,80	12,61	3,26	11,94	23,89	9,26	0,77	16,93	−0,52	−11,96	−8,86
	200	0,51	1,77	2,72	4,73	3,80	19,54	26,59	28,78	26,70	12,71	−1,05	2,83	7,61	−6,43
	278	0,28	0,83	−0,35	−0,75	4,07	8,83	2,18	22,88	27,27	32,48	10,52	4,71	−9,13	−7,27
2,0	0	2,24	6,52	12,40	19,28	26,56	31,20	32,80	31,20	26,56	19,28	12,40	6,52	2,24	0,00
	50	4,62	4,86	1,42	9,83	33,13	31,16	8,75	41,99	24,15	7,51	−13,90	−3,38	−23,42	−11,65
	100	2,62	12,84	19,16	31,47	47,47	40,03	19,78	8,01	16,76	38,76	−7,33	−5,10	−23,64	−9,46
	200	0,99	2,88	1,44	−6,50	2,40	16,36	32,72	51,27	70,13	90,10	532,0	−89,80	−23,86	−10,52
	278	0,53	7,66	−0,13	−2,03	−0,37	4,70	13,16	24,42	39,83	75,00	119,3	21,50	−21,55	−15,95

Pentru a pune mai bine în evidenţă influenţa raportului α şi a vitezei de deplasare a convoiului asupra mărimii săgeţilor din centrul plăcii, datele înscrise în tabela 2 au fost reprezentate grafic în figurile 5, 6 şi 7.

Se constată că pentru $\alpha = 0{,}5$ ($F_t = 7{,}5$ t) săgeţile dinamice corespunzătoare unor viteze de deplasare relativ mici (50 şi 100 km/h) nu depăşesc cu mult valorile săgeţilor statice, ele luînd valori maxime atunci cînd prima forţă a convoiului a trecut de mijlocul deschiderii (la $\xi = 0{,}6$ şi $\xi = 0{,}8$ pentru $V = 50$ km/h, respectiv la $\xi = 0{,}6$ şi $\xi = 0{,}9$ pentru $V = 100$ km/h), precum şi atunci cînd această forţă iese de pe grindă, după care săgeţile dinamice iau numai valori negative. Şi în cazul vitezei de 200 km/h săgeţile dinamice depăşesc cu puţin valorile săgeţilor statice, cu excepţia săgeţii obţinute în momentul ieşirii de pe placă a primei forţe a convoiului, care este cu circa 60% mai mare decît săgeata statică maximă.

Pentru viteza de 278 km/h, săgeata dinamică este mult mai mică decît săgeata statică atîta timp cît $\xi < 0{,}5$. Pentru $0{,}5 < \xi < 1{,}0$ se produce însă fenomenul de rezonanţă, care provoacă la intrarea pe placă a ultimei forţe a convoiului o săgeată negativă, care-şi schimbă imediat semnul şi apoi creşte foarte repede în timp, astfel că la ieşirea primei forţe a convoiului de pe placă (cînd încetează fenomenul de rezonanţă) săgeata dinamică este de aproape 17 ori mai mare decît săgeata statică maximă. După aceasta săgeata scade brusc, schimbîndu-se apoi semnul, ca în cazurile vitezelor mai mici.

Cu cît raportul α este mai mare, cu atît efectul dinamic devine mai periculos pentru stabilitatea plăcii. Astfel, pentru viteza de 200 km/h (diferită de viteza critică), săgeata dinamică maximă, corespunzătoare raportului $\alpha = 1{,}0$, este cu circa 75% mai mare decît săgeata statică maximă şi cu circa 175% mai mare decît Z_{st} pentru cazul că $\alpha = 2{,}0$.

Folosind datele din tabela 2, se poate calcula cu uşurinţă variaţia coeficientului dinamic ψ prin împărţirea săgeţilor dinamice la săgeţile statice corespunzătoare.

5. CONCLUZII

a) Sub acţiunea sarcinilor mobile, plăcile pot intra în rezonanţă, producîndu-se astfel fenomenul de instabilitate dinamică a ansamblului placă-convoi de sarcini, caracterizat printr-o creştere în timp a deformaţiilor plăcii, care în general depăşesc limitele admisibile şi au ca efect distrugerea plăcii.

b) Fenomenul de rezonanţă se produce pentru anumite valori ale vitezei de deplasare a convoiului de sarcini, numite „viteze critice", care depind de caracteristicile geometrice, mecanice şi elastice ale plăcii, precum şi de raportul dintre masa corpurilor cărora li se datoresc sarcinile mobile şi masa plăcii, tipul convoiului de sarcini mobile şi poziţia acestuia pe placă.

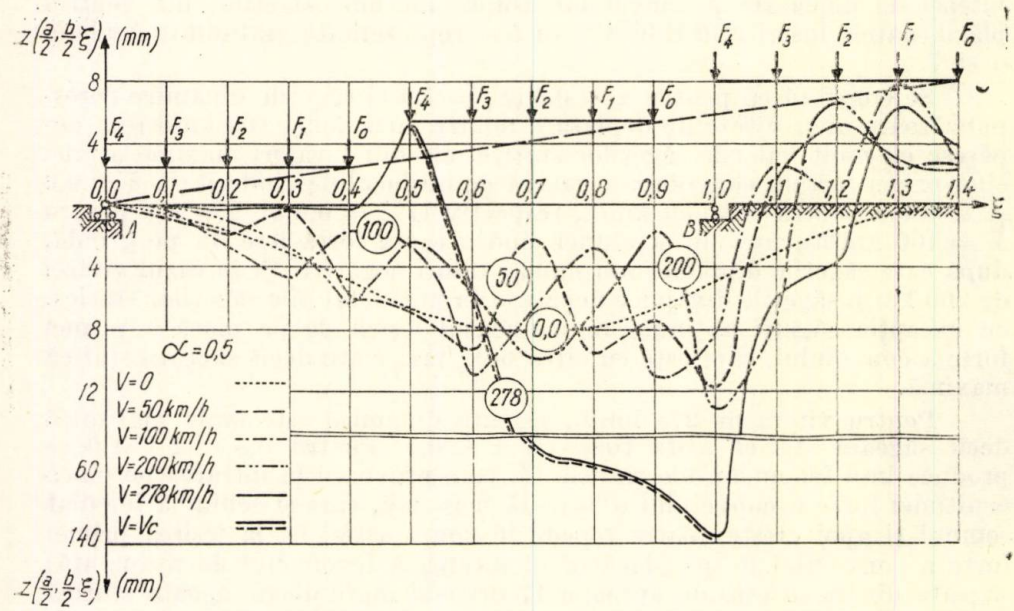

z(a/2, b/2 ξ) (mm)
F4 F3 F2 F1 F0
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 ξ
A
B
100
50
0,0
200
278
α = 0,5
V = 0
V = 50 km/h
V = 100 km/h
V = 200 km/h
V = 278 km/h
V = Vc
8
4
0
4
8
12
60
140

Fig. 5

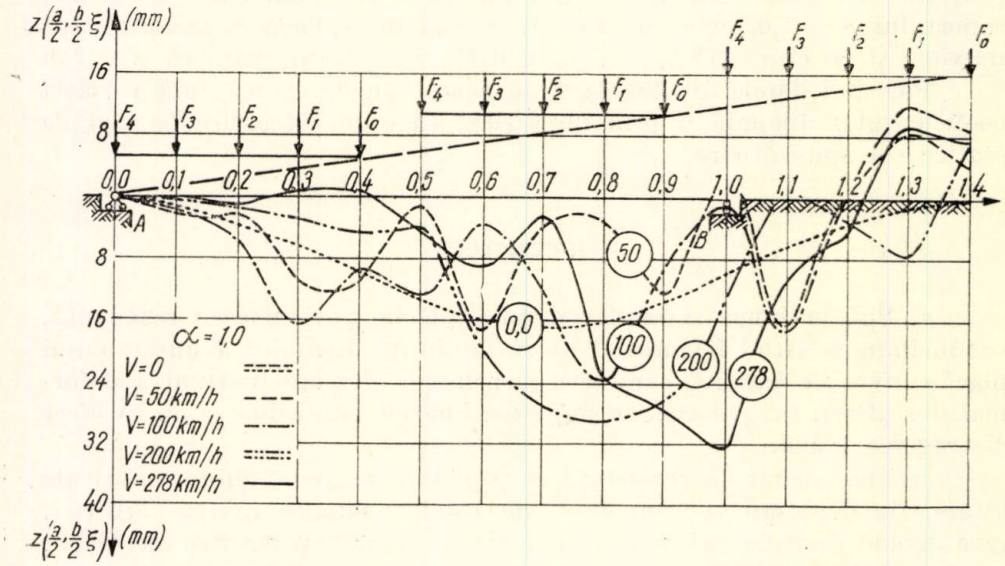

z(a/2, b/2 ξ) (mm)
F4 F3 F2 F1 F0
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 ξ
A
B
50
0,0
100
200
278
α = 1,0
V = 0
V = 50 km/h
V = 100 km/h
V = 200 km/h
V = 278 km/h
16
8
0
8
16
24
32
40

Fig. 6

c) Cu formulele stabilite în lucrare se pot calcula valorile acestor viteze critice, astfel că este posibil să se evite apariția fenomenului de rezonanță printr-o alegere convenabilă a parametrilor plăcii sau ai convoiului de sarcini mobile.

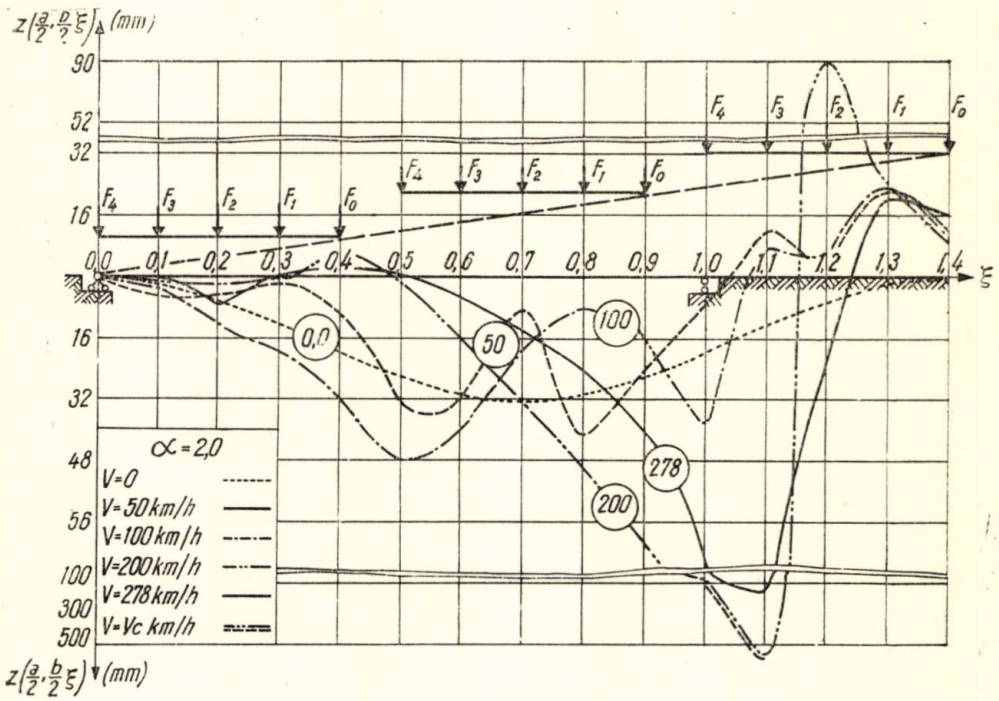


Fig. 7

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. D. N. Popescu, *Aplicații ale teoriei distribuției la studiul vibrațiilor plăcilor solicitate de sarcini mobile*, St. cerc. mec. apl., *1* (1968).
2. — *Determinarea frecvenței vibrațiilor proprii la bare folosind o nouă formă a metodei energetice*, Standardizarea, *2* (1965).
3. — *La vibration des éléments de resistance sous l'action des charges mobiles*, „15-ème Congres International de Communications", Genova (Italia), 12—15 octombrie, 1967.

AUTOVIBRAȚII LA STRUNJIREA AXELOR ZVELTE

de SERGIU CHIRIACESCU

Institutul politehnic Brașov

Precizia prelucrării prin așchiere este determinată de menținerea poziției relative inițiale (reglate) dintre sculă și piesa care se prelucrează. Modificarea acestei poziții se datorește unor factori de natură statică sau dinamică.
Cu aceste considerații, în lucrare se prezintă: ecuațiile generatoarelor axelor strunjite în absența factorilor dinamici; influența variației rigidității piesei care se prelucrează asupra apariției vibrațiilor; ecuațiile care descriu mișcarea vibratorie și considerații asupra domeniului de stabilitate.

1. ASUPRA STADIULUI ACTUAL AL STUDIULUI VIBRAȚIILOR ÎN PROCESELE DE PRELUCRARE PRIN AȘCHIERE

Obiectivul tehnic-economic al oricărei operații de prelucrare mecanică prin așchiere este realizarea cu cheltuieli minime sau cu o productivitate maximă a unei piese cu o anumită precizie dimensional-geometrică și cu o anumită rugozitate a suprafețelor.

Dacă se iau în considerare numai elementele care concurează în mod direct la generarea unei anumite suprafețe prin așchiere, atunci acest proces poate fi descris de schema funcțională din figura 1.

În această schemă s-a notat:

P — sistemul piesei (piesa, dispozitivul de prindere și subansamblurile mașinii-unelte care concurează în mod direct la prinderea piesei sau la realizarea diverselor mișcări ale acesteia în procesul de așchiere);

S — sistemul sculei (scula, dispozitivul de prindere și subansamblurile mașinii-unelte care concurează nemijlocit la poziționarea sculei și la realizarea diverselor deplasări ale acesteia în procesul de generare a suprafeței);

PA — procesul de așchiere propriu-zis;

$f_1(\tau), f_2(\tau)$ — funcții de timp care indică influența factorilor externi.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 3, P. 547–568, 1970

Obținerea unei suprafețe așchiate cît mai precise este condiționată de menținerea neschimbată a poziției relative dintre tăișul sculei și suprafața piesei ce se prelucrează. Factorii care modifică această poziție pot fi de natură statică sau dinamică. Factorii dinamici, fiind stăpîniți mult mai greu și afectînd de cele mai multe ori substanțial precizia prelucrării și funcționarea mașinii-unelte și a sculei, prezintă interes teoretic și experimental deosebit. Se poate vorbi la ora actuală despre o adevărată știință a fenomenelor dinamice în procesele de așchiere, așa cum o atestă o serie de tematici [3], [7], [18] etc. și numeroasele articole care se ocupă cu diversele aspecte ale dinamicii așchierii propriu-zise, ale dinamicii mașinilor-unelte sau cu dinamica interacțiunilor din timpul proceselor de prelucrare prin așchiere.

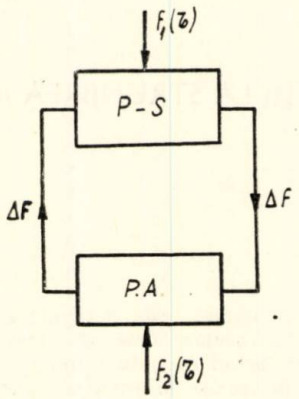


Fig. 1

Presupunînd că prelucrarea decurge în absența factorilor dinamici, datorită eforturilor de așchiere sistemul P sau S se deplasează față de poziția inițială cu mărimea f_s. La apariția factorilor dinamici, punctul $P(f_s, F)$ nu mai are o determinare stabilă, ci ocupă diverse poziții (variabile în timp) în jurul punctului de stabilitate statică P_s (fig. 2). Acest lucru se datorește variațiilor ΔF și Δf cauzate de factorii externi sau de cei legați de $P-S$ și $P.A$, precum și influenței reciproce dintre sistemele $P-S$ și $P.A$.

Plecînd de la aceste constatări, cercetările desfășurate în cele cîteva școli cu rezultate originale, cum ar fi școala cehoslovacă, școala engleză sau școala sovietică, analizează factorii care pot da naștere fenomenelor vibratorii în procesele de prelucrare prin așchiere și modul în care pot fi evitate sau diminuate zonele de instabilitate dinamică. Atenția cea mai mare, cum era și firesc, este acordată autovibrațiilor.

a) Școala cehoslovacă (Tlusty, Polacek ș. a.) [3] se ocupă în special de dinamica mașinii-unelte. Aceasta este redusă pentru calcul la un sistem vibratoriu cu două grade de libertate (Polacek încearcă extinderea teoriei pentru un sistem cu un număr infinit de grade de libertate).

Mișcările vibratorii sînt studiate la limita de stabilitate, forța de așchiere care întreține vibrația putînd fi liniarizată. Rezultatele studiilor

teoretice pentru o anumită mașină-unealtă sînt prezentate sub forma unor diagrame de stabilitate.

b) Prin reprezentantul său principal, Tobias [18], școala engleză se ocupă mai ales de fenomenele vibratorii cauzate de fenomenele intrin-

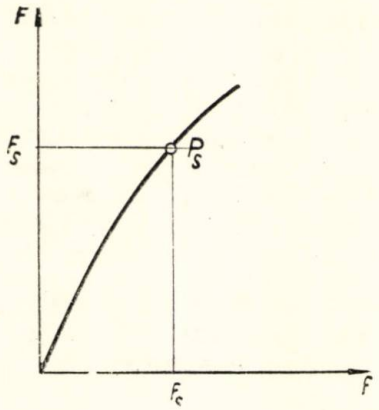


Fig. 2

seci ale așchierii. Pentru calcul, subansamblurile mașinii-unelte sînt reduse la sisteme vibratorii cu un singur grad de libertate.

Forța de așchiere care întreține mișcarea autooscilatorie este liniarizată în funcție de fiecare factor care-i determină variația, efectul total obținîndu-se prin aplicarea principiului superpoziției permis de ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți care descriu mișcările vibratorii în sistemele de calcul considerate.

Și Tobias recomandă folosirea rezultatelor calculului prin utilizarea unor diagrame de stabilitate.

c) Școala sovietică a parcurs două etape de bază : prima inițiată și condusă la Institutul politehnic din Leningrad de A. P. Sokolovski [14], [15], [21], iar a doua dezvoltată în prezent de V. A. Kudinov, M. E. Eliasberg ș. a. la E.N.I.M.S.

Sokolovski caută să descrie cantitativ autooscilațiile prin găsirea relației neliniare dintre forța de așchiere și deplasarea tăișului sculei sau a piesei față de poziția reglată. Aceeași idee stă și la baza lucrării [19].

Lucrările lui Kudinov încearcă pe o cale proprie să facă legătura dintre studiul stabilității dinamice în procesul de așchiere ($P.A$) și în sistemele mașinii-unelte (P, S). O asemenea încercare, prin folosirea directă a rezultatelor lui Tlusty și Tobias, se află și în lucrarea [11].

După cum rezultă din cele de mai sus, date fiind dificultățile de calcul, vibrațiile în procesele de prelucrare prin așchiere sînt studiate pe modele vibratorii echivalente cu unul sau cu două grade de libertate. Majoritatea cercetătorilor consideră dependența dintre forța de așchiere și factorii care-i determină variația sub formă liniară. Încercările de determinare a relației neliniare dintre forța de așchiere și deplasarea tăișului sculei sau a piesei față de poziția reglată [14], [19], [21] etc.

n-au dat rezultate care să fie unanim acceptate. Probabil că limitele acestor încercări se datoresc insuficientei elucidări a problemelor mecanicii aşchierii metalelor (de altfel se afirmă tot mai des că studiul, foarte tînăr, al vibraţiilor în procesele de aşchiere a luat o dezvoltare mai mare decît mecanica aşchierii).

În această situaţie, cunoscut fiind faptul că autovibraţiile sînt prin esenţă fenomene neliniare şi ţinînd seama de marea complexitate a fenomenelor aşchierii, este, poate, mai raţional a aborda problema autovibraţiilor pe calea dialectică de la efect la cauză. În particular, este, poate, mai bine a încerca găsirea relaţiei dintre forţa de aşchiere şi deplasarea tăişului sculei şi a piesei pe baza aspectului constatat al fenomenelor autovibratorii. În stadiul actual, acest lucru este posibil, datorită marelui număr de observaţii experimentale acumulate.

2. INFLUENŢA DEFORMAŢIILOR LENTE ALE SISTEMULUI TEHNOLOGIC ASUPRA PRECIZIEI DIMENSIONALE A SUPRAFEŢELOR STRUNJITE ŞI ASUPRA MĂRIMII FORŢELOR DE AŞCHIERE

Complexitatea fenomenelor de aşchiere nu a permis pînă în prezent găsirea unor relaţii generale care să ţină seama în mod explicit de toţi factorii care determină mărimea şi direcţia forţelor de aşchiere. Din acest motiv, chiar şi pentru prelucrările mai mult studiate (strunjirea, frezarea, etc.), se folosesc relaţii semiempirice, valabile în anumite limite, care ţin seama în mod explicit numai de factorii care au influenţa cea mai mare.

De exemplu, pentru calculul componentelor forţei de aşchiere la strunjire se folosesc relaţii de forma :

$$F = C_F t^{x_F} s^{y_F} \tag{1}$$

în care :

C_F, x_F, y_F, sînt coeficienţi, determinaţi experimental, care ţin seama de : materialul sculei şi cel de prelucrat, geometria şi uzura tăişurilor sculei, lichidul de aşchiere folosit, etc.

t [mm] — adîncimea de aşchiere ;

s [mm/rot] — avansul de generare.

Pentru prelucrare cuţitul de strung este reglat în poziţia I (fig. 3) la o anumită adîncime de aşchiere t_i = const. În timpul strunjirii, ca urmare a forţelor de aşchiere, atît scula cît şi piesa se deplasează ocupînd poziţiile II.

2.1. ECUAŢIILE GENERATOARELOR SUPRAFEŢELOR STRUNJITE

Ecuaţiile generatoarelor suprafeţelor strunjite se vor calcula în situaţia în care deplasarea vîrfului cuţitului este măsurată de-a lungul axelor principale de rigiditate [3], [7], [9], etc. în situaţia în care aceeaşi

deplasare se măsoară pe direcția rezultantei forțelor de așchiere F și în cazul în care se iau în considerare numai deplasările pe direcția axei y (fig. 3).

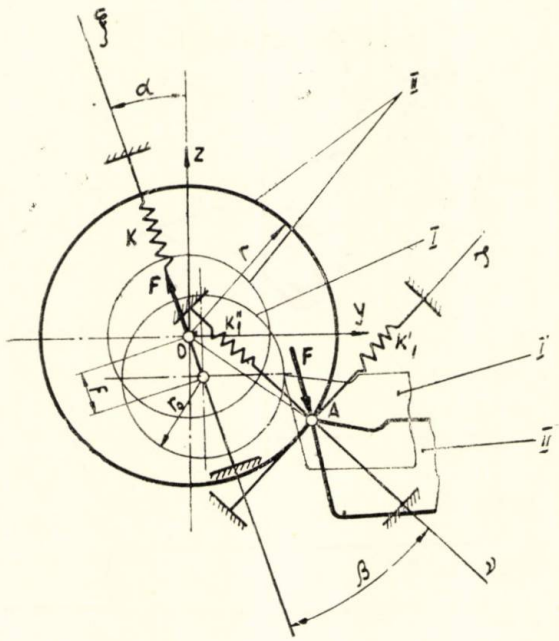


Fig. 3

2.1.1. Deplasarea vîrfului sculei este măsurată de-a lungul axelor principale de rigiditate

Dacă se notează cu α unghiul făcut de rezultanta F cu axa OZ, cu f deformația sistemului piesei și cu f_1' și f_1'' deformațiile sistemului sculei după cele două axe principale de rigiditate atunci, folosind figura 3, rezultă raza instantanee a suprafeței prelucrate :

$$r =$$

$$= \sqrt{\left[f\cos\alpha + f_1\cos\left(\alpha+\beta-\operatorname{arctg}\frac{f_1'}{f_1''}\right)\right]^2 + \left[r_0 + f\sin\alpha + f_1\sin\left(\alpha+\beta-\operatorname{arctg}\frac{f_1'}{f_1''}\right)\right]^2} \approx$$

$$\approx r_0 + \frac{1}{2r_0}\left\{r_0^2 + f^2 + f_1^2 + 2ff_1\left[\sin\alpha\sin\left(\alpha+\beta-\operatorname{arctg}\frac{f_1'}{f_1''}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos\alpha\cos\left(\alpha+\beta-\operatorname{arctg}\frac{f_1'}{f_1''}\right)\right] + 2r_0 f_1\sin\left(\alpha+\beta-\operatorname{arctg}\frac{f_1'}{f_1''}\right)\right\}. \qquad (2)$$

Deplasarea f se deduce în funcţie de modul de prindere al piesei la prelucrare. În figura 4 sînt prezentate cele trei posibilităţi de prindere la strunjirea fără folosirea lunetei. După cum se observă, schema din

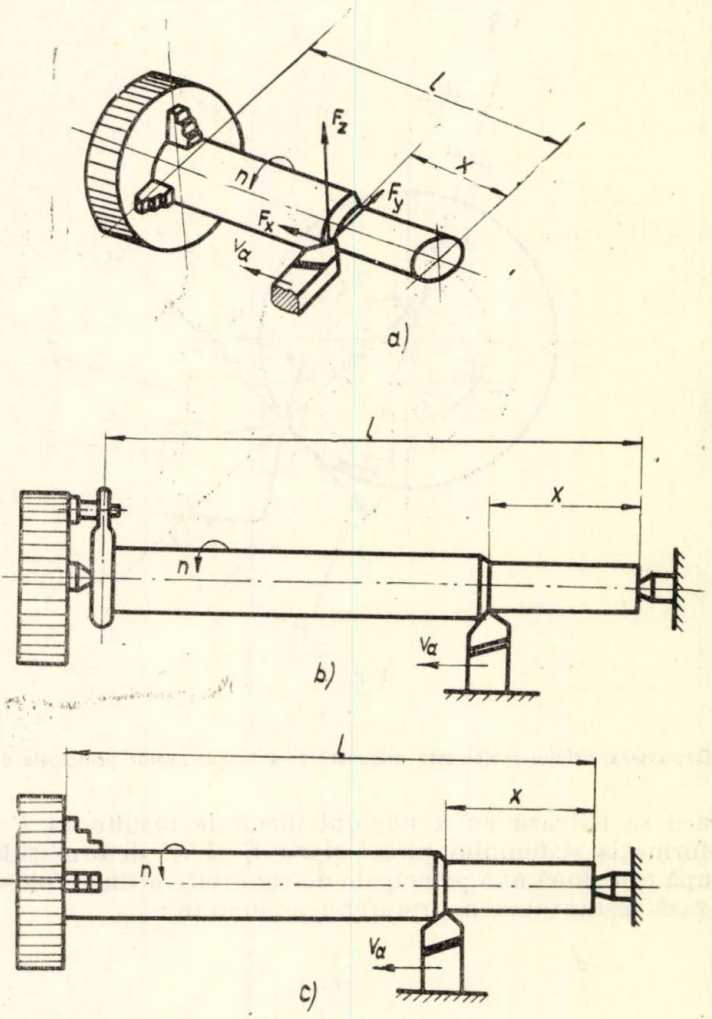


Fig. 4

figura 4 *a*) se poate asimila unei grinzi încastrate la un capăt şi liberă la celălalt, schema din figura 4 *b*) unei grinzi rezemată la ambele capete, iar schema din figura 4 *c*) unei grinzi încastrată la un capăt şi liberă la celălalt.

În baza acestor asimilări este posibil a calcula deplasarea instantanee a axei neutre a piesei (neglijînd influenţa forţei de aşchiere axiale şi a momentului de torsiune). Pentru aceasta trebuie însă să se ţină seama că reazemele sau încastrarea nu sînt perfect rigide. Din acest motiv, de exemplu pentru prinderea după schema din figura 4 *b*) schema de calcul

este cea din figura 5, în care K_2 și K_3 reprezintă rigiditatea păpușii mobile respectiv a subansamblului axului principal al strungului.

În conformitate cu figura 5 deplasarea f este :

$$f = f' + f''. \tag{3}$$

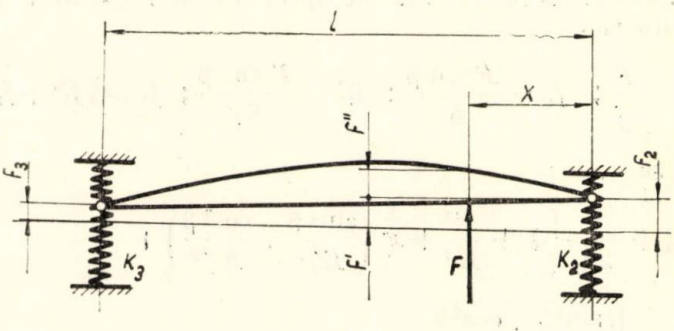


Fig. 5

Notînd cu f_2 și f_3 deplasările instantanee ale celor două reazeme relația (3) se scrie :

$$f = f_2 - \frac{x}{l}(f_2 - f_3) + \frac{Fx^2(l-x)^2}{3EIl}. \tag{3'}$$

Dacă se consideră rigidități constante pentru cele două reazeme (rigidități rezultate din liniarizarea dependenței dintre forța și deformația fiecărui reazem) se poate scrie

$$f_2 = \frac{F(l-x)}{K_2 l}; \quad f_3 = \frac{Fx}{k_3 l},$$

în care caz, folosind relația (3') se obține formula de calcul a rigidității echivalente a sistemului piesei în punctul de aplicare a forței F :

$$\frac{1}{K} = \frac{f}{F} = \frac{(l-x)^2}{K_2 l^2} + \frac{x^2}{K_3 l^2} + \frac{x^2(l-x)^2}{3EIl}, \tag{4}$$

unde EI este rigiditatea la încovoiere a piesei care se prelucrează.

În mod analog se obțin și formulele pentru calculul rigidității echivalente la prelucrarea după schema din figura 4 *a*)

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_3} + \frac{(l-x)^3}{3EI} \tag{5}$$

și la prelucrarea după schema din figura 4 *c*) ;

$$\frac{1}{K} = \frac{2l^3 - 3l^2x + x^3}{2l^3}\left(\frac{1}{K_2} - \frac{x}{lK_3}\right) + \frac{x(3l^2 - x^2)}{2l^4 x_2} + \frac{x^2(l-x)^2}{12EIl^3}(3l^2 - 6lx + x^2). \tag{6}$$

Din formulele (4)—(6) rezultă că rigiditatea echivalentă a sistemului piesei nu este constantă ci variază în timpul prelucrării în funcție de deplasarea „axială" a cuțitului (x).

Pentru determinarea ecuațiilor generatoarelor suprafețelor strunjite se presupune că rigiditatea sistemului sculei rămîne constantă în timpul deplasării „axiale" a sculei (situație apropiată de realitate). În acest caz, ținînd seama că:

$$f = \frac{F}{f}; \quad f_1' = \frac{F \sin \beta}{K_1'}; \quad f_1'' = \frac{F \cos \beta}{K_1''}; \quad f_1 = \sqrt{f_1'^2 + f_1''^2},$$

relația (2) se scrie:

$$r \approx r_0 + \frac{1}{2r_0}\left\{r_0^2 + \frac{F^2}{K^2} + F^2\left(\frac{\sin^2\beta}{K_1'^2} + \frac{\cos^2\beta}{K_1''^2}\right) + \right.$$

$$+ 2F^2 \frac{\sqrt{\frac{\sin^2\beta}{K_1'^2} + \frac{\cos^2\beta}{K_1''^2}}}{K} \sin\alpha \sin\left[\alpha + \beta - \operatorname{arctg}\left(\frac{K_1''}{K_1'} \operatorname{tg}\beta\right)\right] +$$

$$+ 2F^2 \frac{\sqrt{\frac{\sin^2\beta}{K_1'^2} + \frac{\cos^2\beta}{K_1''^2}}}{K} \cos\alpha \cos\left[\alpha + \beta - \operatorname{arctg}\left(\frac{K_1''}{K_1'} \operatorname{tg}\beta\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{2r_0F}{K} \sin\left[\alpha + \beta - \operatorname{arctg}\left(\frac{K_1''}{K_1'} \operatorname{tg}\beta\right)\right]\right\}. \qquad (2')$$

Ca urmare a deplasării relative dintre tăișul sculei și piesă adîncimea instantanee de așchiere va fi

$$t = t_0 - (r - r_0).$$

În acest caz, folosind formula (1), forța de așchiere devine

$$F_s = C_F s^{y_F} [t_0 - (r - r_0)]^{x_F}. \qquad (1')$$

Dezvoltînd relația (1') în serie Mac-Laurin și păstrînd numai primii doi termeni se obține

$$F_s = C_1 - C_2 (r - r_0). \qquad (7)$$

Ținînd seama de relația (7) formula (2'), după transformări se scrie

$$r \approx r_0 + 2\frac{a}{b} - \frac{e}{2a} \qquad (2'')$$

unde s-a notat

$$a = r_0 + C_1C_2\left(\frac{1}{K^2} + \frac{\sin^2\beta}{K_1'^2} + \frac{\cos^2\beta}{K_1''^2}\right) + \frac{2\,C_1C_2}{K}\sqrt{\frac{\sin^2\beta}{K_1'^2} + \frac{\cos^2\beta}{K_1''^2}} \times$$

$$\times \left\{\sin\alpha \sin\left[\alpha + \beta - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{K_1''}{K_1'}\operatorname{tg}\beta\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \cos\alpha \cos\left[\alpha + \beta - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{K_1''}{K_1'}\operatorname{tg}\beta\right)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{2\,r_0C_2}{K}\sin\left[\alpha + \beta - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{K_1''}{K_1'}\operatorname{tg}\beta\right)\right],$$

$$b = C_2^2\left(\frac{1}{K^2} + \frac{\sin^2\beta}{K_1'^2} + \frac{\cos^2\beta}{K_1''^2}\right) + \frac{2\,C_2^2}{K^2}\sqrt{\frac{\sin^2\beta}{K_1'^2} + \frac{\cos^2\beta}{K_1''^2}} \times$$

$$\times \left\{\sin\alpha \sin\left[\alpha + \beta - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{K_1''}{K_1'}\operatorname{tg}\beta\right)\right] + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \cos\alpha \cos\left[\alpha + \beta - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{K_1''}{K_1'}\operatorname{tg}\beta\right)\right]\right\},$$

$$e = r_0^2 + C_1^2\left(\frac{1}{K^2} + \frac{\sin^2\beta}{K_1'^2} + \frac{\cos^2\beta}{K_1''^2}\right) + \frac{2\,C_1^2}{K^2}\sqrt{\frac{\sin^2\beta}{K_1'^2} + \frac{\cos^2\beta}{K_1''^2}} \times$$

$$\times \left\{\sin\alpha \sin\left[\alpha + \beta - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{K_1''}{K_1'}\operatorname{tg}\beta\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \cos\alpha \cos\left[\alpha + \beta - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{K_1''}{K_1'}\operatorname{tg}\beta\right)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{2\,r_0\,C_1}{K}\sin\left[\alpha + \beta - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{K_1''}{K_1'}\operatorname{tg}\beta\right)\right].$$

Relația (2″) reprezintă ecuația generală a generatoarelor suprafețelor strunjite. Pentru valorile rigidității K determinate prin relațiile (4), (5) sau (6) se obține ecuațiile generatoarelor pentru fiecare din cazurile prezentate în figura 4.

2.1.2. Deplasarea tăișului sculei este măsurată pe direcția forței F

Folosind figura 6 adîncimea de așchiere instantanee este

$$t = t_0 - (r - r_0) = t_0 - (f + f_1). \tag{9}$$

Dacă în figura 3 se consideră $\beta = 0$ atunci, după aceeași metodică ca la 2.1.1, se obține

$$r \approx r_0 + \frac{r_0 + C_1C_2\left(\frac{1}{K^2} + \frac{1}{K_1^2}\right) + r_0C_2\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_1}\right)\sin\alpha}{C_2^2\left(\frac{1}{K^2} + \frac{1}{K_1^2}\right)} -$$

$$- \frac{C_1^2\left(\frac{1}{K^2} + \frac{1}{K_1^2}\right) + 2\,r_0C_1\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_1}\right)\sin\alpha}{2\left[r_0 + C_1C_2\left(\frac{1}{K^2} + \frac{1}{K_1^2}\right) + C_2\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_1}\right)\sin\alpha\right]}, \qquad (10)$$

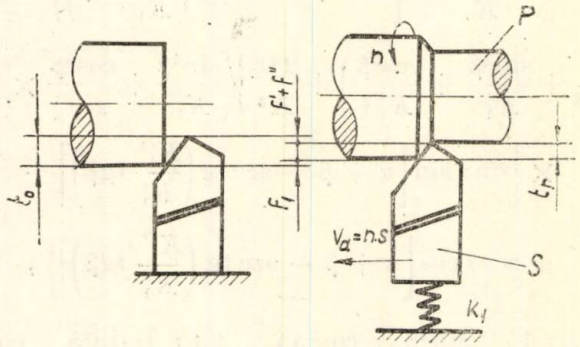


Fig. 6

în care prin K_1 s-a notat rigiditatea sistemului sculei măsurată pe direcția forței F, iar rigiditatea K este calculată cu una din relațiile (4), (5) sau (6).

2.1.3. Deplasarea sculei și piesei se produc pe direcția axei oy (fig. 3)

După cum rezultă din cele de mai sus folosirea relațiilor (2″) sau (10) este foarte dificilă. Din acest motiv, așa cum se procedează în calculele practice [5], [6], [7], [14], etc., se va analiza și cazul în care se consideră că scula și piesa au deplasări numai în lungul axei oy.

Pentru schema de prelucrare din figura 4 *b*), ținînd seama că $f = \frac{F}{K}$; $f_1 = \frac{F}{K_1}$ și folosind relațiile (4) și (7), se obține

$$r = r_0 + \frac{C_1\left[\frac{(l-x)^2}{K_2 l^2} + \frac{x^2}{K_3 l^2} + \frac{x^2(l-x)^2}{3\,EI\,l} + \frac{1}{K_1}\right]}{1 + C_2\left[\frac{(l-x)^2}{K_2 l^2} + \frac{x^2}{K_3 l^2} + \frac{x^2(l-x)^2}{3\,EI\,l} + \frac{1}{K_1}\right]}. \qquad (11)$$

Procedînd analog se găsește :

— pentru prelucrarea după schema din figura 4 *a*

$$r = r_0 + \frac{C_1\left[\frac{1}{K_3} + \frac{(l-x)^3}{3\,EI} + \frac{1}{K_1}\right]}{1 + C_2\left[\frac{1}{K_3} + \frac{(l-x)^3}{3\,EI} + \frac{1}{K_1}\right]}, \tag{12}$$

— pentru prelucrarea după schema din figura 4 *c*

$$=r_0 + \frac{C_1\left[\frac{2\,l^3-3\,l^2\,x+x^3}{2\,l^3}\left(\frac{1}{K_2} - \frac{x}{l\,K_3}\right) + \frac{x(3\,l^2-x^2)}{2l^4\,K_2} + \frac{x^2\,(l-x)^2}{12\,EI\,l^4}\,(3\,l^2-6\,lx+x^2) + \frac{1}{K_1}\right]}{1+C_2\left[\frac{2l^3-3l^2\,x+x^3}{2l^3}\left(\frac{1}{K_2} - \frac{x}{lK_3}\right) + \frac{x(3l^2-x^2)}{2l^4\,K_2} + \frac{x^2\,(l-x)^2}{12\,EI\,l^4}\,(3l^2-6l\,x+x^4) + \frac{1}{K_1}\right]}. \tag{13}$$

Relațiile prin care se calculează raza instantanee a suprafeței strunjite, după una dintre schemele din figura 4, diferă în mod esențial de relațiile întîlnite în literatura tehnică de specialitate [5], [6] etc. Această diferență rezultă din aceea că la deducerea lor s-a ținut seama de variația forței de așchiere cu deformația sistemului tehnologic elastic ($P-S$).

Trebuie reținut că relațiile deduse sînt valabile în absența fenomenelor vibratorii, adică pentru deformații statice ale sistemului tehnologic.

2.2. VARIAȚIA FORȚELOR DE AȘCHIERE CU DEFORMAȚIILE LENTE ALE SISTEMULUI TEHNOLOGIC

În timpul prelucrării ($x \neq$ const), ca urmare a modificării rigidităților sistemului tehnologic, apare o variație a forțelor de așchiere. Această variație (statică) rezultă din formula (7)

$$\Delta\, \bar{J} = F_s - C_1 = -\,C_2\,(r - r_0), \tag{14}$$

în care $(r - r_0)$ se calculează din relațiile care dau raza instantanee a suprafeței prelucrate. De exemplu, pentru cazul 2.1.3, variația forței F_y la strunjirea după schema din figura 4 *b* (relația (11)) este

$$\Delta F_s = -\,\frac{C_1 C_2\left[\frac{(l-x)^2}{K_2\,l^2} + \frac{x^2}{K_3\,l^2} + \frac{x^2\,(l-x)^2}{3\,EI\,l} + \frac{1}{K_1}\right]}{1 + C_2\left[\frac{(l-x)^2}{K_2\,l^2} + \frac{x^2}{K_3\,l^2} + \frac{x^2\,(l-x)^2}{3\,EI\,l} + \frac{1}{K_1}\right]}. \tag{15}$$

Variațiile de forma (15) se numesc variații statice, datorită caracterului lor lent de manifestare în timp. După cum se poate observa, la deducerea lor s-a presupus că deformațiile sistemului tehnologic produc numai variația modulului forței F, nu și a direcției acesteia (lucru confirmat, de altfel, în practică).

3. SISTEME VIBRATORII LA STRUNJIRE

Aşa cum s-a arătat în capitolul 1, datorită greutăţilor foarte mari întîmpinate în abordarea fenomenelor oscilatorii pe modele cu un număr infinit de grade de libertate, aproape toţi cercetătorii studiază vibraţiile care apar în procesele de prelucrare prin aşchiere pe modele cu un număr finit de grade de libertate, în particular cu unul sau cu două.

A căpătat generalitate studiul vibraţiilor prin reducerea sistemului tehnologic la două sisteme : cel al piesei şi cel al sculei. După cum rezultă din figura 3, vibraţiile celor două sisteme nu sînt independente, legătura dintre ele făcîndu-se prin intermediul procesului de aşchiere propriu-zis. Rezultă de aici că o etapă importantă în abordarea teoretică a vibraţiilor în procesele de prelucrare prin aşchiere este precizarea forţei F în condiţii dinamice. Variaţia acestei forţe în timp este cauza întreţinerii vibraţiilor care apar la prelucrările prin aşchiere.

3.1. VARIAŢIA TOTALĂ A FORŢEI DE AŞCHIERE

În capitolul 2.1 s-a indicat modul în care forţa F variază cu deformaţiile lente ale sistemului tehnologic ($P \cdot S$). Totuşi, după cum se cunoaşte [1], [3], [7], [18] etc., în afara acestei modificări „statice" a mărimii forţei de aşchiere în procesul vibrator apar variaţii rapide (dinamice) cauzate de o serie de factori, cum ar fi :

— modificarea unghiurilor funcţionale ale tăişului ;
— variaţia vitezei de aşchiere ;
— formării elementelor de aşchie ;
— formării şi desprinderii tăişului de adaos [7] ;
— modificării direcţiilor de deformare din zona de aşchiere [1].

Majoritatea cercetărilor teoretice urmăresc a prinde cantitativ influenţele acestor factori asupra forţei de aşchiere. Uneori se susţine drept cauză mică a autovibraţiilor numai unul sau cîţiva dintre aceşti factori [1], [14], [18] etc. Realitatea este că, în anumite condiţii de prelucrare, forţa de aşchiere poate fi afectată de toţi aceşti factori sau de o parte din ei. La schimbarea condiţiilor de prelucrare este posibil ca variaţia cea mai importantă a forţei de aşchiere să fie determinată tocmai de factorii care în primul caz aveau o influenţă neglijabilă.

Pînă în prezent nu există o formulă generală care să indice modul în care fiecare dintre aceşti factori determină modificarea forţei de aşchiere şi probabil că n-o să existe niciodată dacă se au în vedere dificultăţile întîlnite în descrierea cantitativă a principalelor probleme ale mecanicii aşchierii metalelor. În această situaţie este mai raţional a căuta legea de variaţie dinamică a forţei de aşchiere prin reducerea efectului tuturor factorilor care determină această variaţie la unul singur. Pentru descrierea matematică a fenomenelor autooscilatorii, cel mai raţional este a alege drept factor de reducere deplasarea masei echivalente a sistemului vibrator.

Este un lucru recunoscut unanim că, în cazul unor *vibraţii stabilizate*, modificarea forţei de aşchiere în funcţie de deplasarea relativă dintre tăişul sculei şi piesa care se prelucrează se petrece după o elipsă [3], [7], [10], [14], [20] etc. Parametrii care caracterizează poziţia în

plan și mărimea axelor elipsei depind de condițiile specifice de prelucrare. Fără a restrînge generalitatea, se va analiza această situație pentru cazul în care se consideră că sistemul piesei și cel al sculei în timpul mișcării

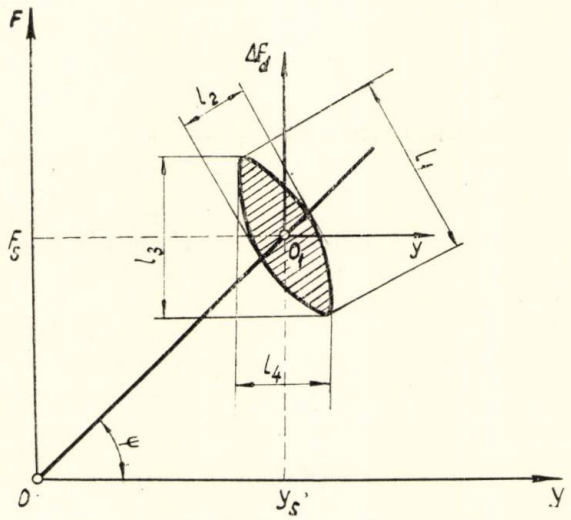


Fig. 7

vibratorii se deplasează numai în lungul axei *oy*. Fie Y deplasarea totală instantanee a sistemului piesei sau sculei, iar F forța de așchiere corespunzătoare acestei deplasări (fig. 7).

În figura 7 s-au notat

F_s — valoarea forței de așchiere în absența factorilor dinamici

$$F_s = C_1 + \Delta F_s, \tag{14'}$$

în care ΔF_s se calculează cu relațiile de forma (15);

y_s — deformația sistemului piesei sau sculei sub acțiunea forței F_s;

ψ — unghiul făcut de diagrama liniarizată a rigidității subansamblului piesei sau sculei cu axa OY.

Pentru un anumit moment al prelucrării ($x = x_0 = \text{const}$), elipsa $\Delta F_0 = \Delta F_d(y)$ poate fi concepută ca luînd naștere din compunerea a două mișcări armonice ortogonale, de forma

$$y = A \cos \omega \tau,$$

$$\Delta F_d = B \cos (\omega \tau + \varphi). \tag{16}$$

După eliminarea lui ($\omega \tau$), relațiile (16) dau variația „dinamică" a forței de așchiere:

$$\Delta F_d = \frac{B}{A} y \cos \varphi - B \sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}} \sin\varphi = \frac{B}{A} y \cos\varphi - B \left(1 - \frac{y^2}{2A^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{y^4}{8A^4} - \dots \right) \sin\varphi \approx \frac{B}{2A^2} y^2 \sin\varphi + \frac{B}{A} y \cos\varphi - B \sin\varphi. \tag{17}$$

Unghiul φ (care indică devansarea forței de așchiere în raport cu deplasarea relativă a tăișului sculei) are o valoare constantă pentru anumite condiții specifice de prelucrare. Valoarea lui se poate calcula cu relația rezultată din ecuațiile (16)

$$\varphi = \arcsin \frac{l_1 \cdot l_2}{l_3 l_4}, \tag{18}$$

unde l_1, l_2, l_3, l_4 au semnificațiile din figura 7.

Kudinov [7] încearcă a determina defazajul dintre variația forței și cea a deplasării relative a tăișului sculei pe cale analitică, introducînd noțiunea de constantă de timp a așchierii. Deși față de formula prin care se calculează această mărime există anumite rezerve, experiențele efectuate în vederea verificării ei confirmă constanța defazajului φ pentru aceleași condiții de prelucrare.

Amplitudinile A și B nu sînt independente. Orientativ, această dependență se poate găsi din relația (1) prin calcularea variației statice a forței de așchiere în condițiile: $C_F = \text{const}$, $s = \text{const}$, $x_F = \text{const}$, $y_F = \text{const}$

$$\mathrm{d}F = C_F x_F t_0^{x_F - 1} s^{y_F} \mathrm{d}t,$$

care, notînd

$$C = C_F x_F t_0^{y_F - 1} s^{y_F}$$

se scrie

$$\mathrm{d}F = C \mathrm{d}t. \tag{19}$$

Dacă se admite că relația (19) este verificată și pentru $\mathrm{d}F \approx B$ și $\mathrm{d}t \approx A$ (în cazul regimului de așchiere stabilizat), atunci

$$B \approx CA. \tag{20}$$

Analiza numeroaselor diagrame experimentale [14], [15] confirmă o dependență de forma (20) între cele două amplitudini.

Folosind relația (20) și ținînd seama că între ordonatele celor două sisteme de coordonate YOF și $yO_1\Delta F_d$ există legătura

$$F = F_s + \Delta F_d,$$

relația (17) dă

$$F = F_s + \frac{C}{2A} y^2 \sin\varphi + Cy \cos\varphi - CA \sin\varphi. \tag{21}$$

Variația totală („statică" și „dinamică") a forței de așchiere rezultă, luînd în considerare relațiile (14), (15) și (21),

$$\Delta F = \Delta F_s + \frac{C}{2A} y^2 \sin\varphi + Cy \cos\varphi - CA \sin\varphi. \tag{22}$$

Dacă în formula (22) se consideră $\Delta F_s = 0$, se obține numai variația „dinamică" a forței de așchiere în cazul vibrațiilor stabilizate. În această situație, formula ar putea permite studiul vibrațiilor într-un anumit

moment al generării suprafeței cînd forța de așchiere „statică" este într-adevăr constantă.

Odată precizată expresia de forma (22) a forței de așchiere care întreține mișcarea autooscilatorie, în principiu este posibilă abordarea studiului teoretic al autovibrațiilor sistemului tehnologic.

3.2. SISTEMUL VIBRATOR AL PIESEI

Vibrațiile sistemului piesei pot fi studiate destul de exact cu ajutorul teoriei oscilațiilor grinzii pe reazeme elastice, solicitată de o sarcină mobilă. În acest caz, dacă ξ este deplasarea instantanee a axei piesei pe direcția forței de așchiere F (fig. 3), atunci pentru schema de prelucrare din fig. 4 *b*) ecuația vibrațiilor de încovoiere în absența forțelor de frecare, neglijînd influența forțelor tăietoare și a momentelor giroscopice, este [17]

$$EI\frac{\partial^4 \xi(x_1\tau)}{\partial x^4} + q\frac{\partial^2 \xi(x_1\tau)}{\partial \tau^2} = \Delta F(\xi,\tau), \tag{23}$$

unde q este masa unității de lungime a piesei.

Vibrațiile de torsiune ale piesei sînt descrise de ecuația [16]

$$\frac{\partial^2 \theta(x_1\tau)}{\partial x^2} - \frac{i}{K_0}\frac{\partial^2 \theta(x_1\tau)}{\partial \tau^2} = \Delta M(\xi,\tau), \tag{24}$$

în care

i este momentul de inerție al masei unității de lungime a piesei de diametru d,

K_0 — rigiditatea la torsiune a secțiunii transversale a piesei,

$\Delta M(\xi, \tau)$ — variația momentului de torsiune în ipoteza unei direcții constante a forței de așchiere [7], [18] etc.

Ecuațiile (23) și (24) au avantajul posibilității de determinare a întregii game a spectrului de frecvențe. Pentru prelucrările prin așchiere, importanța cea mai mare o au însă frecvențele tonurilor fundamentale.

Din acest motiv și ținînd seama de dificultățile care apar chiar și numai la rezolvarea ecuațiilor omogene rezultate din (23) și (24) [13], [17], studiul autovibrațiilor pe ecuații de forma (23) și (24) nu prezintă interes practic prea mare.

O analiză aproximativă, dar cu rezultate mai rapide, se obține pe calea amintită a reducerii sistemului piesei la modele vibratoare cu unul sau cu două grade de libertate (fig. 8). În acest caz, ecuațiile diferențiale ale autooscilațiilor de încovoiere și de torsiune sînt

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{\xi}_1 + c_1'\dot{\xi}_1 + K\xi_1 &= \Delta F(\xi,\tau),\\ J_1\ddot{\theta} + c_1''\dot{\theta} + K_0\theta &= \Delta M(\xi,\tau),\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

unde

m_1 este masa redusă a sistemului piesei,

J_1 — momentul de inerție redus al sistemului piesei,

c_1', c_1'' — coeficienți de amortizare echivalenți.

Mărimile m_1, J_1, c_1', c_1'', care se pot determina experimental relativ uşor [2], în timpul prelucrării rămîn practic constante [14]. Ca urmare a variaţiei $K = K(\tau)$, parametrii mişcării oscilatorii se modifică şi, dacă procesul de prelucrare este la limita de stabilitate, poate apărea instabilitatea dinamică a acestuia. Literatura tehnică de specialitate [14] exemplifică, pe baza unor cercetări experimentale, asemenea cazuri.

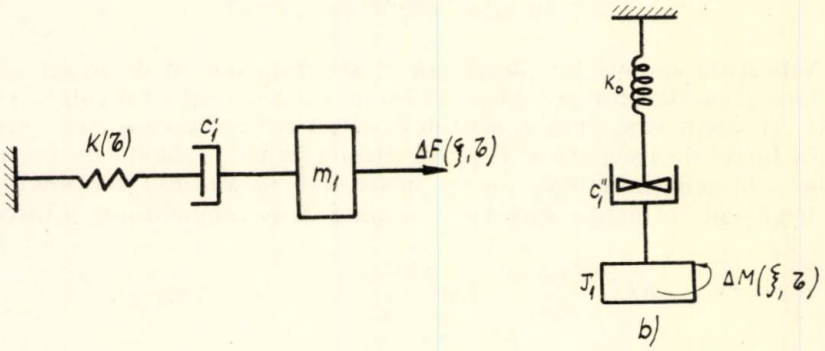


Fig. 8

Aşa cum se arată în lucrarea [7], descrierea fenomenelor vibratorii prin ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi variabili în timp nu a fost abordată încă la prelucrările prin aşchiere. Avantajul relaţiei (22), dedusă în ipoteza unui proces de aşchiere propriu-zis ($P \cdot A$) stabilizat, este acela că permite tocmai acest studiu al influenţei variaţiei deformaţiilor sistemului tehnologic asupra fenomenelor autooscilatorii. Într-adevăr, relaţia (17) subzistă în timpul deplasării cuţitului de-a lungul generatoarei suprafeţei care se strunjeşte, deoarece factorii care pot cauza apariţia unui proces de aşchiere propriu-zis instabil (vezi 3.1) rămîn neschimbaţi. Ca urmare, drept singură cauză a posibilei instabilităţi dinamice la prelucrare rămîne variaţia deformaţiilor sistemului tehnologic.

3.3. SISTEMUL VIBRATOR AL SCULEI

Folosind notaţii cu semnificaţii analoge celor de la sistemul vibrator al piesei, figura 3 permite scrierea ecuaţiilor care descriu mişcările vibratorii ale sculei în lungul celor două axe de rigiditate principale :

$$\left.\begin{aligned} m_2'\ddot{\zeta} + c_2'\dot{\zeta} + K_1'\zeta &= \Delta F(\xi_2, \tau)\cos\beta, \\ m_2''\ddot{\nu} + c_2''\dot{\nu} + K_1''\nu &= \Delta F(\xi_2, \tau)\sin\beta, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

unde, în conformitate cu figura 3, deplasarea vîrfului sculei pe direcţia forţei F este

$$\xi_2 = \zeta \sin\beta + \nu\cos\beta. \tag{27}$$

4. STABILITATEA DINAMICĂ LA STRUNJIREA AXELOR ZVELTE

Din punctul de vedere al prelucrării pe o anumită maşină-unealtă, o piesă se cheamă zveltă dacă deformaţiile sale sub acţiunea forţelor de aşchiere sînt mult mai mari decît deformaţiile sculei. Acesta este cazul,

de exemplu, al strunjirii axelor cu raportul $\frac{l}{d}$ destul de mare, folosind o sculă cu o rigiditate ridicată. La asemenea prelucrări de mare importanță pentru precizia suprafeței așchiate, pentru durabilitatea sculei și solicitarea sistemului tehnologic sînt vibrațiile sistemului piesei.

Dacă se admite că mișcările vibratorii ale piesei se petrec numai în lungul axei oy, atunci ecuațiile (25), scrise pentru $c_1' \approx 0$; $c_1'' \approx 0$, devin

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + Ky_1 &= \Delta F(y_1, \tau), \\ J_1\ddot{\theta} + K_0\theta &= \Delta F(y_1, \tau)\frac{d}{2}\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Înlocuind în prima ecuație din (28) forța ΔF dată de formula (22), se obține ecuația care descrie mișcarea vibratorie a piesei din fig. 4 *b*) pe direcția axei oy (fig. 3)

$$\ddot{y}_1 + \omega_n^2 y_1 - \frac{1}{m_1}\left(\Delta F_s + \frac{C}{2A}y_1^2\sin\varphi + Cy_1\cos\varphi - CA_1\sin\varphi\right) = 0, \tag{29}$$

unde

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m_1}, \tag{30}$$

mărimea K determinîndu-se cu relația (4), iar ΔF_s cu relația (15).

Pentru rezolvarea ecuației (29) se poate folosi metoda aproximativă a lui Krîlov și Bogoliubov [8], [16] etc. În conformitate cu această metodă, soluția ecuației (29) se caută sub forma

$$y_1 = A_1(\tau)\cos[\omega_n\tau + \varphi_1(\tau)] = A_1\cos\theta, \tag{31}$$

unde

$$\theta = \omega_n\tau + \varphi_1(\tau). \tag{32}$$

Notînd

$$\mu f(\dot{y}_1, y_1, \tau) = -\frac{1}{m_1}\left(\Delta F_s + \frac{C}{2A}y_1^2\sin\varphi + Cy_1\cos\varphi - CA_1\sin\varphi\right), \tag{33}$$

mărimile A_1 și φ_1 se determină din ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} &= \frac{1}{2\pi\omega_n}\int_0^{2\pi}\mu f(-A_1\omega_n\sin\theta, A_1\cos\theta, \tau)\sin\theta\, d\theta, \\ \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \frac{1}{2\pi\omega_n A_1}\int_0^{2\pi}\mu f(-A_1\omega_n\sin\theta, A_1\cos\theta, \tau)\cos\theta\, d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

La calculul integralelor din ecuațiile (34), A_1 și φ_1 se consideră constante.

Dacă în relația (33) se presupune $\Delta F_s = 0$, adică se studiază vibrațiile într-un anumit moment al deplasării axiale a sculei, formulele (34) devin

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{1}{2\pi m_1 \omega_n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{C}{2}A_1\cos^2\theta\sin\varphi + CA_1\cos\theta\cos\varphi - \right.\\ &\qquad\left. - CA_1\sin\varphi\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,,\\ \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{1}{2\pi m_1\omega_n A_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{C}{2}A_1\cos^2\theta\sin\varphi + CA_1\cos\theta\cos\varphi - \right.\\ &\qquad\left. - CA_1\sin\varphi\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,.\end{aligned}\right\} \tag{34'}$$

Efectuînd integralele din ecuațiile (34'), se obține

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\tau} = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{C\cos\varphi}{2m_1\omega_n}\,,$$

care, prin integrare, dau

$$A_1 = \alpha\,,$$

$$\varphi_1 = -\frac{C\cos\varphi}{2m_1\omega_n}\tau + \alpha_2\,.$$

În acest caz, ecuația (3) devine

$$y_1 = \alpha_1\cos\left[\left(\omega_n - \frac{C\cos\varphi}{2m_1\omega_n}\right)\tau + \alpha_2\right]. \tag{35}$$

Din condițiile inițiale $y_1(0) = A_0$; $\dot{y}_1(0) = 0$ se deduc constantele de integrare $\alpha_1 = A_0$; $\alpha_2 = 0$. În acest caz, relația (35) primește forma

$$y_1 = A_0\cos\left(\omega_n - \frac{C\cos\varphi}{2m_1\omega_n}\right)\tau\,. \tag{35'}$$

Structura formulei (35') are confirmare în multe studii teoretice și experimentale [14], [19] etc., efectuate într-o anumită poziție a sculei de-a lungul suprafeței care se strunjește. Ea arată că în cazul procesului

autooscilator stabil $A_1 = \text{const}$, iar pulsația vibrației piesei

$$\omega = \omega_n - \frac{C\cos\varphi}{2 m_1 \omega},$$

este apropiată de cea proprie,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m_1}} = \text{const}.$$

Așa cum s-a arătat, luarea în considerare a dependenței $\Delta F = \Delta F(y_1)$ sub forma relației (22) a fost dictată de necesitatea studiului autovibrațiilor, ținîndu-se seama de deformațiile sistemului tehnologic.

Pentru aceasta trebuie observat că sub forma (15) relația $\Delta F_s = \Delta F_s(x) = \Delta F_s(n s \tau)$ este greu de utilizat. De aceea se va considera că, pentru o anumită turație a piesei (n) și un anumit avans de generare (s), relația (15) poate fi aproximativă cu o relație de forma

$$\Delta F_s = a\tau^2 + b\tau + d. \tag{36}$$

Luînd în considerare relația (36) și ținînd seama de formulele (31) și (33), ecuațiile (34) se scriu

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dA_1}{d\tau} &= -\frac{1}{2\pi m_1 \omega_n}\int_0^{2\pi}\left[\frac{a}{\omega_n^2}(\theta-\varphi_1)^2 + \frac{b}{\omega_n}(\theta-\varphi_1) + d + \right.\\
&\left. + \frac{C}{2A_1}\cos^2\theta\sin\varphi + CA_1\cos\theta\cos\varphi - CA_1\sin\varphi\right]\sin\theta\, d\theta,\\
\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= -\frac{1}{2\pi m_1 \omega_n A_1}\int_0^{2\pi}\left[\frac{a}{\omega_n^2}(\theta-\varphi_1)^2 + \frac{b}{\omega_n}(\theta-\varphi_1) + d + \right.\\
&\left. + \frac{C}{2A_1}\cos^2\theta\sin\varphi + CA_1\cos\theta\cos\varphi - CA_1\sin\varphi\right]\cos\theta\, d\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Efectuînd integralele în ipoteza $A_1 = \text{const}$; $\varphi_1 = \text{const}$, ecuațiile (37) devin

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dA_1}{d\tau} &= \frac{1}{m_1\omega_n^3}(2\pi a + \omega_n b - 2\varphi_1),\\
\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= -\frac{2a}{m_1\omega_n^3 A_1} - \frac{C\cos\varphi}{2 m_1 \omega_n}.
\end{aligned}\right\} \tag{37'}$$

Pentru φ_1 obținut din integrarea ecuației a doua:

$$\varphi_1 = -\left(\frac{2a\tau}{m_1\omega_n^3 A_1} + \frac{C\cos\varphi}{2 m_1 \omega_n}\tau\right) + \alpha_2, \tag{38}$$

prima ecuație din (37′) se scrie

$$\frac{dA_1}{d\tau} = \frac{1}{m_1 \omega_n^3}\left(2\pi a + \omega_n b + \frac{4a\tau}{m_1 A_1 \omega_n^3} + \frac{C\cos\varphi}{m_1 \omega_n}\tau - 2\alpha_2\right). \quad (39)$$

Dacă se notează cu A_c și ω_c amplitudinea, respectiv pulsația ciclului-limită stabil, atunci condițiile de existență a unui asemenea ciclu sînt [4]

$$\left.\begin{aligned}\left(\omega_n \frac{dA_1}{d\tau}\right)_{A_1 = A_c} &= 0\,,\\ \left[\frac{\partial}{\partial A_1}\left(\omega_n \frac{dA_1}{d\tau}\right)\right]_{A_1 = A_c} &> 0\,.\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Ținînd seama de ecuația (39), relațiile (40) dau condiția de existență a ciclului limită-stabil sub forma

$$-\frac{\left(2\pi a + \omega_c b + \dfrac{C\cos\varphi}{m_1 \omega_n} - 2\alpha_2\right)^2 \omega_c}{4a\tau} > 0,$$

de unde rezultă în mod necesar

$$a < 0\,. \quad (41)$$

Condiția (41) este îndeplinită întotdeauna, așa cum rezultă din compararea semnelor mărimii ΔF_s, calculată cu relațiile (15) și (36). Rezultă de aici concluzia de mare importanță practică că *deformațiile lente ale sistemului tehnologic nu pot deranja stabilitatea dinamică a unui regim de așchiere profund stabil.* Rămîne a se cerceta cazul în care regimul de așchiere se găsește la limita de stabilitate, caz în care relația (22) nu mai este certă pentru orice poziție a sculei în lungul generatorei suprafeței care se strunjește.

Integrarea ecuației (39) dă

$$A_1 = \frac{1}{m_1 \omega_n^3}\left[(2\pi a + \omega_n b - 2\alpha_2)\tau + \left(\frac{4a}{m_1 \omega_n^3 A_1} + \frac{C\cos\varphi}{m_1 \omega_n}\right)\tau^2\right] + \alpha_1,$$

de unde se obține

$$A_1 \approx \frac{4a\tau^2}{m_1 \omega_n^3\left(\dfrac{C\cos\varphi}{m_1 \omega_n}\tau - 2\pi a - \omega_n b + 2\alpha_2\right)\tau - \alpha_1}. \quad (42)$$

În condițiile inițiale $y_1(0) = A_0$; $\dot{y}_1(0) = 0$, relațiile (38) și (42) dau $\alpha_1 = A_0$; $\alpha_2 = 0$, iar relația (35) se scrie

$$y_1 = \frac{4\,a\,\tau^2}{m_1\,\omega_n^3\left[\left(\frac{C\cos\varphi}{m_1\,\omega_n}\,\tau - 2\pi\,a - \omega_n\,b\right)\tau\right] - A_0}\cos\left(\omega_n - \right.$$

$$\left. - \frac{2a}{m_1\,\omega_n^3\,A_1} - \frac{C\cos\varphi}{2\,m_1\,\omega_n}\right)\tau\,. \qquad (43)$$

Deoarece timpul τ este cel necesar parcurgerii lungimii piesei de către cuțit, rezultă că el este finit. Ca urmare, relația (43) arată că, deși amplitudinea vibrației este variabilă de-a lungul generatoarei suprafeței care se strunjește, totuși ea rămîne finită. (Rezultatul este calitativ același cu cel dat de condiția (41)).

Pentru calculul amplitudinii vibrației cu relația (43), este necesar a se ține seama că pulsația ω_n este variabilă de-a lungul piesei care se prelucrează, așa cum rezultă din formula (30).

Folosind ecuația a doua din (25) și ecuațiile (26), se poate aborda, după aceeași cale, studiul influenței deformațiilor lente ale sistemului tehnologic asupra vibrațiilor torsionale ale piesei, respectiv asupra vibrațiilor sistemului sculei.

5. CONCLUZII

1. În cazul cînd se face abstracție de fenomenele vibratorii care apar la o anumită prelucrare mecanică, calculul ecuațiilor curbelor generatoare este bine să se facă cu relațiile deduse în capitolul 2. Aceste relații, care țin seama de variația forței de așchiere cu deformațiile sistemului tehnologic, diferă de cele care se utilizează în prezent la calculul preciziei de prelucrare [5], [6], [14] etc.

2. Părerea întîlnită uneori în literatura tehnică de specialitate [14], [15] după care variația rigidității sistemului tehnologic din timpul prelucrării ar conduce la un regim de așchiere instabil nu este în toate cazurile justificată. După cum a rezultat din capitolul 3, dacă regimul de așchiere propriu-zis este profund stabil (în ipoteza unei rigidități absolute a sistemului tehnologic), variația deformațiilor sistemului tehnologic nu poate cauza instabilitatea dinamică a acestuia.

3. Relațiile de forma (43) confirmă datele experimentale din literatura tehnică de specialitate [14], fig. 42], [15], care arată că variația rigidității sistemului tehnologic duce la o modificare a pulsației vibrației și a amplitudinii acesteia.

4. Dependența forței de așchiere de deplasarea piesei (sau a sculei) sub forma relației (22) este valabilă numai în ipoteza unui regim de așchiere propriu-zis stabil. Lucrările efectuate pentru explicarea instabilității dinamice în procesele de prelucrare prin așchiere luînd în considerare dependența dintre forță și deformație, obținută din prelucrarea unor diagrame experimentale [9], nu poate avea caracter de generalitate.

5. Modul de abordare a problemei influenței diferiților factori asupra instabilității dinamice a proceselor de prelucrare prin așchiere prin considerarea relației (22) este foarte general. El va fi utilizat pentru a cerceta felul în care variația luată a diferiților factori care pot cauza efecte dinamice în procesele de prelucrare afectează gradul de stabilitate al acestora.

6. Dacă relația (22) se consideră ca fiind valabilă la limita de stabilitate dinamică, atunci ea se va putea utiliza și pentru cercetarea stabilității propriu-zise. În acest caz, spre deosebire de ideea care stă la baza teoriei lui Tlusty [3], dependența dintre forță și deformația relativă a tăișului sculei față de suprafața care se prelucrează nu este liniară. Acest lucru caracterizează, de altfel, procesele autovibratorii.

7. Aproximarea relației (15) cu o relație de forma (36) a fost sugerată de unele cercetări efectuate în laboratorul de mașini-unelte al Institutului politehnic Brașov. Evident că, în funcție de condițiile specifice ale prelucrării, s-ar putea ca în locul relației (36) să fie folosită o altă aproximare $\Delta F_s = \Delta F_s(\tau)$.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. P. Albrecht, *Dynamics of the. Metal-Cutting Process*, J. Eng. for Industry, Trans. ASME, series B, **87** (1965).
2. S. T. Chiriacescu, *Influența asimetriei tăișurilor burghiului elicoidal asupra stabilității dinamice a procesului de așchiere*, Comunicare la sesiunea științifică jubiliară a Inst. politehnic Brașov, 6—7 decembrie 1968.
3. O. Danek, M. Polácek, L. Spacek, J. Tlusty, *Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen*, VEB Verlag Technik, Berlin, 1962.
4. J. E. Gibson, *Sisteme automate neliniare*, București, Edit. tehnică, 1967.
5. K. S. Lolev, *Tocinosti obrabotki i rejimi rezania*, Moskva, Mașghiz, 1968.
6. V. S. Korsakov, *Tocinosti mehaniceskoi obrabotki*, Moskva, 1961.
7. V. A. Kudinov, Dinamika-stankov, Moskva, Izd. Mașinostroenie, 1967.
8. D. Mangeron, *Mecanica vibrațiilor*, în *Fundamentele mecanicii de* Z. Gaboș, D. Mangeron și I. Stan, București, Edit. Academiei, 1962.
9. H. E. Merritt, *Theory of Self-Excited Machine Tool Chatter*. J. Eng. for Industry, Trans. ASME, series B, **64**, (1964).
10. G. Pahlitzsch, E. Otto Guntze, *Entstehung und Minderung von Ratterschwingungen beim Schleifen*, Fortschr. Ber. VBI—Z, Reihe 2, *6* (1966).
11. J. Peters, P. Vanherck, *Ein Kriterium für die dynamische Stabilität von Werkzeugmaschinen*, Industrie Anzeiger, *11* și *19* (1963).
12. — *Machine Tool stability Tests and the Incremental Stiff—NESS*, Raport to the General Assembly of C.I.R.P. — Sesion on Machine Tools, septembrie 1968.
13. S. D. Ponamariov ș. a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, București, Edit. tehnică, 1964.
14. A. P. Sokolovski, *Bazele științifice ale tehnologiei construcțiilor de mașini*, vol. I, București, I.D.T., 1955.
15. — *Precizia prelucrării mecanice și căile pentru mărirea ei*, București, Edit. tehnică, 1954.
16. Gh. Silas, *Mecanică. Vibrații mecanice*, București, E.D.P., 1968.
17. S. P. Timosenko, Kolebania v injenernom dele Moskva, Izd. „Nauka", 1967.
18. S. A. Tobias, *Machine Tool vibration*, London—Glasgow, 1965.
19. N. V. Vasilenko, *O rascete avtokolebânii pri rezanii metallov*, Prikladnaia mehanika, **3**, *6* (1967).
20. Gh. Zgura, C. Ispas, *Cercetări teoretice asupra stabilității dinamice a procesului de prelucrare la frezarea frontală*, St. cerc. mec. apl., *6* (1968).
21. * * * *Vibrațiile mașinilor-unelte în timpul așchierii metalelor* în *Culegere de lucrări ale Institutului de mașini al* Academiei de științe U.R.S.S., București, 1959, I.D.T.

CUBICA POLILOR RELATIVI DE ROTAȚIE LA MECANISMUL MANIVELĂ-PISTON

de N. I. MANOLESCU, GH. POPA
Institutul Politehnic, București

Lucrarea extinde noțiunea de cubică a polilor relativi de rotație (C.P.—R.R.) la mecanismul manivelă-piston. Se demonstrează analitic existența acestei cubice ca loc geometric și se analizează proprietățile ei (existența și ecuația asimptotei, puncte de traversare, tangente remarcabile). Ecuația cubicei s-a stabilit în două variante: implicit și parametric, arătîndu-se avantajul fiecărei variante și posibilitățile de trasare a cubicei C.P.—R.R.
Lucrarea prezintă cinci teoreme fundamentale referitoare la cubica C.P.—R.R. la mecanismul manivelă-piston. În final se analizează formele acestei cubice, capitol esențial în sinteza mecanismelor pe baza acestor cubice.

1. ECUAȚIA GENERALĂ A CUBICEI POLILOR RELATIVI ÎN CAZUL MECANISMULUI MANIVELĂ-PISTON

Considerăm un mecanism manivelă-piston excentric (de excentricitate e) și planul mobil al bielei AB, notat cu V. Planul fix s-a notat cu W. Se va nota cu P_1^2 polul relativ al poziției *2* referitor la poziția *1* (A_1B_1) a planului de bielă, considerată ca poziție de referință [4] (fig. 1).

Evident, avem $\Delta A_1B_1P_1^2 = \Delta A_2B_2P_1^2$, căci laturile

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2},$$

$$\overline{A_1P_1^2} = \overline{A_2P_1^2},\ \overline{B_1P_1^2} = \overline{B_2P_1^2},$$

(prin definiție, polul relativ P_1^2 s-a obținut la intersecția mediatoarelor $\overline{mP_1^2}$ și $\overline{nP_1^2}$, deci segmentele menționate sînt oblice egal depărtate de piciorul perpendicularei).

Urmează că

$$\sphericalangle B_1P_1^2A_1 = \sphericalangle B_2P_1^2A_2 = \alpha.$$

Rezultă că

$$\sphericalangle A_2 P_1^2 B_1 = \alpha + \beta = \alpha + \gamma,$$

de unde, evident,

$$\beta = \gamma \quad \text{și} \quad \beta_1 = \frac{1}{2}\beta = \gamma_1 = \frac{1}{2}\gamma = \beta_2 = \gamma_2.$$

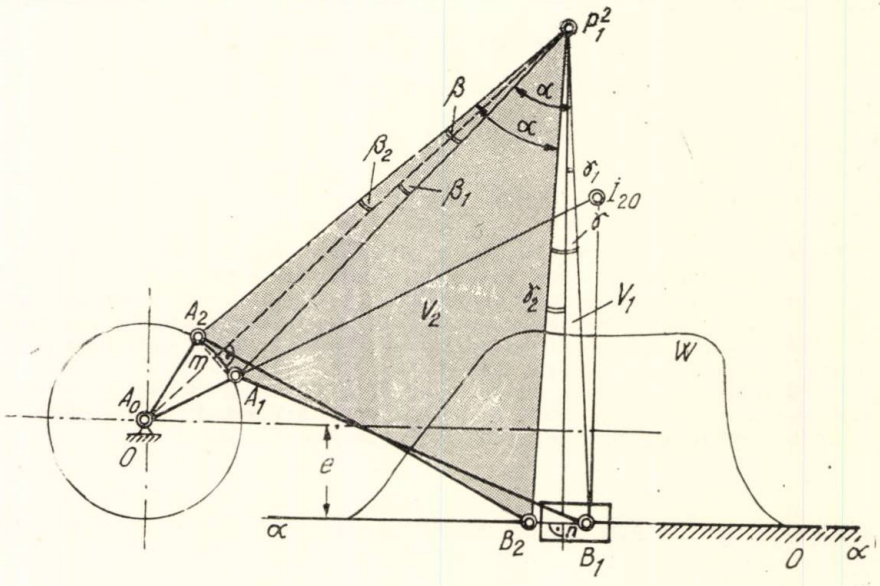


Fig. 1

Analog se poate arăta că diferența dintre unghiurile β_1 și γ_1, sub care se văd manivela $\overline{A_0A}$ și jumătatea cursei $\overline{B_1B_2}$ (segmentele $\overline{nB_1} = \overline{nB_2}$), este π sau o (ca mai sus).

Polul relativ de rotație P_1^n respectă deci și la mecanismul manivelă-piston în cazul general, ca și la mecanismul patrulater, teorema „izovizibilității" [4], și în cazul mecanismului manivelă-piston polul P_1^n descrie un loc geometric, „curba polilor relativi de rotație", notată tot p_1^n, folosită în sinteza geometrică.

Evident avem

$$\beta_1 = \delta - \varphi = \gamma_1 = \psi - \frac{\pi}{2} \text{ (fig. 2)},$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg}(\delta - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi},$$

unde

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = -\operatorname{ctg}\psi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\psi},$$

dar

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y + e}{x - x_2},$$

prin urmare

$$\frac{\dfrac{y - y_1}{x - x_1} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{(y - y_1)}{(x - x_1)}} = \frac{x_2 - x}{y + e},$$

sau

$$\frac{x(y - y_1) - y(x - x_1)}{x(x - x_1) + y(y - y_1)} = \frac{x_2 - x}{y + e},$$

$$(x_1 y - x y_1)(y + e) = (x_2 - x)(x^2 + y^2 - x_1 x - y_1 y).$$

Sau, în final,

$$x^3 - 2y_1 xy + xy^2 - x^2(x_1 + x_2) + y^2(x_1 - x_2) +$$

$$+ x(x_1 x_2 - e y_1) + y(x_2 y_1 + x_1 e) = 0. \tag{1}$$

Ecuația dată de relația (1) este o cubică fără termen liber, care trece deci prin originea sistemului de axe, adică prin punctul A_0.

În cazul particular în care $e = 0$ (mecanism manivelă-piston centric), cubica (1) capătă forma mai simplă

$$x^3 - 2y_1 xy + xy^2 - x^2(x_1 + x_2) + y^2(x_1 - x_2) +$$

$$+ x_1 x_2 x + x_2 y_1 y = 0. \tag{2}$$

Cubica p_1^* (considerînd poziția V_1 a planului de bielă AB ca poziție de referință) trece prin următoarele puncte remarcabile ale mecanismului manivelă-piston în cazul general:

a) articulația fixă A_0;

b) articulațiile mobile A_1 și B_1;
c) polul relativ P_1^2;
d) centrul instantaneu de rotație I_1 (fig. 2), ca un caz-limită al polului relativ de tip P_1^n, cînd poziția de referință *1* și poziția n sînt infinit vecine.

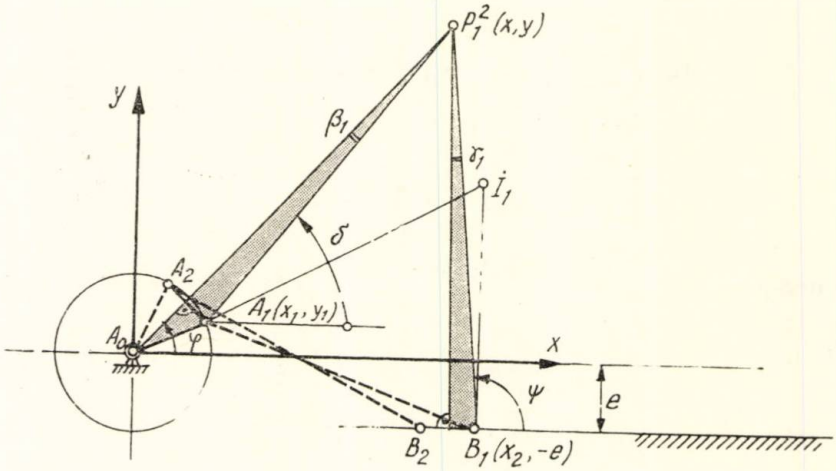


Fig. 2

Aflăm coordonatele centrului instantaneu I_1:
– dreapta A_0I_1 are ecuația

$$y = \frac{y_1}{x_1}\, x;$$

– dreapta B_1I_1 are ecuația

$$x = x_2.$$

Intersecția lor este

$$I_1\left(x_2,\, y_1 \frac{x_2}{x_1}\right).$$

Înlocuim în cubica [C. P. – R. R.] (1) și avem

$$x_2^3 - 2y_1x_2\frac{x_2}{x_1}y_1 + x_2y_1^2\frac{x_2^2}{x_1^2} - x_2^2(x_1 + x_2) + y_1^2\frac{x_2^2}{x_1^2}(x_1 - x_2) +$$

$$+ x_2(x_1x_2 - ey_1) + y_1x_2 \cdot \frac{1}{x_1}(x_2y_1 + ex_1) = 0$$

sau

$$x_1^2x_2^3 - 2x_1x_2^2y_1^2 + x_1x_2^2y_1^2 - x_1^2x_2^3 - x_1^3x_2^2 + x_2^2x_1^3 -$$

$$- ey_1x_1^2x_2 + x_1x_2^2y_1^2 + ey_1x_1^2x_2 \equiv 0.$$

Deci coordonatele lui I_1 verifică cubica C. P. — R. R. Din ecuația generală (1) se obține prin ordonarea termenilor:

$$x(x^2 + y^2) - 2y_1xy - x^2(x_1 + x_2) - y^2(x_1 + x_2) + 2y^2x_1 +$$

$$+ x_2(x_1x + y_1y) - e(xy_1 - yx_1) = 0$$

sau

$$(x^2 + y^2)(x - x_1 - x_2) + x_2(x_1x + y_1y) + 2y(x_1y - y_1x) +$$

$$+ e(x_1y - y_1x) = 0,$$

de unde

$$(x^2 + y^2)(x - x_1 - x_2) + x_2(x_1x + y_1y) + (2y + e)(x_1y - y_1x) = 0. \quad (3)$$

Dacă $e = 0$ (mecanism manivelă-piston centric), atunci (3) devine

$$(x^2 + y^2) \cdot (x - x_1 - x_2) + 2y \cdot (x_1y - y_1x) + x_2(x_1x + y_1y) = 0. \quad (4)$$

2. ECUAȚIILE PARAMETRICE ALE CUBICEI C.P. — R.R. LA MECANISMUL MANIVELĂ-PISTON

Se consideră un mecanism manivelă-piston excentric în cazul general (fig. 3).

Se aleg două fascicule de poziții în planul mobil V al bielei AB, avînd curbele directoare $[\Gamma_A, \Gamma_C]$, $[\Gamma_D, \Gamma_E]$, unde Γ_A este chiar cercul de manivelă. Se construiesc polii P_2^1, P_2^7 cu ajutorul mediatoarelor.

Dacă se face (folosind teorema izovizibilității enunțată în capitolul 1) următoarea construcție: se duce mediatoarea coardei arcului $\overset{\frown}{A_1A_2}$, respectiv $\overset{\frown}{A_7A_2}$, și mediatoarele segementelor $\overline{B_1B_2}$, respectiv $\overline{B_7B_2}$, atunci se obțin, evident, aceiași poli P_2^1 și P_2^7.

Se pot enunța astfel următoarele teoreme:

TEOREMA 1. Polii de tip P_k^n aparținînd cubicei C. P. — R. R. $[p_k^n]$ sînt centrele unor transformări plane de tip rotație (P_2^7 este centrul rotației, între pozițiile 2 și 7, avînd, evident, *proprietatea de reciprocitate*, $P_2^7 \equiv P_7^2$).

Locul acestor transformări plane este cubica C. P. — R. R.

TEOREMA 2. Cubica C. P. — R. R. este aceeași indiferent de curbele directoare ale fasciculului de poziții din planul bielei pentru același mecanism manivelă-piston. Acest mecanism se va numi contur generator absolut (întrucît element conducător poate fi sau manivela *1*, sau pistonul *3*).

De aici se pot preciza două moduri de construcție grafică a cubicei C. P. — R. R. la mecanismul manivelă-piston.

a) *cu ajutorul fasciculului de poziții date ale planului bielei.* Polii relativi se află ducînd mediatoarele ca în figura 3 (astfel în figura 3 s-a

aflat P_2^1 ducînd mediatoarele segmentelor $\overline{12}$ de pe curbele directoare Γ_C și Γ_A sau Γ_E și Γ_D). S-au figurat și unghiurile transformării plane tip rotație, cu centrul de rotație P_2^1, $\theta_{12} = \theta_{21}$. Poziție de referință s-a ales poziția *2* a planului de bielă;

b) *cu ajutorul conturului generator absolut.* Ambele construcții grafice dau numai ramura deschisă a cubicei. Pentru trasarea ramurii închise s-a folosit metoda analitică, pornind de la următoarele date:

$$r = A_0A = 0{,}2\text{ m}; \quad x_1 = 0{,}18\text{ m}; \quad x_2 = 0{,}94\text{ m};$$

$$l = A\,B = 0{,}8\text{ m}; \quad y_1 = 0{,}105\text{ m}; \quad e = -0{,}1\text{ m}.$$

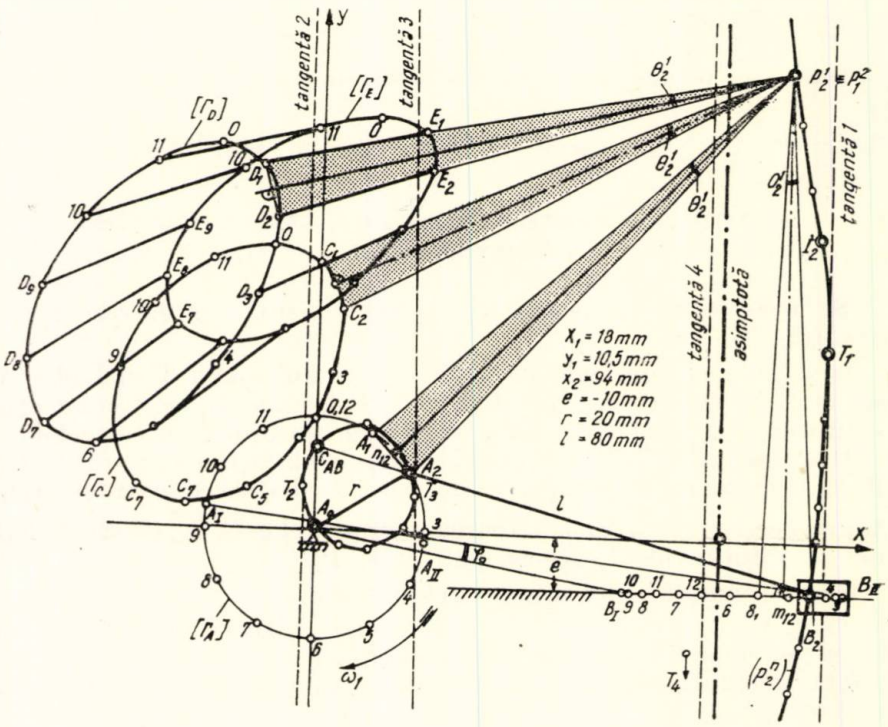


Fig. 3

Înlocuind în (1), a rezultat ecuația cubicei.

Dînd valori lui x, s-a trasat analitic cubica. Erorile între punctele obținute grafic și analitic (pentru același x) au fost cuprinse între 0,9 și 7 %.

Pe baza teoremei 2 se pot stabili ecuațiile parametrice ale cubicei C. P. — R. R. (fig. 4).

În figura 4 s-au făcut următoarele notații:

φ — unghiul de reper al poziției inițiale (const);

θ — unghiul între două poziții ale conturului generator (variabil);
$R = A_0A$ — raza manivelei;
$l = AB$ — lungimea bielei;
$e = OA_0$ — excentricitatea.

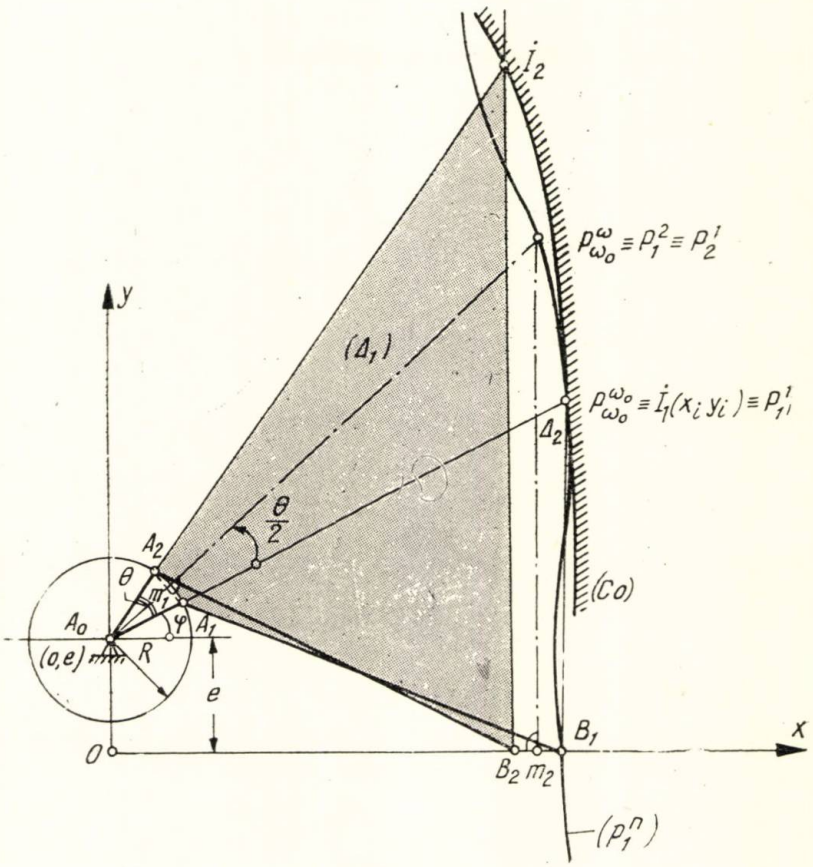


Fig. 4

Cu aceste notații, coordonatele lui A_1, A_2, B_1 și B_2 se pot scrie

$$A_1 \begin{cases} x_1 = R\cos\varphi \\ y_1 = e + R\sin\varphi \end{cases} \quad \text{respectiv} \quad A_2 \begin{cases} x_2 = R\cos(\varphi+\theta), \\ y_2 = e + R\sin(\varphi+\theta) \end{cases}$$

și

$$B_1 \begin{cases} x_{B_1} = R\cos\varphi + \sqrt{l^2 - (e + R\sin\varphi)^2}, \\ y_{B_1} = 0, \end{cases}$$

$$B_2 \begin{cases} x_{B_2} = R\cos(\varphi+\theta) + \sqrt{l^2 - [e + R\sin(\varphi+\theta)]^2}, \\ y_{B_2} = 0. \end{cases}$$

Ecuația dreptei $(\Delta_2)//OY$, care este mediatoarea segmentului B_1B_2, se obține din $x = \frac{1}{2}(x_{B_1} + x_{B_2})$ sau înlocuind:

$$x = \frac{1}{2}\{R\cos\varphi + R\cos(\varphi+\theta) + \sqrt{l^2-(e+R\sin\varphi)^2} + \\ + \sqrt{l^2-[e+R\sin(\varphi+\theta)]^2}\}.$$

Ecuația dreptei (Δ_1), mediatoarea segmentului A_1A_2, este

$$y - e = x\,\mathrm{tg}\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right).$$

Coordonatele lui $P^{\omega}_{\omega_0}$ vor fi deci

$$x_P = \frac{1}{2}\{R[\cos\varphi + \cos(\varphi+\theta)] + \sqrt{l^2-(e+R\sin\varphi)^2} + \\ + \sqrt{l^2-[e+R\sin(\varphi+\theta)]^2}\},$$

$$y_P = e + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(\varphi+\frac{\theta}{2}\right)\{R[\cos\varphi+\cos(\varphi+\theta)] + \\ + \sqrt{l^2-(e+R\sin\varphi)^2} + \sqrt{l^2-[e+R\sin(\varphi+\theta)]^2}\}. \tag{5}$$

Dacă $\theta = 0$, se obțin din (5), ca un caz-limită, coordonatele centrului instantaneu de rotație I:

$$x_I = [R\cos\varphi + \sqrt{l^2-(e+R\sin\varphi)^2}], \\ y_I = e + \mathrm{tg}\,\varphi\,[R\cos\varphi + \sqrt{l^2-(e+R\sin\varphi)^2}], \tag{6}$$

unde $(x_I y_I)$ sînt coordonatele C.I.R. în poziția *1* a mecanismului.

Dacă unghiul φ e variabil, ecuațiile (6) reprezintă deci chiar ecuațiile parametrice ale bazei (C_0).

Deoarece baza C_0 (fig. 4) conține toți polii de tip $P^{\omega}_{\omega_0}$ (de exemplu $P^1_1 \equiv I_1$, $P^2_2 \equiv I_2$ etc.), se poate enunța:

TEOREMA 3. Baza C_0 este înfășurătoarea familiei de cubice C. P. — R. R. aparținînd unui contur-generator absolut de tip manivelă-piston.

Ecuațiile (5) reprezintă chiar ecuațiile parametrice ale cubicei C. P.—R. R. cu parametrul θ (unghiul φ al poziției de referință se consideră constant).

3. ASIMPTOTA CUBICEI C.P. — R.R. LA MECANISMUL MANIVELĂ-PISTON

Considerăm ecuația generală (1) și trecem la coordonate omogene:

$$X^3 - 2y_1XYZ + XY^2 - X^2Z(x_1+x_2) + Y^2Z(x_1-x_2) + \\ + XZ^2(x_1x_2 - ey_1) + YZ^2(x_2y_1 + ex_1) = 0. \tag{7}$$

Facem în (7) $Z = 0$ și obținem

$$X^3 + XY^2 = 0$$

sau

$$X(X^2 + Y^2) = 0 \tag{8}$$

și, înlocuind

$$\frac{Y}{X} = m,$$

avem din (8)

$$1 + m^2 = 0; \quad X = 0. \tag{9}$$

Ecuația (9) în m este de gradul 2 (mai mic decît gradul 3 care s-ar fi obținut normal prin efectuarea acelorași operații asupra termenilor de gradul cel mai mare ai cubicei), deci avem

$$X = 0 \qquad (m \to \infty). \tag{10}$$

Calculăm

$$(f'_x) = 3X^2 - 2y_1YZ + Y^2 - 2XZ(x_1 + x_2) + Z^2(x_1x_2 - ey_1)$$

și

$$[f'x]\, M_0(1, m, 0) = 3 + m^2, \tag{11}$$

$$(f'_y) = -2y_1XZ + 2XY + 2YZ(x_1 - x_2) + Z^2(x_2y_1 + ex_1)$$

și

$$[f'y]\, M_0(1, m, 0) = 2m, \tag{12}$$

$$(f'_z) = -2y_1XY - X^2(x_1 + x_2) + Y^2(x_1 - x_2) + 2XZ(x_1x_2 - ey_1) + 2YZ(x_2y_1 + ex_1)$$

și

$$[f'_z]\, M_0(l, m, 0) = -2y_1m - (x_1 + x_2) + m^2(x_1 - x_2). \tag{13}$$

În coordonate omogene, ecuația asimptotei este

$$X(f'_m)_{M_0} + Y(f'_y)_{M_0} + Z(f'_z)_{M_0} = 0. \tag{14}$$

În relația (14) înlocuim pe (11), (12) și (13) și avem

$$X(3 + m^2) + 2mY + [m^2(x_1 - x_2) - 2y_1m - (x_1 + x_2)] = 0. \tag{15}$$

Împărțim în (15) la m^2 și trecem la coordonate rectangulare ($Z = 1$):

$$x\left(\frac{3}{m^2} + 1\right) + \frac{2y}{m} + \left[(x_1 - x_2) - \frac{(x_1 + x_2)}{m^2} - \frac{2y_1}{m}\right] = 0.$$

Dacă $m \to \infty$, se obține

$$x + x_1 - x_2 = 0$$

sau

$$x = x_2 - x_1. \tag{16}$$

Din relația (16) se poate enunța

TEOREMA 4. Cubica C. P.—R. R. la mecanismul manivelă-piston admite întotdeauna asimptotă paralelă cu axa oy (asimptotă verticală).

3.1. Considerînd ecuația (1) în coordonate carteziene, ecuația asimptotei în coordonate carteziene este

$$x \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \varphi_n}{\partial \beta} + \varphi_{n-1}(\alpha, \beta) = 0, \tag{17}$$

unde

φ_n este grupul omogen de gradul cel mai înalt din polinomul ecuației în x și y, unde x și y s-au înlocuit prin α, β,

α, β sînt parametrii directori ai direcției asimptotice admise de cubică.

Avem deci din (1)

$$\begin{cases} \varphi_3(\alpha, \beta) = \alpha^3 + \alpha\beta^2, \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} = 3\alpha^2 + \beta^2; \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial \beta} = 2\alpha\beta, \\ \varphi_2(\alpha, \beta) = -2y_1\alpha\beta - \alpha^2(x_1 + x_2) + \beta^2(x_1 - x_2). \end{cases} \tag{18}$$

Direcțiile asimptotice sînt date de ecuația

$$\varphi_n(\alpha, \beta) = 0$$

sau

$$\alpha(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

cu soluția

$$\alpha = 0 \quad \beta = 1. \tag{19}$$

Înlocuim în (18):

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}(0,1) = +1; \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta}(0,1) = 0; \qquad \varphi_2(0,1) = x_1 - x_2,$$

de asemenea în (17):

$$x + (x_1 - x_2) = 0 \quad \text{sau} \quad x = x_2 - x_1,$$

adică tocmai ecuația (16).

3.2. Ecuația asimptotei se poate obține ușor și din ecuațiile parametrice ale cubicei C.P.—R.R., adică din relația (5). Evident, dacă în (5) facem $y \to \infty$, avem

$$\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) \to \left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right) (K = 0,1). \tag{20}$$

Din (20) se vede imediat că C.P.—R.R. la mecanismul manivelă-piston admite întotdeauna asimptotă verticală.

Înlocuim pe (20) în (5) pentru $K = 0$ (ramura spre $+\infty$ a asimptotei)

și, ținînd seama că $\varphi + \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$, avem

$$X = \frac{1}{2}\left\{ R\left(\cos\varphi - \sin\frac{\theta}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{l^2 (e + R\sin\varphi)^2} + \sqrt{l^2 - \left(e + R\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} \right\}.$$

Dar

$$R\cos\varphi = R\sin\frac{\theta}{2} + x_1,$$

$$R\sin\varphi + e = y_1 = R\cos\frac{\theta}{2} + e,$$

deci

$$x = \frac{1}{2}(x_1 - x_1 + \sqrt{l^2 - y_1^2} + \sqrt{l^2 - y_1^2}),$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 2\,(x_2 - x_1),$$

$$x = x_2 - x_1,$$

adică tocmai relația (16).

Făcînd $K = 1$ și deci $\varphi + \frac{\theta}{2} = \frac{3\pi}{2}$, se obține ramura la $(-\infty)$ a aceleeași asimptote (calculul fiind identic nu s-a mai consemnat).

Observație. Forma parametrică a ecuației cubicei C.P.—R.R. ușurează foarte mult trasarea analitică a cubicei C.P.—R.R., deoarece:

— forma în cartezian a cubicei C P.—R.R. (1) dă în cazul cel mai simplu (înlocuind pe x prin valori numerice) o ecuație de gradul 2 în y.

În afară de faptul că trebuie rezolvată o suită de ecuații de gradul 2, trebuie determinat și domeniul de existență al cubicei pentru a preciza intervalele de variație ale lui x;

— forma parametrică în care $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ dă valorile lui x fără a mai fi necesară stabilirea domeniului de existență al funcției, iar pentru calcul se poate utiliza din relațiile (5) forma

$$y = e + \left[\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)\right] x, \tag{21}$$

liniară în x și y, unde x e calculat din (5).

4. PUNCTE DE TRAVERSARE A ASIMPTOTEI

Dacă în ecuația (1) facem $x = \lambda$, avem

$$\lambda^3 - 2y_1\lambda y + \lambda y^2 - \lambda^2(x_1 + x_2) - y^2(x_2 - x_1) + \lambda(x_1x_2 - \\ - ey_1) + y(x_2y_1 + ex_1) = 0.$$

Ordonăm două puterile lui y:

$$y^2(\lambda + x_1 - x_2) + y(x_2y_1 + ex_1 - 2y_1\lambda) + \\ + \lambda[\lambda^2 - \lambda(x_1 + x_2) + (x_1x_2 - ey_1)] = 0,$$

și înlocuim $\lambda = x_2 - x_1$:

$$y^2(x_2 - x_1 + x_1 - x_2) + y(x_2y_1 + ex_1 - 2y_1x_2 + 2y_1x_1) + \\ + (x_2 - x_1)\cdot[(x_2 - x_1)^2 - \\ - (x_2 - x_1)\cdot(x_2 + x_1) + (x_1x_2 - ey_1)] = 0$$

sau

$$y(ex_1 + 2y_1x_1 - x_2y_1) + (x_2 - x_1)\cdot(2x_1^2 - x_1x_2 - ey_1) = 0. \tag{22}$$

Din (22) se vede că ecuația în y este de gradul 1 în loc de 3, deci curba are pentru $x = x_2 - x_1$ o dreaptă care trece prin două puncte de la infinit.

În modul acesta, existența asimptotei este mai rapid pusă în evidență.

Rezolvînd (22) în raport cu y, avem

$$y = \frac{(x_1x_2 + ey_1 - 2x_1^2)\cdot(x_2 - x_1)}{(ex_1 + 2y_1x_1 - x_2y_1)}. \tag{23}$$

Relația (23) dă tocmai ordonata punctului unic de traversare, care va avea coordonatele

$$\begin{cases} x = x_2 - x_1, \\ y = \dfrac{(x_2 - x_1)\cdot(x_1x_2 + ey_1 - 2\,x_1^2)}{(ex_1 + 2\,y_1x_1 - x_2y_1)}. \end{cases} \tag{24}$$

Dacă $e = 0$, avem

$$\begin{cases} x = x_2 - x_1, \\ y = \dfrac{(x_2 - x_1)\cdot(x_2 - 2\,x_1)\cdot x_1}{(2\,x_1 - x_2)\,y_1} = -\dfrac{x_1}{y_1}\cdot\,(x_2 - x_1). \end{cases} \tag{25}$$

Observație. La mecanismul manivelă-piston centric, punctul de traversare se găsește :

a) dedesubtul axei ox dacă $x_1 > 0$ $(x_2 - x_1 > 0)$;

b) în punctul $B\,(x_2,\ 0)$ dacă $x_1 = 0$;

c) deasupra axei ox dacă $x_1 < 0$ sau $y_1 < 0$;

d) dacă $y_1 = 0$ (articulația A se află pe axa ox), cubica C.P.—R.R. nu-și traversează asimptota în cazul particular ($e = 0$) și în cel general (vezi și (24)) avem

$$y = \frac{x^2 - x_1x}{e}.$$

În figura 5 s-a trasat analitic curba C.P.—R.R. la un mecanism manivelă-piston avînd următoarele date :

$$x_1 = 0{,}15\text{ m}\,;\quad x_2 = 0{,}35\text{ m}\,;\quad y_1 = -\,0{,}1\text{ m}\,;\quad e = 0.$$

Ecuația cubicei C.P.—R.R. este în acest caz

$$x^3 - 2\,xy + xy^2 - 5{,}5\,x^2 - 1{,}5\,y^2 + 7\,x + 3{,}5\,y = 0,$$

iar coordonatele punctului de traversare K sînt

$$x_k = 20\text{ mm (pe desen)}.$$

$$y_k = +\,30\text{ mm (pe desen)}.$$

5. TANGENTA ÎN ORIGINE LA CUBICA C.P. — R.R.

Se știe că, dacă o curbă plană trece prin origine, ecuația tangentei în acest punct se obține anulînd grupul termenilor de gradul 1 din ecuația curbei [2].

Din ecuația (1) rezultă

$$x(x_1x_2 - ey_1) + y(x_2y_1 + x_1e) = 0$$

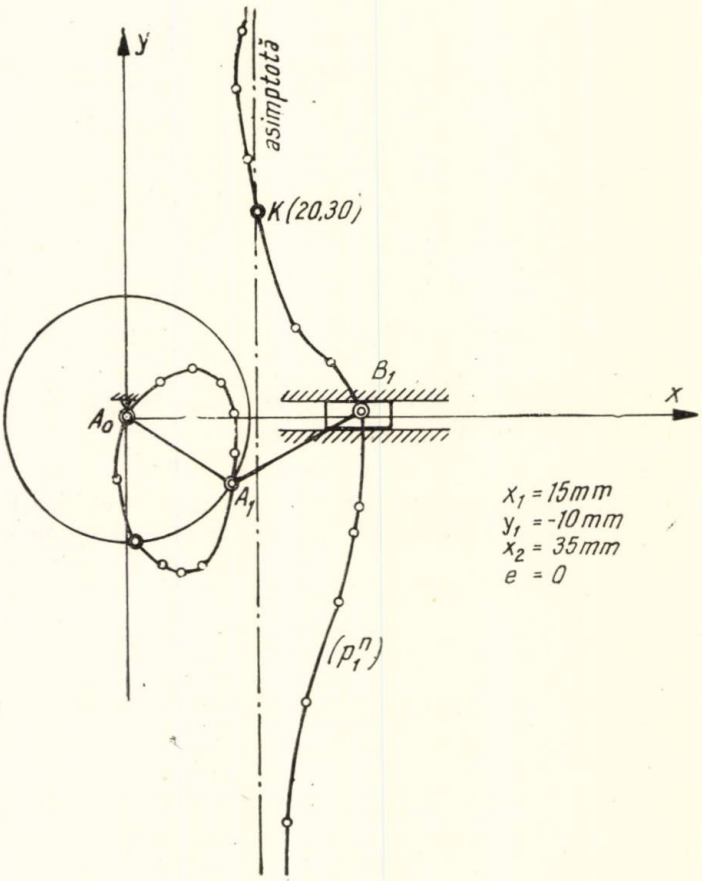


Fig. 5

sau

$$y = \frac{(ey_1 - x_1x_2)}{(x_2y_1 + x_1e)}x. \tag{26}$$

Ecuația (26) dă tangenta în A_0 la cubica C.P.—R.R. :

— dacă $e = 0$:

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x$$

deci, la mecanismul manivelă-piston centric, tangenta în origine este perpendiculară pe manivela $\overline{A_0A}$;

— dacă $y = 0$:

$$ey_1 - x_1x_2 = 0$$

sau

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x_2}{e}, \tag{27}$$

deci $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{e}$ arată condiția ca cubica C.P.—R.R. să fie tangentă la axa ox;

— dacă $x = 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \infty = \frac{ey_1 - x_1 x_2}{x_2y_1 + x_1e},$$

adică

$$x_2y_1 + x_1e = 0,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{e}{x_2}, \tag{28}$$

deci cubica C.P.—R.R. este tangentă la axa oy;

— dacă $x_2 = 0$:

$$y = x \frac{ey_1}{x_1e} = x \operatorname{tg} \varphi,$$

deci manivela A_0A este tangentă în origine la cubica C.P.—R.R.

6. FORMA CUBICEI C.P. — R.R.

Facem $x = \lambda$ și intersectăm cubica :

$$y^2(\lambda + x_1 - x_2) + y(x_2y_1 + ex_1 - 2\lambda y_1) + \lambda[\lambda^2 -$$

$$- \lambda(x_1 + x_2) + (x_1x_2 - ey_1)] = 0. \tag{29}$$

Realizantul este

$$\Delta = 4\lambda^4 - 8x_2\lambda^3 + 4\lambda^2(x_1x_2 + x_2^2 - x_1^2 - ey_1 - y_1^2) +$$

$$+ 4\lambda[x_1x_2(x_1 - x_2) + x_2y_1(y_1 + e)] - (x_2y_1 + ex_1)^2 = 0 \tag{30}$$

sau

$$\Delta = P(\lambda) = a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e = 0, \tag{31}$$

unde

$$\begin{cases} a = 4; & a > 0, \\ b = -8x_2; & b < 0, \ (\text{pentru } x_2 > 0) \\ c = 4[x_2(x_1 + x_2) - x_1^2 - y_1(y_1 + e)] & (\pm), \\ d = 4[(x_1 - x_2)x_1x_2 + x_2y_1(y_1 + e)] & (\pm), \\ e = -(x_2y_1 + x_1e)^2 < 0 & (e < 0). \end{cases} \tag{32}$$

Nr. crt.	a	b	c	d	e	Rădăcini pozitive	Numărul de ramuri ale cubicei
1	+	−	+	+	−	3 rădăcini +	2 ramuri
2	+	−	+	−	−	3 rădăcini +	2 ramuri
3	+	−	−	+	−	3 rădăcini +	2 ramuri
4	+	−	−	−	−	1 rădăcină +	imposibil

Conform regulii lui Descartes, numărul rădăcinilor pozitive ale ecuației $P(x) = 0$ nu este mai mare decît numărul schimbărilor de semne în șirul coeficienților polinomului $P(x)$ și poate diferi de el cu un număr cu soț, conform figurii 6 dacă:

— cubica are o ramură, deci avem cel puțin o rădăcină pozitivă a polinomului (31);

— cubica are două ramuri, deci avem cel puțin două rădăcini pozitive ale polinomului (31).

Coeficienții care pot prezenta variații de semn sînt c și d (32).

Dacă avem $x_2 > 0$, rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{c}{4} = x_2(x_1 + x_2) - x_1^2 - y_1(y_1 + e) < 0, \\ \dfrac{d}{4} = (x_1 - x_2)\cdot x_1x_2 + x_2(y_1y_1 + e) < 0, \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1x_2 + y_1(y_1 + e) < 0, & (34) \\ x_2(x_1 + x_2) - x_1^2 - y_1(y_1 + e) < 0. & (34') \end{cases}$$

În figura 6 s-au notat cu Mj punctele de tangentă ale cubicei C.P.—R.R. cu dreapta $x = \lambda$ și cu K_j intersecțiile cubicei cu axa OX.

Din (34) avem

$$x_1^2 + y_1(y_1 + e) < x_1 x_2$$

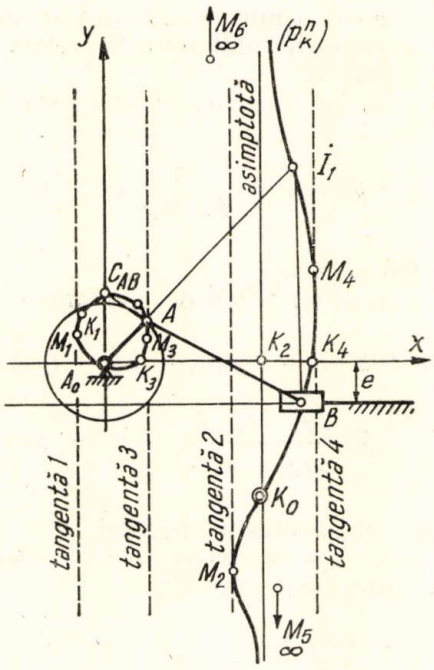


Fig. 6

și, înlocuind în (34'), avem cu atît mai mult

$$x_2(x_1 + x_2) < x_1 x_2$$

sau

$$x_2^2 < 0 \text{ (imposibil).}$$

Discuție. Din tabelă se vede că polinomul $P(\lambda)$ ar putea avea una sau trei rădăcini pozitive.

O singură rădăcină pozitivă polinomul nu poate avea, deci are ori trei ori nici una.

Cum o rădăcină e dată de ramura care trece prin B (fig. 6), întotdeauna avem o tangentă paralelă cu axa oy în domeniul $x > 0$, căci și $x_2 > 0$.

Deci $P(\lambda)$, admițînd o rădăcină pozitivă în orice caz ($x_2 > 0$), admite întotdeauna trei rădăcini pozitive (sînt posibile deci numai variantele 1, 2, 3 din tabelă).

Cazul $x_2 < 0$, care ar necesita o discuție suplimentară, este constructiv imposibil. Chiar și în acest caz, dacă se discută sistemul de inegalități (33), apare la fel

$$a_2^2 < 0 \text{ (imposibil).}$$

TEOREMA 5. La mecanismul manivelă-piston, cubica C.P.—R.R. are întotdeauna două ramuri, indiferent de relațiile geometrice dintre laturile conturului generator.

Ordonata punctului de tangență se află ușor din

$$y - y_0 = \left(-\frac{F'x}{F'_y}\right)_{M_0} \cdot (x - x_0),$$

unde M_0 e punctul de tangență.

Avem în cazul tangentei verticale, evident,

$$F'_y = -2\,y_1 x + 2\,yx + 2\,y\,(x_1 - x_2) + (x_2 y_1 + x_1 e) = 0,$$

$$y = \frac{2\,y_1 x - (x_2 y_1 + x_1 e)}{2\,(x + x_1 - x_2)} = y\,(x),$$

unde la numitor apare și abscisa asimptotei.

Evident, dacă $x = x_2 - x_1$, avem $y \to \infty$, deci un alt mod de a demonstra existența asimptotei vericale.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. N. CIORĂNESCU, *Curs de algebră și analiză matematică*, București, Edit. tehnică, 1955.
2. G. VRÎNCEANU, *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1962.
3. P. LOHSE, *Wege zur Konstruktion von Kurbelgetrieben mit Hilfe von Polortkurven*, Konstruktion, *15*, 404—404 (1963).
4. N. I. MANOLESCU, GH. POPA, *Contributions to the analytical synthesis of a four-bar linkage mechanism for obtaining a given coupler-curve*, Comunicare la sesiunea științifică a cadrelor didactice din I.P.B., noiembrie, 1968.

STUDIUL EXPERIMENTAL AL DINAMICII MECANISMELOR CU CAME

de CHR. PELECUDI și I. SAVA
Centrul de mecanică a solidelor

În lucrare se analizează comparativ comportarea în regim dinamic a diverselor profile de camă atît pe cale teoretică, cît și experimentală. Studiul teoretic se efectuează considerînd două modele matematice folosite de literatura de specialitate. Camele a căror profil este analizat teoretic sînt experimenta te pentru diverse condiții de funcționare. Marele număr de oscilograme permite indicarea condițiilor de folosire a unuia sau altuia dintre cele două modele m atematice considerate.

1. MODELUL MONOMASIC FĂRĂ CONSIDERAREA FRECĂRII ȘI REZISTENȚEI TEHNOLOGICE

1.1. Fără a revedea ipotezele care au stat la baza alcătuirii acestui model intuitiv [1], corespondentul său matematic are forma [2]

$$y'' + \omega_n^2 y = \omega_n^2 y_c, \tag{1}$$

redată în coordonate adimensionale cu y deplasarea urmăritorului, y_c deplasarea impusă de camă și $\omega_n^2 = \dfrac{k}{m} t_0^2$ pulsația proprie adimensională, iar mărimile prin care acestea se exprimă au semnificația: $K \left[\dfrac{\text{kg}}{\text{cm}}\right]$ constanta elastică redusă a elementelor dintre camă și ultimul element condus, m [kgs^2/cm] masa redusă la elementul condus, iar t_0 [s] timpul corespunzător realizării cursei totale a elementului condus.

Din problemele a căror analiză se poate face folosind modelul matematic [1], se va considera numai cazul cînd se cunoaște legea curbei de ghidare y_c și se cere mișcarea sistemului urmăritor y [1].

Pentru studiu s-au ales trei curbe de ghidare : parabolică (2), cubică (2—3) și polinominală (3—4—5), toate de tipul $R-C$:

— curba de ghidare parabolică (2). Are ecuația

$$y_c = 2\,x^2 \text{ pentru } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}5 \text{ și } y_c = 1 - 2\,(1-x)^2 \text{ pentru } 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1,$$

pentru care curba de răspuns a accelerației are forma

$$y'' = 4\,(1 - \cos \omega_n\, x) \quad \text{și} \quad y'' = 4\,[\cos \omega_n\,(1-x) - 1] \quad (\text{pe intervalul } 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1); \tag{a}$$

— curba de ghidare cubică (2—3). Are ecuația

$$y_c = 3\,x^2 - 2\,x^3,$$

pentru care curba de răspuns a accelerației are forma

$$y'' = \frac{12}{\omega_n} \sin \omega_n\, x - 6\,(1 - \cos \omega_n\, x) - 12\,x; \tag{b}$$

— curba de ghidare polinomială (3—4—5). Are ecuația

$$y_c = 10\,x^3 - 15\,x^4 + 6\,x^5,$$

pentru care curba de răspuns a accelerației are forma

$$y'' = -\left(\frac{60}{\omega_n} - \frac{720}{\omega_n^3} \sin \omega_n\, x - \frac{360}{\omega_n^2}\,(1 - \cos \omega_n\, x) + \left(60 - \frac{720}{\omega_n^2}\right) x - 60x^2(3 - 2x). \right. \tag{c}$$

Metodica determinării curbelor de răspuns este redată în lucrarea [2], iar reprezentarea lor grafică este redată în figurile 1, 2, 3 prin linie plină.

Curbele de răspuns teoretice, considerînd sistemul rigid, sînt redate pe aceleași figuri cu linie întreruptă și coincid cu acelea de intrare impuse de profilul camei. Curbele de răspuns reale au fost ridicate pe un stand experimental cu trei posturi și cu posibilitatea realizării a opt trepte de viteze (350—2 800 rot/min). Standul, redat în figura 4, este compus din două părți : una mecanică și alta electronică. Partea mecanică conține motorul de antrenare, cutia de viteze, volantul, arborele portcamă și suportul tachetului. Tachetul are o construcție specială pentru realizarea diferitelor valori ale constantei elastice K și diferite prestrîngeri ale resortului de readucere, așa cum se poate vedea în figura 5.

Partea electronică se compune, la rîndul ei, dintr-un traductor inductiv de construcţie originală, fixat la capătul tachetului elastic şi care redă direct viteza, dintr-un dispozitiv de prelucrare a informaţiei, a cărui caracteristică de frecvenţă este redată în figura 6, şi dintr-un oscilograf cu două spoturi.

S-au experimentat un număr de trei came profilate, după legile menţionate mai sus. Ele au fost executate folosind coordonatele polare, cu pasul corespunzător unui unghi de 12′. Datele constructive ale camelor au fost: unghiurile de ridicare şi coborîre egale $\varphi_r = \varphi_c = 180^0$, iar cursa de ridicare $h = 5$ mm.

Experimentările au fost făcute cu tachet rigid şi cu tachet elastic în două variante: $K = 1\,000$ şi, respectiv, 2 000 kg/cm la două turaţii extreme; $n = 1\,750$ şi, respectiv, 2 800 rot/min pentru fiecare valoare a constantelor elastice considerate.

1.2. Diagramele curbelor de răspuns experimentale sînt reprezentate în coordonate adimensionale, iar factorul de scară ka are valoarea $1{,}096 \cdot 10^2$ m/s^2. Folosirea relaţiei a [m/s^2] $= ka \cdot (a)$, unde (a) se urmăreşte pe diagramă şi se măsoară în cm, permite cunoaşterea valorilor reale ale acceleraţiei în orice moment.

Dacă se notează prin ε raportul dintre perioada forţei perturbatoare t_f şi perioada oscilaţiilor proprii t_p, adică $\varepsilon = \frac{t_p}{t_f} = \frac{\omega_p t_f}{2\pi t_0}$, atunci, comparînd curbele de răspuns reale cu cele teoretice, se pot trage următoarele concluzii:

a) Excentricitatea camei, impusă de realizarea cursei de ridicare, reprezintă o forţă perturbatoare a cărei periodicitate depinde de curba acceleraţiei [2]. Astfel, pentru camele profilate după legi a căror curbă a acceleraţiei are salt în origine, perioada t_f este egală cu dublul timpului corespunzător ridicării maxime a urmăritorului ($2\,t_0$), iar pentru acelea cu acceleraţia nulă în origine perioada coincide cu timpul necesar realizării cursei maxime a urmăritorului (t_0) şi deci ε devine fie ω_p/π, fie $\omega_p/2\,\pi$.

Prezenţa forţei perturbatoare realizată de cama căreia i se asociază şi elasticitatea elementelor componente conduce la apariţia unor vibraţii ale urmăritorului pe camă.

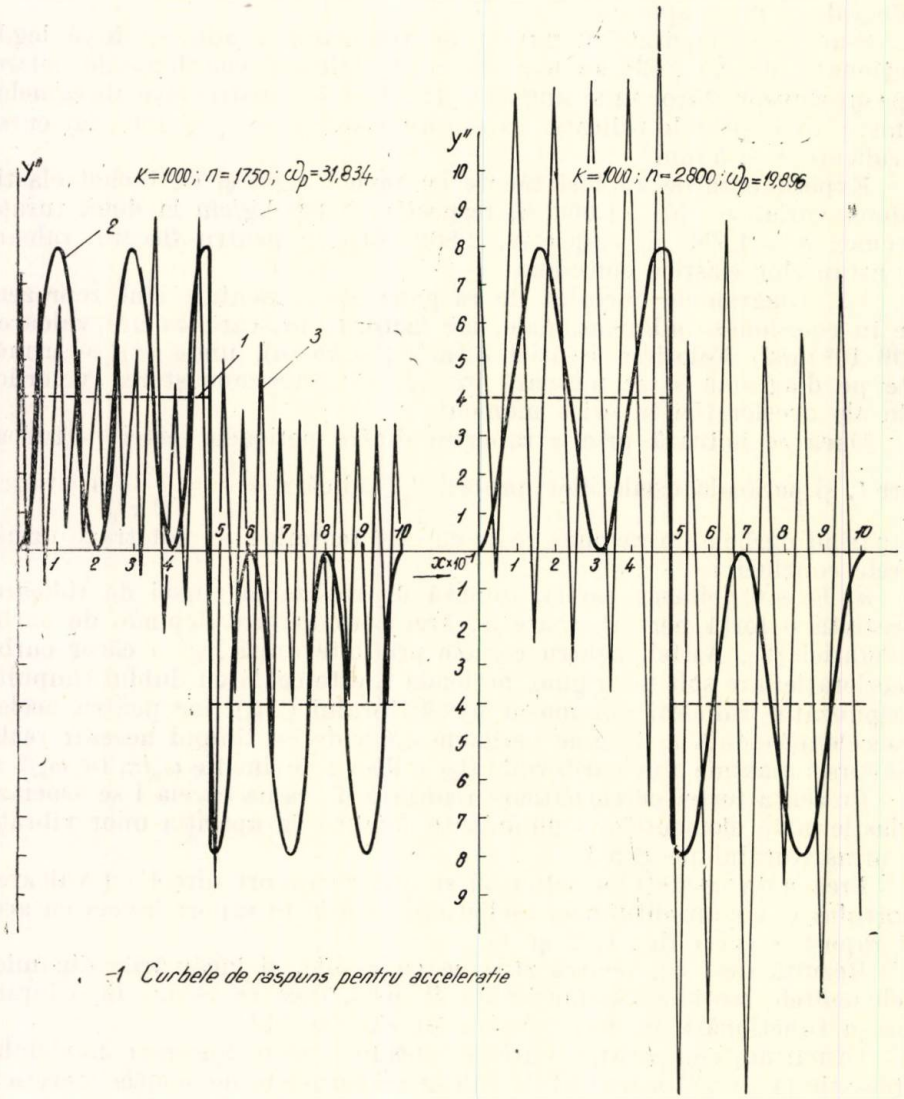
Frecvenţa oscilaţiilor vibraţiei se află în raport direct cu valoarea raportului ε, iar amplitudinea oscilaţiilor se află în raport invers cu acelaşi raport ε (vezi fig. 1, 2 şi 3).

Rezultă deci că, pentru sisteme cu ε mic, şi încărcările dinamice în elementele lanţului cinematic vor fi mari, ceea ce revine la o înrăutăţire a funcţionării în cazul sistemelor elastice [1].

Urmărind comparativ curbele obţinute prin folosirea modelului matematic (1), rezultă indicaţiile calitative furnizate de soluţia teoretică.

b) Sistemele puternic elastice conduc la modificări substanţiale ale curbelor de răspuns ale parametrilor funcţionali. Uneori aceştia pot corespunde altei legi de intrare, însă cu o constanţă elastică diferită.

Dacă elementul final al sistemului urmăritor are destinaţia alimentării cu combustibil (cazul distribuţiei la motoarele cu ardere internă), atunci modificarea curbei de răspuns atrage după sine schimbarea valorii cronosecţiunii [2], care se exprimă prin integrala deplasării, deci şi o modificare a funcţionării motorului.



1 Curbele de răspuns pentru acceleratie

Fig. 1

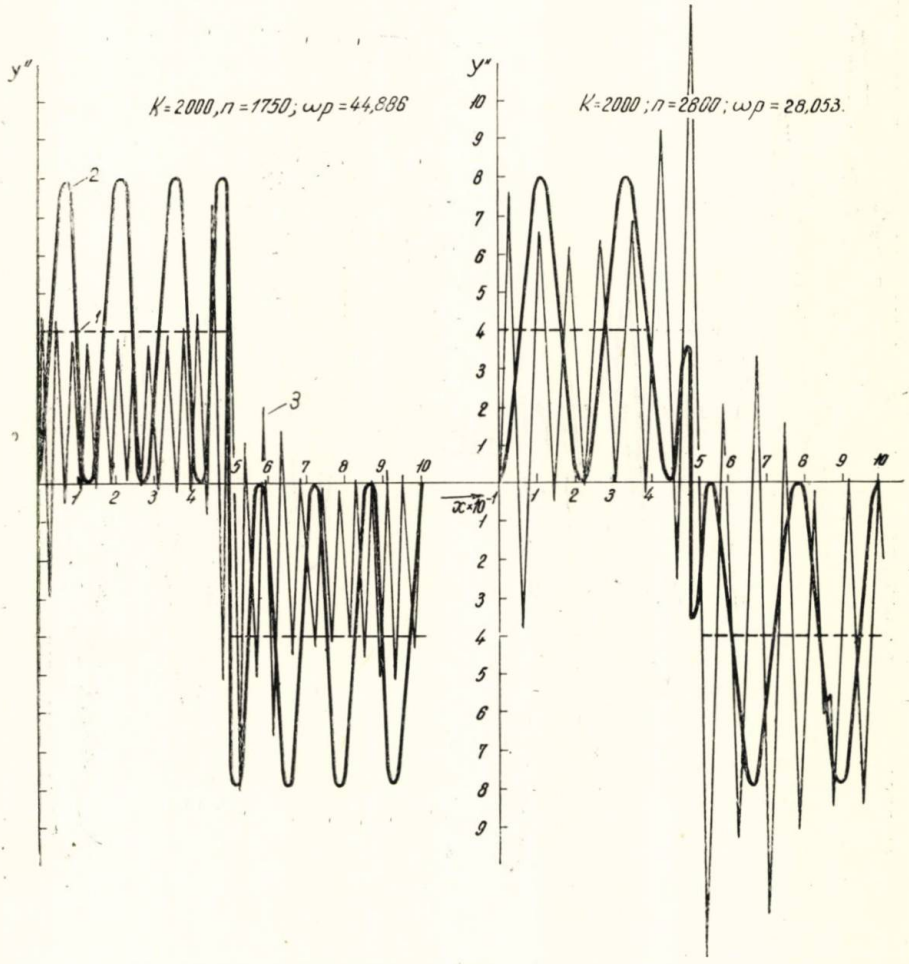


Fig. 1 (continuare)

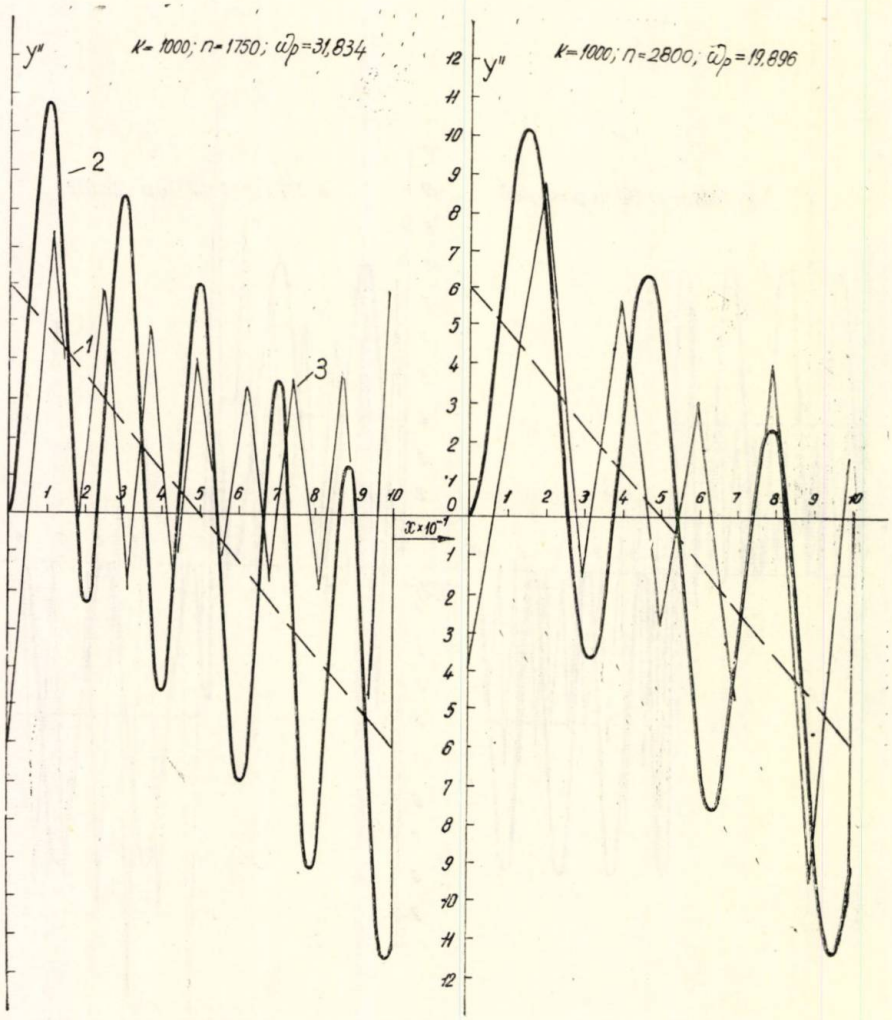


Fig. 2

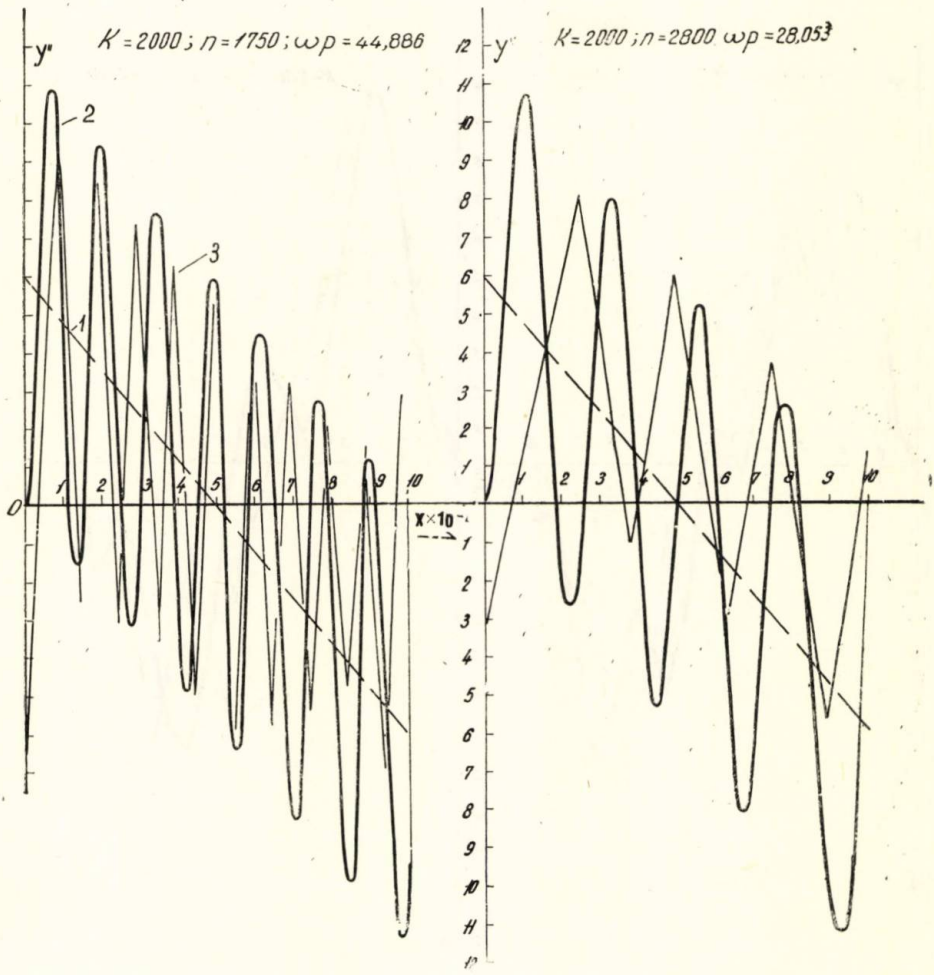


Fig. 2 (continuare)

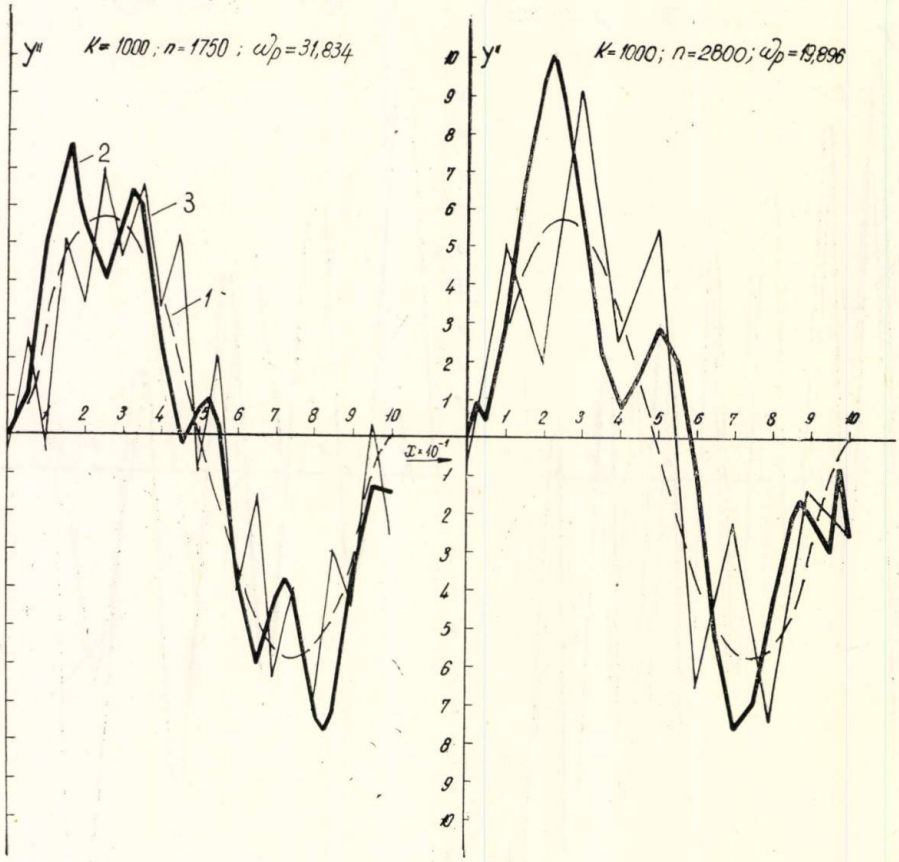


Fig. 3

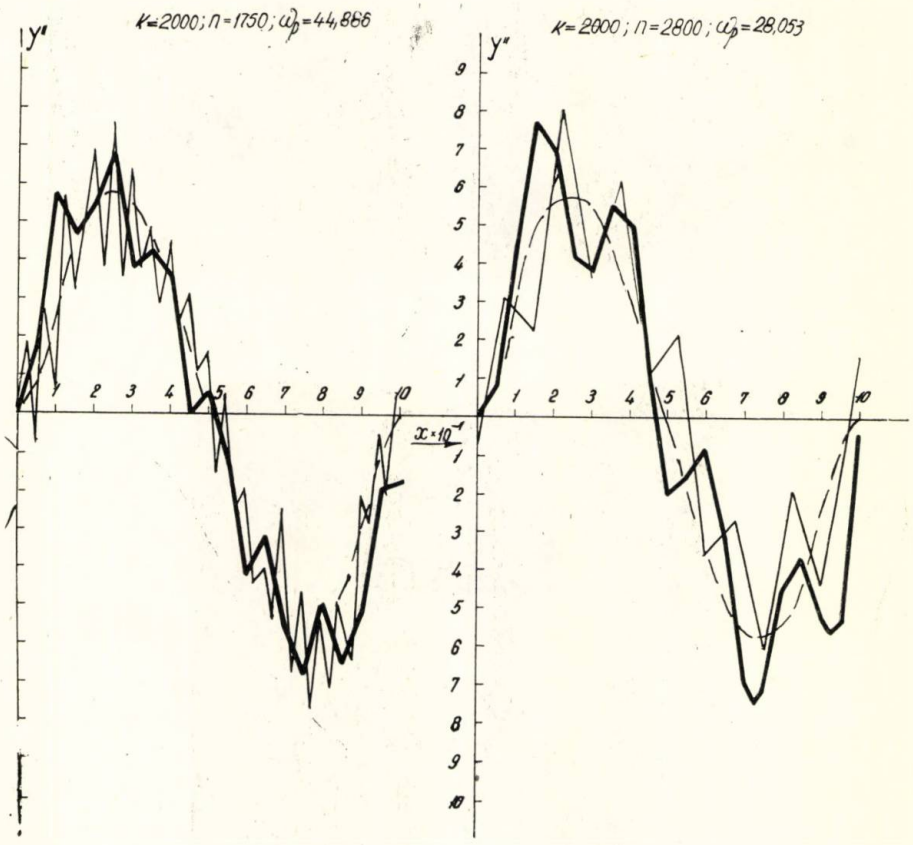


Fig. 3 (continuare)

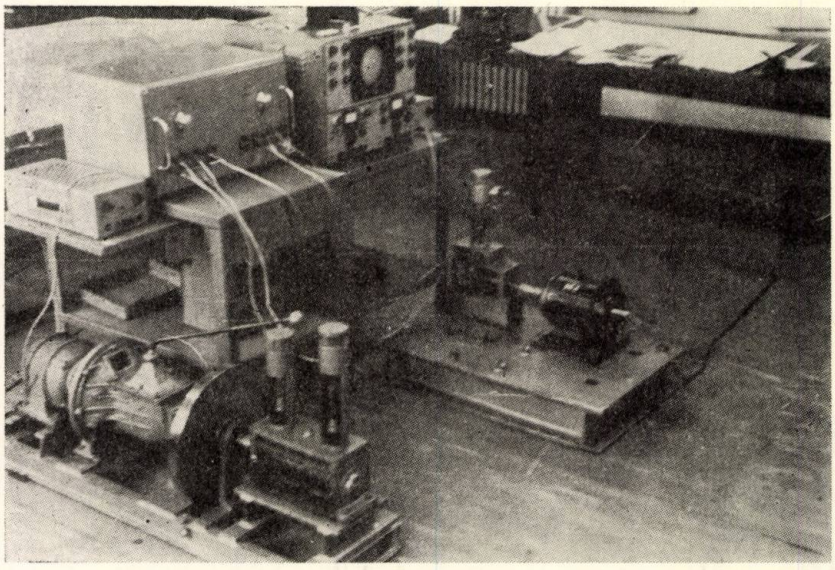


Fig. 4

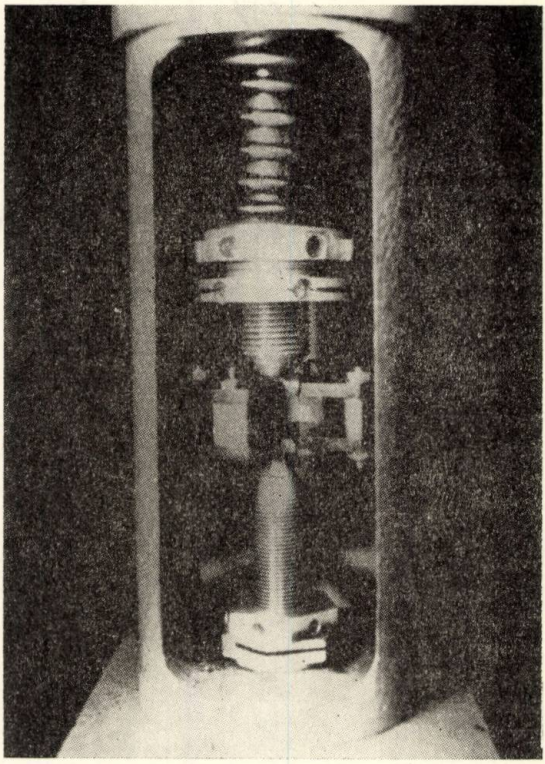


Fig. 5

La același lucru conduc și profilele a căror suprafață nu este bine prelucrată (pas mare la execuție și linii poligonale neșlefuite). În figurile 7 și 8 sînt redate curbele de răspuns ale accelerației camei parabolice cu tachet rigid pentru două turații de funcționare.

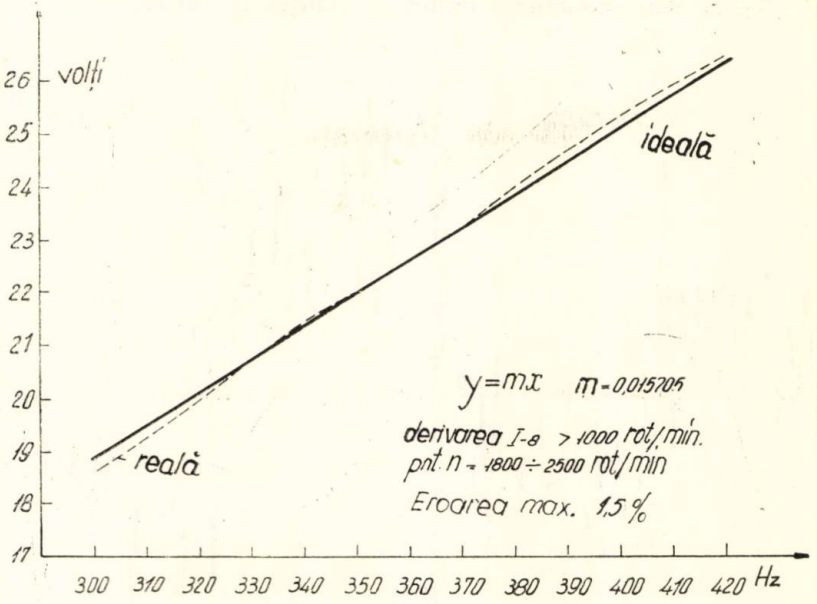


Fig. 6

Se observă efectul liniilor poligonale, mult amplificat o dată cu creșterea turației. Mărirea preciziei de eczecuție conduce la apropierea formei curbei de răspuns de cea ideală, așa cum se vede în figura 8, unde abaterile față de valoarea constantă sînt neînsemnate.

Este deci evidentă înrăutățirea parametrilor funcționali atunci cînd sistemului urmăritor, puternic elastic, i se asociază și o tehnologie de execuție deficitară [4].

Soluțiile teoretice corespunzătoare modelului (1) nu indică consecințele de mai sus.

c) Coeficientul de dinamicitate, definit mai sus, depinde de valoarea raportului ε, în timp ce soluția teoretică indică valoarea constantă $c = 2$ pentru profilul parabolic. Pentru valori ale raportului ε mult mai mari decît 2, legile de mișcare, fără salturi în curba accelerației, au $c \simeq 1$ (cazul legii 3—4—5), iar pentru acelea cu schimbarea accelerației ca mărime (legea 2—3) sau și ca mărime și direcție (legea 2) coeficientul de dinamicitate are valori mărite.

d) Pentru camele profilate după legi de mișcare cu salturi în curba accelerației, amplitudinile vibrațiilor pe sectorul de accelerare sînt mai mici decît pe sectorul de decelerare. Acest lucru se explică prin faptul că, la joncțiunea dintre cele două sectoare, accelerația își schimbă brusc direcția, constituind o sursă suplimentară de vibrații, care provoacă o mărire a amplitudinilor pe sectorul de decelerare, deci către vîrful camei.

Pe porţiunea de coborîre se produce o amortizare a oscilaţiilor, care reduce vîrful amplitudinilor. În continuare ciclul se repetă.

Analizînd comparativ curbele de răspuns experimentale din figurile 1—3, rezultă o funcţionare bună pentru variaţia lină a curbei acceleraţiei [3]. Aceeaşi concluzie indică şi soluţia teoretică.

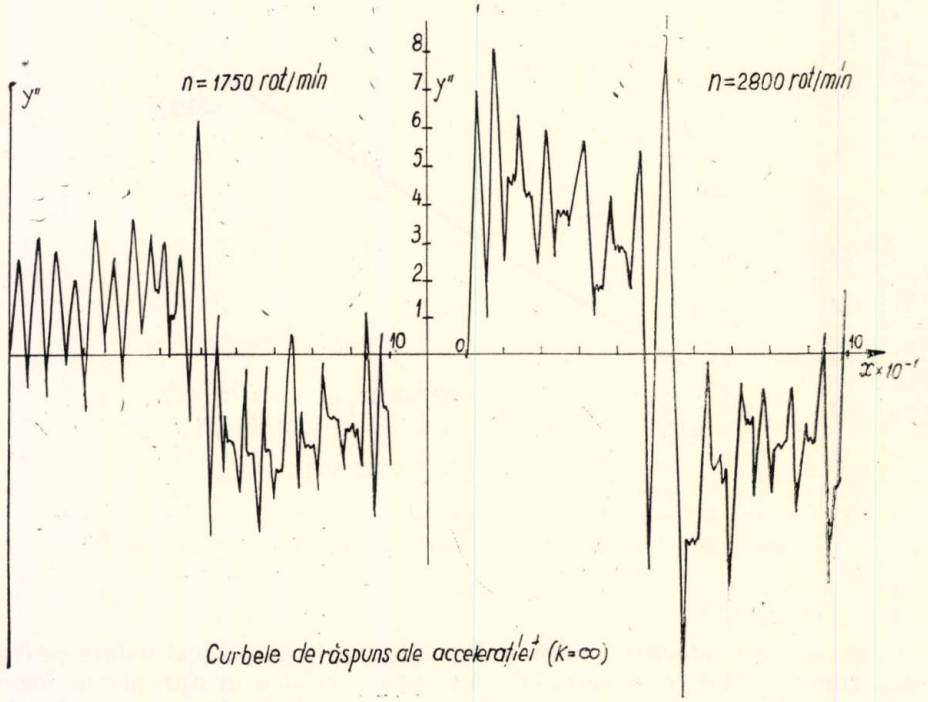


Fig. 7

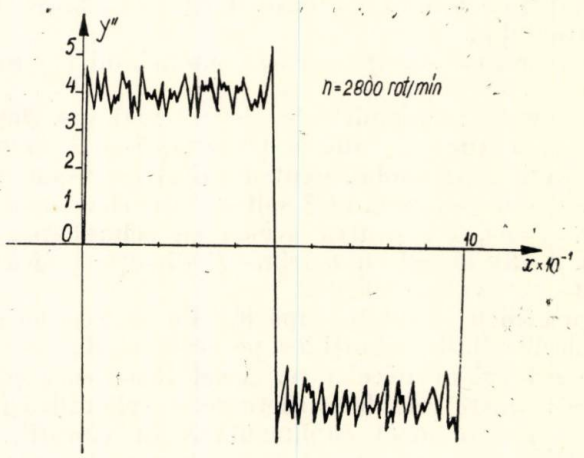


Fig. 8

e) Mărirea rigidității sistemului, ceea ce revine la mărirea raportului ε, contribuie la îmbunătățirea funcționării mecanismului. Este evident însă că o mărire a rigidității presupune dimensiuni sporite sau materiale speciale pentru elementele lanțului cinematic, care dăunează gabaritului, economiei de material și consumului de energie. Apare deci necesitatea unei optimizări.

1.3. Comparînd cele cinci concluzii, se poate conchide că, deși reprezentările experimentale includ și defectele de formă ca urmare a tehnologiei de fabricație, camele rămînînd aceleași pentru diferite regimuri de lucru, deducțiile nu sînt alterate.

Modelul matematic (1) dă numai indicații parțiale și cu valoare calitativă, el putînd fi folosit numai pentru sistemele cu funcționări mai puțin pretențioase la care raportul $\varepsilon > 2$, unde datele furnizate de soluția teoretică sînt acoperitoare.

Comportarea dinamică a unui sistem urmează a fi considerată pentru valori ale lui $\varepsilon \leqslant 2$, ceea ce corespunde mecanismelor cu came cu constante elastice cuprinse între 1 000 și 4 000 kg/cm și turații începînd de la 800 la 1 000 rot/min și, respectiv, de la 1 600 la 2 000 rot/min.

De asemenea, parametrii de răspuns sînt influențați atît de elasticitatea elementelor lanțului cinematic, cît și de tehnologia de executare a profilului.

2. MODELUL MONOMASIC CU CONSIDERAREA FRECĂRII ȘI A REZISTENȚELOR TEHNOLOGICE

2.1. Modelul matematic are forma [3]

$$y'' + \frac{b}{M\omega} y' + \frac{K+k}{M\omega^2} y = \frac{b_1}{M\omega} x' + \frac{K}{M\omega^2} x - \frac{F_0 + F_g}{M\omega^2}$$

sau (2)

$$z'' + \frac{b}{M\omega} z' + \frac{K+k}{M\omega^2} z = x'' + \frac{b_2}{M\omega} x' + \frac{k}{M\omega^2} x - \frac{F_0 + F_g}{M\omega^2},$$

unde $z = x'' - y$ este deformația relativă a sistemului, b evidențiază frecarea în mecanism, M masa redusă a sistemului, ω viteza unghiulară a camei, K și k sînt constantele elastice ale mecanismului și, respectiv, ale resortului de readucere, x este legea de profilare a camei, y deplasarea masei M, F_0 prestrîngerea resortului și F_g presiunea gazelor sau o altă rezistență tehnologică.

De observat că modelul matematic (2) (cu $b_2 = 0$) a fost folosit numai pentru studierea comportării dinamice a distribuției motoarelor cu ardere internă sub aspect teoretic.

Pentru diferite condiții posibile de funcționare, soluțiile ecuației obținute pe calculatorul numeric sînt redate în monografia lui Korcemnîi [5]. În prezenta lucrare se vor analiza comparativ curbele de răspuns obținute pe un stand experimental care reproduce sistemul de distri-

buţie al motorului cu ardere internă. Deşi profilul camelor analizate teoretic în [5] pot diferi de cele analizate experimental în prezenta lucrare, compararea concluziilor nu este împiedicată, ele avînd un caracter de generalitate.

2.1.1. Standul experimental ce se poate vedea în figura 9 este de construcţie originală şi reproduce identic sistemul de distribuţie al motorului cu ardere internă. Întrucît presiunea gazelor apare numai în primul

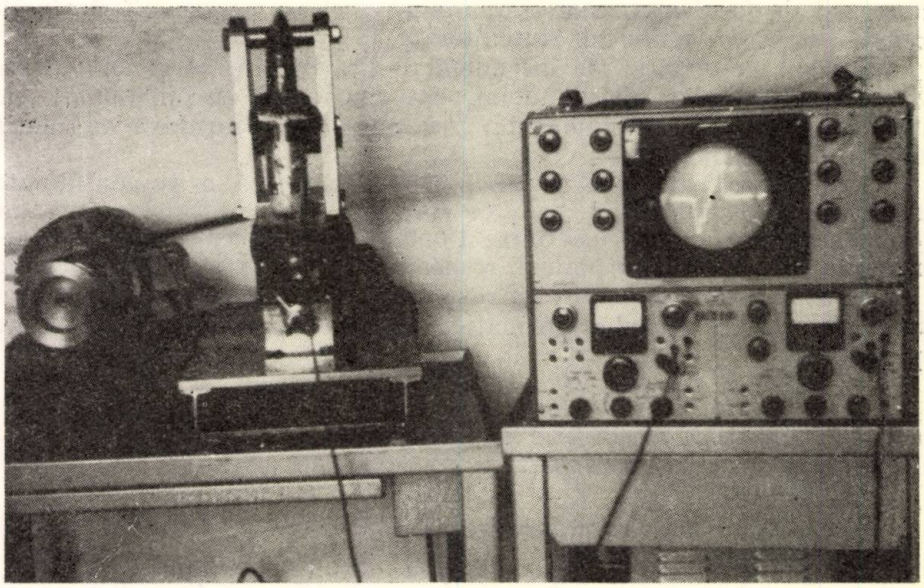


Fig. 9

moment al deschiderii supapei de evacuare şi are valori sub cele ale forţei de prestrîngere a arcului, ea nu este luată în considerare şi deci standul nu este prevăzut cu un dispozitiv de realizare a acestei presiuni.

Instalaţia are aceeaşi formă de organizare ca şi cea descrisă la punctul 1, cu deosebirea că mecanismul cu came reproduce distribuţia motorului cu ardere internă, iar traductorul se află fixat la ultimul element al lanţului cinematic, supapa. Cele şase trepte de viteză realizate de instalaţie permite analizarea comportării distribuţiei pînă la 6 000 rot/min ale arborelui motor. Instalaţia este prevăzută cu posibilitatea reglării jocului dintre elementele lanţului cinematic al distribuţiei şi al prestrîngerii resortului.

Întrucît raza minimă a camei este mică ($\simeq$ 17 mm) şi cursa realizată la supapă este mare ($\simeq$ 11 mm), la frecvenţa de efectuare a experimentărilor traductoarele industriale se distrug. Inconvenientul s-a înlăturat, realizînd traductoare de construcţie originală care redau fie viteza, fie deplasarea şi sînt capabile să reziste şi la turaţii de peste 2 000 rot/min ale arborelui cu came.

Traductorul pentru deplasare este de tip inductiv diferenţial, iar cel pentru viteză este inductiv [4].

Pentru redarea acceleraţiei s-a construit un derivator de înaltă fidelitate, a cărui caracteristică de frecvenţă este redată în figura 6.

Rezultă o foarte bună calitate a derivării semnalului furnizat de traductor.

2.1.2. Problema scării poate fi rezolvată în două moduri:

a) plecînd de la parametrul (p), redat direct pe oscilograf, astfel:

$$\begin{aligned} &\text{— deplasare,} && k_s = \frac{(p)}{p}\left[\frac{\text{cm}}{\text{cm}}\right], \\ &\text{— viteză,} && k_v = A_v \tau_1 k_s \left[\frac{\text{cm}}{\text{cm/s}}\right], \\ &\text{acceleraţie,} && k_a = A_a \tau_1 \tau_2 k_s \left[\frac{\text{cm}}{\text{cm/s}^2}\right], \end{aligned} \tag{3}$$

unde p reprezintă deplasarea sau viteza reală, A_v şi A_a reglajul atenuatorului la intrarea în oscilograf, iar τ_1 şi τ_2 constantele derivatorului, astfel alese încît să fie redate fidel primele zece armonici ale mărimii de intrare;

b) experimentînd un profil de camă simplu, de pildă parabolic, pentru care se cunosc valorile maxime ale parametrilor de intrare. Folosind un tachet rigid şi o turaţie redusă, mărimile de intrare nu se filtrează şi, în consecinţă, mărimile de ieşire sînt proporţionale cu cele de intrare, factorul de proporţionalitate fiind scara respectivă.

În prezenta lucrare s-a utilizat cel de-al doilea mod, bucurîndu-se de avantajul unor erori mai mici (numai cea de măsură a oscilogramei). Camele utilizate pentru etalonarea traductorului au avut profilele parabolic şi cosinusoidal şi s-au bucurat de precizia maximă de execuţie.

Dacă se notează prin (s), (v) şi (a) parametrii măsuraţi pe oscilograf în cm, prin λ raportul dintre turaţiile de experimentare şi etalonare şi prin k_s k_v, k_a factorii de scară pentru deplasare, viteză şi acceleraţie, atunci parametrii reali sînt daţi de relaţiile

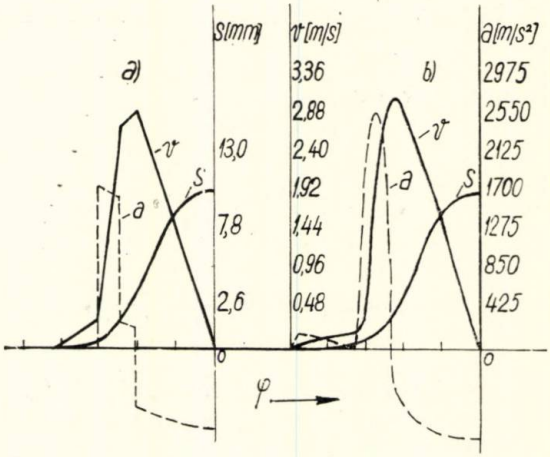
$$\begin{aligned} s &= k_s(s) && [\text{mm}], \\ v &= k_v \cdot \lambda(v) && [\text{m/s}], \\ a &= k_a \cdot \lambda^2(a) && [\text{m/s}^2]. \end{aligned} \tag{4}$$

Oscilogramele redate mai departe conţin rezultatele scărilor calculate cu relaţiile (4).

2.1.3. Au fost experimentate came cu profile compuse din arce de cerc şi din arce de sinusoidă, propuse de Kurz [7], atît de evacuare, cît şi de admisie.

Fără a mai reda şi relaţiile analitice ale legii de profilare pe diversele intervale, se menţionează că profilele sînt asimetrice pe porţiunea de deschidere şi de asemenea deschiderea este asimetrică faţă de închidere.

În figura 10 sînt redaţi parametrii de intrare s, v, a pentru ambele profile de came.



a. profil compus-arce de cerc (1800 rot/min)
b. profil sinusoidal complex (1900 rot/min)

Fig. 10

Camele de admisie au înălţimea de ridicare insensibil mai mică decît cele de evacuare (6,87 faţă de 7,218 mm). Unghiul deschiderii la camele de admisie este de 89° şi unghiul închiderii de 100°, iar la cele de evacuare de 81° şi, respectiv, 98°.

2.1.4. Oscilogramele experimentărilor efectuate pentru deplasare (s), viteză (v) şi acceleraţie (a) sînt redate în figurile 11—19. Identificarea camei experimentate se face prin relaţia aflată la baza oscilogramei, astfel: cifra din rîndul întîi indică numărul oscilogramei, iar în rîndul al doilea litera a indică admisia şi e evacuarea, iar a după cifră indică profilul din arce de cerc şi s profilul din arce de sinusoidă. În continuare urmează turaţia la care s-a executat oscilograma.

Fiind vorba de curbe plane, oscilogramele sînt reprezentate într-un sistem de referinţă monodreptunghiular, abscisa reprezentînd unghiul de rotaţie al camei φ, iar ordonata trece prin axa de rotaţie a camei şi are valoarea maximă a deplasării la intrare), deplasarea s, viteza v şi acceleraţia a. Scările sînt indicate pe fiecare dintre oscilograme.

2.1.5. Oricînd se poate presupune că forma analitică a curbelor experimentale este redată prin ecuaţia $f(\varphi, s) = 0$, care leagă între ele coordonatele carteziene ale punctului curent. Sau, în particular, rezultă reprezentarea explicită $s = g(\varphi)$, corespunzătoare deplasării elementului final. Viteza şi acceleraţia se obţin prin derivări succesive.

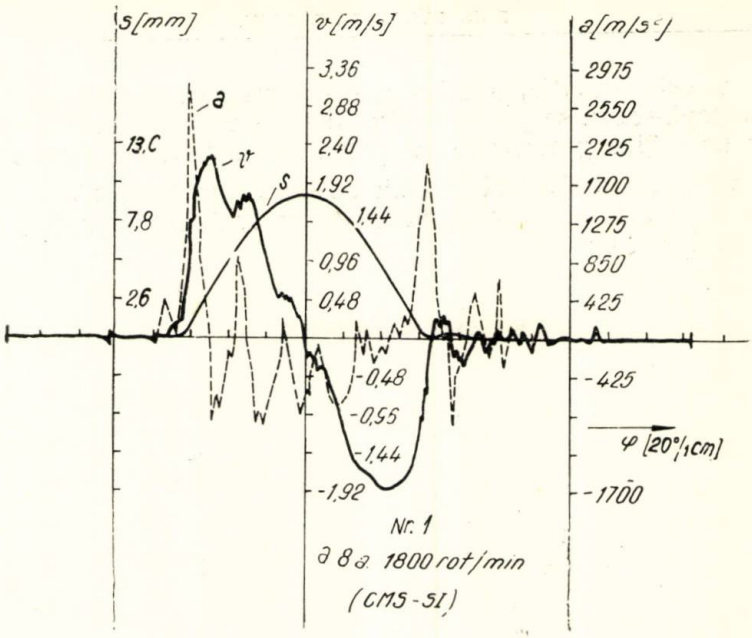

s[mm]
v[m/s]
a[m/s²]
13,0
7,8
2,6
3,36
2,88
2,40
1,92
1,44
0,96
0,48
-0,48
-0,55
-1,44
-1,92
2975
2550
2125
1700
1275
850
425
-425
-1700
a
v
s
φ [20°/1cm]
Nr. 1
∂ 8 a 1800 rot/min
(CMS-51)

Fig. 11

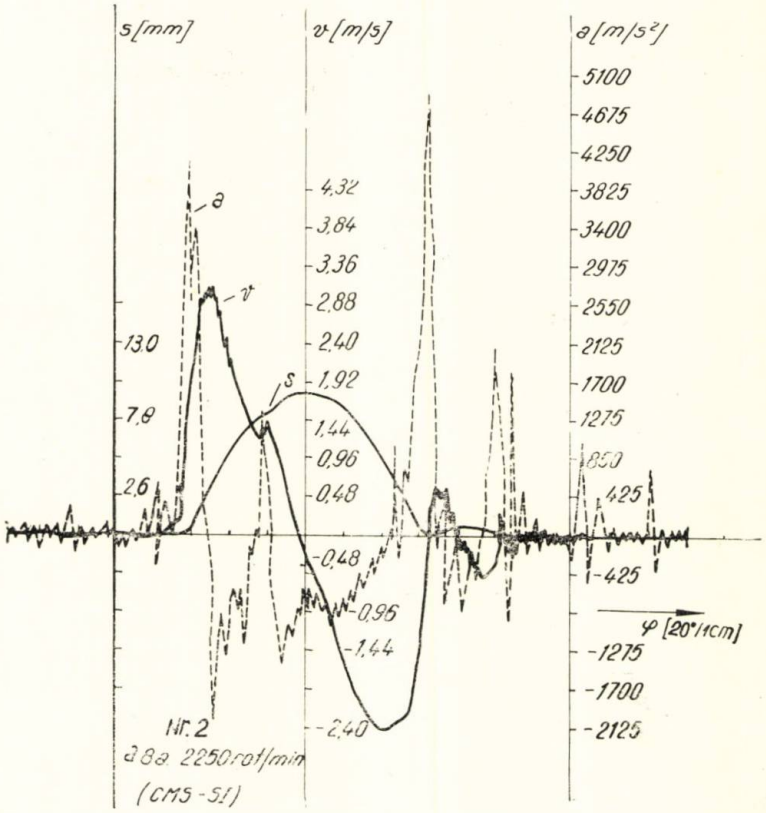

s[mm]
v[m/s]
a[m/s²]
13,0
7,8
2,6
4,32
3,84
3,36
2,88
2,40
1,92
1,44
0,96
0,48
-0,48
-0,96
-1,44
-2,40
5100
4675
4250
3825
3400
2975
2550
2125
1700
1275
850
425
-425
-1275
-1700
-2125
a
v
s
φ [20°/1cm]
Nr. 2
∂ 8 a 2250 rot/min
(CMS-51)

Fig. 12

În această situaţie, analiza mişcării relative camă-tachet şi, respectiv, supapă-scaun se poate efectua mai comod, aplicînd regulile derivate din aplicaţiile geometrice ale calculului diferenţial, astfel:

a) o funcţie derivabilă într-un interval (începutul ridicării şi sfîrşitul coborîrii) este crescătoare în acest interval dacă $v > 0$ şi descrescătoare dacă $v < 0$;

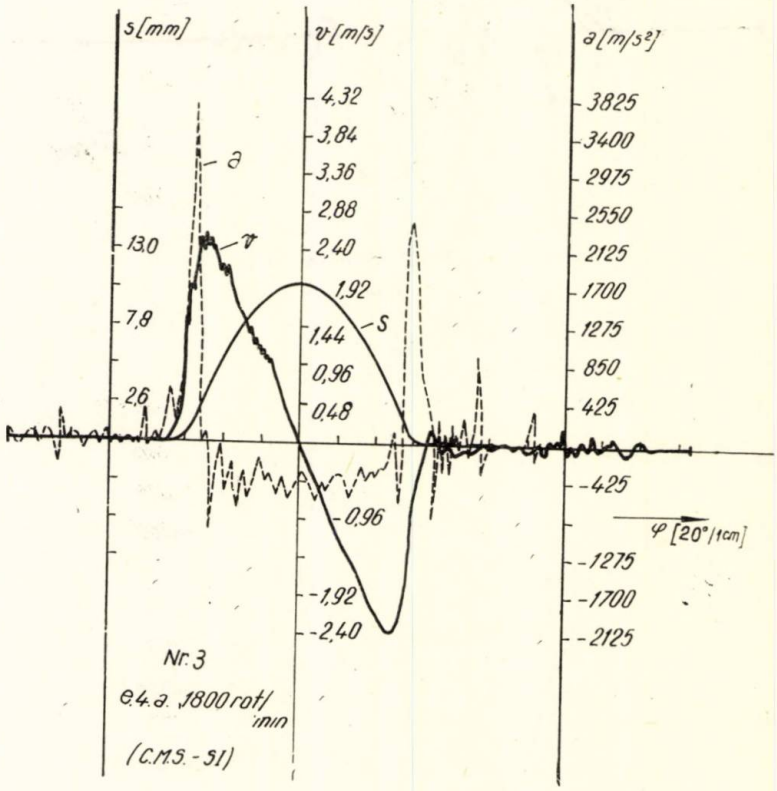


Fig. 13

b) dacă c este un punct interior intervalului şi dacă există

$$g'(c) = g''(c) = \ldots = g^{(p)}(c) = 0, \quad g^{(p+1)}(c) \neq 0,$$

atunci pentru $\varphi = 0$ există un maxim dacă $g^{(p+1)}(c) < 0$ şi un minim dacă $g^{(p+1)}(c) > 0$;

c) într-un punct c în care $v = g'(c)$ se anulează, fără a schimba de semn, pentru valori ale lui φ, în vecinătatea lui $\varphi = c$ curba $s = g(\varphi)$ are un punct de inflexiune pentru care $a = g''(c) = 0$, adică în condiţiile b) p este par.

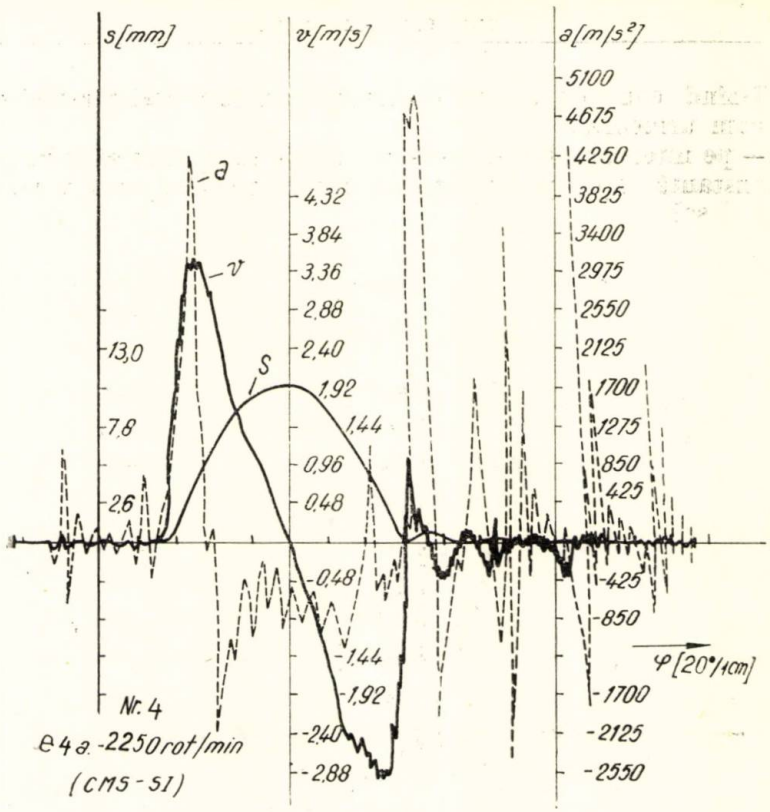

s[mm]
v[m/s]
a[m/s²]
a
v
s
13,0
7,8
2,6
4,32
3,84
3,36
2,88
2,40
1,92
1,44
0,96
0,48
-0,48
-1,44
-1,92
-2,40
-2,88
5100
4675
4250
3825
3400
2975
2550
2125
1700
1275
850
425
-425
-850
-1700
-2125
-2550
φ [20°/cm]
Nr. 4
e 4 a. -2250 rot/min
(CMS - 51)

Fig. 14

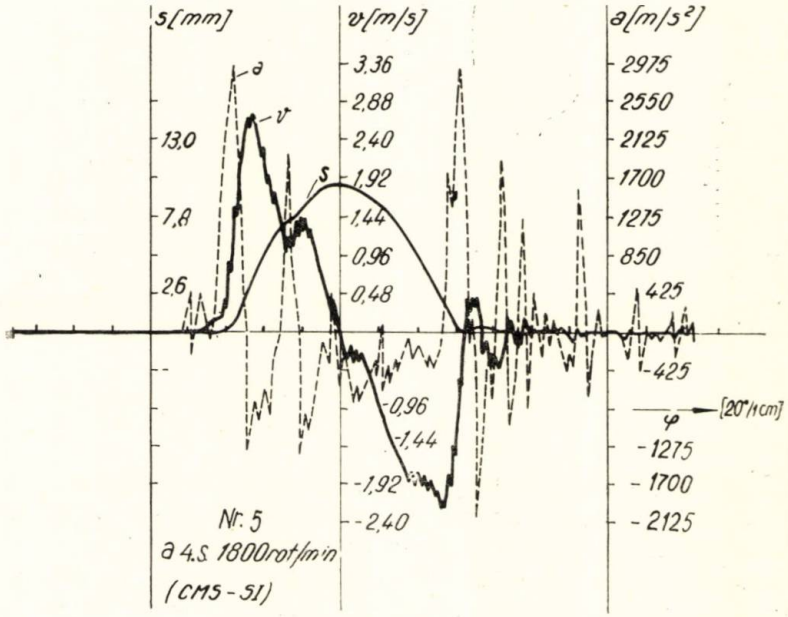

s[mm]
v[m/s]
a[m/s²]
a
v
s
13,0
7,8
2,6
3,36
2,88
2,40
1,92
1,44
0,96
0,48
-0,96
-1,44
-1,92
-2,40
2975
2550
2125
1700
1275
850
425
-425
-1275
-1700
-2125
φ [20°/cm]
Nr. 5
a 4.5 1800 rot/min
(CMS - 51)

Fig. 15

Ţinînd cont de aceste observaţii, analiza oscilogramelor se face după cum urmează :

— pe intervalul $65° < \varphi < -65°$ (unde raza cercului de bază al camei este constantă) apar perturbaţii ale funcţionării supapei numai în zona închiderii sale ;

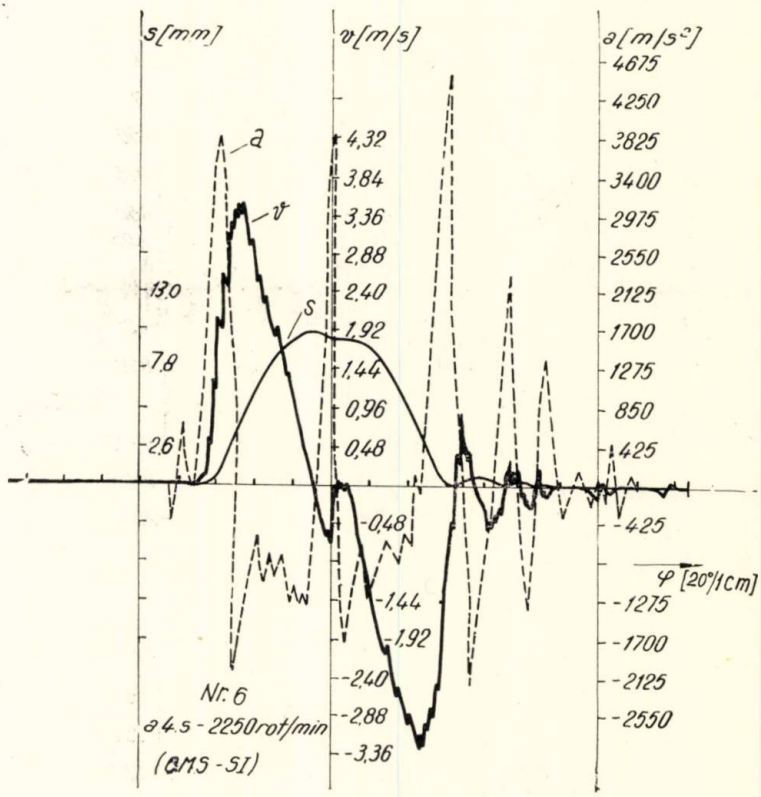


Fig. 16

— pe intervalul $-65° < \varphi < 0$, deplasarea s este în general crescătoare, deoarece $v > 0$, şi poate avea şi uşoare inflexiuni, întrucît există puncte care satisfac propoziţiunea c. În aceste puncte există un echilibru nestabil între forţa de readucere a supapei $(F_0 + sk)$ şi forţa de inerţie (ma), în sensul că

$$ma > F_0 + sk \quad \text{sau} \quad (a_r - a_i) < 0, \tag{5}$$

unde m este masa elementelor lanţului cinematic, F_0 forţa de prestrîngere a resortului, k constanta elastică a resortului, iar i şi r indicii corespunzători parametrilor de intrare şi de răspuns.

Distrugerea echilibrului se manifestă de obicei în prima parte a acceleraţiilor negative (care nu influenţează mişcarea în continuare a elementelor mecanismului) şi cu o frecvenţă crescută în zona aşezării

supapei pe scaunul său, ceea ce conduce la creşterea solicitărilor în elementele distribuţiei. Punctele de inflexiune corespund fie întreruperii ($a < 0$), fie restabilirii ($a > 0$) continuităţii lanţului cinematic;

— pe intervalul $0 < \varphi < 65°$, funcţia $s = g(\varphi)$ este în general descrescătoare ($v < 0$) şi poate avea şi inflexiuni (să se facă diferenţă

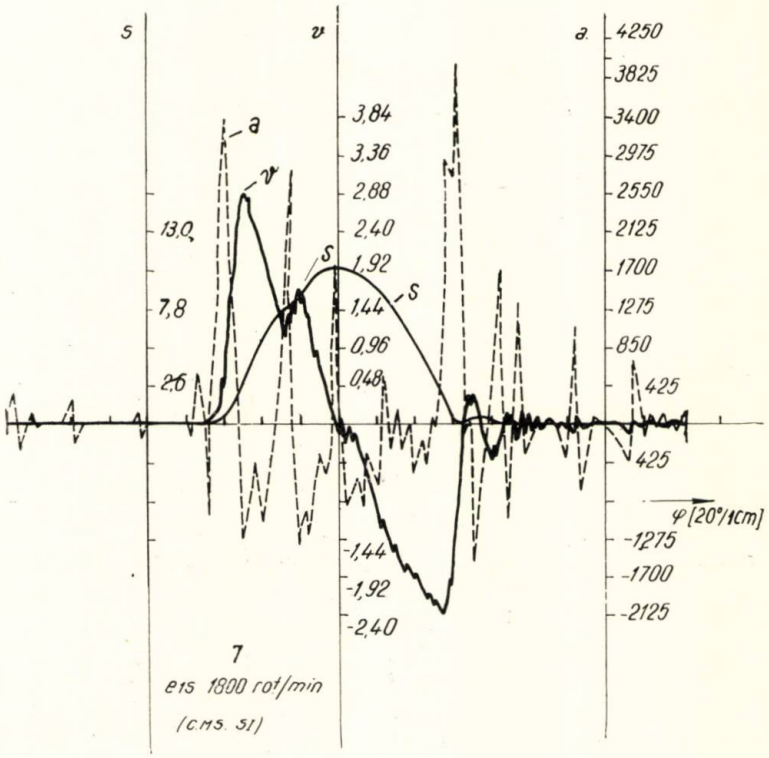


Fig. 17

între inflexiuni prevăzute datorită formei curbei de intrare şi inflexiuni provocate datorită regimului de funcţionare, la care poate contribui şi curba admisă la intrare);

— pe intervalul $\varphi \geqslant 65°$, datorită lovirii supapei de scaunul său, acesteia i se imprimă o oscilaţie forţată (remarcată printr-o succesiune de puncte de rebrusment) şi nu liberă, aşa după cum s-a pus în evidenţă în figura 20.

Forţa loviturii supapei de scaunul său depinde de viteza de şoc [5] şi se poate evalua cu relaţia

$$F_{\text{şoc}} = v_{\text{şoc}} \sqrt{mK},$$

unde K este constanta elastică redusă a elementelor mecanismului de distribuţie (pentru sistemul experimentat, valoarea lui K măsurată expe-

rimental este 5 000 kg/cm). Celelalte mărimi se măsoară astfel : v_{soc} [cm/s], m [kgs^2/cm] şi K [kg/cm].

În continuare se va analiza influenţa diferiţilor parametri constructivi asupra formei parametrilor de răspuns în cazul sistemului de distribuţie.

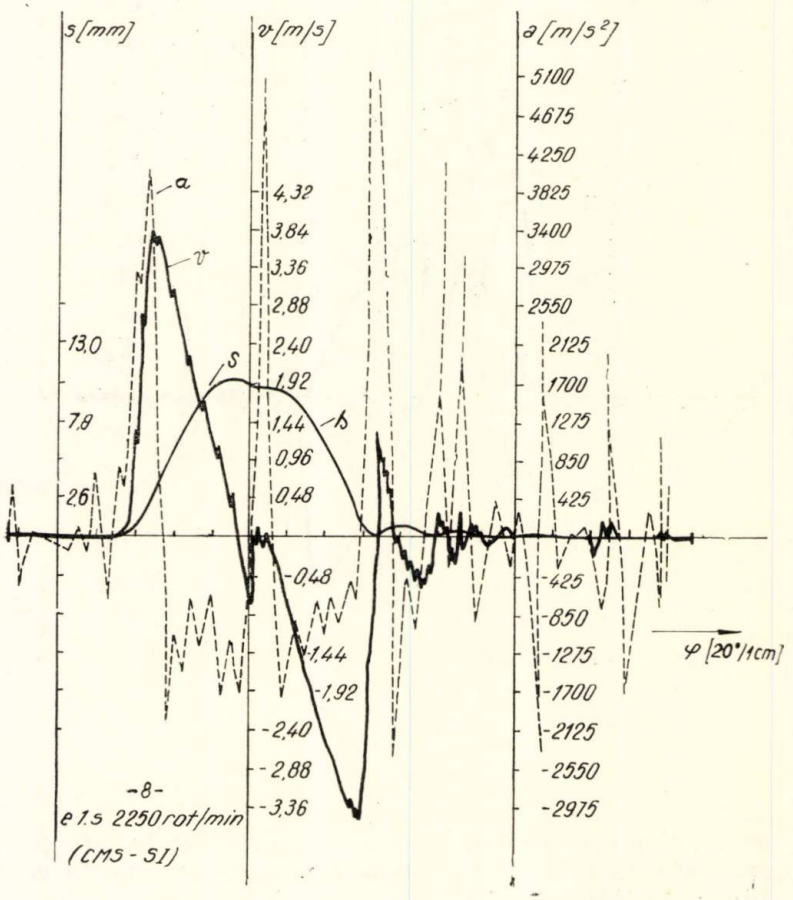


Fig. 18

2.2.1. *Influenţa amortizării.* Dificultăţile ridicate de crearea unei amortizări riguros controlate (pentru moment), dată fiind durata scurtă a fotografierii, s-au efectuat experimentări cu şi fără ungere. S-a constatat că influenţa amortizării pe intervalul $\varphi \geqslant 65°$ este asemănătoare cu reducerea turaţiei sau cu micşorarea jocului dintre elementele lanţului cinematic.

În acest sens se pot compara între ele oscilogramele pentru acelaşi profil la turaţii diferite, sau oscilograma nr. 9 cu nr. 8, ceea ce înseamnă

că funcţionarea fără ungere echivalează cu reducerea jocului de la $s_0 = 0{,}4$ la $s_0 = 0$ mm sau cu reducerea turaţiei de la 2 250 la 1 800 rot/min. Desigur că atenuarea lovirilor supapei de scaunul său prin eliminarea ungerii este practic nerealizabilă din cauza distrugerii, prin uzare a profilului camei, după un ciclu foarte redus de funcţionare.

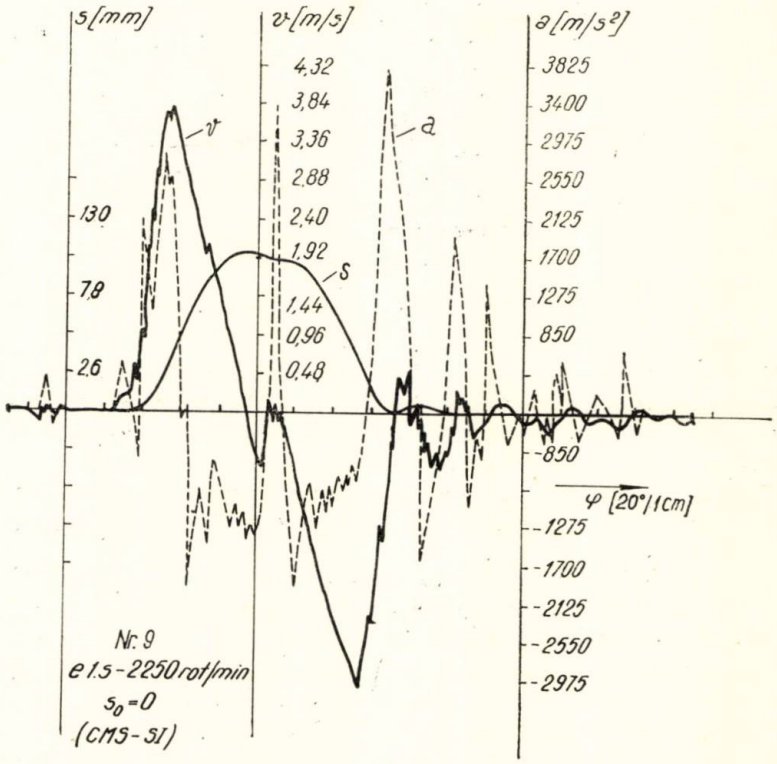


Fig. 19

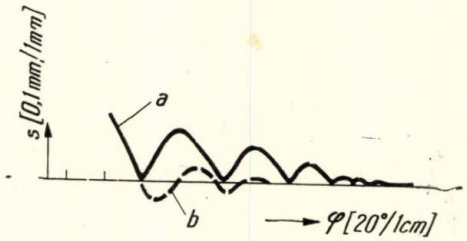
2.2.2. *Influenţa mărimii jocului.* Analizînd oscilogramele 8 şi 9, se poate constata că mărimea jocului nu influenţează decît aşezarea supapei pe scaun. O mărire a jocului favorizează o viteză de şoc mare, acceleraţii foarte mari şi funcţionare nesilenţioasă. Se recomandă deci, ori de cîte ori regimul de temperatură permite, reducerea jocului.

Modelul matematic (2) nu evidenţiază această realitate, manifestările de la închidere situîndu-le la deschiderea supapei.

2.2.3. *Influenţa numărului de turaţii ale motorului.* O dată cu creşterea numărului de turaţii ale motorului se înrăutăţesc şi condiţiile de funcţionare ale distribuţiei. Acest lucru se analizează prin compararea oscilogramelor nr. 1, 3, 5, 7 cu, respectiv, nr. 2, 4, 6 şi 8.

Mărirea numărului de turaţii conduce la întreruperea lanţului cinematic şi înrăutăţirea bruscă a aşezării supapei, mărindu-i viteza şi frecvenţa loviturilor. Viteza de şoc corespunde ordonatei v cînd $s = 0$.

Se constată o asemănare între influenţa măririi numărului de turaţii şi aceea a măririi jocului. Viteza de şoc mărită provoacă redeschiderea supapei, forţînd oscilaţia mecanismului distribuţiei.



a. Deplasarea s pentru $s_0 = 0{,}4$ mm
b. Deplasarea s pentru $s_0 = 0{,}6$ mm

Fig. 20

Mărirea numărului de turaţii sporeşte posibilitatea ca arcul să intre în rezonanţă. Într-adevăr, la sistemul de distribuţie experimentat s-a constatat prin cinematografiere rapidă intrarea în rezonanţă a resortului pentru turaţia motorului de 4 400 rot/min şi un joc de $s_0 = 0{,}4$ mm.

Efectul valorilor mari ale acceleraţiilor negative, asociat la rezonanţa resortului, conduce la înrăutăţirea funcţionării distribuţiei.

2.2.4. *Influenţa prestrîngerii arcului de readucere.* Ţinînd cont de ecuaţia (3), rezultă că baza preîntîmpinării întreruperii lanţului cinematic o constituie mărirea forţei de apăsare a resortului.

Oscilograma parametrilor de răspuns, corespunzătoare condiţiilor din oscilograma nr. 8, dar cu prestrîngere mărită cu 20 kg, este identică cu oscilograma nr. 2 pe intervalul $\varphi \geqslant 65°$. Comparaţia celor două oscilograme justifică propoziţia de mai sus. Mărirea forţei de prestrîngere modifică condiţiile iniţiale ale vibraţiei spirelor resortului şi deci se măreşte turaţia corespunzătoare rezonanţei.

Aplicarea avantajului creat de mărirea forţei resortului conduce la acţiuni nedorite, mărind încărcările elementelor mecanismului. Creşterea rigidităţii sale înrăutăţeşte aşezarea supapei pe scaun şi măreşte temperatura instantanee dintre camă şi tachet, grăbind uzura profilului. Se impune deci optimizarea resortului de readucere.

În cazul experimentărilor, arcul de readucere este dimensionat astfel încît să realizeze o forţă minimă $P_1 = 23{,}5$ kg şi maximă $P_2 = 59$ kg. Pentru valorile $m = 0{,}0341$ kgs^2/cm, $k = 35$ kg/cm (masă şi, respectiv, constantă elastică a resortului de readucere) şi deplasarea corespunzătoare unghiului pentru care acceleraţia devine negativă ($s_0 = 1{,}6$ mm), din ecuaţia (3) rezultă valorile maxime ale acceleraţiilor negative:

$$a_{max_1} = -850 \text{ m/s}^2 \quad \text{şi, respectiv,} \quad a_{max_2} = -1\,730 \text{ m/s}^2.$$

Privite din acest punct de vedere este de aşteptat pentru ambele profile ca la joncţiunea dintre sectorul de accelerare şi decelerare, cînd acceleraţia de ieşire este puternic modificată, să fie posibilă distrugerea continuităţii lanţului cinematic pentru valori ale acceleraţiei negative mai mari decît a_{max_1}.

Oscilogramele confirmă acest lucru, existînd întreruperi aproximativ la joncţiunea dintre cele două sectoare pentru toate experimentările efectuate. Acelaşi lucru se întîmplă şi pentru intervalul $\varphi > 65°$, însă aici îşi aduce contribuţia în mod deosebit viteza de aşezare a supapei pe scaun care forţează oscilaţia mecanismului.

Rezultă importanţa deosebită pe care o prezintă resortul de readucere în condiţiile unui regim dinamic de funcţionare.

2.2.5. *Influenţa frecvenţei oscilaţiilor proprii.* Aşa după cum s-a văzut în prima parte a lucrării, creşterea rigidităţii elementului lanţului cinematic, adică creşterea frecvenţei oscilaţiilor proprii, conduce la o îmbunătăţire a comportării camelor. Extrapolînd, ne putem aştepta ca şi în cazul profilelor distribuţiei lucrurile să se petreacă la fel. Măsura în care îmbunătăţirea se realizează conform figurilor 1, 2 şi 3 depinde, evident, de profilul camei.

Studiul teoretic [3], [5], al comportării distribuţiei în regim dinamic remarcă existenţa unui diapazon de frecvenţe optime pentru diverse profile de came, care depinde de forma acceleraţiilor negative. Astfel, pentru legile de mişcare fără şoc, mărirea frecvenţei proprii conduce la o funcţionare liniştită, iar pentru cele cu şoc la o înrăutăţire. Figurile 1, 2 şi 3 confirmă aceste deducţii teoretice.

2.2.6. *Influenţa legii de profilare a camelor.* Urmărind oscilogramele celor două profile în care se păstrează condiţiile de funcţionare (nr. 1, 5), se constată o tendinţă de întrerupere a continuităţii lanţului cinematic pentru profilul sinusoidal, dar aşezarea supapei pe scaun se face în condiţii bune pentru ambele profile.

Modificarea insensibilă (vezi 2.1.3) a înălţimilor de ridicare şi unghiurilor de deschidere şi închidere şi a legii punţii profilului conduce la o diferenţă în comportare, defavorabilă pentru profilul sinusoidal, dar în limite admisibile (vezi 2.2.4).

La turaţii mai ridicate ale motorului, pentru ambele profile, apare întreruperea continuităţii lanţului cinematic al distribuţiei. Restabilirea continuităţii transmisiei se realizează pentru profilele din arce de cerc pe intervalul $-65° < \varphi < 0$, iar pentru profilele sinusoidale pe intervalul corespunzător coborîrii ($0 < \varphi < 65°$).

Comparînd curbele acceleraţiilor pentru cele două profile experimentate, se constată că intervalul acceleraţiilor pozitive pentru profilul sinusoidal este aproape dublu celor din arce de cerc. În această situaţie era de aşteptat [5] ca comportarea profilului din arce de cerc să fie net inferioară celui sinusoidal.

Oscilogramele indică o perturbaţie în comportare pe intervalul deschiderii, dar care se anulează înaintea aşezării supapei pe scaun şi, prin urmare, întreruperea discontinuităţii pentru $\varphi \geqslant 65°$, mai intensă la profilul sinusoidal, trebuie privită ca avînd o altă cauză (vezi ecuaţia (3))

decît aceea a unui raport între durata acceleraţiei pozitive şi perioada oscilaţiilor proprii aproape de unitate sau mai mic.

Urmărind oscilogramele, se poate constata însă că, dacă curba deplasărilor pentru cele două profile diferă foarte puţin, curbele vitezelor şi mai ales ale acceleraţiilor sînt puternic diferenţiate.

Astfel se sugerează ideea cercetării profilului de camă pentru obţinerea unor acceleraţii acceptabile fără salturi bruşte care forţează oscilaţia mecanismului.

Se recomandă ca curba acceleraţiei de intrare să fie pe cît posibil mai lină şi fără tangente verticale, o alegere judicioasă a intervalului acceleraţiilor pozitive, astfel încît acceleraţiile negative să nu crească peste limita admisibilă şi să nu sufere nici coeficientul de umplere al motorului şi, în sfîrşit, o profilare asimetrică a profilului pe porţiunea închiderii supapei.

2.2.7. Comparînd rezultatele obţinute în urma rezolvării ecuaţiei (2) cu cele obţinute experimental, se pot conchide următoarele:

— modelul matematic (2) conduce la rezultate confirmate de experimentări aproape pentru toţi parametrii (exclusiv influenţa jocului) care condiţionează comportarea distribuţiei la turaţii mijlocii de funcţionare;

— pentru turaţii ridicate, deşi pe intervalul $-65° < \varphi < 65°$ modelul (2) permite aprecieri calitative pe intervalul $\varphi \geqslant 65°$ corespunzător aşezării supapei pe scaun, acesta numai controlează mişcarea supapei;

— în limitele menţinerii continuităţii lanţului cinematic al distribuţiei şi, prin extensiune, al sistemului urmăritor, modelul matematic (2) poate fi folosit cu rezultate bune la studiul comportării dinamice al mecanismelor cu came (pentru camele experimentate $n \leqslant 1\,800$ rot/min). Pentru turaţii superioare urmează a fi luate în considerare atît vibraţiile spirelor resortului, cît şi eventuala mărire a acceleraţiilor negative (vezi ecuaţia (3)).

3. CONCLUZII

Comparînd rezultatele teoretice obţinute cu modelele (1) şi (2) cu oscilogramele obţinute experimental, se poate conchide că modelul (2) este superior modelului (1), incluzînd atît amortizarea, cît şi derivata a doua a deplasării în funcţia de excitaţie, care prezintă o deosebită importanţă la alegerea legii de profilare a unei came.

Prin urmare, comportarea mecanismelor cu came care funcţionează la turaţii ridicate poate fi analizată cu suficientă precizie folosind modelul (2), cu observaţia că la turaţii mai mari de 1 800—2 000 rot/min trebuie să se ia în considerare şi comportarea arcului, neinclusă în modelul matematic.

Pentru precizii de execuţie ale profilelor de came inferioare acelora de la camele distribuţiei motoarelor cu ardere internă (un pas pe grad), efectelor elasticităţii şi jocului dintre elementele lanţului cinematic li se mai asociază şi acelea ale defectelor de formă, care, după cum s-a văzut în prima parte a lucrării, influenţează considerabil comportarea mecanismelor cu came la viteze ridicate.

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. I. Sava, *Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came*, St. cerc. mec. apl., *5*, (1969).
2. Chr. Pelecudi, I. Sava, *Asupra analizei şi sintezei mecanismelor cu came*, Constr. maş., **8—9** (1967).
3. I. Sava, *Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came*, St. cerc. mec. apl., *6* (1969).
4. Chr. Pelecudi, I. Sava, *Metodă şi instalaţie pentru controlul geometriei profilului de camă prin măsurarea acceleraţiei*, brevet nr. 50807 din 1967.
5. M. Korcemnîi, Gazorospredilenia dvigatelea, Maşinostroienie, 1964.
6. Jan Zizka, *Studiul experimental al cinematicii distribuţiei cu supape inversate cu comandă superficială*, Constr. maş., *9* (1964).
7. Kurz D., *Maschinenbautechnik*, *9* (1954).
8. Alan Dvson, *Temperatura instantanee în problema uzurii camelor şi tacheţilor*, Ingenieur de l'automobile, *8—9* (1963).

IDENTIFICAREA SISTEMELOR CRITICE

de LEON LIVOVSCHI
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

Se deduc unele criterii de identificare ale sistemelor critice. Unele dintre aceste criterii coincid cu criteriile cinematice studiate în statica construcțiilor [1], [2] dar sînt deduse fără a se accepta existența deplasărilor mici (de ordinul doi) în sistemele critice.

1. INTRODUCERE

Pentru început reamintim definiția sistemelor critice

DEFINIȚIA 1.1. Un sistem S de corpuri legate prin bare articulate la ambele capete se numește sistem critic

1) dacă este satisfăcută condiția

$$n_i + n_e \geqslant n_{ec}, \tag{1.1}$$

unde n_i este numărul de forțe de legătură interioare, n_e numărul de forțe de legătură exterioare, iar n_{ec} numărul de ecuații de echilibru independente și

2) dacă rangul r al matricei coeficienților forțelor de legătură exterioare și interioare din condițiile de echilibru ale corpurilor din sistem satisface condiția

$$r < n_{ec}. \tag{1.2}$$

Sistemul S poate fi mecanism sau poate avea zero grade de libertate. Pentru aplicații este interesant în special cazul sistemelor cu zero grade de libertate, din care motiv ne vom ocupa în special de asemenea sisteme.

Să convenim să asociem unui sistem de corpuri S din definiția precedentă un sistem S^a care se obține din S prin eliminarea tuturor legăturilor dintre corpurile lui; presupunem că sistemul S^a are aceeași con-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 3, P. 615–633, 1970

figurație ca și sistemul S. În aceste condiții, din definiția 1.1 se poate deduce următoarea consecință :

CONSECINȚA 1.1. Fie un corp C_i al lui S; presupunem că asupra lui acționează sistemul de forțe $\Sigma_i = \Sigma_i' + \Sigma_i''$, unde Σ_i' cuprinde forțe avînd drept suporturi barele de legătură, iar Σ_i'' este un sistem oarecare de forțe exterioare. Presupunem de asemenea că forțele care au ca suport bara de legătură dintre două corpuri C_i și C_j au mărimi egale și sensuri contrare. În aceste condiții, dacă sistemul S este critic, atunci : 1) există sisteme Σ_i' de forțe (nu toate nule) pentru care configurația corpurilor lui S^a este o configurație de echilibru și 2) există sisteme Σ_i'' pentru care nu se pot găsi sisteme Σ_i', astfel încît configurația corpurilor lui S^a să fie o configurație de echilibru.

Consecința 1.1 nu reprezintă altceva decît transcrierea în termeni din mecanică a proprietăților sistemelor de ecuații liniare algebrice.

OBSERVAȚIA 1.1. În definiția 1.1 este precizat modul concret în care corpurile unui sistem critic sînt legate, și anume se presupune că legăturile se realizează prin bare articulate la ambele capete.

O generalizare a definiției 1.1, în care caracterul concret al legăturilor nu este precizat, va fi dată mai departe (definiția 5.1). Menționăm de asemenea că barele care realizează legăturile dintre corpurile unui sistem critic pot fi înlocuite cu corpuri rigide de formă oarecare, avînd două articulații prin intermediul cărora se realizează legăturile necesare.

Pentru simplificarea desenelor vom propune peste tot în cele ce urmează că aceste corpuri sînt bare drepte.

OBSERVAȚIA 1.2. Fie un sistem S_1 de $n-1$ corpuri legate între ele și supuse și la legături exterioare.

Considerăm și sistemul S_2 format din corpurile lui S_1 și încă un corp C_o obținut prin solidarizarea între ele a tuturor legăturilor exterioare la care sînt supuse corpurile lui S_1. Presupunem apoi că, dacă asupra lui S_1 acționează un sistem Σ_1 de forțe exterioare efectiv aplicate de torsor T_1 $(\bar{R}, \bar{M}_o)$, atunci asupra lui S_2 acționează un sistem Σ_2 de forțe exterioare efectiv aplicate, avînd torsorul nul și format din două subsisteme, și anume un sistem $\Sigma_2 = \Sigma_1$ și care acționează asupra corpurilor din S_1 și un sistem Σ_2'' avînd torsorul T_2'' $(-\bar{R}, -\bar{M}_o)$ și care acționează asupra lui C_o (fig. 1). Se poate arăta că, dacă sistemul S_1 este critic, atunci și sistemul S_2 este critic și reciproc. Într-adevăr, ecuațiile de echilibru E_2 pentru corpurile sistemului S_2 se obțin prin adăugarea la ecuațiile de echilibru E_1 pentru corpurile sistemului S_1 a ecuațiilor de echilibru E_o pentru corpul C_o.

Se vede apoi că ecuațiile de echilibru E_o coincid cu ecuațiile care se obțin dacă se aplică teorema solidificării sistemului S_1, deci ele reprezintă o consecință a ecuațiilor E_1 și, prin urmare, drept ecuații de echilibru independente pentru forțele care acționează asupra corpurilor din sistemul S_1 și S_2 putem lua în ambele cazuri ecuațiile E_1. Rezultă că, dacă relația (1.1) este satisfăcută pentru forțele care acționează asupra corpurilor lui S_1, atunci ea este satisfăcută și pentru forțele care acționează asupra corpurilor lui S_2 și reciproc, afirmația de mai sus fiind demonstrată.

Pentru uniformizarea expunerii ne vom ocupa mai departe numai de sisteme de corpuri de forma S_2.

Reamintim în continuare ideile care stau la baza metodelor de identificare ale sistemelor critice.

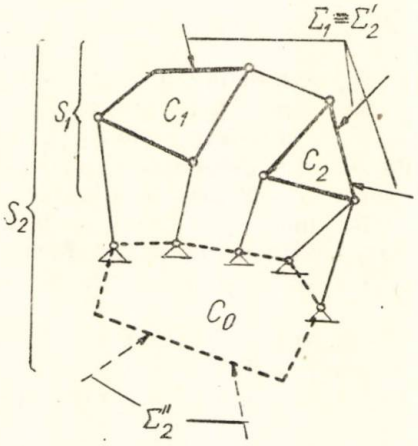


Fig. 1

Presupunem mai întîi că sistemul de corpuri studiat este static determinat, adică

$$n_i + n_e = n_{ec}. \tag{1.3}$$

În aceste condiții, din consecința 1.1 rezultă că sistemul de corpuri dat este critic dacă se pot găsi niște sisteme de forțe de interacțiune nenule între corpurile sistemului și avînd drept suporturi barele de legătură, astfel încît să fie satisfăcute condițiile de echilibru pentru fiecare corp din sistem.

Identificarea unui asemenea sistem de forțe se poate efectua fie cu metodele mecanicii clasice, fie cu metodele mecanicii analitice, așa cum se arată mai departe.

În literatura de specialitate [1], [2] este citată și o metodă de identificare, numită cinematică.

La baza acestei metode se pune ipoteza că un sistem critic poate suferi deplasări foarte mici, numite de ordinul doi, și, prin urmare, se bucură de unele proprietăți ale mecanismelor. De aici se deduc anumite criterii de identificare ale sistemelor critice. Cu toate că aceste criterii permit identificarea sistemelor critice, considerăm că deducerea lor este neriguroasă și iată care sînt argumentele pe care ne bazăm:

1) ipoteza că un sistem critic nu este mecanism este în contradicție cu ipoteza că un asemenea sistem poate suferi deplasări foarte mici;

2) nu se pot trage concluzii asupra interacțiunii dintre corpurile care formează un sistem critic numai din considerații cinematice asupra acestui sistem.

Unele completări la aceste două argumente vor fi aduse în cuprinsul lucrării.

Să presupunem acum că sistemul de corpuri studiat este static nedeterminat, adică

$$n_i - n_e > n_{ec}. \tag{1.4}$$

În aceste condiţii se poate deduce următoarea proprietate :

PROPRIETATEA 1.1. Fie un sistem S de corpuri pentru care sistemul forţelor de legătură este static nedeterminat. Fie apoi S_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ toate subsistemele obţinute din S prin eliminarea unui număr suficient de bare de legătură, astfel încît S_i au zero grade de libertate şi pentru fiecare dintre ele este satisfăcută o condiţie de forma (1.3). În aceste condiţii, sistemul S este critic dacă şi numai dacă toate sistemele S_i sînt critice.

Să presupunem că sistemul S este critic şi fie E sistemul de ecuaţii de echilibru pentru sistemul S^a obţinut din S prin eliminarea barelor de legătură şi înlocuirea lor cu forţe de interacţiune în modul descris în consecinţa 1.1.

În sistemul E se pot alege valori arbitrare pentru un număr de n forţe de interacţiune, unde

$$n = n_i + n_e - n_{ec}. \tag{1.5}$$

Luînd egale cu zero valorile tuturor combinărilor cîte n a celor $n_i + n_e$ forţe de interacţiune, vom obţine p sisteme $E_1, E_2, \ldots, E_p$ cu cîte n_{ec} ecuaţii şi n_{ec} necunoscute. Aceste sisteme admit soluţii nenule şi, prin urmare, sistemele S_i corespunzătoare sînt critice (deoarece pentru fiecare dintre ele $r < n_{ec}$).

Reciproc se poate arăta că pentru ca S să fie critic este necesar ca toate sistemele S_i să fie critice. Observăm mai întîi că dacă măcar un sistem oarecare S_j nu este critic, deci dacă rangul r_j al matricei coeficienţilor lui E_j este egal cu n_{ec}, atunci nici S nu este critic. Într-adevăr, în acest caz nu există forţe de interacţiune nenule între corpurile lui S_j^a care să satisfacă condiţiile de echilibru. Rezultă că matricea coeficienţilor sistemului E are rangul r egal cu n_{ec} şi, prin urmare, S nu este critic. Să presupunem acum că toate sistemele S_i sînt critice, deci că sistemele corespunzătoare E_i admit soluţii nenule.

Completînd sistemele S_i cu bare de legătură pînă la obţinerea lui S şi presupunînd că forţele de interacţiune corespunzătoare din sistemul S^a sînt nule, rezultă că S este critic, deoarece sistemul E de ecuaţii de echilibru admite soluţii nenule.

Un exemplu de sistem critic nedeterminat este arătat în figura 2. Faptul că acest sistem este critic se deduce uşor observînd că toate sistemele obţinute prin eliminarea unei bare de legătură sînt, după cum se va vedea mai departe, critice.

Din proprietatea 1.1 rezultă că problema identificării unui sistem critic static nedeterminat se reduce la problema identificării unor sisteme

critice static determinate. În cele ce urmează ne ocupăm de această din urmă problemă. Vom nota cu A cu indici criteriile deduse cu ajutorul metodelor mecanicii analitice şi cu C cu indici pe cele deduse cu ajutorul metodelor mecanicii clasice.

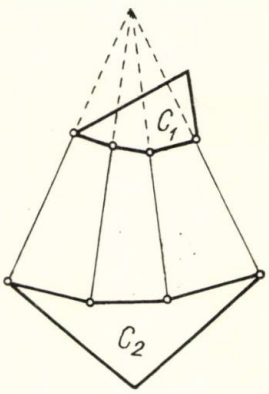


Fig. 2

2. CRITERII A

Înainte de a arăta cum se deduc criteriile A, amintim unele amănunte relative la sistemele critice.

Fie un S sistem oarecare de corpuri. Vom numi *structură* orice împărţire a sistemului S în submulţimi de corpuri legate între ele prin bare articulate la ambele capete.

O structură se numeşte *structură critică* dacă este critic sistemul de submulţimi de corpuri care o constituie. Sistemul dat S este de asemenea o structură, şi anume cea mai fină structură a lui.

Este evidentă următoarea proprietate :

PROPRIETATEA 2.1. Un sistem de corpuri este critic dacă măcar o structură a lui este critică şi este necritic dacă toate structurile acestui sistem sînt necritice.

Pentru cele ce urmează este utilă următoarea definiţie :

DEFINIŢIA 2.1. O structură S_j este mai fină decît o structură S_i dacă S_i se poate obţine din S_j prin solidificarea unor submulţimi de corpuri ale structurii S_j.

Evident că structurile pot fi ordonate în ordinea crescîndă a fineţei lor. Un şir de structuri ordonate în acest mod se încheie cu sistemul S şi este, prin urmare, de forma

$$S_0, \ldots, S_1, \ldots, S_{q-1}, S_q = S. \tag{1.6}$$

Considerăm în continuare două proprietăţi evidente.

PROPRIETATEA 2.2. Un sistem S este critic dacă măcar unul dintre termenii unui şir ordonat de structuri reprezintă o structură critică.

PROPRIETATEA 2.3. O structură este critică dacă măcar unul dintre subsistemele ei de corpuri este critic.

Din aceste două proprietăţi rezultă următorul procedeu de identificare a unui sistem critic :

PROCEDEUL 2.1. Fie S_i o structură. Dacă S_i este necritică, se consideră o structură mai fină S_j şi se cercetează succesiv toate subsistemele lui S_i. Cercetarea se întrerupe fie atunci cînd a fost găsit un subsistem critic, şi atunci sistemul dat S este critic, fie după constatarea faptului că nici unul dintre subsistemele studiate nu este critic, şi atunci sistemul S nu este critic.

Procedeul 2.1. scoate în evidenţă importanţa cunoaşterii unor structuri critice tip. Într-adevăr, este suficient ca un sistem de corpuri S să conţină un subsistem reprezentînd o structură critică tip pentru ca sistemul S să fie critic.

La baza deducerii criteriilor A stă următoarea proprietate :

PROPRIETATEA 2.4. Fie un sistem S static determinat de corpuri legate prin bare articulate la capete şi o bară oarecare C_{ij}. Înlocuind C_{ij} cu perechea de forţe de interacţiune $\overline{F}_{ij}$ şi $\overline{F}_{ji}$, se obţine un sistem S' care este un mecanism; deplasările virtuale compatibile cu legăturile ale mecanismului S' sînt de asemenea deplasări virtuale compatibile cu legăturile ale sistemului S^a. Forţele $\overline{F}_{ij}$, $\overline{F}_{ji}$, împreună cu forţele de legătură din barele mecanismului S', reprezintă pentru S^a un sistem de forţe de interacţiune. În aceste condiţii, sistemul S este critic dacă pentru deplasările virtuale compatibile cu legăturile ale mecanismului S' lucrul mecanic al forţelor $\overline{F}_{ij}$ şi $\overline{F}_{ji}$ este nul.

Într-adevăr, dacă lucrul mecanic virtual al celor două forţe este nul, rezultă că există în S^a un sistem de forţe de interacţiune nenule astfel încît sînt satisfăcute condiţiile de echilibru pentru corpurile sistemului S^a şi, prin urmare, sistemul S este critic. Reciproc, dacă sistemul S este critic, atunci lucrul mecanic virtual al forţelor de interacţiune $\overline{F}_{ij}$ şi $\overline{F}_{ji}$ trebuie să fie nul pentru orice deplasare compatibilă cu legăturile a sistemului S^a, deci şi pentru orice deplasare virtuală compatibilă cu legăturile a lui S'.

OBSERVAŢIA 2.1. Deoarece pentru deplasările virtuale în care poziţiile relative ale corpurilor mecanismului S' nu se schimbă lucrul mecanic virtual al forţelor $\overline{F}_{ij}$ şi $\overline{F}_{ji}$ este evident nul nu este necesar să se considere şi asemenea deplasări. În acest scop vom considera că unul dintre corpurile lui S' este fixat. Se obţine atunci un mecanism cu un grad de libertate, ale cărui deplasări virtuale se pot determina uşor pe cale cinematică. Evident că este preferabil să considerăm fixat fie corpul căruia îi este aplicată forţa $\overline{F}_{ij}$, fie corpul căruia îi este aplicată forţa $\overline{F}_{ji}$. Lucrul mecanic virtual al uneia dintre aceste forţe va fi atunci identic nul şi va rămîne de cercetat lucrul mecanic virtual al celeilalte forţe.

Din proprietatea 2.4 şi ţinînd seama de observaţia 2.1, rezultă următoarele criterii de identificare ale unui sistem critic.

CRITERIUL A_1. O structură avînd forma din figura 3 este critică dacă axele barelor C_1', C_2', şi C_3' sînt concurente.

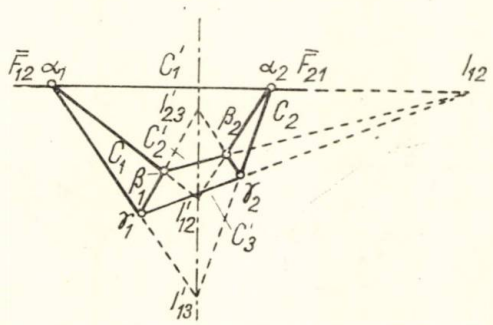


Fig. 3

Într-adevăr, eliminînd bara C_1' şi fixînd corpul C_1, se obţine un mecanism în care centrul instantaneu al corpului C_2 se află în punctul I_{12}, în care se intersectează suporturile barelor C_1', C_2' şi C_3'.

Lucrul mecanic virtual al forţei $\bar{F}_{12}$ este nul deoarece punctul ei de aplicaţie este fix, iar lucrul mecanic virtual al forţei $\bar{F}_{21}$ este nul deoarece suportul acestei forţe este perpendicular pe viteza punctului ei de aplicaţie.

Din teorema lui Desargues rezultă următorul criteriu echivalent cu A_1:

CRITERIUL A_1'. O structură avînd forma din figura 3 este critică dacă punctele din intersecţie I_{23}', I_{13}' şi I_{12}' ale dreptelor $\beta_1\gamma_1$ cu $\beta_2\gamma_2$, $\alpha_1\gamma_1$ cu $\alpha_2\gamma_2$ şi $\alpha_1\beta_1$ cu $\alpha_2\beta_2$ sînt coliniare.

OBSERVAŢIA 2.2. Criteriul A_1 rămîne valabil şi în cazul cînd barele C_1', C_2' şi C_3' din figura 3 sînt paralele, fără a avea toate aceeaşi lungime. O asemenea structură este arătată în figura 4. Ea se deduce din figura 3, făcînd să tindă către infinit punctul I_{12}.

În sfîrşit, se vede uşor că teorema lui Desargues permite deducerea şi în acest caz a criteriului A_1'.

Mai observăm că, dacă barele C_1', C_2' şi C_3' sînt paralele şi au lungimi egale, structura din figura 4 devine un mecanism şi problema de care ne ocupăm nu se pune.

CRITERIUL A_2. O structură de forma din figura 5 este critică dacă cele trei puncte de intersecţie ale suporturilor barelor de legătură dintre cele trei perechi de corpuri ale structurii sînt coliniare.

Într-adevăr, presupunînd corpul C_3 fixat şi eliminînd bara b_{23}, se obţine un mecanism cu un grad de libertate în care centrele instantanee relative ale celor trei corpuri C_1, C_2 şi C_3 sînt coliniare. Dacă suportul bazei b_{23} trece prin centrul instantaneu relativ I_{23}, atunci lucrurile mecanice

virtuale ale forțelor $\overline{F}_{23}$ și $\overline{F}_{32}$ sînt nule deoarece punctul de aplicație al forței $\overline{F}_{32}$ are viteză nulă, iar viteza punctului de aplicație al forței $\overline{F}_{23}$ este ortogonală pe această forță. Dacă suportul barei eliminate nu trece prin punctul I_{23} (vezi configurația punctată din figura 5), atunci este evident că lucrul mecanic al forței $\overline{F}_{23}$ nu este nul decît dacă $\overline{F}_{23} = 0$.

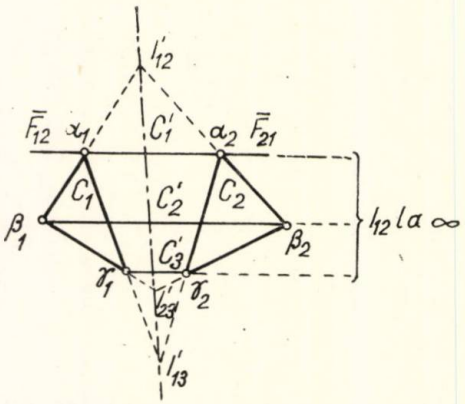


Fig. 4

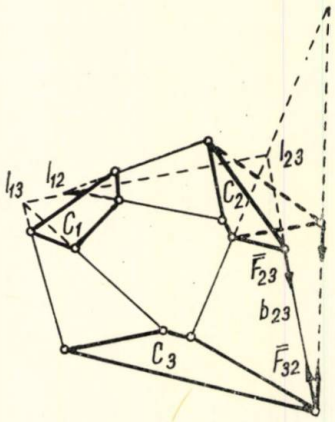


Fig. 5

OBSERVAȚIA 2.3. Se poate arăta ușor că criteriul A_2 rămîne valabil și în cazul cînd unul, două sau toate centrele instantanee relative ale celor trei corpuri C_1, C_2 și C_3 sînt la infinit, ca și în cazul cînd unul, două sau toate aceste centre instantanee sînt confundate. Forma structurilor corespunzătoare se poate obține prin modificări potrivite ale structurii din figura 5. Unele dintre aceste structuri sînt arătate în figurile 6 și 7. Aceste structuri pot fi obținute după cum urmează :

Dacă structura din figura 5 se modifică astfel încît punctul I_{12} să coincidă cu punctul de la infinit al dreptei $I_{12}I_{23}I_{13}$, se obține structura din figura 6*a*, în care dreapta Δ este paralelă cu dreapta $I_{23}I_{13}$.

Dacă structura din figura 5 se modifică astfel încît punctele I_{13} și I_{23} să coincidă cu punctul de la infinit al dreptei $I_{12}I_{23}I_{13}$, se obține structura din figura 6*b*.

Dacă structura din figura 5 se modifică astfel încît punctele I_{12}, I_{13} și I_{23} să coincidă cu punctul de la infinit al dreptei $I_{12}I_{23}I_{13}$ sau cu punctul de la infinit al unei drepte paralele cu $I_{12}I_{23}I_{13}$, se obține structura din figura 6*c*.

În sfîrșit, dacă structura din figura 6*a* se modifică astfel încît dreapta $I_{23}I_{13}$ să coincidă cu dreapta de la infinit, se obține structura din figura 6*d*.

Mai menționăm că, în cazul structurilor din figurile 6*a* și 6*b* este precizată poziția dreptei $I_{12}I_{13}I_{23}$, în cazul structurii din figura 6*c* este precizată direcția acestei drepte, iar în cazul din figura 6*d* această dreaptă este la infinit.

În ceea ce privește structurile din figura 7, modul în care ele se pot obține din structura din figura 5 este evident. Menționăm numai că în structura din figura 7*a* este precizată poziția dreaptă $I_{12}I_{13}I_{23}$, pe cînd în structura din figura 7*b* nu este precizat decît un punct al acestei drepte.

Criteriul A_2 admite următoarea generalizare aproape evidentă.

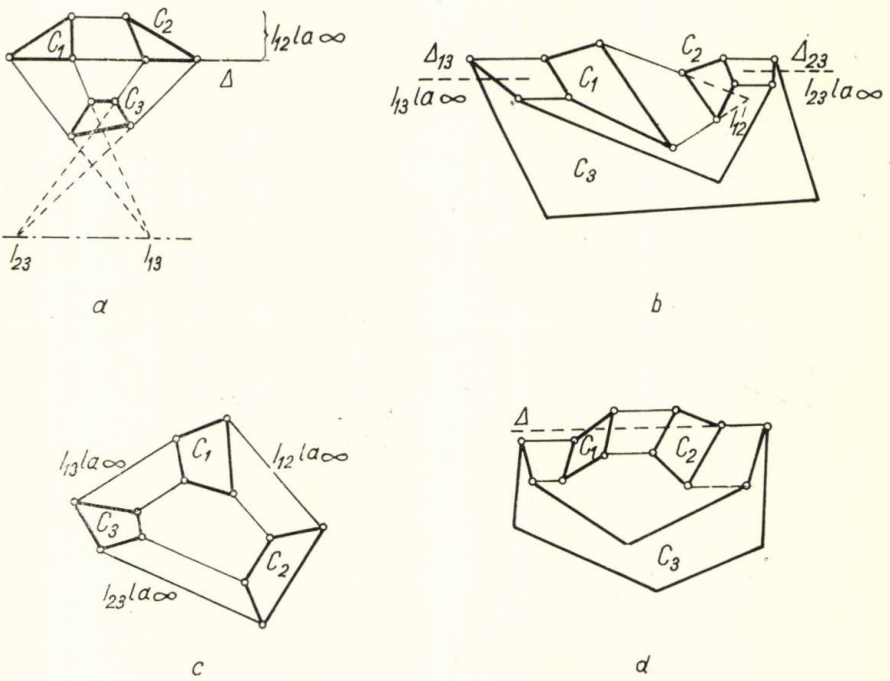


Fig. 6

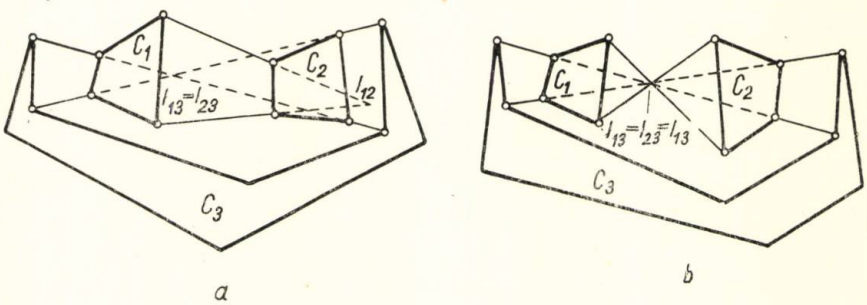


Fig. 7

CRITERIUL A_2'. O structură formată din trei corpuri legate între ele prin bare sau articulaţii este critică dacă punctele reprezentînd articulaţii între corpurile structurii sau puncte de intersecţii ale axelor barelor de legătură între corpurile structurii sînt coliniare.

Criteriul A_2' rezultă fie din analiza directă a structurilor din figura 8, fie observînd că legătura de articulaţie dintre două corpuri se poate înlocui cu două bare articulate, dispuse ca în figura 9.

Mai menţionăm că osbervaţia 2.3 rămîne valabilă şi pentru structurile din figura 8.

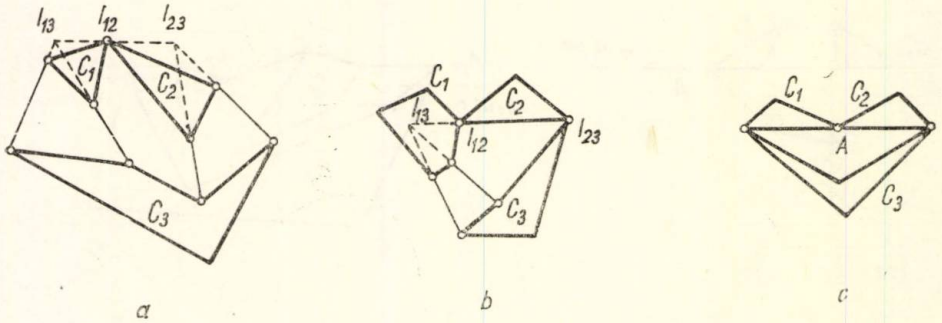


Fig. 8

Fig. 9

OBSERVAȚIA 2.4. Criteriul A_2 rămîne valabil și în cazul cînd unul, două sau toate trei corpurile structurii din figura 5 sînt bare articulate la ambele capete. Două asemenea structuri, în care toate cele trei corpuri sînt bare, au forma din figura 10. Forme particulare ale acestor structuri se pot obține efectuînd asupra lor transformările menționate în observația 2.3. În figura 11 sînt arătate unele structuri obținute în acest mod.

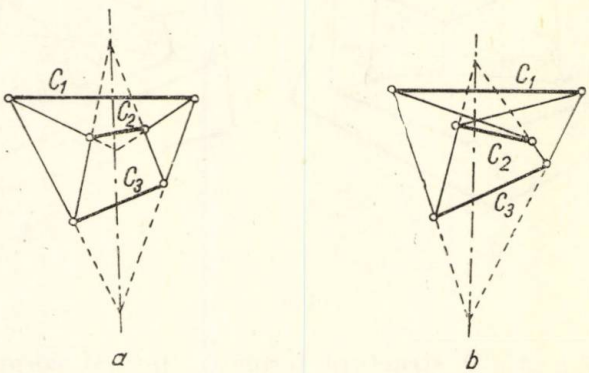


Fig. 10

3. CRITERII C

La baza criteriilor C stau următoarele proprietăți ale sistemelor forțelor de interacțiune dintre corpurile sistemului S^a asociat unui sistem critic S.

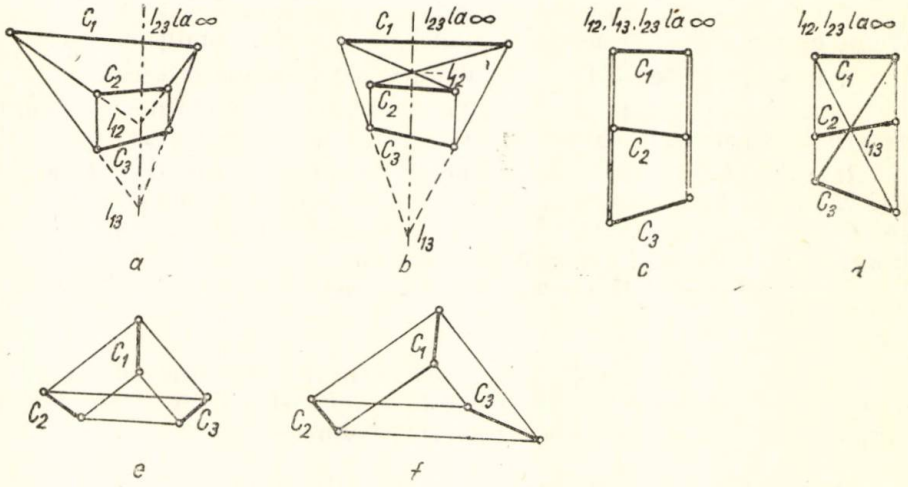


Fig. 11

PROPRIETATEA 3.1. O structură static determinată formată din două corpuri C_1 şi C_2 legate între ele prin bare articulate la capete este critică dacă în S^a există două sisteme de forţe de interacţiune nenule, avînd drept suporturi axele barelor de legătură, şi dacă torsorii acestor sisteme sînt nuli.

Într-adevăr, deoarece

$$\begin{cases} \overline{R}_{12} = 0, \\ \overline{M}_{o12} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{R}_{21} = 0, \\ \overline{M}_{o21} = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

rezultă că forţele care acţionează asupra fiecărui corp al structurii S^a se echilibrează şi, deoarece aceste forţe sînt nenule, rezultă că structura S este critică.

Reciproc, dacă structura studiată S este critică, atunci există în S^a două sisteme de forţe de interacţiune nenule care satisfac condiţiile (3.1).

PROPRIETATEA 3.2. O structură static determinată formată din trei corpuri C_1, C_2 şi C_3 legate între ele prin bare articulate la capete este critică dacă există în S^a trei sisteme de forţe de interacţiune nenule, astfel încît torsorii forţelor care acţionează asupra celor trei corpuri sînt nuli.

Într-adevăr, deoarece

$$\overline{R}_{12} + \overline{R}_{13} = 0, \qquad \overline{R}_{23} + \overline{R}_{21} = 0, \qquad \overline{R}_{31} + \overline{R}_{32} = 0,$$
$$\overline{M}_{o12} + \overline{M}_{o13} = 0, \qquad \overline{M}_{o23} + \overline{M}_{o21} = 0, \qquad \overline{M}_{o31} + \overline{M}_{o32} = 0,$$

unde primul indice se referă la corpul care suferă acţiunea, iar cel de-al doilea la corpul care acţionează, rezultă că forţele de interacţiune care acţionează asupra fiecărui corp al structurii S^a se echilibrează şi, deoarece aceste forţe nu sînt nule, structura S este critică.

Reciproc, dacă structura S este critică, atunci există în S^a trei sisteme de forţe de interacţiune nenule care satisfac condiţiile (3.1).

Din proprietatea 3.1 se pot deduce următoarele criterii:

CRITERIUL C_1 (identic cu A_1). O structură S, avînd forma din figura 3, este critică dacă axele barelor C_1', C_2', şi C_3' sînt concurente.

Într-adevăr, se pot construi două sisteme de forţe de interacţiune Σ_1 şi Σ_2, unde Σ_1 este format din trei forţe situate pe axele barelor C_1', C_2' şi C_3' şi avînd rezultantă nulă. Sistemele Σ_1 şi Σ_2 satisfac (3.1) şi, prin urmare, structura din figura 3 este critică.

Din teorema lui Desargues rezultă următorul criteriu echivalent cu criteriul C_1:

CRITERIUL C_1' (identic cu A_1'). O structură, avînd forma din figura 3, este critică dacă punctele de intersecţie I_{23}', I_{13}' şi I_{12}' ale dreptelor $\beta_1\gamma_1$ cu $\beta_2\gamma_2$, $\alpha_1\gamma_1$ cu $\alpha_2\gamma_2$ şi $\alpha_1\beta_1$ cu $\alpha_2\beta_2$ sînt coliniare.

OBSERVAŢIA 3.1. (identică cu observaţia 2.2). Criteriul C_1 rămîne valabil şi în cazul cînd barele C_1', C_2' şi C_3' din figura 3 sînt paralele, fără a avea toate aceeaşi lungime.

Într-adevăr, se pot construi două sisteme de forţe de interacţiune Σ_1 şi Σ_2, unde Σ_1 este format din trei forţe situate pe axele barelor C_1', C_2' şi C_3' şi are torsorul nul. Sistemele Σ_1 şi Σ_2 satisfac (3.1) şi, prin urmare, structura din figura 4 este critică.

Înainte de a trece la deducerea altor criterii, observăm că din proprietatea 3.2 rezultă următoarele consecinţe:

CONSECINŢA 3.1. Dacă o structură S este critică, atunci sistemele reduse ale forţelor de interacţiune dintre corpurile C_1, C_2 şi C_3 ale unei structuri S^a sînt constituite din forţe coliniare de intensitate egale şi cupluri coplanare sau situate în plane paralele avînd momente de intensităţi egale.

Într-adevăr, din (3.2) rezultă că atît vectorii $\overline{R}_{ij}$, cît şi vectorii $\overline{M}_{oij}$ au acelaşi suport şi acelaşi modul, şi atunci sistemele reduse ale forţelor de interacţiune au forma menţionată mai sus.

CONSECINŢA 3.2. Dacă forţele de interacţiune dintre corpurile C_1 C_2 şi C_3 ale structurii S^a asociată unei structuri critice S sînt coplanare, atunci sistemele lor reduse sînt ori toate forţe coliniare, ori toate cupluri coplanare.

Într-adevăr, în caz contrar, unul dintre corpuri ar fi în repaus sub acţiunea unui sistem format dintr-o forţă şi un cuplu, ceea ce este imposibil.

Din proprietatea 3.2 şi din consecinţele ei rezultă următoarele criterii de identificare a sistemelor critice.

CRITERIUL C_2 (identic cu A_2). O structură S de forma din figura 5 este critică dacă cele trei puncte de intersecţie ale suporturilor barelor de legătură dintre cele trei perechi de corpuri ale structurii sînt coliniare.

Într-adevăr, în acest caz se pot construi în S^a trei sisteme de forţe de interacţiune, care se reduc la trei forţe coliniare aplicate în punctele

I_{23}, I_{13} și I_{12}. Aceste sisteme sînt formate din cîte două forțe situate pe axele barelor care leagă perechile de corpuri din sistem, alese astfel încît rezultantele lor să fie coliniare cu dreapta $I_{12}I_{23}I_{13}$ și să aibă module egale.

OBSERVAȚIA 3.2. Un sistem format din două forțe paralele poate fi interpretat ca fiind format din două forțe concurente în punctul de la infinit al suporturilor lor, punct comun tuturor dreptelor paralele cu suporturile forțelor. Axa centrală a unui sistem de două forțe paralele care nu formează un cuplu se află la distanță finită, dar axa centrală a unui cuplu este dreapta de la infinit. Ținînd seama de aceste interpretări, rezultă că structurile obținute din structurile din figura 5 prin tinderea la infinit a unui singur, a două sau a tuturor celor trei puncte de intersecție ale suporturilor barelor de legături dintre C_1, C_2 și C_3 sînt de asemenea structuri critice. Aceste structuri sînt arătate în figura 6.

Faptul că structurile din figura 6 sînt critice poate fi arătat și direct prin identificarea în S^a a unor sisteme de forțe de interacțiune care satisfac condițiile din consecința 3.2. În cazul structurii din figura 6*a*, sistemele forțelor de interacțiune concurente se reduc la forțe aplicate în punctele I_{13} și I_{23}, iar sistemul forțelor de interacțiune paralele se reduc la o forță aplicată într-un punct oarecare al axei centrale a acestui sistem, axă care coincide cu dreapta $I_{13}I_{23}$.

În cazul structurii din figura 6*b*, sistemul forțelor de interacțiune concurente se reduc la forțe aplicate în punctul I_{12}, iar sistemele forțelor de interacțiune paralele se reduc la forțe aplicate în puncte arbitrare ale axelor centrale ale acestor sisteme, axe care trec prin punctul I_{12} și sînt paralele cu direcțiile Δ_{13} și Δ_{23}.

În cazul structurii din figura 6*c*, sistemele forțelor de interacțiune se reduc fie la cîte o forță aplicată într-un punct oarecare al unei drepte paralelă cu Δ, fie la trei cupluri de momente egale în modul.

În sfîrșit, în cazul structurii din figura 6*d*, sistemele de forțe de interacțiune se reduc la trei cupluri, avînd momente de intensități egale.

Criteriul C_2 admite următoarea generalizare :

CRITERIUL C_2' (identic cu A_2'). O structură formată din trei corpuri legate între ele prin bare sau articulații este critică dacă punctele reprezentînd articulații între corpurile structurii sau puncte de intersecție ale axelor barelor de legătură între corpurile structurii sînt coliniare.

Criteriul C_2' rezultă fie din analiza structurilor din figura 8, fie ținînd seama de interpretarea din figura 9 a unei articulații.

Observația 3.2 rămîne evident valabilă și pentru structurile din figura 8.

OBSERVAȚIA 3.3 (identică cu observația 2.4). Criteriul C_2 rămîne valabil și în cazul cînd unul, două sau toate trei corpurile din figura 5 sînt bare articulate la ambele capete. Drept exemplu citățm structurile din figura 10 și modificările lor (menționate în observația 3.2) din figura 11.

4. STRUCTURI COMPLEXE

Structurile-tip studiate mai înainte nu epuizează, evident, mulțimea structurilor reprezentînd corpuri legate prin bare articulate. Vom studia în continuare structurile complexe în sensul următoarei definiții :

DEFINIȚIA 4.1. O structură S se numește structură complexă dacă satisface una dintre următoarele condiții :

1) conține măcar un subsistem de corpuri care este o structură critică tip ;

2) nu conține nici un subsistem de corpuri care să fie o structură critică tip.

O condiție suficientă pentru ca o structură complexă să fie o structură critică este ca ea să conțină un subsistem de corpuri care este o structură critică tip. În figura 12 sînt arătate cîteva structuri care satisfac această condiție. Subsistemele reprezentînd structuri critice tip sînt încadrate cu linii punctate. Dacă în structurile *a* și *b* din figura 12 se face abstracție de structura subsistemelor încadrate, se obțin structuri necritice. Dacă se procedează în mod asemănător cu structurile *c* și *d* din figura 12, se obțin de asemenea structuri critice tip.

În multe cazuri, identificarea unor subsisteme de corpuri reprezentînd structuri critice tip poate să fie greu de făcut sau se poate întîmpla ca sistemul de corpuri studiat să nu conțină nici un subsistem reprezentînd o structură critică tip. În asemenea cazuri se studiază direct structura dată.

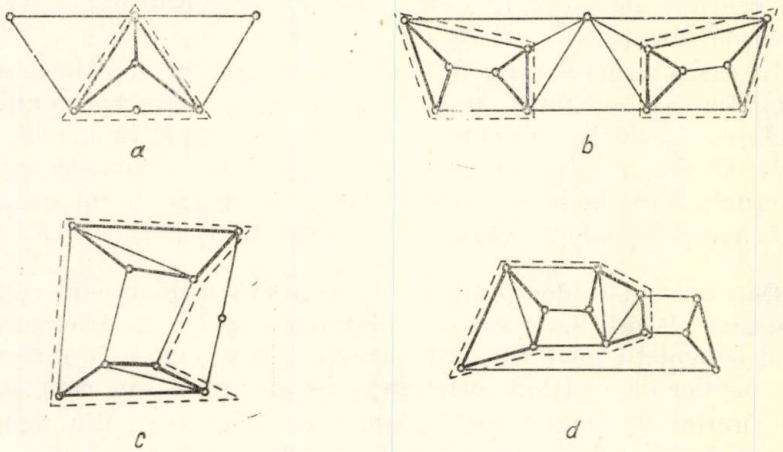


Fig. 12

Drept exemplu considerăm structura din figura 13, în care se cere determinarea axei barei care leagă punctul α al corpului C_2 cu corpul C_3, astfel încît sistemul dat să fie critic.

Soluția 1. Presupunem ca bara menționată în enunț are axa $\alpha\gamma$. Asupra corpului C_3 acționează trei forțe, și anume : o forță $\overline{F}_1''$ aplicată

în I_{13} și reprezentînd acțiunea lui C_1 asupra lui C_3, o forță $\overline{F}_2''$ avînd suportul $\alpha\gamma$ și reprezentînd acțiunea lui C_2 asupra lui C_3 și o forță $\overline{F}_3$ avînd suportul df și reprezentînd acțiunea corpurilor C_1 și C_2 asupra lui C_3.

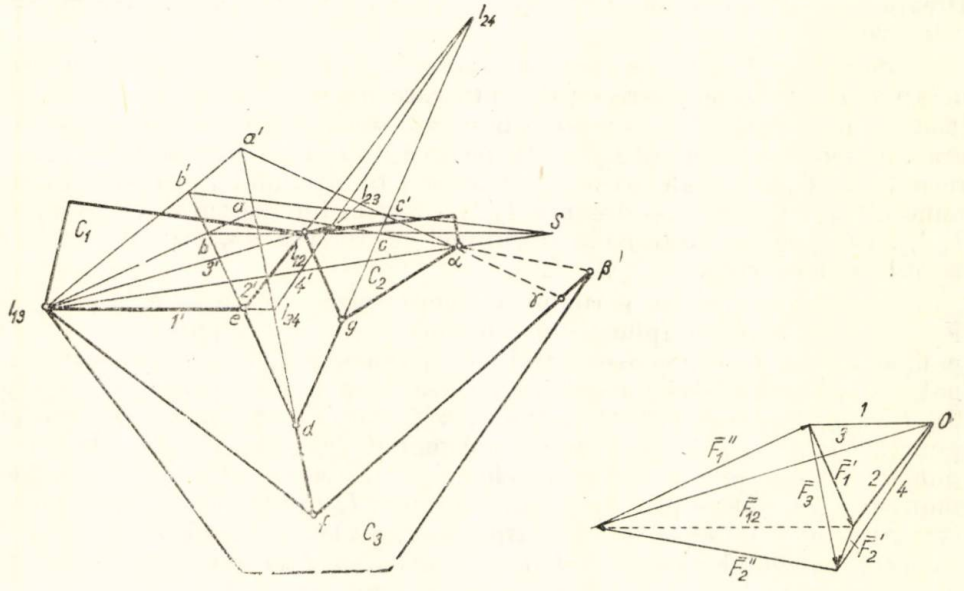


Fig. 13

Să notăm apoi cu $\overline{F}_1'$ și $\overline{F}_2'$ componentele lui $\overline{F}_3$ după direcțiile ed și gd. Fie de asemenea $\overline{F}_{12}''$ și $-\overline{F}_{12}''$ forțele de interacțiune dintre corpurile C_1 și C_2; aceste forțe sînt aplicate în articulația I_{12}. Asupra corpurilor C_1, C_2 și C_3 acționează, prin urmare, următoarele forțe:

$$C_1(-\overline{F}_1'',\ -\overline{F}_1',\ \overline{F}_{12}),\ C_2(-\overline{F}_2'',\ -\overline{F}_2',\ -\overline{F}_{12}),\ C_3(\overline{F}_1'',\ \overline{F}_2'',\ \overline{F}_3),$$

unde

$$\overline{F}_3 = \overline{F}_1' + \overline{F}_2'.$$

Punînd condiția că forțele $\overline{F}_3$, $\overline{F}_1''$ și $\overline{F}_2''$ care acționează asupra corpului C_3 se echilibrează, rezultă că suporturile lor trec prin punctul a'. Forța $\overline{F}_1''$ are, prin urmare, suportul I_{13} a'. Suporturile forțelor $-\overline{F}_1''$, $-\overline{F}_1'$ și $-\overline{F}_2''$, $-\overline{F}_2'$ se intersectează în punctele b' și c'. Pentru ca sistemul să fie critic, ar fi necesar ca dreptele b' I_{12} (suportul lui $\overline{F}_{12}$) și c' I_{12} (suportul lui $-\overline{F}_{12}$) să fie coliniare, ceea ce nu este cazul. Pentru a găsi dreapta $\alpha\beta$ pentru care sistemul devine critic, să observăm că triunghiurile $a'b'c'$ care se obțin pentru diferite drepte $\alpha\beta$ au vîrfurile pe dreptele ed, gd și fd. Ele formează, prin urmare, configurații Desargues și laturile

lor se intersectează în trei puncte coliniare. Se vede ușor că două dintre aceste puncte sînt I_{13} și α. Al treilea punct S se obține atunci intersectînd dreapta $I_{13}\alpha$ cu latura $b'c'$ a triunghiului $a'b'c'$.

Intersectînd dreapta SI_{12} cu dreptele ed și gd, se obțin punctele b și c. Se construiește apoi punctul a ca intersecție a dreptelor $I_{13}b$ și fd. Dreapta ac este coliniară atunci cu dreapta $\alpha\beta$, pentru care sistemul dat este critic.

Soluția 2. Pentru ca sistemul studiat să fie critic, este suficient ca dreapta $\alpha\beta$ să fie coliniară cu dreapta care unește punctul α cu centrul instantaneu relativ I_{23}. Eliminînd bara $\alpha\beta$, se obține un mecanism cu un grad de libertate. Punctul I_{23} se află pe dreapta $I_{13}I_{12}$. Centrele instantanee relative la C_2 și C_3 ale barei C_4 (bara ed) fiind cunoscute, deducem că punctul I_{23} se află și pe dreapta $I_{34}I_{24}$, deci la intersecția ei cu dreapta $I_{13}I_{12}$. Dreapta $I_{23}\alpha$ este coliniară atunci cu dreapta $\alpha\beta$, pentru care sistemul devine critic.

Soluția 3. Asupra corpului C_1 acționează forțele $-\overline{F}_1''$, $-\overline{F}_1'$ și $\overline{F}_{12}$. Presupunîndu-le aplicate în punctele I_{13}, e și I_{12}, putem lua drept poligon funicular pentru aceste trei forțe triunghiul $I_{13}I_{12}e$. Apoi construim polul O al poligonului forțelor ca intersecție a razelor polare $1 \parallel I_{13}e$ și $2 \parallel I_{12}e$. Asupra corpului C_3 acționează forțele $\overline{F}_1''$, $\overline{F}_2''$ și $\overline{F}_3$, aplicate în punctele I_{13}, β și f. Drept latură a poligonului funicular care unește două puncte situate pe suporturile forțelor $\overline{F}_1''$ și $\overline{F}_3'$ se poate lua $I_{13}I_{34}$, unde punctul I_{34} se obține prin prelungirea dreptei $I_{13}e$ pînă la intersecția cu fd (suportul lui F_3). Celelalte două laturi sînt paralele cu razele polare 4 și 3. Rezultă poligonul funicular $I_{13}I_{34}I_{23}$. Dreapta $I_{23}\alpha$ reprezintă direcția căutată a axei barei $\alpha\beta$ pentru care sistemul este critic.

Intersectînd raza polară 3 cu suportul forței $\overline{F}_2''$, se obțin și forțele $\overline{F}_2''$ și $\overline{F}_1''$.

5. ÎNCHEIERE

În încheiere ne propunem mai întîi să analizăm dintr-un punct de vedere diferit sistemele critice, iar apoi să arătăm că noțiunea de deplasare virtuală de ordinul doi nu există în mecanică și că utilizarea ei duce la contradicții.

Fie un corp C supus la legături. Presupunînd acest corp în repaus sub acțiunea unui sistem de forțe active, condițiile că aceste forțe se echilibrează sînt

$$\begin{cases} \overline{R}^a + \overline{R}^l = 0, \\ \overline{M}_o^a + \overline{M}_o^l = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

unde $T^a(\overline{R}^a, \overline{M}_o^a)$ și $T^l(\overline{R}^l, \overline{M}_o^l)$ reprezintă torsorii forțelor active și de legătură care acționează asupra corpului C. Să presupunem acum că modul în care este legat corpul C este precizat în sensul că se cunoaște realizarea tehnică a legăturilor. În acest caz este posibil ca felul în care sînt realizate legăturile să impună anumite condiții torsorului forțelor de

legătură. Drept rezultat, sistemul de ecuații de echilibru poate deveni incompatibil.

Ca prim exemplu care ilustrează cele spuse considerăm sistemul din figura 14. Presupunînd că $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ există, constatăm că are loc condiția

$$Y^l = 0, \tag{5.2}$$

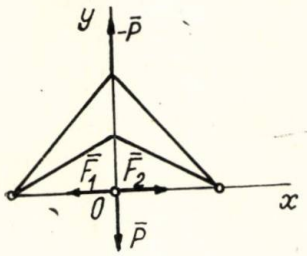


Fig. 14

unde Y^l este proiecția pe Oy a vectorului rezultant $\bar{R}^l$ al forțelor care acționează asupra punctului O. Sistemul de ecuații de echilibru pentru O este

$$-F_1 + F_2 = 0 \quad F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 0 = P \tag{5.3}$$

și se vede ușor că acest sistem este incompatibil.

Un alt exemplu de condiție impusă torsorului forțelor de legătură se obține pentru sistemul din figura 3. În acest caz avem

$$N^l = 0, \tag{5.4}$$

unde N^l este suma momentelor forțelor de legătură care acționează asupra lui C_1 (sau C_2) în raport cu o axă perpendiculară pe planul figurii și trecînd prin I_{12}.

În sfîrșit, în cazul sistemului din figura 4 avem

$$Y^l = 0, \tag{5.5}$$

unde Y^l este proiecția pe o axă perpendiculară pe axa barei C_1' a forțelor de legătură care acționează asupra lui C_1 (sau C_2).

Generalizînd exemplele de mai sus, obținem următoarea definiție:

DEFINIȚIA 5.1. Fie un sistem S de corpuri supuse la legături interioare și x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ variabilele care descriu sistemul forțelor de legătură. Sistemul S este critic dacă există sisteme de forțe exterioare pentru care sistemul de ecuații de echilibru pentru corpurile lui S^a este incompatibil în necunoscutele x_i.

Din definiția (5.1) rezultă că rangul r al matricei coeficienților necunoscutelor x_i este mai mic decît n și, prin urmare, se pot găsi în sistemul asociat S^a sisteme de forțe de interacțiune nenule, avînd drept suporturi forțele de legătură dintre corpurile lui S și care satisfac condițiile de echilibru. Această consecință stă la baza diferitelor procedee de identificare a sistemelor critice.

Aceste procedee descrise mai înainte sînt mai simple decît procedeele de identificare ale condițiilor de forma (5.2), (5.4) sau (5.5) pe care legăturile le impun forțelor de legătură.

În vederea discutării noțiunii de deplasare virtuală de ordinul doi, reamintim că în definiția clasică a vectorilor deplasării virtuale sînt scoase în evidență trei proprietăți, și anume: 1) compatibilitatea cu legăturile,

2) caracterul infinitezimal şi 3) arbitraritatea în privinţa alegerii deplasării virtuale compatibile cu legăturile atunci cînd se efectuează un calcul. Vom analiza în continuare aceste trei proprietăţi în ipoteza că legăturile sînt olonome-scleronome.

Mai întîi amintim că deplasarea virtuală are un caracter geometric; ea constă în mutarea sistemului studiat dintr-o anumită configuraţie în altă configuraţie permisă de legături (*compatibilă* cu legăturile).

Fie acum $\bar{r}_{i0}$ şi $\bar{r}_i$ vectorii de poziţie ai punctelor sistemului studiat înainte şi după mutarea lui, iar $\Delta\bar{r}_i$ vectorii-diferenţă:

$$\Delta\bar{r}_i = \bar{r}_i - \bar{r}_{i0}. \tag{5.6}$$

Partea principală $\delta\bar{r}_i$ a lui $\Delta\bar{r}_i$ (adică partea liniară în Δq_j a lui $\Delta\bar{r}_i$) este prin definiţie vectorul-deplasare virtuală în punctul P_i. Vectorii $\delta\bar{r}_i$ aplicaţi în punctele P_i *sînt situaţi în varietăţile liniare tangente* la varietăţile care reprezintă legăturile.

În ceea ce priveşte valorile numerice ale lui Δq_j din expresia lui $\delta\bar{r}_i$, ele sînt *arbitrare*.

Pentru exemplul arătat în figura 15, se consideră uneori că $\overline{AA''}$ şi $\overline{BB''}$ sînt deplasări virtuale de ordinul doi dacă configuraţiile AB şi $A'B'$ sînt *foarte apropiate*.

Lăsînd la o parte faptul că nu se precizează ce se înţelege prin *foarte apropiat*, chiar dacă această precizare ar exista, se vede uşor că deplasările virtuale de ordinul doi din figura 15*a*, nu satisfac condiţia de a fi compatibile cu legăturile şi că ambele deplasări de ordinul doi din figurile 15*a* şi 15*b* nu satisfac condiţia de a fi arbitrare, aşa cum s-a

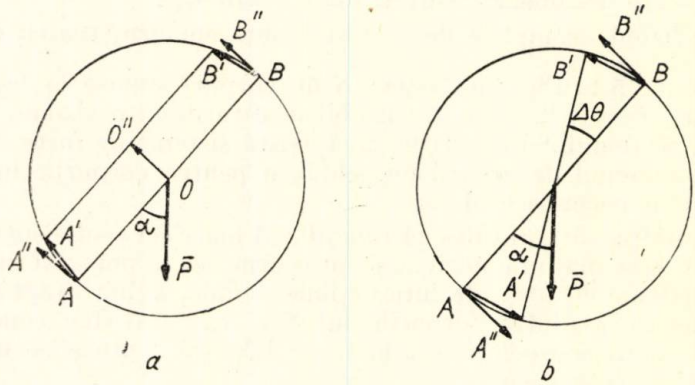


Fig. 15

menţionat mai sus. Chiar dacă asemenea deplasări există (întru-un sens care ar urma să fie precizat), luarea lor în consideraţie nu este necesară pentru rezolvarea problemelor de mecanică şi, după cum vom vedea, conduce la contradicţii.

Pentru ilustrarea celor spuse să presupunem că se cere determinarea pozițiilor de repaus ale barei AB din figura 15. Pentru deplasările $\overline{AA''}$ și $\overline{BB''}$ din figura 15 obținem

$$P \sin \alpha \; |\overline{oo''}| = 0, \tag{5.7}$$

$$0 = 0. \tag{5.8}$$

Din (5.7) rezultă că singura configurație de repaus a barei AB este definită de $\alpha = 0$ sau π (poziția verticală a barei). Din (5.8) rezultă că toate pozițiile barei AB sînt poziții de repaus, ceea ce contrazice rezultatul precedent.

Să observăm acum că pentru $\alpha \neq 0$ sau π sistemul de ecuații pentru forțele de legătură N_A și N_B este incompatibil și, prin urmare, obiectul „bară așezată pe diametrul unui cerc" este critic dacă $\alpha \neq 0$ sau π.

Orice concluzie dedusă pentru un asemenea obiect poate fi atît falsă, cît și adevărată. În particular, nu se poate afirma că relațiile (5.7) și (5.8) sînt corecte, iar consecințele lor pot fi numai întîmplător adevărate. Dimpotrivă, pentru $\alpha = 0$ sau π, sistemul de ecuații pentru forțele de legătură N_A și N_B este compatibil, și anume nedeterminat. Pentru ambele deplasări, din figurile 15*a* și 15*b* rezultă că configurația $\alpha = 0$ sau π este o configurație de echilibru. De aici nu se poate deduce însă ipoteza că deplasările de ordinul doi există este adevărată, deoarece dintr-o afirmație falsă se pot deduce concluzii adevărate. Faptul că luarea în considerare a acestui fel de deplasări nu este necesară rezultă atît din exemplul studiat, cît și din restul lucrării.

Credem că argumentele de mai sus sînt suficiente pentru dovedirea inconsistenței noțiunii de deplasare virtuală de ordinul doi. Că pentru identificarea sistemelor critice sînt pe deplin suficiente noțiunile și metodele cunoscute ale mecanicii rezultă cu prisosință din cuprinsul lucrării. Faptul că așa-numita metodă a celor trei centre instantanee bazată pe acceptarea existenței în sistemele critice a deplasărilor virtuale de ordinul doi conduce la rezultate juste este o coincidență, care nu poate constitui în nici într-un caz un argument în favoarea acceptării acestui fel de deplasări.

★

Mulțumim prof. R. Woinaroski, șeful catedrei de mecanică și rezistența materialelor a Institutului de petrol, gaze și geologie, pentru interesul acordat acestei lucrări și pentru prețioasele indicații privitoare la conținutul și forma lucrării. Mulțumim de asemenea colegilor de catedră pentru interesul acordat problemelor tratate în lucrare.

Primită la redacție la 28 august 1969

BIBLIOGRAFIE

1. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, vol. I, București, Edit. de stat pentru arhitectură și construcții, ... ; vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
2. A. Gheorghiu, *Statica construcțiilor*, vol. I, Edit. tehnică, București, 1960.
3. N. V. Efimov, *Geometrie superioară*, București, Edit. tehnică, 1952.
4. Radu P. Voinea, *Observații asupra principiului lucrului mecanic virtual*, St. cerc. mec. apl., *1—2* (1955).
5. Mihail Atanasiu, *Problemele fundamentale ale calculului mecanic al sistemelor în domeniul deplasărilor cinematice*, Bul. Inst. politehnic București, **XXVI**, *5* (1964).

CONTRIBUȚII LA CALCULUL STRUCTURILOR MULTIETAJATE OARECARE ACȚIONATE ORIZONTAL

de VIRGILIU FLORIAN
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

NICOLAE ȚOPA
Institutul de construcții, București

În lucrare se examinează alcătuirea unui algoritm de calcul pentru acțiuni orizontale (mișcarea seismică, acțiunea vîntului) asupra structurilor multietajate, avînd o configurație oarecare în plan.

În partea întîi a lucrării se prezintă modul de alcătuire directă a matricei reacțiunilor necesară pentru determinarea forțelor seismice, și pentru calculul la acțiunea vîntului. Matricea reacțiunilor se face în raport cu planul de calcul, care, în cazul structurilor prezentînd două plane de simetrie, este chiar unul dintre aceste plane. Pentru cazul cînd structura nu prezintă asemenea plane, se examinează în partea a doua a lucrării o metodă aproximativă de calcul care face apel la două plane de calcul, deduse prin introducerea planelor convenționale de rigiditate principală.

1. INTRODUCERE

În lucrarea [1] s-a dezvoltat algoritmul de calcul la acțiuni orizontale al structurilor multietajate, cu dispoziție oarecare în plan orizontal, în general neortogonală, a elementelor lor structurale, dar prezentînd două plane verticale de simetrie.

Principala premisă a calculului respectiv constă în posibilitatea descompunerii structurii de rezistență în elemente plane verticale, adică în elemente care prezintă o anumită rigiditate la acțiuni cuprinse în planul lor, dar care sînt complet lipsite de rigiditate la acțiuni normale pe acest plan. Aceasta este de altfel întotdeauna cu putință dacă se admite principiul suprapunerii efectelor în baza legii lui Hooke și a principiului independenții acțiunii forțelor și se neglijează rigiditatea la torsiune a riglelor, a stîlpilor și a diafragmelor pline.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, Nr. 3, P. 635–660, 1970

În esență, calculul revenea la întocmirea matricelor reacțiunilor unitare ale fiecărui element structural în parte. În lucrarea amintită, această operație se realiza prin inversarea matricelor deplasărilor unitare respective

$$r_l = a_l^{-1} \quad (l = 1, 2, \ldots, m). \tag{1.1}$$

După cum s-a arătat în lucrarea citată, operația de inversare a matricei deplasărilor unitare prezintă unele dificultăți de ordin practic, iar alcătuirea matricelor deplasărilor unitare nu se încadrează într-un sistem unitar de calcul, comportînd sau nu în prealabil ridicarea nedeterminării statice sau geometrice a elementului structural respectiv, precum și aplicarea unor formule de calcul sau a unor reguli specifice fiecărui element în parte.

Totodată s-a arătat în lucrarea de mai sus că există posibilitatea calculului direct al matricei reacțiunilor orizontale unitare. În prima parte a lucrării de față se prezintă algoritmul de calcul al acestei matrice după o metodă unitară, aplicabilă oricărui tip de element structural. De asemenea, în lucrarea anterioară s-a arătat că aplicarea metodei de calcul prezentată este limitată la structurile care prezintă două plane de simetrie verticale.

În partea a doua a lucrării de față se schițează modul de calcul în cazul general, adică al structurilor fără nici o simetrie și se propune un calcul aproximativ însă complet, în care este speculată alcătuirea în fond cvasisimetrică a structurilor de rezistență a construcțiilor care se execută în realitate (cu respectarea normativelor în vigoare privitoare la o bună conformare antiseismică a acestora).

2. IPOTEZELE DE CALCUL

Se mențin aceleași ipoteze ca în lucrarea [1], și anume posibilitatea descompunerii structurii de rezistență în elemente plane verticale complet lipsite de rigiditate în direcție normală pe planul lor și a căror conlucrare spațială este asigurată doar de perfecta rigiditate ipotetică a planșeelor în planul lor, neglijîndu-se deci rigiditatea acestora în direcție normală pe planul lor și orice alte legături dintre ele care s-ar putea realiza prin rigiditatea la torsiune a riglelor, a stîlpilor sau a diafragmelor pline.

Întrucît în lucrarea de față se studiază cazul general al structurilor nesimetrice, se menționează că rigiditatea perfectă în planul lor a planșeelor nu asigură decît o deplasare rigidă în plan orizontal ale diferitelor elemente plane structurale.

I. ALGORITMUL DE CALCUL AL MATRICEI REACȚIUNILOR ORIZONTALE UNITARE ALE UNUI ELEMENT PLAN VERTICAL OARECARE

Se știe că în metoda deplasărilor expresia generală, scrisă sub formă matriceală, a condiției de identitate dintre sistemul de real și sistemul de bază este

$$R = r \cdot Z + R_0, \tag{1.2}$$

unde R este matricea reacțiunilor reale de blocare la diferitele deplasări posibile ale nodurilor unei structuri reale (sistemul real), R_0 matricea acelorași reacțiuni pe sistemul de bază rezultînd din încărcarea cu sarcinile exterioare, Z matricea deplasărilor (rotiri sau translații) reale ale nodurilor structurii, iar r matricea reacțiunilor de blocare a nodurilor pe sistemul de bază în absența încărcării cu sarcini exterioare, rezultînd numai din cîte o singură deplasare unitară oarecare a unui nod (sau grup de noduri), compatibilă cu legăturile rămase ale sistemului de bază, toate celelalte deplasări fiind nule.

În baza teoremei reciprocității reacțiunilor, matricea r este o matrice pătrată simetrică față de diagonala sa principală, avînd rangul egal cu numărul total de deplasări posibile ale nodurilor pe sistemul real.

Pentru generalitatea aplicării calculului care urmează, în cadrul deplasărilor posibile ale nodurilor pe sistemul de bază a unui element structural oarecare, vor trebui luate în considerare atît rotirile φ în jurul unor axe perpendiculare pe planul elementului structural respectiv, cît și cele două translații : v și u — respectiv pe verticală și pe orizontală — în planul elementului structural respectiv. Într-adevăr, la cadrele-portal, la diafragmele cu unul sau chiar cu două șiruri de goluri, la cadrele care susțin diafragme pline ș.a., nu poate fi neglijată influența deplasărilor pe verticală a nodurilor (deci a forțelor axiale din stîlpi sau din spaleții diafragmelor cu goluri) asupra deformației de ansamblu a elementului structural în direcția orizontală (u).

Punînd în evidență matricele rotirilor reale (φ), a translațiilor reale pe verticală (v) și a translațiilor reale pe orizontală (u) ale nodurilor, relația (1.2) de mai sus se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} M &= r_{\varphi\varphi} \cdot \varphi + r_{\varphi v} \cdot v + r_{\varphi u} \cdot u + M_0, \\ V &= r_{v\varphi} \cdot \varphi + r_{vv} \cdot v + r_{vu} \cdot u + V_0, \\ H &= r_{u\varphi} \cdot \varphi + r_{uv} \cdot v + r_{uu} \cdot u + H_0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

unde M este matricea cuplelor de blocare a nodurilor la rotire pe sistemul real, V matricea forțelor de blocare a nodurilor sistemului real la deplasările acestora pe verticală, iar H, în mod similar, matricea forțelor de blocare a nodurilor sistemului real la deplasarea acestora pe orizontală.

Ceilalți termeni din relațiile de mai sus au semnificațiile corespunzătoare, de exemplu $r_{\varphi v}$ este matricea cuplelor de blocare a nodurilor sistemului de bază în absența încărcărilor cu sarcini exterioare și în prezența numai a cîte unei translații pe verticală a unui singur nod, toate celelalte deplasări fiind nule etc.

Întrucît, așa cum s-a arătat, matricea (r) este simetrică, rezultă :

a) matricele $r_{\varphi\varphi}$, r_{vv} și r_{uu} sînt matrice pătrate și simetrice față de diagonalele lor principale, cu rangul egal, respectiv cu numărul de noduri care se pot roti independent, cu numărul de noduri care se pot deplasa independent pe verticală sau cu numărul de noduri care se pot deplasa independent pe orizontală ;

b) de asemenea

$$r_{v\varphi} = r^T_{\varphi v},$$
$$r_{u\varphi} = r^T_{\varphi u}, \tag{1.4}$$
$$r_{uv} = r^T_{vu},$$

unde prin supraindexarea cu T s-a arătat posibilitatea obținerii matricei respective prin transpoziționarea termenilor matricei indexate. Aceste matrice sînt dreptunghiulare. De exemplu, matricea $r_{\varphi v}$ are un număr de linii egal cu numărul de noduri care se pot roti independent și un număr de coloane egal cu numărul de noduri care se pot deplasa independent pe verticală;

c) în cazul elementelor structurale care alcătuiesc structurile clădirilor multietajate studiate în prezenta lucrare, avem

$$r_{vu} = r_{uv} = 0. \tag{1.5}$$

Într-adevăr, orice deplasare elementară pe verticală a unui nod nu creează forțe orizontale care să necesite blocarea pe această direcție a nodurilor respective și invers.

Așadar, relațiile (1.3) de mai sus devin

$$M = r_{\varphi\varphi} \cdot \varphi + r_{\varphi v} \cdot v + r_{\varphi u} \cdot u + M_0,$$
$$V = r^T_{\varphi v} \cdot \varphi + r_{vv} \cdot v + \quad + V_0, \tag{1.6}$$
$$H = r^T_{\varphi u} \cdot \varphi + \quad + r_{uu} \cdot u + H_0.$$

În problema propusă și anume a determinării matricei reacțiunilor orizontale unitare, trebuie în fond aflate forțele orizontale necesare pentru blocarea nodurilor într-o poziție cu cîte un singur nod translatat pe orizontală cu unitatea. În realitate, prin neglijarea efectului forțelor axiale din rigle, translatarea unui nod pe orizontală antrenează translatarea întregului nivel cu aceeași cantitate și deci matricea reacțiunilor orizontale unitare cuprinde forțele de blocare a diferitelor nivele cînd cîte un singur nivel este translatat pe orizontală cu unitatea, celelalte nivele rămînînd fixe [1]).

Așadar, în acest caz avem

$$M_0 = 0,$$
$$V_0 = 0, \tag{1.7}$$
$$H_0 = 0,$$

[1]) În realitate, toate nodurile sînt fixe, nodurile unui singur nivel fiind fixate într-o poziție translatată cu unitatea.

întrucît nu există nici o încărcare-sarcină exterioară. De asemenea

$$M = 0, \qquad V = 0, \tag{1.8}$$

întrucît pe sistemul real nodurile sînt libere la rotire (prin încovoierea barelor care concurează în nod) și la translatarea pe verticală (prin întinderea sau prin comprimarea stîlpilor care concurează în nod și prin încovoierea riglelor respective).

Se observă de asemenea că matricea (u) este chiar matricea-unitate :

$$u = U = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

de rang egal cu numărul de nivele al elementului structural respectiv dacă i se ordonează termenii în mod convenabil.

În consecință, ecuațiile de condiție devin în acest caz

$$\begin{aligned} r_{\varphi\varphi} \cdot \varphi + r_{\varphi u} \cdot v + r_{\varphi u} &= 0, \\ r_{\varphi v}^T \cdot \varphi + r_{vv} \cdot v &= 0, \\ r_{\varphi u}^T \cdot \varphi + \quad + r_{uu} &= H, \end{aligned} \tag{1.10}$$

în care necunoscute sînt matricele (φ), (v) și (H).

Din relația a doua rezultă

$$\boxed{v = - r_{vv}^{-1} \cdot r_{\varphi v}^T \cdot \varphi,} \tag{1.11}$$

expresie care, înlocuită în prima relație, conduce la

$$(r_{\varphi\varphi} - r_{\varphi v} \cdot r_{vv}^{-1} \cdot r_{\varphi v}^T) \cdot \varphi + r_{\varphi u} = 0. \tag{1.12}$$

Dacă se notează

$$\rho_{\varphi\varphi} = r_{\varphi\varphi} - r_{\varphi v} \cdot r_{vv}^{-1} \cdot r_{\varphi v}^T, \tag{1.13}$$

relația (1.12) devine

$$\rho_{\varphi\varphi} \cdot \varphi + r_{\varphi u} = 0, \tag{1.14}$$

de unde

$$\boxed{\varphi = -\rho_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot r_{\varphi u}.} \tag{1.15}$$

Introducînd această expresie în ultima relație din (1.10), se obține

$$\boxed{H = r_{uu} - r_{\varphi u}^{T} \cdot \rho_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot r_{\varphi u}.} \tag{1.16}$$

Din cele de mai sus rezultă că matricea (H) este tocmai matricea reacțiunilor orizontale unitare cu semnul minus

$$\boxed{H = -r.} \tag{1.17}$$

Așadar, întocmirea acestei matrice comportă efectuarea următoarelor operații :

a) alcătuirea matricelor :

$$r_{\varphi\varphi},\ r_{\varphi v},\ r_{\varphi u},\ r_{vv} \text{ și } r_{uu};$$

b) inversarea matricei r_{vv} :

$$r_{vv}^{-1};$$

c) efectuarea produsului matriceal :

$$r_{\varphi v} \cdot r_{vv}^{-1} \cdot r_{\varphi v}^{T};$$

d) alcătuirea matricei $\rho_{\varphi\varphi}$ conform relației (1.13) ;

e) inversarea matricei $\rho_{\varphi\varphi}$:

$$\rho_{\varphi\varphi}^{-1};$$

f) efectuarea produsului matriceal :

$$r_{\varphi u}^{T} \cdot \rho_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot r_{\varphi u};$$

g) alcătuirea matricei (H) conform relației (1.16).

Se observă că, prin calculul de mai sus, pe lîngă matricea (H) s-au obținut și matricele (φ) și (v), respectiv cu relațiile (1.15) și (1.11).

Observație importantă. Se știe că în mod curent la calculul coeficienților necunoscutelor, în metoda deplasărilor (în cazul de față termenii matricelor $r_{\varphi\varphi}$ etc.), în locul produselor $E \cdot i$ se ia $i = \dfrac{I}{l}$, întrucît modulul de elasticitate E se simplifică în ecuațiile de condiție.

Algoritmul de mai sus are însă la bază o metodă mixtă și deci modulul de elasticitate nu se mai poate simplifica în toate ecuațiile. Așadar, în aceleași condiții (de calcul al termenilor matricelor enumerate la punctul a), adică luînd doar rigiditățile i în locul produselor $E \cdot i$, matricea (H) nu reprezintă, cu minus, chiar matricea reacțiunilor unitare, ci aceasta redusă în raportul $\frac{1}{E}$:

$$H = -\frac{1}{E} \cdot r. \tag{1.17'}$$

În consecință, dacă se folosește metoda de mai sus pentru calculul matricelor reacțiunilor unitare ale diferitelor elemente structurale, matricea sumă pe întreaga structură a reacțiunilor unitare în raport cu un plan de calcul [1] este

$$R = \sum_l r'_l \cdot \beta_l = -E \cdot \sum_l H'_l \cdot \beta_l = -E \cdot H, \tag{1.18}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, m),$$

unde H'_l sînt matricele H_l completate cu termeni nuli pe liniile și coloanele

$$(n_l + 1), (n_l + 2), \ldots, N,$$

unde n_l este numărul de nivele al elementului l, N numărul maxim de nivele ale structurii, iar β_l definit în [1] ca $\sum_j \cos^2 \alpha_j^l$, α_j^l fiind unghiul elementului j față de planul de calcul respectiv.

1.1. CALCULUL PULSAȚIILOR PROPRII ALE STRUCTURII

În aceste condiții, dacă λ_t sînt valorile proprii ale matricei-sumă $(-H)$, sau λ'_t sînt valorile proprii ale matricei sume transformate:

$$(-H') = {}_1^{-1} \cdot (-H) \cdot M_1^{-1} \tag{1.19}$$

(atunci cînd masele de nivel nu sînt egale între ele), unde

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & & & \\ & \sqrt{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{m_\lambda} \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

pulsațiile proprii vor trebui calculate cu formulele

$$\omega_t = \sqrt{\frac{E \cdot \lambda_t}{m}} \tag{1.21}$$

cînd masele de nivel sînt egale între ele,

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_N = m,$$

sau

$$\omega_t = \sqrt{E \cdot \lambda_t'} \tag{1.21'}$$

cînd masele de nivel diferă între ele.

I.2. CALCULUL DEPLASĂRILOR ORIZONTALE ALE STRUCTURII LA O ACȚIUNE ORIZONTALĂ OARECARE

I.2.1. În cazul acțiunii seismice

Se știe că termenii vectorilor proprii ai matricei-sumă a reacțiunilor unitare ($\boldsymbol{y}$) sînt proporționali cu săgețile maxime (y) ale structurii în modul de vibrație respectiv (t) dacă masele de nivel sînt egale între ele :

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_{11} & \boldsymbol{y}_{12} & \cdots & \boldsymbol{y}_{1N} \\ \boldsymbol{y}_{21} & \boldsymbol{y}_{22} & \cdots & \boldsymbol{y}_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{y}_{N1} & \boldsymbol{y}_{N2} & \cdots & \boldsymbol{y}_{NN} \end{pmatrix} = y \cdot \delta^{-1}, \tag{1.22}$$

unde δ este matricea diagonală a coeficienților de proporționalitate :

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & \\ & \delta_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \delta_N \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

și deci

$$y = \boldsymbol{y} \cdot \delta. \tag{1.24}$$

Dacă masele de nivel diferă între ele, vectorii proprii ai matricei transformate vor fi

$$x = M_1 \cdot \boldsymbol{y} = M_1 \cdot y \cdot \delta^{-1}, \tag{1.25}$$

de unde

$$y = M_1^{-1} \cdot x \cdot \delta. \tag{1.26}$$

Termenii δ_t ai matricei diagonale δ se pot calcula în modul următor :

După determinarea pulsațiilor proprii (și deci a perioadelor proprii) de oscilație ale structurii cu formulele (1.21) sau (1.21'), se determină coeficienții seismici c_t și deci sarcinile seismice totale :

$$S_t = c_t \cdot Q \tag{1.27}$$

în modul t de vibrație al structurii.

Forțele seismice de nivel (adică forțele de inerție cu intensitatea lor maximă în mișcarea seismică) vor fi

$$F_{jt} = m_j \cdot \omega_t^2 \cdot y_{jt}, \tag{1.28}$$

care, în cazul maselor de nivel egale, devine

$$F_{jt} = E \cdot \lambda_t \cdot y_{jt} = E \cdot \lambda_t \cdot \delta_t \cdot \boldsymbol{y}_{jt} \tag{1.28 a}$$

sau, în cazul maselor diferențiate pe nivele,

$$F_{jt} = E \cdot \lambda_t' \cdot m_j \cdot y_{jt} = E \cdot \lambda_t' \cdot \delta_t \cdot \sqrt{m_j} \cdot x_{jt}. \tag{1.28 b}$$

Din egalarea forței seismice totale cu suma forțelor seismice de nivel rezultă

$$\delta_t = \frac{S_t}{E \cdot \lambda_t \cdot \sum\limits_j \boldsymbol{y}_{jt}}, \tag{1.29}$$

în cazul maselor de nivel egale, și, respectiv,

$$\delta_t = \frac{S_t}{E \cdot \lambda_t' \cdot \sum\limits_j \sqrt{m_j} \cdot x_{jt}}, \tag{1.30}$$

în cazul maselor de nivel de valori diferite.

Așadar, săgețile structurii în modul t de vibrație se pot calcula cu formulele matriceale :

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{Nt} \end{pmatrix} = \frac{S_t}{E \cdot \lambda_t \cdot \sum\limits_j \boldsymbol{y}_{jt}} \cdot \boldsymbol{y}_t ; \qquad \boldsymbol{y}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_{1t} \\ \boldsymbol{y}_{2t} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{Nt} \end{pmatrix}, \tag{1.31}$$

în cazul maselor de nivel egale, și, respectiv,

$$y_t = \frac{S_t}{E \cdot \lambda_t' \cdot \sum_j \sqrt{m_j} \cdot x_{jt}} \cdot M_1^{-1} \cdot x_t; \quad M_1^{-1} \cdot x_t = \begin{pmatrix} \frac{x_{1t}}{\sqrt{m_1}} \\ \vdots \\ \frac{x_{Nt}}{\sqrt{m_N}} \end{pmatrix}, \tag{1.32}$$

unde, așa cum s-a arătat, $\boldsymbol{y}_t$ și, respectiv, x_t sînt vectorii proprii de ordinul t al matricii-sumă (H) și al matricei-sumă transformată (H').

1.2.2. În cazul acțiunii vîntului

Se știe că inversa matricei reacțiunilor unitare este matricea deplasărilor unitare :

$$\Delta = R^{-1}. \tag{1.33}$$

Întrucît, așa cum s-a văzut, din calculele anterioare rezultă o matrice redusă

$$H = \frac{R}{E},$$

vom avea

$$\Delta = \frac{H^{-1}}{E}. \tag{1.34}$$

Dacă F_v este vectorul-forță din vînt,

$$F_v = \begin{pmatrix} F_{1v} \\ F_{2v} \\ \vdots \\ F_{Nv} \end{pmatrix}, \tag{1.35}$$

vectorul săgeților din vînt vor fi

$$y_v = \begin{pmatrix} y_{1v} \\ y_{2v} \\ \vdots \\ y_{Nv} \end{pmatrix} = \Delta \cdot F_v = \frac{1}{E} \cdot H^{-1} \cdot F_v. \tag{1.36}$$

I.3. CALCULUL EFORTURILOR DIN BARELE (STÎLPI, RIGLE, SPALEȚI) DIFERITELOR ELEMENTE STRUCTURALE DIN ACȚIUNEA SEISMICĂ ȘI DIN VÎNT

Se știe că prescripțiile oficiale prevăd în general, în cazul structurilor înalte, calculul în primele trei moduri de vibrație în cazul acțiunii seismice și la vînt.

Așadar, este necesară alcătuirea matricei dreptunghiulare a săgeților de calcul:

$$y_c = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N1} & y_{N2} & y_{N3} & y_{N4} \end{pmatrix}, \tag{1.37}$$

în care primii trei vectori

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{Nt} \end{pmatrix} \qquad (t = 1, 2, 3)$$

se calculează cu formulele (1.31) sau (1.32), iar ultimul vector (y_v) cu formula (1.36).

Bineînțeles că acest calcul trebuie făcut pentru cele două direcții principale de rigiditate ale structurii, deci, într-un caz concret, matricea y_c are opt coloane.

Cu ajutorul matricei y_c se pot calcula matricele

$$\begin{aligned} \varphi_c^l &= \varphi^l \cdot y_c, \\ v_c^l &= v^l \cdot y_c, \end{aligned} \tag{1.38}$$

care reprezintă rotirile reale și, respectiv, deplasările pe verticală reale ale nodurilor fiecărui element structural l, în cele opt ipoteze de încărcare, considerînd y_c chiar în planul elementului.

Se știe că, dacă se cunosc rotirile capetelor de bare (deci termenii matricelor φ_c^l) și deplasările relative ale acestora (deci termenii matricilor v_c^l pentru rigle sau ai matricei y_c pentru stîlpi), se pot calcula eforturile secționale (M, N, T) în toate barele diferitelor elemente structurale.

Observații. Un efort secțional oarecare într-o bară a unui element structural l poate fi exprimat în mod simbolic prin relația matriceală

$$S = E \cdot (T_{1s} \cdot \varphi_c^l + T_{2s} \cdot v_c^l + T_{3s} \cdot y_c), \tag{1.39}$$

unde T_{1_s}, T_{2_s} și T_{3_s} sînt niște matrice speciale, specifice efortului S, ai căror termeni conțin rigiditatea barei respective la solicitarea corespunzătoare efortului $S\left(\frac{I}{l} \text{ sau } \frac{A}{l}\right)$. Așadar, modulul de elasticitate E, care intră și la numitorul expresiilor termenilor matricelor y_c, φ_c^l și v_c^l, se simplifică, fiind astfel preferabil ca în locul matricei y_c să se calculeze matricea

$$y_c' = Ey_c, \tag{1.40}$$

adică

$$y_t' = \frac{S_t}{\lambda_t \cdot \sum_j y_{jt}}$$

sau $(t = 1, 2, 3)$, (1.41)

$$y_t' = \frac{S_t}{\lambda_t' \cdot \sum_j \sqrt{m_j} \cdot x_{jt}},$$

respectiv

$$y_v' = H^{-1} \cdot F_v. \tag{1.42}$$

Aceasta atrage după sine calculul matricelor

$$\varphi_c'^l = E \cdot \varphi_c^l; \qquad v_c'^l = E \cdot v_c^l \tag{1.43}$$

și deci, în final, eforturile secționale se vor putea calcula, independent de modelul de elasticitate E, cu relația simbolică

$$S = T_{1_s} \cdot \varphi_c'^l + T_{2_s} \cdot v_c'^l + T_{3_s} \cdot y_c'. \tag{1.44}$$

Din cele de mai sus rezultă că modulul de elasticitate intervine numai la determinarea perioadelor proprii de vibrație.

De asemenea este de menționat că influența forței tăietoare, care se resimte în special la barele avînd înălțimea secțiunii comparabilă cu lungimea lor (distanța dintre noduri), este foarte importantă și intervine prin coeficientul

$$\alpha = \frac{k \cdot E}{G} \cdot \frac{I}{A \cdot l^2}, \tag{1.45}$$

în care I este momentul de inerție al secțiunii întregi, în timp ce A este aria numai a secțiunii din planul elementului structural (de exemplu

aria inimii unui profil în I), iar coeficientul k, care în cazul secțiunilor dreptunghiulare cu laturi comparabile între ele are valoarea 1,2, trebuie luat egal cu 1 în cazul secțiunilor dreptunghiulare subțiri.

I.4. CONCLUZII LA PARTEA ÎNTÎI A LUCRĂRII

În cele de mai sus s-a prezentat un algoritm de calcul, bazat pe o metodă mixtă, pentru calculul direct al matricelor reacțiunilor unitare și ale diferitelor elemente structurale plane în care poate fi descompusă structura de rezistență a unei clădiri multietajate. Desigur că construirea acestor matrice se poate face și prin alte metode, care vor diferi însă de la caz la caz, adică de la un tip de element structural la altul. Algoritmul dezvoltat mai sus se evidențiază însă prin generalitatea aplicabilității sale la orice tip de element structural, ceea ce poate ușura în mare măsură alcătuirea programului de calcul la o mașină electronică cifrică. Se observă astfel că singurele etape de calcul care trebuie rezolvate de proiectant și de către programatoi în mod diferit pentru fiecare element structural în parte sînt :

— alcătuirea matricelor :

$$r_{\varphi\varphi},\ r_{\varphi u},\ r_{\varphi v},\ r_{vv} \text{ și } r_{uu},$$

pentru care trebuie date formulele de calcul ale termenilor respectivi;

— elaborarea formulelor de calcul ale diferitelor eforturi secționale în barele elementelor structurale.

Față de metoda prezentată în [1], metoda de calcul de mai sus comportă inversarea a cîte două matrice (r_{vv} și $\rho_{\varphi\varphi}$) pentru fiecare element structural în parte, de rangul N_v și, respectiv, N_φ (N_v fiind numărul de noduri care se pot deplasa independent pe verticală, iar N_φ numărul de noduri care se pot roti independent). Se reamintește că în metoda din [1] erau necesare a fi inversate doar cîte o singură matrice pentru fiecare element structural în parte, de un rang egal cu numărul de nivele ale acestuia. Este de remarcat însă că inversarea acestor matrice (ale deplasărilor unitare) este o operație foarte sensibilă [2]), ceea ce nu este cazul matricelor r_{vv} sau $\rho_{\varphi\varphi}$ de mai sus. Întrucît rangul acestor matrice poate fi însă foarte mare, se recomandă folosirea metodei de inversare prin partiționare a acestora.

Trebuie remarcat de asemenea faptul că, în cazul neglijării efectului forțelor axiale, matricele $r_{\varphi v}$ și r_{vv} sînt nule, iar matricea $\rho_{\varphi\varphi}$ este chiar matricea $r_{\varphi\varphi}$. În acest caz, calculul se simplifică foarte mult, dar nu-l considerăm recomandabil a fi efectuat decît în cazul structurilor alcătuite din cadre cu mai mult decît două deschideri.

[2]) Într-adevăr, o atare matrice, fără să fie singulară, are în general valoarea determinantului foarte mică, întrucît între valorile termenilor de pe două linii consecutive diferențele sînt de ordin foarte mic.

II. STRUCTURI CU DISPOZIȚIE OARECARENE–SIMETRICĂ ÎN PLAN–A ELEMENTELOR LOR STRUCTURALE

II.1. FORMULAREA CALCULULUI ÎN CAZUL GENERAL

În cadrul ipotezelor formulate mai sus, și anume al rigidității perfecte a planșeelor în planul lor și al posibilității descompunerii structurii de rezistență în elemente plane, problema se pune mai întîi în a găsi „răspunsul" acestei structuri la o mișcare oarecare de translație a bazei sale $\bar{u}_0(t)$. Se observă că, în această etapă, problema se reduce la determinarea variației în timp a $3N$ parametri, unde N este numărul total (maxim) de nivele ale structurii.

În cele ce urmează, acești parametrii se vor nota cu $Z_1, \dots, Z_i, \dots, Z_N$ deplasările planșeelor în direcția x, $Z_{N+1}, \dots, Z_{N+i}, \dots, Z_{2N}$ idem în direcția y, iar $Z_{2N+1}, \dots, Z_{2N+i}, \dots, Z_{3N}$ rotirile acestora în jurul axului z.

Sistemul de axe stîng $xoyz$ este un sistem preferențial (adică un sistem inerțial în măsura în care pămîntul poate fi considerat ca un reper inerțial) cu axa z verticală și față de care se presupune cunoscută funcția

$$\bar{u}_0(t) = \bar{i} \cdot u_0(t) \cdot \cos \lambda + \bar{j} \cdot u_0(t) \cdot \sin \lambda, \tag{2.1}$$

în care λ (fig. 2.1) se consideră constant în timpul mișcării seismice.

Scrierea ecuațiilor de mișcare a celor N planșee se poate face, folosind principiul lui d'Alembert, astfel: se presupune că fiecare planșeu este imobilizat în planul său prin trei legături simple în care reacțiunile (legăturile fiind fictive) sînt nule. Cele trei legături sînt reprezentate în figura 2.1 prin doi penduli după direcțiile x și y și o legătură simplă de împiedicare a rotirii după axul z, schematizată în figură prin pătratul din jurul axului z.

Reacțiunile din aceste legături se compun din

– reacțiunea elastică: $R^{(el)}$;

– reacțiunea datorită forțelor de inerție: $R^{(F)}$;

– reacțiunea datorită forțelor de reținere, determinate de amortizare: $R^{(A)}$.

Așadar, în cele trei legături simple de la nivelul k, reacțiunile totale vor fi

$$\begin{aligned} R_k &= R_k^{(el)} + R_k^{(F)} + R_k^{(A)} = 0, \\ R_{N+k} &= R_{N+k}^{(el)} + R_{N+k}^{(F)} + R_{N+k}^{(A)} = 0, \\ R_{2N+k} &= R_{2N+k}^{(el)} + R_{2N+k}^{(F)} + R_{2N+k}^{(A)} = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Considerînd ca pozitive reacțiunile dirijate în sensul pozitiv al deplasării corespunzătoare, expresiile celor trei tipuri de reacțiuni vor fi

$$R_k^{(el)} = \sum_i (r_{ki} \cdot Z_i + r_{k,N+i} \cdot Z_{N+i} + r_{k,2N+i} \cdot Z_{2N+i}),$$

$$R_{N+k}^{(el)} = \sum_i (r_{N+k,i} \cdot Z_i + r_{N+k,N+i} \cdot Z_{N+i} + r_{N+k,2N+i} \cdot Z_{2N+i}), \qquad (2.3)$$

$$R_{2N+k}^{(el)} = \sum_i (r_{2N+k,i} \cdot Z_i + r_{2N+k,N+i} \cdot Z_{N+i} + r_{2N+k,2N+i} \cdot Z_{2N+i}),$$

unde expresiile coeficienților r se deduc din matricele reacțiunilor unitare

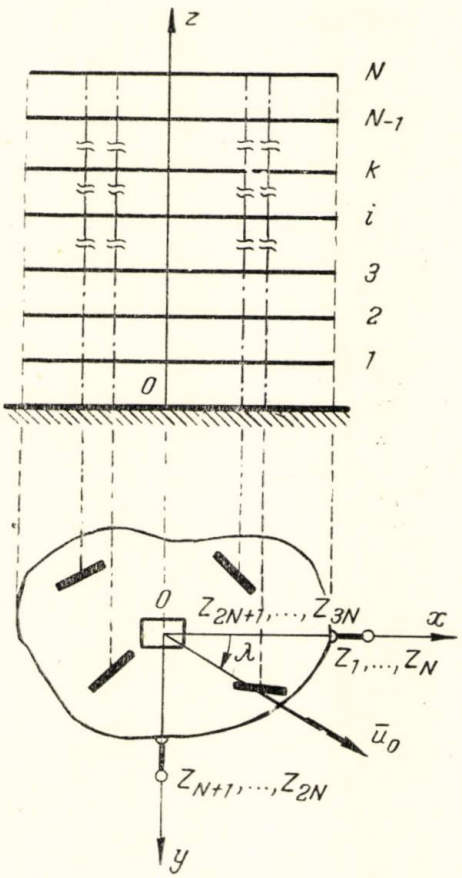


Fig. 2.1

ale fiecărui element structural j (fig. 2.2), conform celor arătate în (I), astfel [3]):

$$r_{ki} = \sum_j r_{ki}^j \cdot \cos^2 \alpha_j,$$

[3]) În cele de mai jos se consideră cazul cel mai general, cînd fiecare element structural j este de alt tip.

$$r_{k,N+i} = \sum_j r^j_{ki} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \alpha_j, \qquad \text{(a)}$$

$$r_{k,2N+i} = -\sum_j r^j_{ki} \cdot d_j \cdot \sin \beta_j,$$

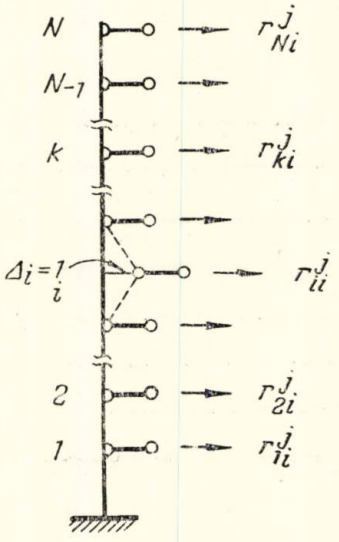


Fig. 2.2

$$r_{N+k,i} = \sum_j r^j_{ki} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \alpha_j,$$

$$r_{N+k,N+i} = \sum_j r^j_{ki} \cdot \sin^2 \alpha_j, \qquad \text{(b) (2.4)}$$

$$r_{N+k,2N+i} = \sum_j r^j_{ki} \cdot d_j \cdot \cos \beta_j,$$

$$r_{2N+k,i} = -\sum_j r^j_{ki} \cdot d_j \cdot \sin \beta_j,$$

$$r_{2N+k,N+i} = \sum_j r^j_{ki} \cdot d_j \cdot \cos \beta_j, \qquad \text{(c)}$$

$$r_{2N+k,2N+i} = \sum_j r^j_{ki} \cdot d^2_j.$$

Unghiurile α_j și β_j, precum și distanțele d_j, sînt arătate în figura 2.3:

$$\beta_j = \frac{\pi}{2} + \alpha_j. \qquad (2.5)$$

Întrucît planele diferitelor elemente structurale se presupun aceleași pe înălțimea construcției, în cele de mai sus s-au considerat mărimile α_j, β_j și d_j constante pe înălțime.

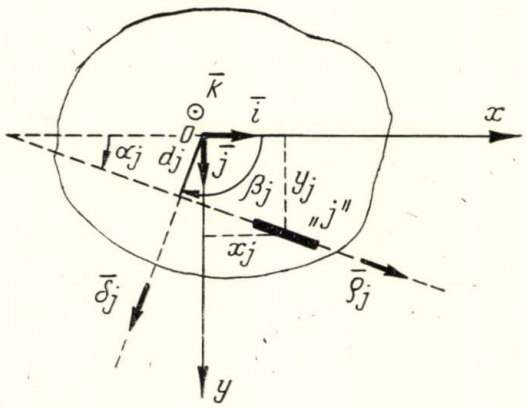


Fig. 2.3

Se menționează, așa cum se arată și în [*1*], că, în cazul cînd un element oarecare l se oprește la nivelul n_l, toate reacțiunile

$$r^l_{k\rho} = 0 \text{ pentru } \rho = (n_l + 1), \ldots, N. \tag{2.6}$$

Dacă x_j și y_j sînt coordonatele în plan ale centrului de mase de nivel al elementului j (considerat același la toate nivelele), deplasările masei elementului j de la nivelul k sînt

$$\begin{aligned} Z^j_k &= Z_k - y_j \cdot Z_{2N+k} + u_0 \cdot \cos\lambda, \\ Z^j_{N+k} &= Z_{N+k} + x_j \cdot Z_{2N+k} + u_0 \cdot \sin\lambda, \end{aligned} \tag{2.7}$$

deci componentele forței de inerție a masei m^j_k (corespunzătoare elementului j la nivelul k) vor fi

$$\begin{aligned} F^j_k &= - m^j_k \cdot (\ddot{Z}_k - y_j \cdot \ddot{Z}_{2N+k} + \ddot{u}_0 \cdot \cos\lambda), \\ F^j_{N+k} &= - m^j_k \cdot (\ddot{Z}_{N+k} + x_j \cdot \ddot{Z}_{2N+k} + \ddot{u}_0 \cdot \sin\lambda). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Așadar, reacțiunile din legăturile fictive ale planșeului de la nivelul k rezultînd din forțele de inerție sînt

$$R^{(F)}_k = - \sum_j F^k_k = M_k \cdot \ddot{Z}_k - S_{kx} \cdot \ddot{Z}_{2N+k} + M_k \cdot \ddot{u}_0 \cdot \cos\lambda,$$

$$R^{(F)}_{N+k} = -\sum_j F^j_{N+k} = M_k \ddot{Z}_{N+k} + S_{ky} \cdot \ddot{Z}_{2N+k} + M_k \cdot \ddot{u}_0 \cdot \sin\lambda,$$

$$R^{(F)}_{2N+k} = -\sum_j (-F^j_k \cdot y_j + F^j_{N+k} \cdot x_j) = -S_{kx} \cdot \ddot{Z}_k + S_{ky} \cdot \ddot{Z}_{N+k} +$$

$$+ I_{kz} \cdot \ddot{Z}_{2N+k} + (-S_{kx} \cdot \cos\lambda + S_{ky} \cdot \sin\lambda) \cdot \ddot{u}_0, \qquad (2.9)$$

în care

$M_k = \sum_j m^j_k$ este masa totală a nivelului k,

$S_{kx} = \sum_j m^j_k \cdot y_j$ — momentul static al maselor de la nivelul k față de planul xoz,

$S_{ky} = \sum_j m^j_k \cdot x_j$ — idem față de planul yoz,

$I_{kz} = \sum_j m^j_k \cdot (x_j^2 + y_j^2)$ — momentul de inerție al maselor de la nvielul k față de axul z.

Considerînd că forța de reținere (datorită amortizării) corespunzătoare masei m^j_k este proporțională cu viteza relativă a acesteia (deci care provine din deformarea elementului respectiv), vom avea

$$A^j_k = -2\varepsilon^j_k \cdot m^j_k \cdot (\dot{Z}_k - y_j \cdot \dot{Z}_{2N+k}),$$
$$A^j_{N+K} = -2\varepsilon^j_k \cdot m^j_k \cdot (\dot{Z}_{N+k} + x_j \cdot \dot{Z}_{2N+k}). \qquad (2.10)$$

Așadar, reacțiunile din legăturile planșeului de la nivelul k vor fi

$$R^{(A)}_k = -\sum_j A^j_k = 2\varepsilon \cdot M_k \dot{Z}_k - 2\varepsilon \cdot S_{kx} \cdot \dot{Z}_{2N+k},$$

$$R^{(A)}_{N+k} = -\sum_j A^j_{N+k} = 2\varepsilon \cdot M_k \cdot \dot{Z}_{N+k} + 2\varepsilon \cdot S_{ky} \cdot \dot{Z}_{2N+k},$$

$$R^{(A)}_{2N+k} = -\sum_j (-A^j_k \cdot y_j + A^j_{N+k} \cdot x_j) = \qquad (2.11)$$

$$= -2\varepsilon \cdot S_{kx} \cdot \dot{Z}_k + 2\varepsilon \cdot S_{ky} \cdot \dot{Z}_{N+k} + 2\varepsilon \cdot I_{kz} \cdot \dot{Z}_{2N+k}.$$

În expresiile de mai sus s-a presupus același coeficient de amortizare pentru toate elementele j la toate nivelele k:

$$\varepsilon^j_k = \varepsilon \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, N, \\ j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Dacă se introduc expresiile (2.3), (2.9) și (2.11) în relațiile (2.2), se va obține un sistem de $3N$ ecuații diferențiale cu $3N$ necunoscute

(deplasările în cele două direcții x și y ale planșeelor, precum și rotirile acestora în jurul axului z).

Integrarea ecuațiilor respective comportă un volum important de calcule, care, în practică, pot conduce la erori necontrolabile. De asemenea determinarea celor $3N$ parametri nu epuizează problema proiectării și de aceea apare necesitatea utilizării unei metode mai puțin riguroase de calcul, dar cu posibilități de aplicare mai ușoară în practica de proiectare.

II.2. METODĂ APROXIMATIVĂ DE CALCUL

Se știe că, în practică, structurile de rezistență ale construcțiilor, care nu sînt alcătuite perfect simetrice în raport cu două plane verticale, se proiectează în cazul unei bune concepții inginerești astfel încît, printr-o judicioasă așezare a elementelor verticale structurale, să se suplinească lipsa unei simetrii perfecte fizice-geometrice. În acest caz, deși — în limbaj strict matematic — structurile sînt lipsite de simetrie —, se poate spune că din punct de vedere practic există anumite plane de „simetrie aproximativă".

Metoda de calcul propusă în cele ce urmează se bazează pe specularea observației de mai sus, privind o situație de fapt, foarte frecvent întîlnită în practică.

Se consideră la început cazul simplu al unei structuri alcătuite dintr-o serie de elemente plane verticale dispuse oarecum și legate între ele printr-un singur planșeu rigid în planul său (fig. 2.4). Rigiditatea

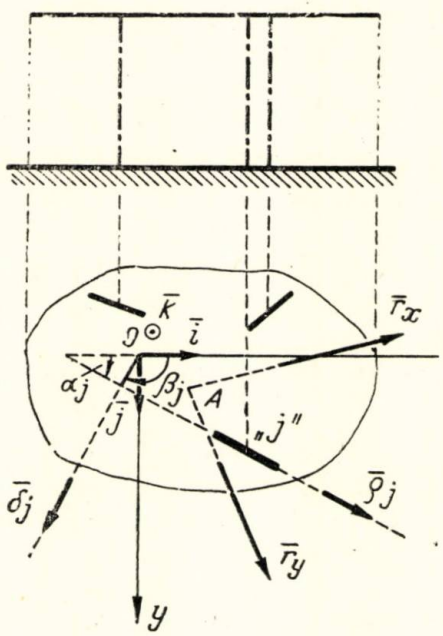


Fig. 2.4

acestei structuri poate fi descrisă în felul următor [2], [3]. Se alege un sistem de axe stîng : $xoyz$ (cu axa z verticală) arbitrar și se dă cîte o translație unitară pozitivă planșeului în cele două direcții orizontale (x și y) și o rotație unitară pozitivă în jurul axului z.

În fiecare caz vor apărea în planul fiecărui element j cîte o forță (la contactul dintre element și planșeu) astfel [1] :

— în cazul translației în direcția x :

$$\bar{r}_x^j = \bar{r}^j \cdot \cos \alpha_j ; \tag{2.13}$$

— în cazul translației în direcția y :

$$\bar{r}_y^j = \bar{r}^j \cdot \sin \alpha_j ; \tag{2.14}$$

— în cazul rotației în jurul axului oz :

$$\bar{r}_z^j = - \bar{r}^j \cdot d_j , \tag{2.15}$$

unde $\bar{r}^j$ este forța care apare în elementul j pentru o deplasare unitară în planul său în sensul pozitiv ales [4]) ($\bar{r}^j = r^j \cdot \bar{\rho}_j$).

Reducînd pe rînd forțele de mai sus în originea (arbitrară) a axelor, vom obține cîte o forță rezultantă orizontală de direcție oarecare (deci cu două componente) și un cuplu rezultant de moment dirijat după z. Aceste elemente vor fi date de :

— pentru translația în direcția x :

$$\begin{aligned} r_{xx} &= \sum_j r^j \cdot \cos^2 \alpha_j , \\ r_{xy} &= \sum_j r^j \cdot \cos \alpha_j \cdot \sin \alpha_j , \\ r_{xz} &= - \sum_j r^j \cdot d_j \cdot \sin \beta_j = - \sum_j r^j \cdot d_j \cdot \cos \alpha_j , \end{aligned} \tag{2.16}$$

unde r_{xx} și r_{xy} sînt proiecțiile pe x și y ale rezultantei forțelor $\bar{r}_x^j$, de mărime

$$r_x = \sqrt{r_{xx}^2 + r_{xy}^2} , \tag{2.17}$$

iar r_{xz} este momentul cuplului rezultant al acestor forțe față de axul z ;

---

[4]) Senzul pozitiv al elementului j se alege astfel încît

$$\bar{\rho}_j \times \bar{\delta}_j = \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k} .$$

— pentru translația în direcția y :

$$r_{yx} = \sum_j r^j \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \alpha_j = r_{xy},$$

$$r_{yy} = \sum_j r^j \cdot \sin^2 \alpha_j, \tag{2.18}$$

$$r_{yz} = \sum_j r^j \cdot d_j \cdot \cos \beta_j = - \sum_j r^j \cdot d_j \cdot \sin \alpha_j,$$

unde r_{yx} și r_{yy} sînt proiecțiile pe x și y ale rezultantei forțelor $\bar{r}_y^j$, de mărime

$$r_y = \sqrt{r_{yy}^2 + r_{yx}^2}, \tag{2.19}$$

iar r_{yz} este momentul cuplului rezultant al acestor forțe față de axul z.

De asemenea, pentru rotirea în jurul axului oz avem

$$\begin{aligned} r_{zx} &= - \sum_j r^j \cdot d_j \cdot \sin \beta_j = - \sum_j r^j \cdot d_j \cdot \cos \alpha_j = r_{xz}, \\ r_{zy} &= \sum_j r^j \cdot d_j \cdot \cos \beta_j = - \sum_j r^j \cdot d_j \cdot \sin \alpha_j = r_{yz}, \\ r_{zz} &= \sum_j r^j \cdot d_j^2, \end{aligned} \tag{2.20}$$

unde r_{zx} și r_{zy} sînt proiecțiile pe x și y ale rezultantei forțelor $\bar{r}_z^j$, iar r_{zz} este momentul cuplului rezultant al acestor forțe față de axul z.

Mărimile definite prin (2.16), (2.18) și (2.20) pot fi considerate componentele rigidității structurii față de sistemul arbitrar de axe $xoyz$, respectiv la translația în direcția x, la translația în direcția y și la rotirea în jurul axului oz.

Se observă că toate componentele rigidității la torsiune (definite de (2.20)) depind de alegerea originii 0 a axelor.

Astfel, păstrînd direcțiile axelor x și y, dar luînd originea într-un alt punct 0′ (fig. 2.5), pentru care distanțele elementelor j sînt

$$d_j' = d_j - (a \cdot \cos \beta_j + b \cdot \sin \beta_j) = d_j + a \cdot \sin \alpha_j - b \cdot \cos \alpha_j, \tag{2.21}$$

vom avea

$$\begin{aligned} r_{zx}' &= - \sum_j r^j \cdot d_j' \cdot \cos \alpha_j = b \cdot r_{xx} - a \cdot r_{xy} + r_{xz}, \\ r_{zy}' &= - \sum_j r^j \cdot d_j' \cdot \sin \alpha_j = - a \cdot r_{yy} + b \cdot r_{yx} + r_{yz}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dacă punctul $0' \equiv A$, unde A este punctul de intersecție al suporturilor forțelor r_x și r_y, vom avea

$$\begin{aligned} r_{z_1 x} &= - a_1 \cdot r_{xy} + b_1 \cdot r_{xx} + r_{xz} = 0, \\ r_{z_1 y} &= - a_1 \cdot r_{yy} + b_1 \cdot r_{yx} + r_{yz} = 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

relații care vor furniza coordonatele punctului A, definit ca mai sus.

Se poate arăta că, față de sistemul de axe cu originea în A, componentele rigidității la torsiune sînt minime.

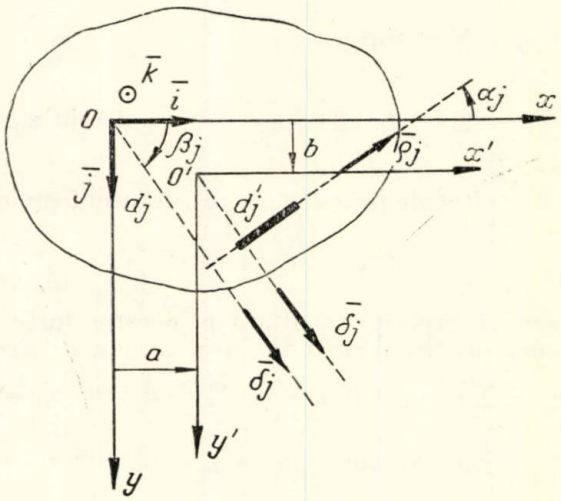


Fig. 2.5

Într-adevăr, r_{z_1x} și r_{z_1y} sînt nule, iar dacă se calculează $r_{z'z'}$ vom avea

$$r_{z'z'} = \sum_j r^j d_j'^2 = r_{zz} + a^2 \cdot r_{yy} + b^2 \cdot r_{xx} - 2a \cdot r_{yz} + 2b \cdot r_{xz} - 2ab \cdot r_{xy}. \tag{2.24}$$

Această expresie prezintă o valoare extremă pentru

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{z'z'}}{\partial a} &= 2a \cdot r_{yy} - 2r_{yz} - 2b \cdot r_{xy} = 0, \\ \frac{\partial r_{z'z'}}{\partial b} &= 2b \cdot r_{xx} + 2r_{xz} - 2a \cdot r_{xy} = 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

relații care sînt satisfăcute de soluțiile ecuațiilor (2.23), adică de coordonatele punctului A.

Valoarea $r_{z_1z_1}$ este minimă, întrucît

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r_{z'z'}}{\partial a^2} &= 2r_{yy} > 0, \\ \frac{\partial^2 r_{z'z'}}{\partial b^2} &= 2r_{xx} > 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Punctul A se numește centru de rigiditate.
Față de axele $xAyz$, componentele rigidității vor fi deci

$$
\begin{aligned}
r_{xx} &= \sum_j r^j \cdot \cos^2 \alpha_j , \\
r_{xy} &= \sum_j r^j \cdot \cos \alpha_j \cdot \sin \alpha_j , \\
r_{xz_1} &= 0, \\
r_{yx} &= \sum_j r^j \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \alpha_j = r_{xy} , \\
r_{yy} &= \sum_j r^j \cdot \sin^2 \alpha_j , \\
r_{yz_1} &= 0, \\
r_{z_1x} &= r_{xz_1} = 0, \\
r_{z_1y} &= r_{yz_1} = 0, \\
r_{z_1z_1} &= r_{zz} + a_1^2 \cdot r_{yy} + b_1^2 \cdot r_{xx} - 2a_1 \cdot r_{yz} + 2b_1 \cdot r_{xz} - 2a_1 \cdot b_1 \cdot r_{xy} .
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Dacă, păstrînd originea axelor în A, se rotesc axele x și y în sens orar cu un unghi φ (fig. 2.6), se poate vedea că rigiditățile vor varia astfel

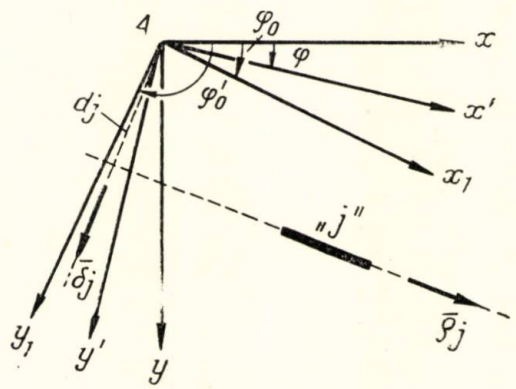


Fig. 2.6

$$
\begin{aligned}
r_{x'x'} &= \frac{r_{xx} + r_{yy}}{2} + \frac{r_{xx} - r_{yy}}{2} \cdot \cos 2\varphi + r_{xy} \cdot \sin 2\varphi, \\
r_{y'y'} &= \frac{r_{xx} + r_{yy}}{2} - \frac{r_{xx} - r_{yy}}{2} \cdot \cos 2\varphi - r_{xy} \cdot \sin 2\varphi, \\
r_{x'y'} &= r_{y'x'} - \frac{r_{xx} - r_{yy}}{2} \cdot \sin 2\varphi + r_{xy} \cdot \cos 2\varphi.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Așadar, rigiditățile la translațiile unitare în lungul unor axe x', y' vor prezenta valori extreme (maxime sau minime) atunci cînd acestea vor face cu direcția axei x unghiurile φ_0 și $\varphi_0' = \frac{\pi}{2} + \varphi_0$, care rezultă din relația

$$r_{x_1 y_1} = 0, \tag{2.29}$$

de unde

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2r_{xy}}{r_{xx} - r_{yy}}. \tag{2.30}$$

Direcțiile x_1 și y_1 (normale între ele), definite prin unghiurile φ_0 și φ_0' față de axa inițială (arbitrară) x, se numesc direcții principale de rigiditate. Pentru aceste direcții, componentele rigidităților prezintă valori extreme, numite rigidități principale.

Dacă se aplică o forță după una dintre direcțiile principale, este evident că planșeul structurii se va translata în direcția acestei forțe.

Se observă că, în cazul existenței unui plan de simetrie fizico-geometrică, acesta este un plan principal de rigiditate, celălalt plan fiind perpendicular pe acesta, trecînd prin centrul de rigiditate, ale cărui coordonate sînt date de ecuațiile (2.23).

Dacă se consideră acum o structură solidarizată prin mai multe planșee rigide, vom introduce noțiunea de „rigiditate de nivel" astfel: se fixează toate planșeele ca în figura 2.1 și se dă o translație unitară numai planșeului i în sensul axei x. Dacă se ia

$$k = i, \tag{2.31}$$

se vor obține rigiditățile definite de (2.4), pe care le vom numi „rigidități de nivel":

$$\begin{aligned}
r_{ii} &= \sum_j r_{ii}^j \cdot \cos^2 \alpha_j = R_{ii}^{xx}, \\
r_{i,N+i} &= \sum_j r_{ii}^j \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \alpha_j = R_{ii}^{xy}, \\
r_{i,2N+i} &= -\sum_j r_{ii}^j \cdot d_j \cdot \cos \alpha_j = R_{ii}^{xz}, \\
r_{N+i,i} &= \sum_j r_{ii}^j \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \alpha_j = R_{ii}^{yx} = R_{ii}^{xy}, \\
r_{N+i\,N+i} &= \sum_j r_{ii}^j \cdot \sin^2 \alpha_j = R_{ii}^{yy}, \\
r_{N+i,2N+i} &= -\sum_j r_{ii}^j \cdot d_j \cdot \sin \alpha_j = R_{ii}^{yz}, \\
r_{2N+i,i} &= -\sum_j r_{ii}^j \cdot d_j \cdot \cos \alpha_j = R_{ii}^{zx} = R_{ii}^{xz}, \\
r_{2N+i,N+i} &= -\sum_j r_{ii}^j \cdot d_j \cdot \sin \alpha_j = R_{ii}^{zy} = R_{ii}^{yz}, \\
r_{2N+i,2N+i} &= \sum_j r_{ii}^j \cdot d_j^2 = R_{ii}^{zz}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Din egalarea cu zero a penultimelor două valori, pentru niște axe translatate cu a_{ti}, respectiv b_{ti}, se vor obține coordonatele centrului de rigiditate al nivelului i din sistemul de ecuații (similar cu (2.23)) :

$$\begin{aligned} -a_{ti} \cdot R_{ii}^{xy} + b_{ti} \cdot R_{ii}^{xx} + R_{ii}^{xz} &= 0, \\ -a_{ti} \cdot R_{ii}^{yy} + b_{ti} \cdot R_{ii}^{yx} + R_{ii}^{yz} &= 0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, N$.

De asemenea se vor putea obține direcțiile principale de rigiditate de la nivelul i cu formula (similară cu (2.30))

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0^i = \frac{2R_{ii}^{xy}}{R_{ii}^{xx} - R_{ii}^{yy}} \tag{2.34}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, N$.

În cazul cel mai general, nici centrele de rigiditate și nici direcțiile principale de rigiditate nu vor coincide la toate nivelele.

Este evident că, în cazul existenței unui plan de simetrie fizico-geometrică, o serie de direcții principale se vor găsi în acest plan, ca și centrele de rigiditate, fără însă ca acestea din urmă să se găsească pe aceeași verticală. Acest plan va fi un plan de rigiditate extremă.

În cazul structurilor cu alcătuire nesimetrică în plan, păstrarea unui plan de rigiditate extremă nu este posibilă, întrucît diversele elemente structurale se comportă diferit, la deplasări forțate unitare, pe înălțime. În plus, s-ar putea ca unele elemente să lipsească de la un anumit nivel în sus.

Păstrarea unui plan de rigiditate principal s-ar putea realiza în cazul structurilor nesimetrice numai dacă toate elementele structurale sînt prezente pînă la ultimul nivel și dacă ar fi astfel alcătuite încît matricele reacțiunilor lor unitare să difere între ele printr-o constantă. Bineînțeles că această situație pur teoretică nu se realizează în practică.

Ținînd seama însă de considerațiile expuse mai sus privind proiectarea rațională a structurilor antiseismice, ne putem aștepta ca, pe de o parte, linia centrelor de rigiditate de la diferitele nivele să nu se depărteze prea mult de o dreaptă verticală și ca, pe de altă parte, direcțiile principale de rigiditate de la diferitele nivele să fie suficient de paralele între ele (valorile unghiurilor φ_0^i destul de apropiate între ele). O atare situație ne-ar putea îndreptăți să considerăm structura „aproximativ simetrică".

Pentru o astfel de structură propunem deci următorul calcul :

a) determinarea pozițiilor centrelor de rigiditate de nivel cu ajutorul ecuațiilor (2.33) ;

b) determinarea direcțiilor principale de rigiditate de nivel cu ajutorul formulei (2.34) ;

c) dacă alcătuirea „cvasisimetrică" se verifică, se pot alege două plane verticale convenționale de rigiditate extremă (principale) în funcție de valorile medii ale mărimilor aflate mai sus ;

d) calculele se pot conduce apoi în continuare pentru cele două direcţii principale convenţionale ale structurii, calculînd matricele reacţiunilor unitare ale structurii corespunzătoare, conform consideraţiilor din [1] şi în conformitate cu normativele în vigoare, pentru fiecare element structural în parte.

II.3. CONCLUZII LA PARTEA A DOUA A LUCRĂRII

Trebuie remarcat că cele de mai sus sînt aplicabile pentru cazul coincidenţei (măcar aproximativă) a centrelor de rigiditate de nivel cu centrele de mase respective. În caz contrar, calculul ar putea conduce la erori chiar în cazul structurilor cu simetrie geometrică, fiind evident însă faptul că, în cazul unei simetrii complete fizico-geometrice, condiţia de mai sus este satisfăcută.

Primită la redacţie la 21 decembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. V. FLORIAN, N. ŢOPA, M. GRIGORIU, *Calculul construcţiilor multietajate simetrice, cu dispoziţie oarecare în plan a elementelor lor structurale la acţiuni orizontale*, St. cerc. mec. apl., *2* (1970).
2. ALBIGÉS N., J. GOULET, *Contreventement de bâtiments*, Annales de l'Institut tehnique du bâtiment et des travaux publics, mai 1970.
3. M. HANGAN, *Construcţii de beton armat*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.

CU PRIVIRE LA MIȘCAREA FLUIDELOR ÎN JURUL UNEI REȚELE DE PLĂCI PLANE

de S. HÂNCU, L. PREDESCU, V. MARINESCU

I. C. I. F. P., București

În lucrare se prezintă un model de calcul al mișcării fluidelor în jurul une rețele de plăci plane, pornind de la teoria mișcării potențiale a fluidelor, valabilă în domeniul de mișcare exterior vîrtejurilor, și de la utilizarea unui principiu variațional care se admite că substituie ecuațiile mișcării în interiorul vîrtejurilor. Rezultatele calculelor concordă cu datele experimentale. De exemplu, pentru coeficientul de rezistență al unei plăci plane normale pe direcția unui curent nelimitat se obține valoarea $C_n = 1{,}95$ (aceeași cu cea obținută experimental), față de valoarea $C_n = 0{,}88$ rezultată folosind modelul de calcul clasic cunoscut.

Să analizăm mișcarea apei în albia rîului în zona unui epiu cu reținerea numai a elementelor esențiale ale cinematicii curentului. Ajungem la concluzia că modelul de calcul corespunde mișcării unui fluid incompresibil în jurul unei rețele de plăci plane, formînd două cîte două diedre simetrice (fig. 1). Evident, pentru rezolvarea problemei este suficient să descriem mișcarea fluidului în interiorul unei fîșii limitate de două linii de curent drepte, consecutive (fig. 2).

Din experiență rezultă că mișcarea fluidului are loc cu desprinderea curentului în punctul A_1 și formarea unui vîrtej cu lungime finită în avalul plăcii A_1A_2.

Se disting două domenii ale mișcării fluidului: domeniul D_1, exterior vîrtejului, și domeniul D_2, ocupat de vîrtej. Admitem că în domeniul D_1 mișcarea este potențială, astfel că în planul potențialului complex domeniul D_1 s-ar reprezenta printr-o fîșie (fig. 3), iar în planul vitezei complexe — printr-un spațiu de forma celui din figura 4.

Dacă mișcarea fluidului în aval de linie MN are o influență neglijabilă asupra caracteristicilor cinematice și dinamice ale curentului în zona plăcii, ipoteza mișcării potențiale poate fi limitată la domeniul D_1 amonte de secțiunea MN maxim contractată. În acest caz mișcarea reală în zona plăcii poate fi aproximată cu o mișcare simetrică în raport cu linia MN, de tip Riabușinskii [1]—[3] (figura 5), urmînd ca mișcarea fluidului în aval de linia MN să fie analizată distinct.

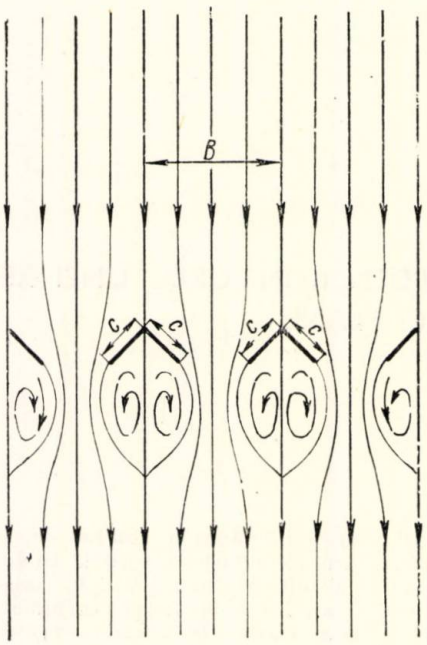


Fig. 1

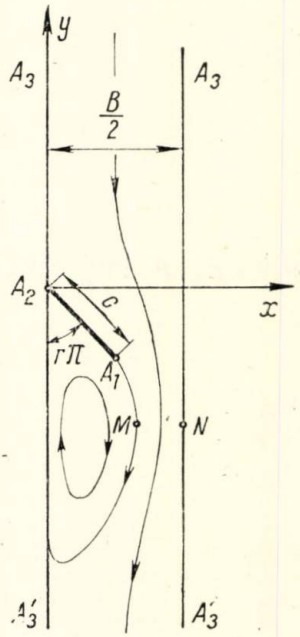
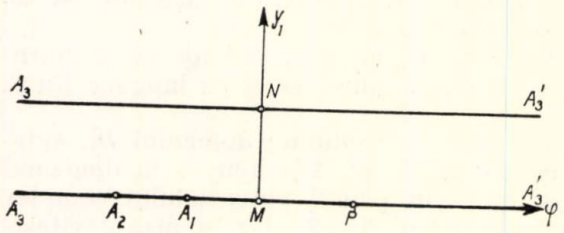


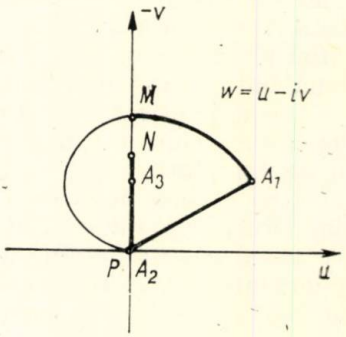
Fig. 2

Presupunînd că viteza curentului pe curba A_1M are modulul constant, domeniul mișcării în amonte de linia MN se reprezintă în planul potențialului complex $f_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ printr-o semifișie (fig. 6), iar în planul



Potențialul complex
$f_1 = \varphi_1 + i\psi_1$

Fig. 3



Hodograful vitezei

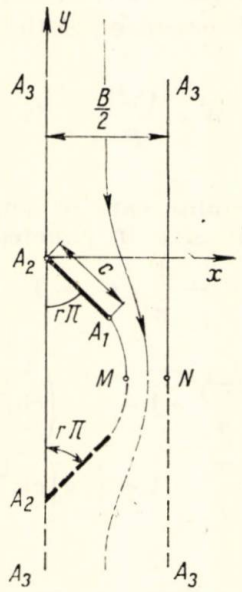
Fig. 4

vitezei complexe $w = u - iv$, printr-un sector de cerc (figura 7).

Notațiile folosite sînt cele obișnuite: φ_1 — potențialul vitezei, ψ_1 — funcție de curent, u și v — componentele vitezei pe cele două axe de coordonate. Restul notațiilor rezultă din figuri. Funcția care trans-

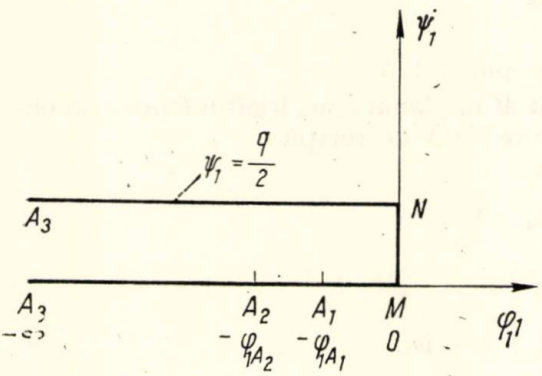
formă sectorul de cerc într-un semiplan superior are forma

$$W = \left[\frac{1 - \left(\frac{w}{a}\right)^{1/r} e^{-\frac{i\pi}{2r}}}{1 + \left(\frac{w}{a}\right) e^{-\frac{i\pi}{2r}}} \right]^2, \tag{1}$$



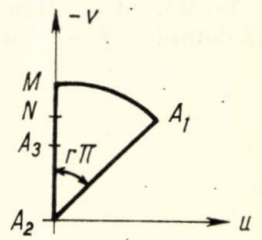
Schema de calcul a mișcării fluidului în domeniul D_1

Fig. 5



Planul potențialului complex
$f_1 = \varphi_1 + i\psi_1$

Fig. 6



Planul vitezei complexe
$w = u - iv$

Fig. 7

iar funcţia care transformă semifişia din planul f_1, de asemenea într-un plan superior, are expresia

$$F = \operatorname{ch} \frac{2\pi f_1}{q}, \tag{2}$$

unde $q = v_0 B$, iar v_0 este viteza curentului la infinit amonte.

Între funcţiile F şi W există o relaţie de forma

$$W = \frac{C_1 F + C_2}{F + C_3}, \tag{3}$$

unde C_1, C_2 şi C_3 sînt constante care se determină punînd condiţia de corespondenţă a valorilor W şi F în punctele M, N şi A_3.

Rezultă $C_1 = \frac{1}{\alpha}$, $C_2 = -\frac{1}{\alpha}$, $C_3 = 1 - \frac{2\beta}{\alpha}$ şi

$$\frac{w}{a} = e^{i\pi \frac{1-2r}{2}} \left[\frac{\sqrt{\operatorname{ch} \frac{2\pi f_1}{q} - 1} - \sqrt{\alpha \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi f_1}{q} + 1 \right) - 2\beta}}{\sqrt{\operatorname{ch} \frac{2\pi f_1}{q} - 1} + \sqrt{\alpha \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi f_1}{q} + 1 \right) - 2\beta}} \right]^r, \tag{4}$$

unde

$$\alpha = \left(\frac{1 + m^{1/r}}{1 - m^{1/r}} \right)^2, \quad \beta = \left(\frac{1 + n^{1/r}}{1 - n^{1/r}} \right)^2, \tag{5}$$

$$m = \frac{v_0}{a}; \quad n = \frac{v_N}{a}, \tag{6}$$

v_N fiind viteza curentului în punctul N.

Notînd cu z_M afixa punctului M în planul fizic, legătura între potenţialul complex f_1 şi variabila z este dată de relaţia

$$z = z_M + \int_0^{f_1} \frac{df_1}{w}, \tag{7}$$

unde

$$z_M = c + d + ib_1. \tag{8}$$

Mărimile d şi l_1 au semnificaţia arătată în figura 3.

Introducînd notaţiile: $\zeta = \frac{z}{B} = \xi + i\eta$; $f = \frac{f_1}{q} = \varphi + i\psi$; $\gamma = \frac{c}{B}$;

$\delta = \frac{d}{B}$; $\lambda_1 = \frac{l_1}{B}$ relațiile (7) și (8) iau forma:

$$\zeta = \zeta_M + m\, e^{i\pi \frac{2r-1}{2}} \int_0^f \left[\frac{\sqrt{\operatorname{ch} 2\pi f - 1} + \sqrt{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi f + 1) - 2\beta}}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\pi f - 1} - \sqrt{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi f + 1) - 2\beta}}\right]^r df, \tag{9}$$

$$\zeta_M = -i\gamma e^{ir\pi} + \delta - i\lambda. \tag{10}$$

Pentru determinarea parametrilor α și β avem deocamdată o singură ecuație care rezultă punînd condiția ca lungimea plăcii A_1A_2 să fie egală cu γ:

$$\gamma = m \int_{\varphi_{A_1}}^{\varphi_{A_2}} \left[\frac{\sqrt{\operatorname{ch} 2\pi\varphi - 1} + \sqrt{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi\varphi + 1) - 2\beta}}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\pi\varphi - 1} - \sqrt{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi\varphi + 1) - 2\beta}}\right]^r d\varphi, \tag{11}$$

unde

$$\operatorname{ch} 2\pi\varphi_{A_2} = \frac{2\beta - \alpha - 1}{\alpha - 1}, \quad \operatorname{ch} 2\pi\varphi_{A_1} = \frac{2\beta - \alpha}{\alpha}. \tag{12}$$

A doua ecuație o obținem luînd în considerație mișcarea fluidului în domeniul D_2, în interiorul vîrtejului. Neavînd posibilitatea rezolvării ecuațiilor mișcării turbulente din interiorul vîrtejului, substituim aceste ecuații printr-un principiu variațional.

În acest scop alegem o suprafață de control formată din linia de curent marginală vîrtejului, $M_1A_2A_1M$, și linia MM_1 ce trece prin centrul 0 al vîrtejului (fig. 8). Vom presupune că pe suprafața de control presiunea este constantă, ceea ce concordă cu datele experimentale.

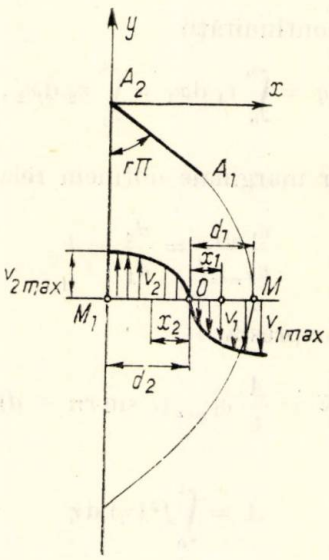


Fig. 8

Fie k raportul în care centrul vîrtejului împarte segmentul M_1M

$$k = \frac{OM_1}{OM} = \frac{d_2}{d_1}. \tag{13}$$

Neglijînd forţele de frecare pe suprafaţa A_2A_1, ecuaţia cantităţii de mişcare scrisă pe suprafaţa de control are expresia

$$T = \mathfrak{M}, \tag{14}$$

unde T este forţa de interacţiune între curentul principal şi vîrtej pe linia A_1M, iar $\mathfrak{M}$ este variaţia cantităţii de mişcare a curentului în interiorul vîrtejului

$$\mathfrak{M} = \int_0^{d_1} v_1^2 \, dx_1 + \int_0^{d_2} v_2^2 \, dx_2 . \tag{15}$$

Experienţele efectuate de noi şi de alţi cercetători arată că pe linia M_1M repartiţia vitezelor mediate în timp satisface aceeaşi relaţie, ca şi în cazul vînelor de fluid înecate [4]

$$\frac{v_2}{v_{2\,max}} = \frac{v_1}{v_{1\,max}} = f\left(\frac{x_2}{d_2}\right) = f\left(\frac{x_1}{d_1}\right) = f(\eta), \tag{16}$$

unde

$$\eta = \frac{x_1}{d_1} = \frac{x_2}{d_2}. \tag{17}$$

Folosind ecuaţia continuităţii

$$q = \int_0^{d_1} v_1 \, dx_1 = \int_0^{d_2} v_2 \, dx_2 ,$$

pentru raportul vitezelor marginale obţinem relaţia

$$\frac{v_{1\,max}}{v_{2\,max}} = \frac{d_2}{d_1} = k, \tag{18}$$

iar pentru mărimea $\mathfrak{M}$ expresia

$$\mathfrak{M} = \frac{A}{k} v_{1\,max}^2 (c \sin r\pi + d), \tag{19}$$

unde

$$A = \int_0^1 f^2(\eta) \, d\eta \tag{20}$$

este o constantă.

Fie $A_1 M'$ o altă poziție a liniei de curent $A_1 M$, posibilă din punct de vedere cinematic. Presupunînd că relațiile (13) și (16) rămîn neschimbate, vom admite că poziția reală a liniei de curent $A_1 M$ corespunde minimului expresiei $\mathfrak{M}$. Trecînd la forme adimensionale și ținînd seama că pe linia $A_1 M$ avem

$$v_{1\,max} = a, \tag{21}$$

minimul expresiei $\mathfrak{M}$ corespunde cu minimul expresiei

$$\mu = \frac{\gamma \sin r\pi + \delta}{m^2}. \tag{22}$$

Mărimea δ se determină cu relația

$$\delta = m \operatorname{Re} e^{i\pi\frac{2r-1}{2}} \int_0^{\varphi_{A_1}} \left[\frac{\sqrt{\operatorname{ch} 2\pi\varphi - 1} + \sqrt{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi\varphi + 1) - 2\beta}}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\pi\varphi - 1} - \sqrt{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi\varphi + 1) - 2\beta}} \right]^r d\varphi \tag{23}$$

unde Re indică partea reală.

Prin urmare problema determinării celor doi parametrii α și β se reduce la găsirea minimului expresiei μ, condiționat de relația (11). Cunoscînd valorile celor doi parametri α și β se pot determina toate celelalte elemente caracteristice mișcării. Astfel mărimea λ_1 rezultă din relația

$$\lambda_1 = m \operatorname{Im} e^{i\pi\frac{2r-1}{2}} \int_0^{\varphi_{A_1}} \left[\frac{\sqrt{\operatorname{ch} 2\pi\varphi - 1} + \sqrt{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi\varphi + 1) - 2\beta}}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\pi\varphi - 1} - \sqrt{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi\varphi + 1) - 2\beta}} \right]^r d\varphi \tag{24}$$

unde simbolul Im indică partea imaginară.

Pentru calculul forței R de rezistență a plăcii $A_1 A_2$ folosim faptul că pe fața aval a plăcii presiunea este constantă:

Avem:

$$R = \frac{i\rho}{2} \int_{A_2}^{A_1} (a^2 - v^2)\, dz = \frac{i\rho a^2}{2} z_{A_1} - \frac{i\rho}{2} \int_{A_2}^{A_1} v^2\, dz, \tag{25}$$

unde ρ este masa specifică a fluidului.

Ținînd seama că pe placa $A_1 A_2$

$$w = v e^{-\frac{i\pi}{2}(1-2r)} \quad \text{și} \quad dz = \frac{d\varphi_1}{w}, \tag{26}$$

rezultă

$$R = \frac{i\rho a^2}{2} z_{A_1} - \frac{i\rho}{2} e^{\frac{i\pi}{2}(1-2r)} \int_{A_2}^{A_1} v\, d\varphi_1. \tag{27}$$

Componenta R_y a forței de rezistență pe axul y poate fi scrisă sub forma

$$R_y = C_y \frac{\rho v_0^2}{2} c \sin r\pi = \operatorname{Im} R = \frac{\rho a^2}{2} c \sin r\pi - \frac{\rho}{2} \sin r\pi \int_{A_2}^{A_1} v \, d\varphi_1, \quad (28)$$

unde C_y este coeficientul de rezistență.

După unele transformări, pentru coeficientul de rezistență C_y obținem relația

$$C_y = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m\gamma} \int_{\varphi_{A_1}}^{\varphi_{A_2}} \left[\frac{\sqrt{\operatorname{ch} 2\pi\varphi - 1} - \sqrt{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi\varphi + 1) - 2\beta}}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\pi\varphi - 1} + \sqrt{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi\varphi + 1) - 2\beta}} \right]^r d\varphi. \quad (29)$$

Integralele de mai sus nu pot fi exprimate prin funcții cunoscute decît în cazuri particulare. Integralele pot fi însă calculate suficient de exact cu ajutorul calculatoarelor electronice. În acest scop în integrala (9) facem substituția

$$t = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2\pi f - 1}{2\beta - \alpha(\operatorname{ch} 2\pi f + 1)}}, \quad (30)$$

iar în integralele (11) și (19), substituția

$$t = \sqrt{\frac{\alpha(\operatorname{ch} 2\pi\varphi + 1) - 2\beta}{\operatorname{ch} 2\pi\varphi - 1}}, \quad (31)$$

obținem:

$$\zeta = \zeta_M + m \frac{\sqrt{\beta - \alpha}}{\pi} e^{i\pi\frac{2r-1}{2}} \int_0^t \frac{e^{-2ir \operatorname{arctg} \frac{1}{t}}}{(\alpha t^2 + 1)\sqrt{\beta t^2 + 1}} dt, \quad (32)$$

$$\delta = m \frac{\sqrt{\beta - \alpha}}{\pi} \left[\cos \frac{\pi}{2}(2r-1) \int_0^\infty \frac{\cos\left(2r \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right)}{(\alpha t^2 + 1)\sqrt{\beta t^2 + 1}} dt + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{\pi}{2}(2r-1) \int_0^\infty \frac{\sin\left(2r \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right)}{(\alpha t^2 + 1)\sqrt{\beta t^2 + 1}} dt \right], \quad (33)$$

$$\lambda_1 = m \frac{\sqrt{\beta - \alpha}}{\pi} \left[\cos \frac{\pi}{2}(2r-1) \int_0^\infty \frac{\sin\left(2r \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right)}{(\alpha t^2 + 1)\sqrt{\beta t^2 + 1}} dt - \right.$$

$$\left. - \sin \frac{\pi}{2}(2r-1) \int_0^\infty \frac{\cos\left(2r \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right)}{(\alpha t^2 + 1)\sqrt{\beta t^2 + 1}} dt \right], \quad (34)$$

$$\gamma = m\,\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^r\frac{t\,dt}{(\alpha-t^2)\sqrt{\beta-t^2}}\,, \tag{35}$$

$$C_y = \frac{1}{m^2} - \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{\pi m\gamma}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^r\frac{t\,dt}{(\alpha-t^2)\sqrt{\beta-t^2}}\,. \tag{36}$$

În cazul particular $r = \frac{1}{2}$ integralele de mai sus devin:

$$\zeta = \zeta_M + \frac{m}{\pi\sqrt{\alpha-1}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(\alpha-1)(\operatorname{ch}2\pi f+1)}{2(\beta-1)-(\alpha-1)(\operatorname{ch}2\pi f+1)}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta-\alpha}}\right] + i\,\frac{m}{\pi}\left[\sqrt{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}\cdot F\left(\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta}},\ \arcsin\sigma\right) - \frac{\alpha}{\sqrt{\beta(\beta-\alpha)}}\cdot\Pi\left(-\frac{\beta-\alpha}{\beta},\ \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta}},\ \arcsin\sigma\right)\right], \tag{37}$$

$$\vartheta = \frac{m}{\pi\sqrt{\alpha-1}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta(\alpha-1)}{\beta-\alpha}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta-\alpha}}\right], \tag{38}$$

$$\lambda_1 = \frac{m}{\pi}\left[\sqrt{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}\,K\left(\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta}}\right) - \frac{\alpha}{\sqrt{\beta(\beta-\alpha)}}\,\overline{\Pi}\left(-\frac{\beta-\alpha}{\beta},\ \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta}}\right)\right], \tag{39}$$

$$\gamma = \frac{m}{\pi\sqrt{\alpha-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta(\alpha-1)}} + \frac{m}{\pi}\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\left[\overline{\Pi}\left(-\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\right], \tag{40}$$

$$C_y = 2\left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{\pi\gamma m\sqrt{\alpha-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta(\alpha-1)}}\right], \tag{41}$$

unde:

F, Π sînt integralele eliptice de speța I și respectiv de speța a III-a;

K, $\overline{\Pi}$ — integralele eliptice complete de speța I și respectiv de speța a III-a

$$\sigma = \sqrt{\frac{\beta(\operatorname{ch}2\pi f-1)}{(\beta-\alpha)(\operatorname{ch}2\pi f+1)}}\,.$$

Cazul limită $B = \infty$ îl tratăm separat. În acest caz linia de curent A_3A_3' (figura 5) se îndepărtează la infinit, iar în planul potențialului complex domeniul scurgerii în amonte de linia MN se reprezintă sub forma unui sfert de plan. Funcția care transformă sfertul de plan într-un semiplan are expresia

$$F = f^2, \tag{42}$$

iar legătura între potențialul complex și viteza complexă este de forma

$$\frac{w}{a} = e^{\frac{i\pi}{2}(1-2r)}\left[\frac{f - \sqrt{\alpha f^2 - k^2}}{f + \sqrt{\alpha f^2 - k^2}}\right]^r, \tag{43}$$

unde α și k sînt doi parametri, parametrul avînd aceeași semnificație ca în cazul general:

$$\alpha = \left(\frac{1 + m^{1/2}}{1 - m^{1/2}}\right)^2, \qquad m = \frac{v_0}{a}.$$

Punînd $\zeta = \frac{z}{c}$, obținem

$$\zeta = \zeta_M + m\, e^{\frac{i\pi}{2}(2r-1)} \int_0^f \left[\frac{f + \sqrt{\alpha f^2 - k^2}}{f - \sqrt{\alpha f^2 - k^2}}\right]^r df. \tag{44}$$

Pentru determinarea parametrilor α și k căutăm minimul expresiei

$$\mu = \frac{\sin r\pi + \delta}{m^2}, \tag{45}$$

condiționat de relația geometrică

$$1 = m \int_{\varphi_{A_1}}^{\varphi_{A_2}} \left[\frac{\varphi + \sqrt{\alpha\varphi^2 - k^2}}{\varphi - \sqrt{\alpha\varphi^2 - k^2}}\right]^r d\varphi, \tag{46}$$

unde

$$\varphi_{A_1} = \frac{k}{\sqrt{\alpha}}; \qquad \varphi_{A_2} = \frac{k}{\sqrt{\alpha - 1}}$$

și

$$\delta = \frac{d}{c} = m \operatorname{Re} e^{\frac{i\pi}{2}(2r-1)} \int_0^{\varphi_{A_1}} \left[\frac{\varphi + i\sqrt{k^2 - \alpha\varphi^2}}{\varphi - i\sqrt{k^2 - \alpha\varphi^2}}\right]^r d\varphi. \tag{47}$$

Raportul $\lambda_1 = \frac{l_1}{c}$ și coeficientul de rezistență C_y au expresii asemănătoare cu cele în cazul general:

$$\lambda_1 = m \operatorname{Im} e^{\frac{i\pi}{2}(2r-1)} \int_0^{\varphi_{A_1}} \left[\frac{\varphi + i\sqrt{k^2 - \alpha\varphi^2}}{\varphi - i\sqrt{k^2 - \alpha\varphi^2}} \right]^r d\varphi, \tag{48}$$

$$C_y = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m} \int_{\varphi_{A_1}}^{\varphi_{A_2}} \left[\frac{\varphi - \sqrt{\alpha\varphi^2 - k^2}}{\varphi + \sqrt{\alpha\varphi^2 - k^2}} \right]^r d\varphi. \tag{49}$$

Făcînd substituția

$$t = \frac{f}{\sqrt{k^2 - \alpha f^2}} \tag{50}$$

în integralele (44), (47) și (48) și substituția

$$t = \frac{\sqrt{\alpha\varphi^2 - k^2}}{\varphi} \tag{51}$$

în integralele (46) și (49), obținem:

$$\zeta = \zeta_M + mk\, e^{\frac{i\pi}{2}(2r-1)} \int_0^t \frac{e^{-2i \operatorname{arctg} \frac{1}{t}}}{(1 + \alpha t^2)^{3/2}} dt, \tag{52}$$

$$\delta = mk \left[\cos \frac{\pi}{2}(2r-1) \int_0^\infty \frac{\cos\left(2r \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right)}{(1 + \alpha t^2)^{3/2}} dt + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{\pi}{2}(2r-1) \int_0^\infty \frac{\sin\left(2r \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right)}{(1 + \alpha t^2)^{3/2}} dt \right], \tag{53}$$

$$\lambda_1 = mk \left[\cos \frac{\pi}{2}(2r-1) \int_0^\infty \frac{\sin\left(2r \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right)}{(1 + \alpha t^2)^{3/2}} dt - \right.$$

$$\left. - \sin \frac{\pi}{2}(2r-1) \int_0^\infty \frac{\cos\left(2r \operatorname{arctg} \frac{1}{t}\right)}{(1 + \alpha t^2)^{3/2}} dt \right], \tag{54}$$

$$1 = mk\int_0^1 \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^r \frac{t\,dt}{(\alpha - t^2)^{3/2}}, \tag{55}$$

$$C_y = \frac{1}{m^2} - \frac{k}{m}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^r \frac{t\,dt}{(\alpha - t^2)^{3/2}}. \tag{56}$$

Relaţia (55) permite determinarea explicită a parametrului k în funcţie de parametrul α.

Pentru $r = \frac{1}{2}$ relaţiile de mai sus devin:

$$\zeta = \zeta_M + \frac{m}{\alpha - 1}[k - \sqrt{k^2 - (\alpha - 1)f^2}] +$$

$$+ \frac{imk\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}\left[\frac{2\alpha - 1}{\alpha} F\left(\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}, \arcsin\frac{\sqrt{\alpha} f}{k}\right) -\right.$$

$$\left. - E\left(\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}, \arcsin\frac{\sqrt{\alpha} f}{k}\right)\right], \tag{57}$$

$$\delta = \frac{mk}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha + 1}}, \tag{58}$$

$$\lambda_1 = \frac{mk}{\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)}\left[\alpha \overline{E}\left(\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} - K\left(\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}\right)\right)\right], \tag{59}$$

$$1 = \frac{mk}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\alpha - 1} + \overline{\Pi}\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right] - K\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right], \tag{60}$$

$$C_y = 2\left[\frac{1}{m^2} - \frac{k}{m\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)}\right], \tag{61}$$

unde :

F, E, Π sînt integralele eliptice de speţele I, a II-a şi a III-a,
$K, E, \overline{\Pi}$ — integralele eliptice complete de speţele I, a II-a şi a III-a.

Modelul de calcul propus se poate transforma în modelul de calcul clasic cunoscut, cu vîrtej de lungime infinită, dacă renunţăm la condiţia de minimum a expresiei (22) şi facem $\beta = \infty$.

Cazul în care $\beta = \infty$ şi $B = \infty$ reprezintă problema Rethy—Bobîlev pentru un diedru simetric [5], [6].

2. REZULTATELE CALCULELOR NUMERICE

Calculele numerice au fost efectuate cu ajutorul calculatorului electronic CET—501 din Bucureşti *). Pentru efectuarea calculelor a fost necesar să se stabilească convergenţa şi metoda de aproximare a următoarelor integrale :

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin\left(2\,r\,\operatorname{arctg}\frac{1}{t}\right)}{(\alpha t^2+1)\sqrt{\beta t^2+1}}\,\mathrm{d}t, \tag{62}$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\cos\left(2\,r\,\operatorname{arc\,tg}\,\frac{1}{t}\right)}{(\alpha t^2+1)\sqrt{\beta t^2+1}}\,\mathrm{d}t, \tag{63}$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{p\,(t)}{(1-t)^r}\,\mathrm{d}t, \tag{64}$$

unde $p\,(t) < M \neq \infty$ pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Integralele I_1 şi I_2 sînt convergente, întrucît în punctul $t = \infty$ ele se comportă la fel ca şi integrala $I = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$. Avînd în vedere că $0 \leqslant 2\,r\,\operatorname{arctg}\frac{1}{t} \leqslant r\pi$ putem scrie

$$I_{1\tau} < I_1 < I_{1\tau} + \int_\tau^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\alpha\sqrt{\beta}\,t^3}, \tag{65}$$

unde

$$I_{1\tau} = \int_0^\tau \frac{\sin\left(2r\operatorname{arc\,tg}\,\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t}{(\alpha t^2+1)\sqrt{\beta t^2+1}}. \tag{66}$$

Dacă ne propunem ca diferenţa între integrala I_1 şi $I_{1\tau}$ să fie mai mică decît $\varepsilon = \int_\tau^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\alpha\sqrt{\beta}\,t^3}$, pentru limita superioară de integrare obţinem următoarea expresie

$$\tau = \left(\frac{2}{\varepsilon\alpha\sqrt{\beta}}\right)^{1/2}. \tag{67}$$

*) La efectuarea calculelor au participat P. Novotny şi Fl. Ionescu.

La valori mari ale lui τ, pentru care $\cos\left(2r\operatorname{arctg}\frac{1}{t}\right)>0$, integrala I_2 poate fi încadrată, de asemenea, între două valori

$$I_{2\tau} < I_2 < I_{2\tau} + \int_{\tau}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha\sqrt{\beta}\,t^3}, \tag{68}$$

unde

$$I_{2\tau} = \int_0^{\tau} \frac{\cos\left(2r\operatorname{arctg}\frac{1}{t}\right)}{(\alpha t^2+1)\sqrt{\beta t^2+1}}\,\mathrm{d}t. \tag{69}$$

Prin urmare și integrala I_2 poate fi calculată cu o eroare mai mică decît $\varepsilon = \int_{\tau}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha\sqrt{\beta}\,t^3}$, dacă limita de integrare τ se determină cu relația (67):

Integrala I_3 de asemenea este convergentă, întrucît în punctul $t=1$ pentru $r<1$ se comportă ca și integrala $\int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^r}$. Observăm că în toate integralele de tip I_3 — integralele (35), (55), funcția $p(t)$ este crescătoare pe intervalul de integrare.

Putem scrie:

$$I_{3\tau} < I_3 < I_{3\tau} + p(1)\int_{\tau}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^r}, \tag{70}$$

unde

$$I_{3\tau} = \int_0^{\tau} \frac{p(t)\,\mathrm{d}t}{(1-t)^r}. \tag{71}$$

Prin urmare diferența între integrala I_3 și $I_{3\tau}$ poate fi făcută mai mică decît $\varepsilon = p(1)\int_{\tau}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^r}$, dacă se ia

$$\tau = 1 - \left[\frac{\varepsilon(1-r)}{p(1)}\right]^{\frac{1}{1-r}}. \tag{72}$$

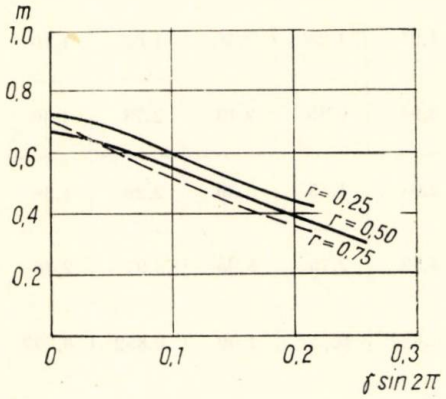
Putem să ne oprim la o valoare $t=\tau$ mai depărtată de $t=1$, dacă vom aproxima integrala I_3 cu expresia

$$\tilde{I}_3 = I_{3\tau} + \frac{1-\tau}{\tau^r}\,p(1-\tau). \tag{73}$$

În acest caz pentru diferența între integralele I_3 și $\widetilde{I}_3$ rezultă inegalitatea

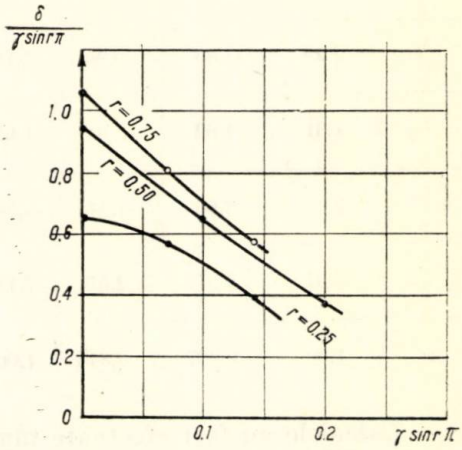
$$\varepsilon = I_3 - \widetilde{I}_3 < \frac{(1-\tau)^{1-r}}{1-r}\, p(1) - \frac{1-\tau}{\tau^r}\, p(1-\tau). \qquad (74)$$

Utilizînd aceste relații, au fost efectuate calcule pentru determinarea parametrilor m, δ, λ_1 și C_y în funcție de lungimea relativă a plăcii γ și de unghiul $r\pi$. Rezultatele sînt prezentate grafic în figurile 9, 10, 11 și 12 și numeric în tabelă.



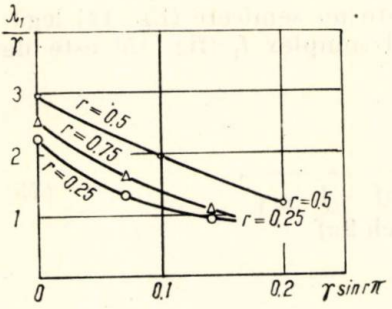
Relația $m = m(r, \gamma)$

Fig. 9



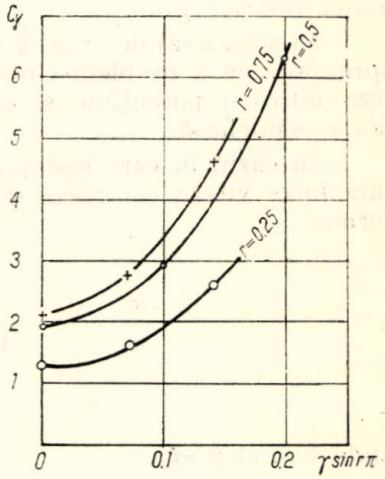
Relația $\frac{\delta}{\gamma \sin r\pi} = \frac{\delta}{\gamma \sin r\pi}(r, \gamma)$

Fig. 10



Relația $\frac{\lambda_1}{\gamma} = \frac{\lambda_1}{\gamma}(r, \gamma)$

Fig. 11



Relația $C_y = C_y(r, \gamma)$

Fig. 12

Tabela 1

Valorile parametrilor caracteristici

	$r = 0{,}25$			$r = 0{,}50$			$r = 0{,}75$		
	$\gamma = 0$	$\gamma = 0{,}1$	$\gamma = 0{,}2$	$\gamma = 0$	$\gamma = 0{,}1$	$\gamma = 0{,}1$	$\gamma = 0$	$\gamma = 0{,}1$	$\gamma = 0{,}2$
m	0,723	0,66	0,530	0,670	0,545	0,390	0,700	0,570	0,450
$\frac{\delta}{\gamma}$	0,445	0,400	0,280	0,925	0,652	0,377	0,750	0,647	0,400
$\frac{\lambda_1}{\gamma}$	2,29	1,35	0,96	3,14	1,95	1,20	2,56	1,68	1,10
C_y	1,31	1,62	2,61	1,95	2,94	6,35	2,13	2,78	4,66
$\frac{\lambda_2}{\gamma}$	3,02	2,66	1,71	4,00	2,64	1,55	3,39	2,29	1,36
$\frac{\lambda}{\gamma}$	5,31	4,01	2,67	7,14	4,59	2,75	5,95	3,97	2,46
ε	1,00	0,907	0,844	1,00	0,837	0,75	1,00	0,852	0,777

Calculele au fost efectuate pînă la valorile $\gamma = 0{,}2$, întrucît pentru $\gamma > 0{,}3$ diferențele între modelul de calcul clasic $\beta = \infty$ și modelul de calcul propus de noi sînt practic neglijabile.

Pentru ilustrare în figura 11 s-au desenat curbele $\mu = \mu(\alpha)$ și $C_y = C_y(\alpha)$ pentru $\gamma = 0$ și $r = 0{,}5$. Se observă existența clară a minimului funcției μ.

În zona aval de linia MN în domeniul D_1 se poate construi o soluție aproximativă a problemei mișcării fluidului, admițînd de asemenea ipoteza mișcării potențiale și considerînd hodograful vitezei un semicerc sau o semielipsă.

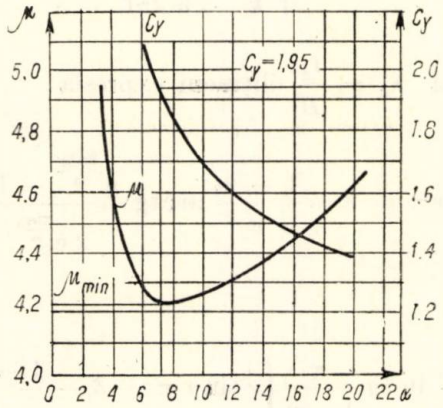
În cazul în care hodograful vitezei este un semicerc (fig. 14) legătura între viteza complexă w și potențialul complex f_1 (fig. 15) este de forma

$$\frac{w}{a} = -\frac{1}{\frac{1-m}{m}\sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2\pi f - 1}{k - \operatorname{ch} 2\pi f}} + \mathrm{i}}, \tag{75}$$

unde $k = \operatorname{ch} 2\pi f_p$.

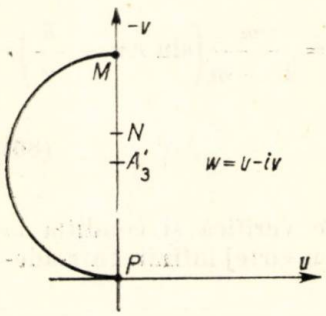
De remarcat este faptul că în punctul N se satisface condiția de racordare numai în cazul în care $B \to \infty$. Pentru satisfacerea condiției de racordare și în cazul în care $B \neq \infty$ ar trebui să se adopte pentru

hodograful vitezei o semielipsă. Calculele arată că abaterea de la condiții de racordare pentru $B \neq \infty$ este mică.



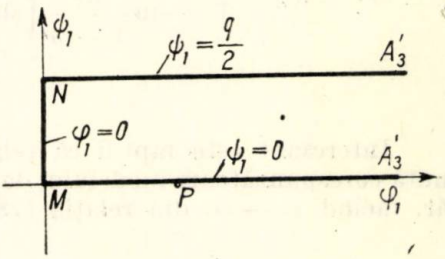
Funcțiile $\mu = \mu(\alpha)$ și $c_y = c_y(\alpha)$ pentru $r = \frac{1}{2}$

Fig. 13



Hodograful vitezei pentru domeniul D_1''

Fig. 14



Potențialul complex pentru domeniul D_1''

Fig. 15

Legătura între variabila ζ și potențialul complex f rezultă

$$\zeta = \zeta_M - \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\int_0^t [(1-m)\,t + im]\,\frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{\alpha^2+t^2}}, \qquad (76)$$

unde s-a notat

$$t = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2\pi f - 1}{k - \operatorname{ch} 2\pi f}}. \tag{77}$$

Pentru mărimea $\lambda_2 = \frac{l_2}{B}$ obținem expresia

$$\gamma \sin r\pi + \delta = \frac{1-m}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{2\pi\lambda_2}{m}} - 1}{2\, e^{\frac{\pi\lambda_2}{m}}}, \tag{78}$$

sau

$$\lambda_2 = \frac{m}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{1-m} \left(\gamma \sin r\pi + \delta - \frac{1-m}{4}\right). \tag{79}$$

Pentru cazul în care $B \to \infty$ facem raportul $\frac{\lambda_2}{\gamma}$ și punem condiția ca $\gamma \to 0$. Rezultă

$$\frac{\lambda_2}{\gamma} = \lim_{\gamma \to 0} \frac{m}{2\pi\gamma} \ln \frac{1 + \sin \frac{\pi\gamma}{1-m}\left(\sin r\pi + \frac{\delta}{\gamma}\right)}{1 - \sin \frac{\pi\gamma}{1-m}\left(\sin r\pi + \frac{\delta}{\gamma}\right)} = \frac{m}{1-m}\left(\sin r\pi + \frac{\delta}{\gamma}\right). \tag{80}$$

Interesant este faptul că relațiile obținute verifică și condiția la limită corespunzătoare modelului de calcul clasic cu vîrtej infinit. Într-adevăr, făcînd $\lambda_2 \to \infty$ din relația (78) obținem

$$\gamma \sin r\pi + \delta = \frac{1-m}{2}, \tag{81}$$

respectiv ecuația de continuitate în secțiunea de la infinit.

În tabelă sînt prezentate valorile λ_2 calculate cu relația (79), precum și valorile $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ care indică lungimea vîrtejului.

Pentru ilustrare în figura 16 se prezintă linia de curent $\psi = 0$ obținută prin calcule în condițiile vîrtejului cu lungime finită ($\beta \neq \infty$) pentru $r = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0{,}01$.

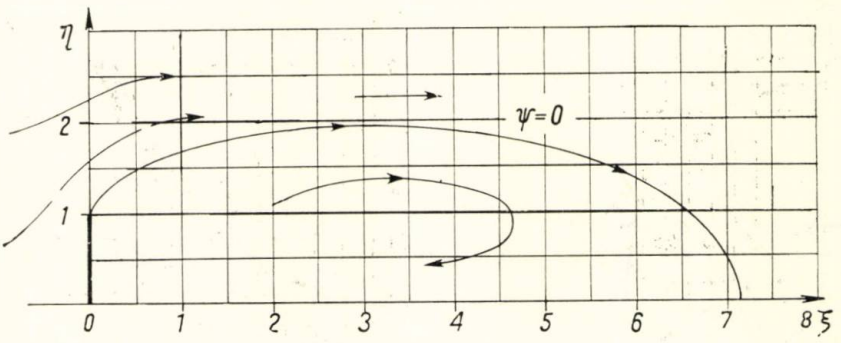


Fig. 16

3. COMPARAȚIE CU UNELE DATE EXPERIMENTALE

Pentru verificarea valabilității modelului de calcul propus, rezultatele calculelor au fost comparate cu unele din rezultatele experimentale întîlnite în literatura de specialitate și cu rezultatele experimentale obținute de autori.

În figura 17 sînt prezentate comparativ datele referitoare la repartiția presiunii pe o placă plană așezată normal pe direcția unui curent nelimitat, obținute experimental de către Fage și Iohansen [7] și prin calcule după modelul teoretic propus. Concordanța este foarte bună.

Aceeași concluzie rezultă și din compararea rezultatelor măsurătorilor privind distribuția vitezei curentului în secțiuni caracteristice (experiențe efectuate de autori) și cu rezultatele calculelor în cazul unei plăci amplasate într-un curent limitat (fig. 18).

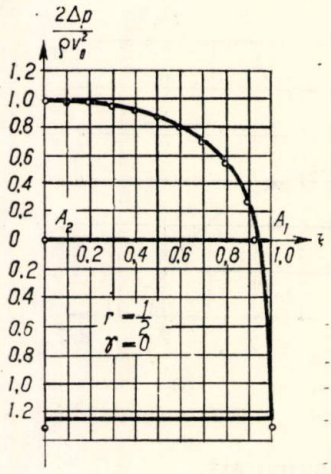
În secțiunea maxim contractată abaterea datelor teoretice față de datele experimentale se datorește stratului limită la contactul între curentul potențial și curentul din interiorul vîrtejului.

Foarte interesantă este și comparația datelor din calcule cu datele experimentale privind coeficientul de rezistență C_y (fig. 19), a unei plăci așezate normal pe direcția curentului. Pentru comparație au fost reprezentate și datele ce se obțin cu modelul de calcul clasic $\beta = \infty$. Se observă că modelul de calcul propus se apropie de modelul clasic doar pentru $\gamma \sin r\pi > 0{,}3$. Pentru $\gamma = 0$ și $r = \frac{1}{2}$ modelul de calcul propus conduce la valoarea $C_y = 1{,}95$, foarte apropiată de datele experimentale, pe cînd modelul de calcul clasic ($\beta = \infty$) conduce la valoarea $C_y = 0{,}88$, în dezacord cu experiența.

Modelul de calcul propus poate avea numeroase aplicații în hidraulică.

În particular modelul de calcul permite determinarea coeficientului de contracție ε (tabelă) dimensionarea stavilelor înecate, dimensionarea epiurilor în albiile rîurilor ș. a.

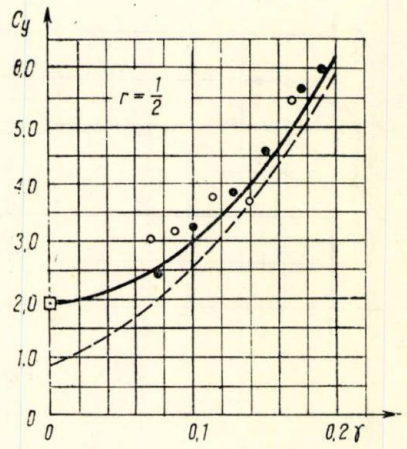
Primită la redacție la 23 iunie 1969



○ Experiențele Fage și Iohansen
—— Curba teoretică

Repartiția presiunii pe o placă plană, $\gamma = 0$; $r = \frac{1}{2}$

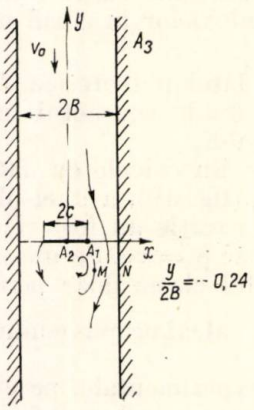
Fig. 17

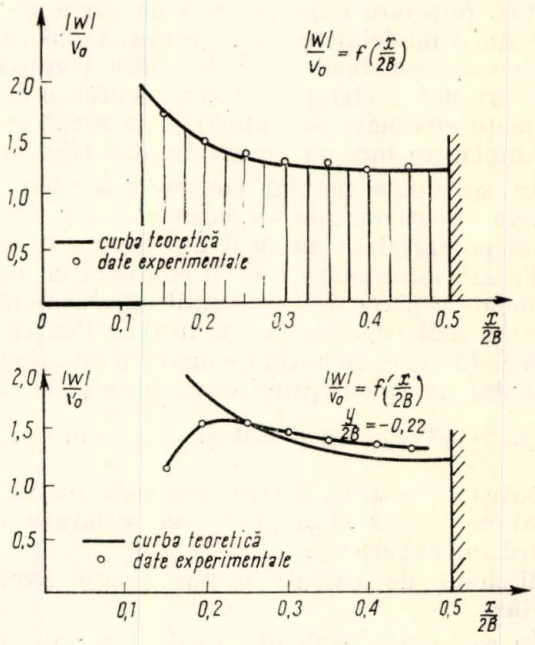


—— Modelul de calcul propus
– – – Modelul de calcul clasic ($\beta = \infty$)
• Experiențele autorilor
○ Exp. lui Cocchi și Pezzoli
⊡ Exp. în lab. aerodinamic

Coeficientul de rezistență Cy pentru $r = \frac{1}{2}$

Fig. 19





Repartiția vitezei în zona unei plăci plane
$\gamma = 0{,}125$; $r = \frac{1}{2}$

Fig. 18

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birkhoff, E. H. Zarantonello, *Jeta, wakes and cavities*, New York, 1957.
2. L. Riabouchinsky, *Proc. hid. Math. Soc.*, (2), 19, 1921, n°s 2—6, p. 215.
3. S. Hâncu, L. Predescu, V. Marinescu, *Sur le mouvement des fluides autour d'une plaque plane*, C. R. Acad. Sc. Paris, **269**, 928—931 (nov. 1969).
4. G. N. Abramovici, *Teoria turbulentnîh strui*, Moscova, 1960.
5. Elie Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*, vol. II, București, 1955.
6 Caius Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, București, 1954.
7. Hunter Rouse, *Fluid mechanics for hydraulic engineers* (traducere l. rusă), Moscova, 1958.
8. G. Cocchi, G. Pezzoli, *Sulle perdito di carico dovute and una saracinesca*, L'Energia Elettrica (19[illegible]9).

ASUPRA PERFORMANȚELOR POMPELOR TURBOMOLECULARE ÎN CAZUL REFLEXIEI OGLINDĂ

de N. N. PATRAULEA, C. OPREANU
Institutul de mecanică a fluidelor

Aplicînd ecuații de transport Maxwell, convenabile, se obțin formule pentru calculul performanțelor în ipoteza reflexiei perfect oglindă a moleculelor de gaz la suprafața elementelor de pale.

Se dă o teorie a pompelor turbomoleculare adoptînd modelul unor pale plane foarte mici și în număr foarte mare. Această teorie a făcut obiectul unui articol publicat anterior, dar care trata acomodarea perfectă a moleculelor de gaz la suprafața elementelor de pale. În cazul de față aplicînd ecuații de transport Maxwell, convenabile, se obțin formule pentru calculul performanțelor în ipoteza reflexiei perfect oglindă a moleculelor de gaz la suprafața elementelor de pale.

Considerăm un sistem de pale plane de lungime infinită care au o mișcare transversală, de-a lungul axei oy și sînt paralele cu axa oz.

Pentru a reduce numărul dimensiunilor problemei, palele reale se înlocuiesc în teorie printr-un număr mare de plăcuțe foarte mici, avînd aceeași incidență și mișcare, ele fiind distribuite aleatoriu și uniform în spațiu. Mișcarea gazului este unidimensională, parametrii mișcării depinzînd numai de abscisa x. Se presupune coexistența în aceleași elemente de volum a plăcuțelor care reprezintă rotorul cu cele ale statorului. Se ia un sistem de referință $oxyz$ cu o mișcare uniformă de translație convenabilă de-a lungul axei oy, problema devenind aceea a unui sistem de pale simetrice contrarotative.

Notăm cu v viteza după axa y a sistemului de plăcuțe de tip (1) (care reprezintă rotorul) și $-v$ viteza plăcuțelor de tip (2) (care reprezintă statorul), σ suprafața unei fețe a plăcuțelor de același tip și N numărul lor pe unitatea de volum. Prin α s-a notat incidența plăcuțelor care au viteza v. Celelalte plăcuțe (2) sînt dispuse simetric față de axa x.

Pompele turbomoleculare construindu-se pentru vid foarte înaintat se va neglija în ecuația Boltzmann ciocnirile gaz-gaz.

Presupunem că moleculele de gaz la suprafața elementelor de pală urmează legile reflexiei perfect oglindă. Aceste legi se traduc în cazul nostru făcînd proiecțiile pe cele trei direcții $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\mu}_1$, $\boldsymbol{k}$ respectiv $\boldsymbol{\nu}_2$, $\boldsymbol{\mu}_2$, $\boldsymbol{k}$ prin :

$$(\boldsymbol{c} \mp \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\nu}_{1,2} = -(\boldsymbol{c}_1 \mp \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\nu}_{1,2}, \tag{1}$$

$$(\boldsymbol{c} \mp \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\mu}_{1,2} = (\boldsymbol{c}_1 \mp \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\mu}_{1,2}, \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{c} \mp \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{c}_1 \mp \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{k}. \tag{3}$$

unde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sînt versorii axelor x, y, z; $\boldsymbol{\nu}$ versorul normalei la plăcuțe, orientată astfel încît $\boldsymbol{\nu}.\boldsymbol{i} > 0$ iar $\boldsymbol{\mu}$ perpendicular pe $\boldsymbol{\nu}$ și $\boldsymbol{k}$.

Ecuația Boltzmann în cazul mișcării permanente va fi

$$c_x \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma N f(\boldsymbol{c}_1)\,|(\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\nu}_1| + \sigma N f(\boldsymbol{c}_1)\,|(\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\nu}_2| -$$
$$- \sigma N f(\boldsymbol{c})\,|(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\nu}_1| - \sigma N f(\boldsymbol{c})\,|(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\nu}_2|. \tag{4}$$

Primii doi termeni din partea dreaptă a ecuației (4) reprezintă cîștigul de molecule, iar ultimii doi termeni pierderile din fasciculul molecular datorită ciocnirilor cu plăcuțele.

Aproximînd funcția f cu o funcție de distribuție Maxwell ecuația (4) devine

$$c_x \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{n}{\pi^{3/2}\beta^3}\,\sigma \cdot N \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{u})^2}{\beta^2}}\,|(\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{\nu}_1| +$$
$$+ \frac{n}{\pi^{3/2}\beta^3}\,\sigma \cdot N \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{u})^2}{\beta^2}}\,|(\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\nu}_2| -$$
$$- \frac{n}{\pi^{3/2}\beta^3}\,\sigma \cdot N \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u})^2}{\beta^2}}\,|(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\nu}_1| -$$
$$- \frac{n}{\pi^{3/2}\beta^3}\,\sigma \cdot N \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u})^2}{\beta^2}}\,|(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{\nu}_2|, \tag{5}$$

unde β este viteza cea mai probabilă, n densitatea de particule iar u viteza macroscopică adimensională după X.

Introducem următoarele variabile adimensionale :

$$X = x\sigma N; \quad Y = y\sigma N; \quad Z = z\sigma N; \tag{6}$$

$$\bar{n} = \frac{n}{(\sigma N)^3}; \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\boldsymbol{c}}{\beta} = \boldsymbol{\gamma}; \quad \frac{c_x}{\beta} = \xi; \quad \frac{c_y}{\beta} = \eta; \quad \frac{c_z}{\beta} = \zeta; \\ &\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{v}}{\beta}; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\psi = \frac{f\beta^3}{(\sigma N)^3}; \qquad \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}}{\beta}. \tag{9}$$

Ecuația (5) în variabilele adimensionale adoptate se va scrie sub forma

$$\xi \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\bar{n}}{\pi^{3/2}} e^{-(\gamma_1 - \boldsymbol{u})^2} |(\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{w}_1)\, \boldsymbol{\nu}_1| + \frac{\bar{n}}{\pi^{3/2}} e^{-(\gamma_1 - \boldsymbol{u})^2} |(\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{w}_1)\, \boldsymbol{\nu}_2| -$$

$$- \frac{\bar{n}}{\pi^{3/2}} e^{-(\gamma_1 - \boldsymbol{u})^2} [|(\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{w}_1)\, \boldsymbol{\nu}_1| + |(\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{w}_1)\, \boldsymbol{\nu}_2|]. \tag{10}$$

Fără a determina funcția de distribuție, vom aplica ecuațiile de transport ale lui Maxwell, putînd astfel deduce unele caracteristici de pompaj (în cazul intervalelor mici).

Cu variabilele adimensionale introduse mai sus și prin aplicarea unor ecuații de transport convenabile obținem

$$\frac{d(\bar{n} u)}{dX} = 0 \qquad \text{(ec. continuitate)}, \tag{11}$$

și

$$\frac{d}{dX}(\bar{n}\tilde{\xi}^2) = \int (A_1 + A_2 - A_3)\, \xi\, d\gamma_1, \tag{12}$$

unde $\tilde{\xi}^2$ este media lui ξ^2,

$$A_1 = \frac{\bar{n}}{\pi^{3/2}} e^{-(\gamma_1 - \boldsymbol{u})^2} |(\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{w}_1) \cdot \boldsymbol{\nu}_1|, \tag{13}$$

$$A_2 = \frac{\bar{n}}{\pi^{3/2}} e^{-(\gamma_1 - \boldsymbol{u})^2} |(\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{w}_1) \cdot \boldsymbol{\nu}_2|, \tag{14}$$

$$A_3 = \frac{\bar{n}}{\pi^{3/2}} e^{-(\gamma_1 - \boldsymbol{u})^2} [|(\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{w}_1) \cdot \boldsymbol{\nu}_1| + |(\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{w}_1) \cdot \boldsymbol{\gamma}_2|]. \tag{15}$$

Ținînd seama că în repartiția Maxwelliană admisă

$$\tilde{\xi}^2 = u^2 + \frac{1}{2}, \tag{16}$$

și folosind ecuația de continuitate (11) se găsește că

$$\frac{d}{dX}(\bar{n}\tilde{\xi}^2) = \left(\frac{1}{2} - u^2\right) \frac{d\bar{n}}{dX}. \tag{17}$$

Efectuînd calculele în (12) și notînd

$$W_n = u \cos \alpha - w_1 \sin \alpha, \tag{18}$$

se obține următoarea relație

$$\frac{1}{\bar{n}}\frac{\mathrm{d}\bar{n}}{\mathrm{d}X}\left(\frac{1}{2}-u^2\right)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}w_1\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{e}^{-W_n^2}-2\cos\alpha\,\mathrm{erf}\,(W_n)+$$

$$+2W_n w_1\sin 2\alpha\,\mathrm{erf}\,(W_n), \tag{19}$$

unde funcția erf este definită prin

$$\mathrm{erf}\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y. \tag{20}$$

Vom căuta să determinăm gradientul de presiune la debit nul. Pentru $u=0$ formula (19) ne va da

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\log\bar{n}}{\mathrm{d}X}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}w_1\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{e}^{-w_1^2\sin^2\alpha}+2\cos\alpha\,\mathrm{erf}\,(w_1\sin\alpha)+$$

$$+2w_1^2\sin\alpha\sin 2\alpha\cdot\mathrm{erf}\,(w_1\sin\alpha). \tag{21}$$

Folosind ecuația (19) neliniarizată, dezvoltînd în serie funcția erf și exp. neglijîndu-se termenii de importanță mai mică pentru valori suficient de mici ale vitezelor adimensionale u și w, se obține ecuația liniarizată

$$0{,}575\sqrt{\pi}\,\frac{\mathrm{d}\log_{10}P}{\mathrm{d}X}=2(w_1\sin 2\alpha-u\cos^2\alpha). \tag{22}$$

Făcînd comparație cu rezultatele obținute într-o lucrare anterioară, care trata cazul reflexiei perfect difuză, se constată că pompajul este aproximativ de două ori mai eficient cînd reflexia este perfect oglindă. Deci în construcția unei pompe turbomoleculare se va avea în vedere ca palele să prezinte un grad de rugozitate cît mai mic posibil. Se observă din (22) că incidența optimă este de 45°, la fel ca și în cazul ciocnirii difuze.

În figura 1 s-a reprezentat eficiența pompajului definită prin mărimea $\frac{1}{\bar{n}}\frac{\mathrm{d}\bar{n}}{\mathrm{d}X}$ în funcție de viteza paletelor w, la debit nul și incidențe α. Pentru reprezentarea curbelor în cazul reflexiei perfect oglindă ne-am folosit de ecuația neliniarizată (19), iar în cazul reflexiei perfect difuze de formula

$$\frac{1}{\bar{n}}\frac{\mathrm{d}\bar{n}}{\mathrm{d}X}\left(\frac{1}{2}-u^2\right)=\sqrt{2}\,W_n\cos\alpha-\frac{2u}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-W_n^2}-$$

$$-2\left(uW_n-\frac{\cos\alpha}{2}\right)\mathrm{erf}\,w_n, \tag{23}$$

dată în lucrarea [1]. Curbele trasate cu linie plină corespund cazului acomodării perfecte a moleculelor de gaz la suprafața elementelor de pale, iar cele trasate cu linie întreruptă cazului reflexiei perfect oglindă.

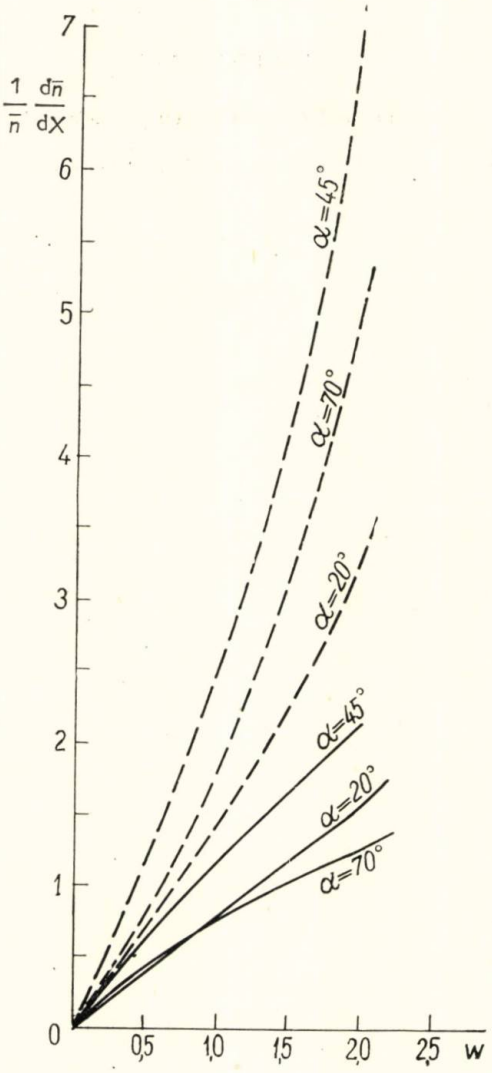


Fig. 1

Performanțele pompei la un debit oarecare se pot calcula cu formula generală [2]

$$u = u_0 \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0 - 1}, \tag{24}$$

unde τ_0 reprezintă raportul presiunilor la debit nul, τ raportul real al presiunilor și u_0 debitul maxim la $\tau = 1$.

Primită la redacție la 26 decembrie 1969.

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. PATRAULEA, N. POSTELNICU, *O teorie pentru pompele turbomoleculare*, St. cerc. mec. apl. **29**, *2* (1970).
2. L. MAURICE, S. SAGOT, *Théorie des pompes turbomoléculaires*, Le Vid, *111* Mai—Juin, 109 (1964).

CÎTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA APLICĂRII UNEI METODE HODOGRAFICE ÎN DINAMICA GAZELOR

(CAZUL PROFILULUI CIRCULAR)

de I. FILIMON
Institutul de construcții, București

Obiectul lucrării îl constituie trecerea în revistă a unor rezultate obținute de autor privind mișcările circulatorii în regim subsonic al gazelor perfecte, în jurul unui obstacol convex dat *a priori*.
Pornind de la problema la limită se definește mișcarea și plasîndu-se ipoteza înlocuirii gazului perfect cu gazul fictiv a lui S. A. Ciaplîghin, se dezvoltă o metodă de aproximații succesive după un parametru, funcție de numărul lui Mach M_∞. Se dau în continuare indicații asupra rezolvării problemelor la limită rezultate din aplicarea metodei și se stabilește formula distribuției vitezelor pe obstacol. Cazul obstacolului circular este analizat în detaliu, în sensul rezolvării problemei la limită cu aproximație a termenilor în M_∞^2. Pentru acest obstacol se determină distribuția unghiurilor și vitezelor pe obstacol în aproximația amintită. Formulele obținute sînt susceptibile de aplicații numerice, în funcție de valoarea dată circulației.

1. **Introducere.** Sînt cunoscute și devenite clasice, multiplele aplicații ale metodelor hodografice în dinamica gazelor perfecte.

Fără a aminti multiplele avantaje pe care le oferă această metodă, precum și bogata literatură de specialitate care îi este consacrată, ținem să subliniem totuși contribuția adusă de către acad. C. Iacob și de către elevii săi, la elaborarea și îmbunătățirea unor procedee hodografice, în probleme privind teoria jeturilor [1], [2] sau în problema mișcării irotaționale, cu și fără circulație în jurul unor profile, a fluidelor compresibile, în regim permanent, subsonic.

În această ordine de idei amintim extinderea metodei lui Levi-Civita la mișcări compresibile [3], extindere cunoscută sub numele de „metoda aproximațiilor succesive" și care a fost ulterior adaptată la mișcări circulatorii [4], apoi aplicată la mișcarea în jurul obstacolului cvasi-circular în [5].

În special, metoda de aproximare datorită lui S. A. Ciaplîghin a constituit obiectul a numeroase lucrări, dintre care menționăm:

— [6] în care se stabilește simultan cu H. S. Tsien, binecunoscuta

formulă de corespondență „Iacob-Tsien", între mișcarea gazului lui Ciaplîghin și mișcarea lichidă asociată;

— [7] consacrată mișcării gazoase în jurul obstacolului riguros circular;

— [8], [9] în care se studiază problema la limită neliniară la care conduce mișcarea irotațională fără circulație, a gazului lui Ciaplîghin în jurul unui obstacol convex dat dinainte;

— [10] conținînd extinderea metodei preconizate în [8], [9] la mișcări circulatorii în jurul unui profil dat.

Prezenta lucrare este consacrată dezvoltării unei metode permițînd determinarea soluției exacte după puterile numărului lui Mach M_∞, pentru mișcarea circulatorie a gazului lui Ciaplîghin în jurul unui profil cu formă prestabilită, pornind de la problema la limită corespunzătoare și a cărei analiză a constituit obiectul lucrării [10], cu aplicație la cazul profilului circular.

2. **Scurtă recapitulare a problemei limită.** În lucrarea amintită se consideră mișcarea plană permanentă și irotațională cu circulație a unui gaz supus relației densitate-viteză

$$\rho = \rho_0 (1 + c_0^{-2} q^2)^{-1/2}, \tag{1}$$

în jurul unui profil (P), din planul $z = x + iy$, profil presupus convex și avînd curbură variind în mod continuu.

S-a notat cu ρ, ρ_0 densitățile gazului lui Ciaplîghin în punctele de viteză q, respectiv 0, iar cu c_0 viteza sunetului în gazul în repaus. S-a presupus de asemenea că viteza asimptotică q_∞ este paralelă cu axa Ox.

În aceste condiții se demonstrează că între mișcarea gazoasă în jurul lui (P) și mișcarea lichidă în jurul cercului unitate din planul $Z = X + iY$ de potențial complex

$$F(Z) = \lambda q_\infty [Ze^{-i\alpha} + Z^{-1} e^{i\alpha}] + (2\pi i)^{-1} \Gamma \log Z, \tag{2}$$

există o corespondență dată de relația [10]

$$dz = \lambda \{(1-\mu) e^{i\Omega(Z)} dZ + \mu \overline{[(Ze^{-i\alpha} - Z^{-1} e^{i\alpha})(2i)^{-1} - \varepsilon]}^2 e^{i\overline{\Omega(Z)}} d(\bar{Z}^{-1})\}, \tag{3}$$

unde $\Omega(Z) = \Theta + iT$ este o funcție olomorfă în exteriorul cercului unitate, $\lambda > 0$ și α două constante reale, verificînd condiția de frontieră

$$\frac{d\Gamma}{dn} = 1 - \lambda \{(1-\mu) e^{-T} + 4\mu [\sin(\sigma - \alpha) - \varepsilon]^2 e^{T}\} K(\Theta) \text{ pe } |e^{i\sigma}| = 1. \tag{4}$$

S-a notat: $K = K(\Theta)$ curba profilului (P).

S-a notat de asemenea:

Γ circulația comună celor două mișcări

$$\mu = 2^{-1} (1 - \rho_0 \rho_\infty^{-1}) = -4^{-1} M_\infty^2 + \cdots, \tag{5 a}$$

$$\varepsilon = (4\pi\lambda q_\infty)^{-1}\,\Gamma, \tag{5 b}$$

$$q_\infty = [(1-\mu)\,e^{-T(\infty)} + \mu\, e^{T(\infty)}]\,q_\infty. \tag{5 c}$$

Constantele λ, α se determină prin relațiile:

$$\int_0^{2\pi} \{(1-\mu)\,e^{-T} + 4\mu\,[\sin(\sigma-\alpha) - \varepsilon]^2\, e^{T}\}\cos(\Theta+\sigma)\,d\sigma = 0, \tag{6 a}$$

$$\int_0^{2\pi} \{(1-\mu)\,e^{-T} + 4\mu\,[\sin(\sigma-\alpha) - \varepsilon]^2\, e^{T}\}\sin(\Theta+\sigma)\,d\sigma = 0, \tag{6 b}$$

echivalente cu condiția de închidere pentru profilul (P).

Distribuțiile unghiurilor vitezei pe profilul (P) și a mărimilor vitezei pe același profil sînt date de relațiile:

$$\theta = \Theta + \sigma - \pi/2 \tag{7 a}$$

$$q = 2q_\infty\,|\sin(\sigma-\alpha) - \varepsilon|\{(1-\mu)\,e^{-T} + 4\mu\,[\sin(\sigma-\alpha)-\varepsilon]^2\, e^{T}\}^{-1}, \tag{7 b}$$

ultima relație atrăgînd

$$(1-\mu)\,e^{-T} + 4\mu\,[\sin(\sigma-\alpha) - \varepsilon]^2\, e^{T} > 0, \tag{8}$$

ceea ce impune o limitare superioară pentru M_∞ în mișcarea considerată.

3. **Rezolvarea prin aproximații succesive a problemei la limită, în cazul obstacolului convex simetric.** În [10] s-a arătat că dacă profilul (P) admite o axă de simetrie perpendiculară pe direcția de unghi α, condiția (6 a) se verifică de la sine ceea ce permite alegerea lui q_∞ egal cu q_∞. În aceste condiții relația (5 c) atrage

$$T(\infty) = 0. \tag{9}$$

În continuare vom alege pentru necunoscutele problemei dezvoltări de forma:

$$T = T_0 + \mu T_1 + O(\mu^2), \tag{10 a}$$

$$\Theta = \Theta_0 + \mu\Theta_1 + O(\mu^2), \tag{10 b}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + O(\mu^2), \tag{10 c}$$

$$\alpha = \alpha_0 + \mu\alpha_1 + O(\mu^2). \tag{10 d}$$

După cum este cunoscut, în această aproximație soluția pentru mișcarea gazoasă fictivă, coincide cu soluția pentru gazul real.

Dacă introducem acum notaţia

$$\varepsilon_0 = (4\pi q_\infty)^{-1}\ \Gamma, \tag{11}$$

şi dezvoltăm pe ε după puterile lui μ, vom obţine

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 - \mu\lambda_1\ \lambda_0^{-1})\ \lambda_0^{-1} + O(\mu^2). \tag{12}$$

Se obţin de asemenea următoarele dezvoltări:

$$K(\Theta) = K(\Theta_0) + \mu \left(\frac{\partial K}{\partial \Theta_0}\right) \Theta_1 + O(\mu^2), \tag{13}$$

$$e^T = e^{T_0}(1 + \mu T_1) + O(\mu^2), \tag{14 a}$$

$$e^{-T} = e^{-T_0}(1 - \mu T_1) + O(\mu^2), \tag{14 b}$$

$$\sin(\sigma - \alpha) = \sin(\sigma - \alpha_0) - [\alpha_1 \cos(\sigma - \alpha_0)]\,\mu + O(\mu^2), \tag{15}$$

$$\cos(\Theta + \sigma) = \cos(\Theta_0 + \sigma) - [\sin(\Theta_0 + \sigma)]\,\Theta_1\mu + O(\mu), \tag{16 a}$$

$$\sin(\Theta + \sigma) = \sin(\Theta_0 + \sigma) + [\cos(\Theta_0 + \sigma)]\,\Theta_1\,\mu + O(\mu^2), \tag{16 b}$$

$$[\sin(\sigma - \alpha) - \varepsilon]^2 = [\sin(\sigma - \alpha_0) - \varepsilon_0\lambda_0^{-1}]^2 + O(\mu). \tag{17}$$

Aceste dezvoltări se introduc în problema la limită, apoi se identifică termenii liberi şi coeficientului lui μ.

Se obţin astfel următoarele noi probleme la limită:

Problema la limită (A)

Să se determine funcţie olomorfă $\Omega_0(Z)$ în $|Z| > 1$, constanta λ_0 în aşa fel încît:

$$\frac{dT_0}{dn} = 1 - \lambda_0 e^{-T_0} K(\Theta_0) \quad \text{pe} \quad |Z| = 1, \tag{A_1}$$

$$T_0(\infty) = 0, \tag{A_2}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-T_0} \sin(\Theta_0 + \sigma)\, d\sigma = 0. \tag{A_3}$$

Problema la limită (B)

Să se determine funcția $\Omega_1(Z)$ olomorfă în $|Z|>1$, constantele α_0, λ_1 în așa fel încît:

$$\frac{dT_1}{dn} = \{\lambda_0(1 + T_1)\,e^{-T_0} - 4\,[\sin(\sigma - \alpha_0) - \varepsilon_0\lambda_0^{-1}]^2\,e^{-T_0}] - \\ - \lambda_1 e^{-T_0}\}\,K(\Theta_0) - \lambda_0 e^{-T_0}\frac{\partial K}{\partial \Theta_0}\cdot\Theta_1, \quad \text{pe } |Z| = 1, \tag{B_1}$$

$$T_1(\infty) = 0, \tag{B_2}$$

$$\int_0^{2\pi}\{[-(1 + T_1)\,e^{-T_0} + 4\,[\sin(\sigma - \alpha_0) - \varepsilon_0\lambda_0]^2\,e^{-T_0}]\sin(\Theta_0 + \sigma) + \\ + [e^{-T_0}\cos(\Theta_0 + \sigma)]\;\Theta_1\}\,d\sigma = 0. \tag{B_3}$$

4. **Asupra problemei la limită (A).** Există o mare analogie între problema la limită neliniară rezultată din aproximația de ordin zero și problema la limită corespunzătoare mișcării gazoase fără circulație, în sensul că în cazul de față este necesară numai verificarea unei condiții în plus (A_3).

În aceste condiții să presupunem că este cunoscută funcția care realizează transformarea conformă a exteriorului profilului (P) pe exteriorul cercului unitate din planul (Z)

$$z = \lambda_0 Z + \sum_{k=0}^{\infty} akZ^{-k}, \tag{18}$$

punctele de la infinit în cele două plane rămînînd analoge.

Deoarece pentru $\mu = 0$, relația de corespondență devine

$$dz = \lambda e^{i\Omega(Z)}dZ, \tag{19}$$

urmează că funcția $\Omega_0(Z)$ va fi dată de următoarea relație:

$$\Omega_0(Z) = -i\log\left(\lambda_0^{-1}\frac{dz}{dZ}\right), \tag{20}$$

unde λ_0 este ales în așa fel încît

$$\Omega_0(\infty) = \Theta_0(\infty) + i\,T_0(\infty) = 0.$$

În ceea ce privește condiția de închidere, aceasta revine la

$$\int_{|Z|=1} e^{i\Omega_0(Z)} dZ = 0, \tag{21}$$

relație identic satisfăcută în virtutea definiției funcției $\Omega_0(Z)$.

5. **Problema la limită (B).** Problema la limită rezultată din aproximația de ordin unu, ca de altfel, problemele rezultate din celelalte aproximații, sînt liniare și în consecință rezolvarea lor poate fi redusă la rezolvarea unor ecuații integrale de tip Fredholm.

Așa cum am arătat în lucrarea [8], există cazuri simple pentru care rezolvarea problemelor la limită de acest tip se reduce la cvadraturi. În particular acest lucru este posibil pentru profilul eliptic, avînd una din axe perpendiculară pe direcția de unghi α.

6. **Cazul profilului circular.** Problema la limită prezintă simplificări remarcabile pentru profilul riguros circular, deoarece în acest caz ambele condiții de închidere se verifică de la sine [10].

În aceste condiții vom alege $\alpha = 0$, astfel sîntem conduși la determinarea funcției $\Omega(Z)$ supusă următoarelor condiții la limită:

$$\frac{dT}{dn} = 1 - \lambda\left[(1-\mu)\, e^{-T} + 4\,\mu\,(\sin\sigma - \varepsilon)^2 e^{T}\right] \text{ pe } |Z| = 1, \tag{22a}$$

$$T(\infty) = 0. \tag{22b}$$

În ceea ce privește problemele la limită (A) și (B) acestea devin:

$$\frac{dT_0}{dn}\Big| = 1 - \lambda_0 e^{-T_0} \quad \text{pe } |Z| = 1, \tag{A_{11}}$$

$$T_0(\infty) = 0, \tag{A_{12}}$$

$$\frac{dT_1}{dn} = \lambda_0\left[(1+T_1)\, e^{-T_0} - 4(\sin\sigma - \varepsilon_0\lambda_0^{-1})^2 e^{T_0} - \lambda_1 e^{-T_0}\right] \text{ pe } |Z| = 1, \tag{B_{11}}$$

$$T_1(\infty) = 0, \tag{B_{12}}$$

și a căror rezolvare se face prin procedee cunoscute [11]. De altfel soluția problemei la limită (A_{11}, A_{12}) este imediată:

$$T_0 = 0; \quad \lambda_0 = 1, \tag{23}$$

astfel că problema la limită (B_{11}, B_{12}) capătă forma mai simplă :

$$\frac{dT_1}{dn} = 1 + T_1 - 4(\sin\sigma - \varepsilon_0)^2 - \lambda_1 \text{ pe } |Z| = 1, \qquad (B_{21})$$

$$T_1(\infty) = 0. \qquad (B_{22})$$

Fie acum : $\Omega_1(Z) = \Theta_1 + iT_1$. Avem, după cum se știe

$$\frac{dT_1}{dn} = \operatorname{Im}\left\{Z\frac{d\Omega_1}{dZ}\right\}_{|Z|=1},$$

și de asemenea :

$$T_1 = \operatorname{Im}\{\Omega_1\}_{|Z|=1},$$

$$1 - \lambda_1 - 4(\sin\sigma - \varepsilon_0)^2 = -\operatorname{Im}\left\{i(1 + \lambda_1 + 4\varepsilon_0^2) + \frac{8\varepsilon_0}{Z} + \frac{2i}{Z^2}\right\}_{|Z|=1},$$

astfel că relația (B_{21}) devine

$$\operatorname{Im}\left\{Z\frac{d\Omega_1}{dZ} - \Omega_1 + \frac{2i}{Z^2} + \frac{8\varepsilon_0}{Z} + i(1 + \lambda_1 + 4\varepsilon_0^2)\right\}_{|Z|=1} = 0, \qquad (24)$$

ceea ce impune, în virtutea olomorfiei funcției $\Omega_1(Z)$ în $|Z| > 1$

$$Z\frac{d\Omega_1}{dZ} - \Omega_1 + \frac{2i}{Z^2} + \frac{8\varepsilon_0}{Z} + i(1 + \lambda_1 + 4\varepsilon_0^2) = c \quad (c = \text{real}). \qquad (25)$$

Soluția olomorfă a ecuației diferențiale (25) este imediată

$$\Omega_1(Z) = -\frac{2i}{3Z^2} - \frac{4\varepsilon_0}{Z} - i(1 + \lambda_1 + 4\varepsilon_0^2), \qquad (26)$$

și deoarece

$$\Omega_1(\infty) = 0,$$

rezultă de asemenea

$$\lambda_1 = -(1 + 4\varepsilon_0^2), \qquad (27)$$

astfel că soluția problemei la limită pentru profilul riguros circular are următoarea expresie, în aproximația amintită

$$\Omega(Z) = -\left(\frac{2i}{3Z^2} + \frac{4\varepsilon_0}{Z}\right)\mu + O(\mu^2), \tag{28 a}$$

$$\lambda = 1 - (1 + 4\varepsilon_0^2)\,\mu + O(\mu^2), \tag{28 b}$$

de unde rezultă după cîteva calcule elementare că $\Theta(\sigma)$, $T(\sigma)$ vor fi aproximate prin :

$$\Theta(\sigma) = -\left(\frac{2}{3}\sin 2\sigma + 4\varepsilon_0 \cos\sigma\right)\mu + O(\mu^2), \tag{29 a}$$

$$T(\sigma) = -\left(\frac{2}{3}\cos 2\sigma - 4\varepsilon_0 \sin\sigma\right)\mu\, O(\mu^2), \tag{29 b}$$

astfel că în conformitate cu relația (7 a), distribuția unghiurilor vitezei cu direcția pozitivă a axei Ox va fi dată de relația

$$\theta = \sigma - \pi/2 - \left(\frac{2}{3}\sin 2\sigma + 4\varepsilon_0 \cos\sigma\right)\mu + O(\mu^2). \tag{30}$$

În ceea ce privește distribuția vitezelor pe profilul circular se observă că în virtutea calculelor făcute avem :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_0(1 + 4\mu\,\varepsilon_0^2)\,\mu + O(\mu^2), \tag{31}$$

$$(1 - \mu)\,e^{-T} + 4\mu(\sin\sigma - \varepsilon)^2 e^T = 1 -$$

$$- [1 + T_1 - 4(\sin\sigma - \varepsilon_0)^2]\,\mu + O(\mu^2), \tag{32}$$

și în conformitate cu valoarea lui T_1, determinată anterior, se obține

$$(1 - \mu)\,e^{-T} + 4(\sin\sigma - \varepsilon)^2 e^T = 1 +$$

$$+\left(-\frac{4}{3}\cos 2\sigma - 12\varepsilon_0 \sin\sigma + 1 + 4\varepsilon_0^2\right)\mu + O(\mu^2). \tag{33}$$

Cu aceste precizări, după introducerea dezvoltărilor (31), (33) în formula (7 b), se obține în aproximația amintită, distribuția vitezelor pe profil

$$q = 2q_\infty \left| \sin \sigma - \varepsilon_0 + \left\{ \frac{2}{3} \sin 3\sigma - \frac{22}{3} \varepsilon_0 \cos 2\sigma - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \left(\frac{5}{3} + 16\, \varepsilon_0^2 \right) \sin \sigma + 6\, \varepsilon_0 \right\} \mu \right| + O(\mu^2). \tag{34}$$

Formulele astfel obținute sînt susceptibile de aplicații numerice, în vederea comparării lor cu formule similare, obținute de alți cercetători.

Menționăm în final că toate calculele au fost făcute în ipoteza unor numere — μ suficient de mici pentru a se asigura valabilitatea dezvoltărilor efectuate și de asemenea pentru a se asigura validitatea vitezelor pe profil.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Bull. scient de l'Ecole Polyth. de Timișoara*, t. **VIII**, p. 47—59 (1937).
2. — Bull. scient de l'Ecole Polyteh. de Timișoara, 224—244 (1937).
3. — Mathematica, Cluj, **22**, 170—181 (1946).
4. — Comunicările Acad. R.P.R., **1**, 741—746 (1951).
5. I. Filimon, Revista Univ. C. I. Parhon, Buc., **2**, 38—44 (1953).
6. C. Iacob, Portugalia Mathematica, **1**, 209—257 (1939).
7. — Mathematica Cluj, **17**, 1—17 (1941).
8. I. Filimon, Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, 1957, **244**, 2133—2135.
9. — St. cerc. matem., **8**, 464—504 (1957).
10. — St. cerc. matem., **19**, 831—843 (1967).
11. C. Iacob, Introduction math. à la méc. des fluides, Paris, Gauthier—Villars, 1959, 1086—1090.

CURGEREA SUPERSONICĂ NEPERMANENTĂ ÎN JURUL SISTEMELOR ARIPĂ CRUCIFORMĂ-FUZELAJ AVÎND MIŞCĂRI OSCILATORII

de DAN MATEESCU
Institutul de Mecanică a Fluidelor

Lucrarea tratează, în scopul determinării vitezelor de perturbaţie şi distribuţiei de presiuni, cazul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj situat într-un curent supersonic uniform şi executînd mişcări oscilatorii de tangaj, ruliu şi translaţie pe verticală. Metoda folosită se bazează pe reducerea mişcării supersonice nepermanente la o serie de mişcări permanente în jurul aceluiaşi sistem, ale căror soluţii sînt date în lucrare.

NOTAŢII:

U_∞ — viteza curentului neperturbat,

a_∞ — viteza sunetului în condiţiile curentului neperturbat,

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach, $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$,

$Ox_1x_2x_3$ — sistem trirectangular de coordonate, axa Ox_1 reprezentînd axa de simetrie a fuzelajului,

$y = \dfrac{x_2}{x_1}$, $z = \dfrac{x_3}{x_1}$ — coordonate adimensionale,

$\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ — potenţialul vitezelor de perturbaţie ale mişcării nestaţionare în jurul sistemului considerat,

$u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}$, $w = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ — vitezele de perturbaţie după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 3, P. 699–711, 1970

1. CONSIDERAȚII GENERALE

În această lucrare ne propunem să determinăm vitezele de perturbație și distribuția de presiuni în cazul unui sistem aripă cruciformă-fuzelaj situat într-un curent supersonic uniform și executînd mișcări oscilatorii.

În acest sens să considerăm sistemul din figura 1 format dintr-o aripă OA_1A_2 prevăzută cu un fuzelaj și cu o placă normală OP_1P_2 și să

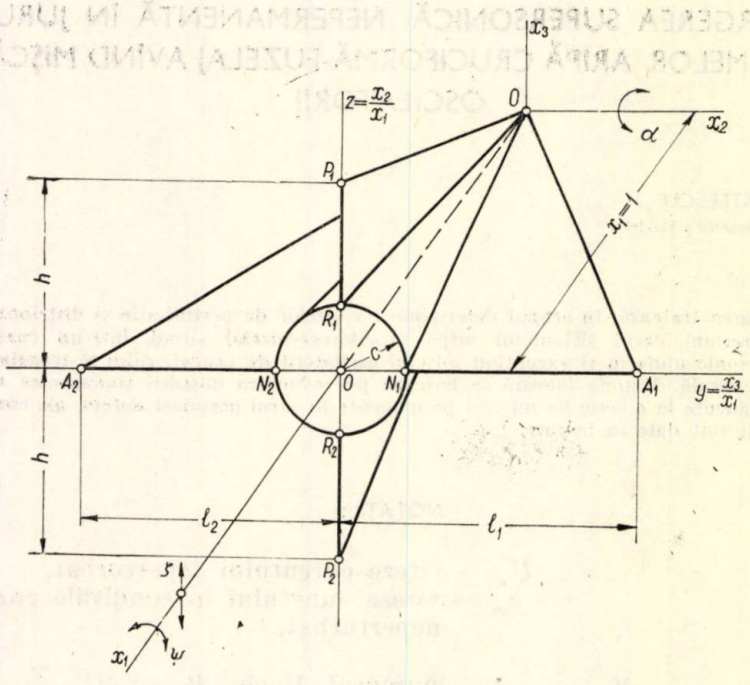


Fig. 1.

observăm că, avînd în vedere simetria plăcii, cazurile oscilațiilor de rotație de giratie în jurul axei Ox_3 și de translație laterală în lungul axei Ox_2 se reduc la studiul oscilațiilor unui sistem aripă delta-fuzelaj care poate fi tratat în modul indicat în [1]. Pentru acest motiv, în cele ce urmează vom lua în considerație următoarele mișcări oscilatorii armonice ale sistemului considerat, care pot fi exprimate sub o formă complexă :

a) o mișcare oscilatorie de rotație de tangaj, în jurul axei Ox_2

$$\alpha = \alpha_0 \, e^{i\omega t}; \tag{1}$$

b) o mișcare oscilatorie de translație pe verticală, în lungul axei Ox_3

$$\zeta = \zeta_0 \, e^{i(\omega t + \delta_1)}; \tag{2}$$

c) o mișcare oscilatorie de rotație de ruliu, în jurul axei Ox_1

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(\omega t + \delta_2)}. \tag{3}$$

Considerînd în cazul teoriei liniarizate, că aceste mișcări oscilatorii sînt de mică amplitudine, din scurgerea supersonică nepermanentă pe care ne propunem să o studiem vom putea separa mișcarea supersonică permanentă în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj care ia în considerație efectul incidențelor și pantelor (constante în timp) ale aripii, plăcii și fuzelajului, problemă care poate fi tratată în modul indicat în lucrările anterioare [2], [3].

În acest sens, în cele ce urmează ne vom ocupa de mișcarea rezultată în jurul acestei separări, care ia în considerație efectul oscilațiilor (1)—(3) ale sistemului considerat și care este caracterizată prin următoarele condiții:

$$w = -\alpha U_\infty - x_1\dot{\alpha} + \zeta + x_2\Psi \tag{4}$$

pe porțiunile ON_jA_j ale aripii;

$$v\cos\theta + (w + \alpha U_\infty + x_1\dot{\alpha} - \zeta)\sin\theta = 0 \tag{5}$$

pe fuzelaj și

$$v = -x_3\dot{\Psi}, \tag{6}$$

pe porțiunile OR_jP_j ale plăcii, unde

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = i\omega\alpha_0 e^{i\omega t}, \quad \dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = i\omega\zeta_0 e^{i(\omega t+\delta_1)}, \quad \dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dt} = i\omega\Psi_0 e^{i(\omega t+\delta_2)}. \tag{7}$$

Avînd în vedere forma acestor condiții, vom putea utiliza și în acest caz aceeași transformare a potențialului folosită și în [1]

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = U_\infty e^{i(\omega t + kx_1)}\Phi(x_1, x_2, x_3), \quad k = -\frac{\omega}{U_\infty}\frac{1+B^2}{B^2}, \tag{8}$$

cu ajutorul căreia ecuația liniarizată a potențialului și expresia de asemenea liniarizată a coeficientului de presiune

$$-B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{a_\infty^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2U_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 dt}\right), \tag{9}$$

$$C_p = -\frac{2}{U_\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{1}{U_\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{10}$$

pot fi scrise sub forma

$$-B^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=\frac{\omega^2}{U_\infty^2}\frac{1+B^2}{B^2}\Phi\approx 0, \tag{11}$$

$$C_p=-2\,e^{i(\omega t+kx_1)}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}-i\frac{\omega}{U_\infty}\frac{1}{B^2}\Phi\right]. \tag{12}$$

Este uşor de văzut că în cazul oscilaţiilor de joasă frecvenţă pentru care putem considera

$$\frac{\omega^2}{U_\infty^2}\ll 1,\quad k^2\ll 1, \tag{13}$$

membrul drept al ecuaţiei (11) devine neglijabil şi astfel ecuaţia potenţialului Φ se va reduce la aceeaşi formă ca în cazul mişcărilor supersonice permanente.

Introducînd acum, prin analogie cu mişcarea permanentă, vitezele reduse de perturbaţie derivînd din potenţialul redus Φ

$$q=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=(u-ik\varphi)\frac{1}{U_\infty}e^{-i(\omega t+kx_1)}, \tag{14 a}$$

$$\nu=\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=\frac{v}{U_\infty}e^{-i(\omega t+kx_1)}, \tag{14 b}$$

$$\beta=\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=\frac{w}{U_\infty}e^{-i(\omega t+kx_1)} \tag{14 c}$$

şi observînd că ţinînd seama de (11), avem

$$e^{\pm ikx_1}\approx 1\pm i\,kx_1, \tag{15}$$

condiţiile la limită (4)—(6) pot fi scrise sub forma

$$\beta=-\alpha_0+i\frac{\omega}{U_\infty}\left(\zeta_0 e^{i\delta_1}-x_1\frac{2B^2+1}{B^2}\alpha_0+x_2\Psi_0 e^{i\delta_2}\right), \tag{16 a}$$

$$\nu\cos\theta+\left[\beta+\alpha_0-i\frac{\omega}{U_\infty}\left(\zeta_0 e^{i\delta_1}-x_1\frac{2B^2+1}{B^2}\alpha_0\right)\right]\sin\theta=0, \tag{16 b}$$

$$\nu=-i\frac{\omega}{U_\infty}x_3\Psi_0 e^{i\delta_2}, \tag{16 c}$$

pe aripă, fuzelaj şi respectiv placă.

Avînd în vedere forma acestor condiții la limită potențialul redus Φ poate fi exprimat sub forma

$$\Phi = \Phi_1 + i\frac{\omega}{U_\infty}(\Phi_1^* + \Phi_2^*), \tag{17}$$

în care potențialele reduse Φ_1, Φ_1^*, Φ_2^* sînt definite prin următoarele condiții la limită pe fuzelaj, aripă și respectiv placă:

Potențialul redus Φ_1 $\left(\text{viteze reduse } q_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1},\ \nu_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2},\ \beta_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3}\right)$

$$[\nu_0 \cos\theta + (\beta_0 + \alpha_0)\sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0, \tag{18 a}$$

$$[\beta_0]_{\text{aripă}} = -\alpha_0, \qquad [\nu_0]_{\text{placă}} = 0. \tag{18 b}$$

Potențialul redus Φ_1^* $\left(\text{viteze reduse } q_0^* = \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_1},\ \nu_0^* = ,\ \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_2},\ \beta^* = \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_3}\right)$,

$$[\nu_0^* \cos\theta + (\beta_0^* - \zeta_0 e^{i\delta_1})\sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0, \tag{19 a}$$

$$[\beta_0^*)]_{\text{aripă}} = \zeta_0 e^{i\delta_1}, \qquad [\nu_0^*]_{\text{placă}} = 0. \tag{19 b}$$

Potențialul redus Φ_2^* $\left(\text{viteze reduse } q_1^* = \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_1},\ \nu_1^* = \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_2},\ \beta_1^* = \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_3}\right)$,

$$\left[\nu_1^* \cos\theta + \left(\beta_1^* + x_1 \frac{2B^2+1}{B^2}\alpha_0\right)\sin\theta\right]_{\text{fuzelaj}} = 0, \tag{20 a}$$

$$[\beta_1^*]_{\text{aripă}} = -x_1 \frac{2B^2+1}{B^2}\alpha_0 + x_2 \Psi_0 e^{i\delta_2},\ [\nu_1^*]_{\text{placă}} = -x_3 \Psi_0 e^{i\delta_2}. \tag{20 b}$$

Din forma acestor condiții la limită este ușor de văzut că primele două mișcări, corespunzătoare potențialelor reduse Φ_1 și Φ_1^*, reprezintă mișcări conice propriu-zise ($n = 1$) în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj, iar cea de a treia, corespunzătoare potențialului Φ_2^*, reprezintă o mișcare conică de ordin $n = 2$ în jurul aceluiași sistem.

Ținînd seama de potențialele și vitezele reduse ale acestor mișcări conice de ordin unu și doi, coeficientul de presiune va fi dat acum de expresia

$$C_p = -2 e^{i\omega t}\left\{q_0 - i\frac{\omega}{U_\infty}\frac{1}{B^2}[\Phi_1 - B^2(q_0^* + q_1^*) + x_1 M_\infty^2 q_0]\right\}.$$

În acest mod, problema mișcării nestaționare în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj a fost redusă la studiul a trei mișcări conice, permanente, de ordin unu și doi în jurul aceluiași sistem, pentru care în lucrările anterioare [2], [3] au fost stabilite metode generale de rezolvare.

În cele ce urmează vom indica modul de determinare a expresiilor vitezelor axiale reduse q_0, q_0^*, q_1^* și potențialului redus Φ_1, care intervin în expresia coeficientului de presiune, pentru diferite cazuri de mișcări oscilatorii.

2. RELAȚII PENTRU DETERMINAREA VITEZELOR AXIALE DE PERTURBAȚIE

Urmînd aceeași cale ca în [2] și [3], pentru a studia mișcările conice de ordin unu și doi la care a fost redusă problema, vom utiliza în continuare planul complex x obținut prin transformarea

$$x = y + i\eta, \quad y = \frac{y}{1 - B^2 z^2}, \quad \eta = \frac{z\sqrt{1 - B^2 (y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2}, \tag{22}$$

care are proprietatea de a face ca vitezele reduse de perturbație în cazul mișcărilor conice propriu-zise, sau primele lor derivate în cazul mișcării conice de ordin doi, să devină funcții armonice în acest nou plan, astfel încît acestea să poată fi exprimate sub o formă complexă.

De asemenea vom utiliza planurile auxiliare X și χ care se obțin prin transformările conforme

$$X = x + \frac{c^2}{x} \qquad (X = Y + iZ), \tag{23a}$$

$$\chi^2 = X^2 + H^2 \qquad (\chi = \lambda + i\mu), \tag{23b}$$

și în care sistemul considerat este caracterizat prin următoarele dimensiuni geometrice :

$$\eta = \frac{h}{\sqrt{1 - B^2 h^2}}, \quad H = \eta - \frac{c^2}{\eta}, \quad \frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1 + B^2 c^2}{B}, \tag{24a}$$

$$L_j = l_j + \frac{c^2}{l_j}, \quad \Lambda_j = \sqrt{L_j^2 + H^2} \quad (j = 1, 2), \tag{24b}$$

$$\varkappa = \sqrt{4c^2 + H^2}, \quad \frac{1}{B^*} = \frac{\sqrt{1 + \mathcal{B}^2 H^2}}{\mathcal{B}}. \tag{24c}$$

Mișcarea corespunzătoare potențialului redus Φ_1. Așa cum am arătat, vitezele reduse de perturbație pot fi exprimate în planele auxiliare x, X, χ, sub forma complexă

$$q_0 = \mathrm{Re}\, \mathcal{U}_0, \quad \nu_0 = \mathrm{Re}\, \mathcal{V}_0, \quad \beta_0 = \mathrm{Re}\, \mathcal{W}_0. \tag{25}$$

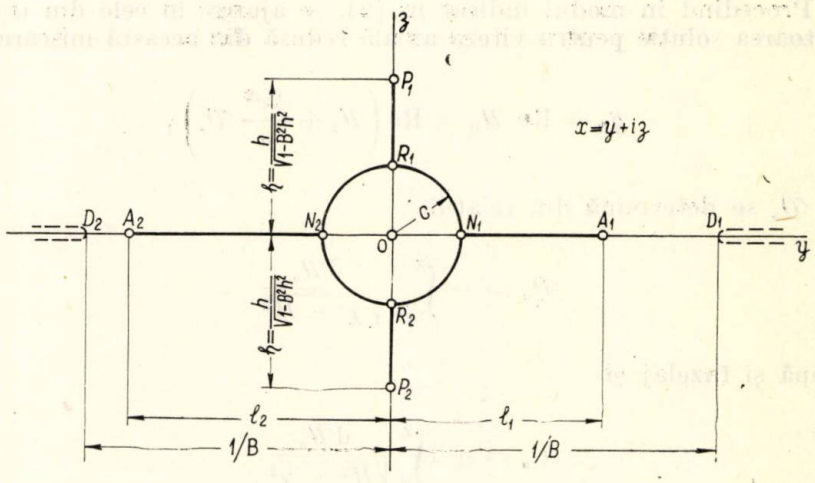


Fig. 2.

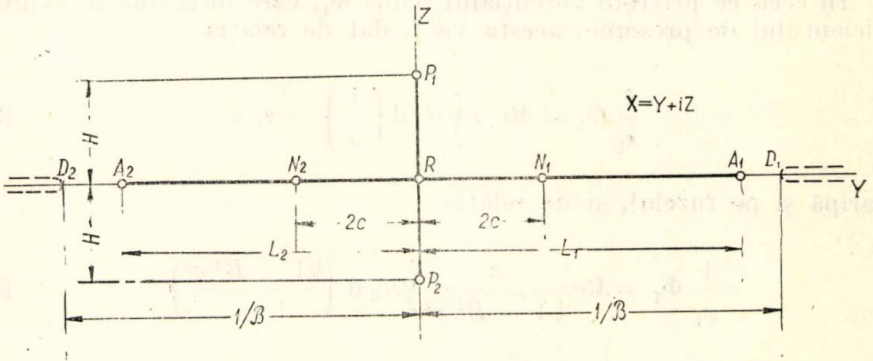


Fig. 3.

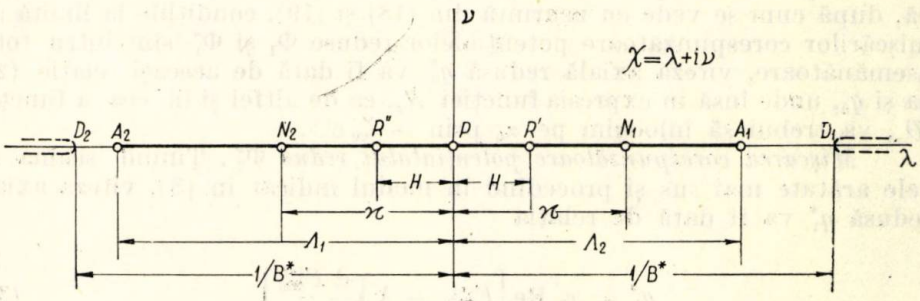


Fig. 4.

Procedînd în modul indicat în [2], se ajunge în cele din urmă la următoarea soluţie pentru viteza axială redusă din această mişcare

$$q_0 = \mathrm{Re}\,\mathcal{U}_0 = \mathrm{Re}\left(\mathcal{U}_a + \frac{2c^2}{x}\mathcal{V}_a\right), \tag{26}$$

unde $\mathcal{V}_a$ se determină din relaţiile

$$\mathcal{V}_a = -\int_{1/B^*}^{\chi} \frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_a}{\sqrt{\chi^2 - H^2}} \tag{27}$$

pe aripă şi fuzelaj şi

$$\mathcal{V}_a = \pm\,\mathrm{i}\int_{H}^{\chi} \frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_a}{\sqrt{H^2 - \chi^2}} \tag{28}$$

pe placă, unde cele două semne se referă la partea superioară şi, respectiv, la cea inferioară a plăcii care prezintă antisimetrie de valori.

În ceea ce priveşte potenţialul redus Φ_1, care intervine în expresia coeficientului de presiune, acesta va fi dat de relaţia

$$\frac{1}{x_1}\Phi_1 = \mathrm{Re}\; x\int \mathcal{U}_0\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) - \alpha_0 z \tag{29}$$

pe aripă şi pe fuzelaj, şi de relaţia

$$\frac{1}{x_1}\Phi_1 = \mathrm{Re}\,\frac{x}{\sqrt{1 - B^2x^2}}\int \mathcal{U}_0\,\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{1 - B^2x^2}}{x}\right) \tag{30}$$

pe placă.

În acest mod, problema s-a redus la determinarea funcţiei $\mathcal{U}_a$ care se poate face aplicînd metoda stabilită în [2], aşa cum se va vedea din exemplele pe care le vom da în cele ce urmează.

Mişcarea corespunzătoare potenţialului redus Φ_1^*. Avînd în vedere că, după cum se vede cu uşurinţă din (18) şi (19), condiţiile la limită ale mişcărilor corespunzătoare potenţialelor reduse Φ_1 şi Φ_1^* sînt întru totul asemănătoare, viteza axială redusă q_0^* va fi dată de aceeaşi relaţie (26) ca şi q_0, unde însă în expresia funcţiei $\mathcal{U}_a$, ca de altfel şi în cea a funcţiei $\mathcal{V}_a$, va trebui să înlocuim pe α_0 prin $-\zeta_0 e^{i\delta_1}$.

Mişcarea corespunzătoare potenţialului redus Φ_2^*. Ţinînd seama de cele arătate mai sus şi procedînd în modul indicat în [3], viteza axială redusă q_1^* va fi dată de relaţia

$$q_1^* = x_1\,\mathrm{Re}\left[F_{200}^{(a)} - X\int \frac{\mathrm{d}\,F_{200}^{(a)}}{X}\right] \tag{31}$$

pe aripă și fuzelaj, și de relația

$$q_1^* = x_1 \operatorname{Re}\left[F_{200}^{(a)} - \frac{c^2}{x}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{1 - B^2 x^2}} + B^2 x^2\right)\int \frac{\mathrm{d}\, F_{200}^{(a)}}{x + \frac{c^2}{x}} - \right.$$

$$\left. - \int \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2} + B^2 c^2 \arg \operatorname{ch} \frac{1}{Bx}}{x + \frac{c^2}{x}} \mathrm{d}\, F_{200}^{(a)}\right] \tag{32}$$

pe placă.

Funcția $F_{200}^{(a)}$ care intervine în aceste relații se determină aplicînd metoda stabilită [3], așa cum se va vedea din exemplul ce urmează.

3. CAZUL OSCILAȚIILOR DE TRANSLAȚIE PE VERTICALĂ

În cazul oscilațiilor de translație pe verticală definite de (2) este evident că va apărea numai mișcarea corespunzătoare potențialului redus Φ_1^*, a cărui viteză axială redusă q_0^* este dată, așa cum am arătat mai sus, de relația

$$q_0^* = \operatorname{Re}\left(\mathcal{U}_a + 2\frac{c^2}{x}\mathcal{V}_a\right). \tag{33}$$

Urmînd calea indicată în [2], funcția $\mathcal{U}_a$ este definită, de exemplu, în cazul bordurilor de atac subsonice $\left(l_j < \frac{1}{B}\right.$, fig. 4$\left.\right)$ prin condițiile la limită

$$\operatorname{Im}\,[\mathcal{U}_a]_{A_2 A_1} = 0, \quad \operatorname{Re}\,[\mathcal{U}_a]_{-\infty A_2, A_1 \infty} = 0, \tag{34}$$

iar în cazul bordurilor de atac supersonice $\left(l_j > \frac{1}{B}\right.$, fig. 5$\left.\right)$ prin condițiile

$$\operatorname{Im}\,[\mathcal{U}_a]_{D_2 D_1} = 0, \quad \operatorname{Re}\,[\mathcal{U}_a]_{-\infty \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1 \infty} = 0, \tag{35a}$$

$$\operatorname{Re}\,[\mathcal{U}_a]_{D_j \mathcal{A}_j} = \frac{1}{2} Q_j \left[L_j + \sqrt{L_j^2 - 4c^2} + \frac{4c^2}{\sqrt{\lambda^2 - \varkappa^2}}\right], \tag{35b}$$

$$Q_j = -\frac{\zeta_0 U_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1}}{\sqrt{B^2 l_j^2 - 1}} \quad (j = 1, 2).$$

Adăugînd la aceste condiții la limită singularitățile corespunzătoare bordurilor de atac ale aripii și plăcii, menționate în [2], și utilizînd metoda stabilită în această lucrare, se deduc pentru funcția $\mathcal{U}_a$ expresiile

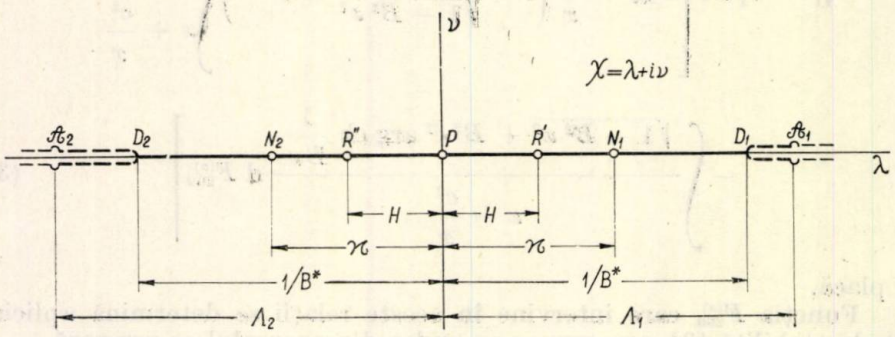


Fig. 5.

$$\mathcal{U}_a = \frac{A_0 + A_1\,\chi + A_2\,\chi^2}{\chi\sqrt{(\Lambda_1 - \chi)\,(\Lambda_2 + \chi)}}, \tag{36}$$

în cazul bordurilor subsonice $\left(l_j < \frac{1}{B}\right)$, și

$$\mathcal{U}_a = \frac{A}{\chi}\sqrt{1 - B^{*2}\chi^2} + \frac{Q_1}{\pi}\left(L_1 + \sqrt{L_1^2 - 4c^2}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)\,(1 + B^*\Lambda_1)}{2B^*\,(\Lambda_1 - \chi)}} +$$

$$+ \frac{Q_2}{\pi}\left(L^2 + \sqrt{L_2^2 - 4c^2}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 + B^*\chi)\,(1 + B^*\Lambda_2)}{2B^*\,(\Lambda_2 + \chi)}} -$$

$$- \frac{Q_1}{\pi}\int_{1/B^*}^{\Lambda_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)\,(1 + B^*\eta)}{2B^*\,(\eta - \chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$- \frac{Q_2}{\pi}\int_{1/B^*}^{\Lambda_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 + B^*\chi)\;(1 + B^*\eta)}{2B^*\,(\eta + \chi)}}\,\mathrm{d}\eta \tag{37}$$

în cazul bordurilor de atac supersonice $\left(l_j > \frac{1}{B}\right)$.

În ceea ce privește funcția $\mathcal{V}_a$, aceasta se determină din relațiile (27), (28). Astfel, de exemplu, aplicînd aceste relații în cazul cînd bordurile de atac ale aripii și plăcii sînt subsonice se obțin pentru această funcție expresiile

$$\mathcal{V}_a = -\frac{A_0 + D_1\chi + D_2\chi^2 + D_3\chi^3}{\chi\sqrt{(\Lambda_1 - \chi)\,(\Lambda_2 + \chi)}\sqrt{\chi^2 - H^2}} +$$

$$+ D_4\,[K(k) - F(\varphi, k)] + D_5\,[E(k) - E(\varphi, k)], \tag{38}$$

pe porțiunile N_1A_1 și N_1R ale aripii și fuzelajului, și

$$\mathcal{U}_a = \mathrm{i}\,\frac{A_0 + G_1\chi + G_2\chi^2 + G_3\chi^3}{\chi\sqrt{(\Lambda_1 - \chi)(\Lambda_2 + \chi)}\sqrt{H^2 - \chi^2}} + \\ + \mathrm{i}G_4\,[K(k_0) - F(\varphi_0, k_0)] + \mathrm{i}G_5\,[E(k_0) - E(\varphi_0, k_0)] \tag{39}$$

pe porțiunea P_1R a plăcii, unde

$$D_1 = A_1 - \frac{A_0 + A_1H + A_2H^2}{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 + H)}\,\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{H}, \tag{40a}$$

$$D_2 = A_2 - \frac{A_0 + A_1H + A_2H^2}{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 + H)}\,\frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{H}, \tag{40b}$$

$$D_3 = \frac{A_0 + A_1H + A_2H^2}{H(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 + H)}, \tag{40c}$$

$$D_4 = \frac{1}{\sqrt{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 + H)}}\left\{A_0\,\frac{\Lambda_1 + \Lambda_2 - 2H}{H} - \right. \\ \left. - A_1(\Lambda_1 - \Lambda_2) + A_2\,[2\Lambda_1\Lambda_2 - (\Lambda_1 + \Lambda_2)H]\right\}, \tag{40d}$$

$$D_5 = \frac{1}{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 + H)\sqrt{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}}\left[(A_0 + \right. \\ \left. + A_2H^2)\,\frac{\Lambda_1\Lambda_2 - H^2}{H^2} - A_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)\right], \tag{40e}$$

$$k = \sqrt{\frac{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 - H)}{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}},\quad \varphi = \arcsin\sqrt{\frac{(\Lambda_1 + H)(\chi - H)}{(\Lambda_1 - \chi)(\chi + H)}}, \tag{40f}$$

și respectiv

$$G_1 = -\frac{A_0\Lambda_1 + (A_1 + A_2\Lambda_1)H^2}{\Lambda_1^2 - H^2}, \tag{41a}$$

$$G_2 = -\frac{A_0}{H^2},\quad G_3 = \frac{A_0\Lambda_1 + (A_1 + A_2\Lambda_1)H^2}{H^2(\Lambda_1^2 - H^2)}, \tag{41b}$$

$$G_4 = \frac{1}{\sqrt{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}}\left(\frac{A_0}{H^2} - A_2\right), \tag{41c}$$

$$G_5 = -\frac{1}{(\Lambda_1 - H)(\Lambda_2 + H)\sqrt{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}}\Big[(A_0 + A_2H^2)\frac{\Lambda_1\Lambda_2 - H^2}{H^2} - A_1(\Lambda_1 - \Lambda_2), \tag{41d}$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{2H(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{(\Lambda_1 + H)(\Lambda_2 + H)}}, \quad \varphi_0 = \arcsin\sqrt{\frac{(\Lambda_2 + H)(H + \chi)}{2H(\Lambda_2 + \chi)}}. \tag{41e}$$

Constantele A_0, A_1, A_2 care intervin în expresiile de mai sus în cazul bordurilor de atac subsonice se determină de condițiile

$$\operatorname{Im}\int_{(-1)^j+1_{1/B}}^{y_j'} \frac{\sqrt{1 - B^2x^2}}{x}\,\mathrm{d}\mathcal{U}_0 = -\alpha_0 \qquad (j = 1, 2), \tag{42a}$$

$$\operatorname{Re}\int_{i\delta'}^{i\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\mathcal{U}_0 = 0, \tag{42b}$$

unde y_j' este abscisa unui punct de pe aripă situat în apropierea bordului A_j, iar δ' este cota unui punct situat pe partea superioară a plăcii.

Această ultimă relație se utilizează și pentru determinarea constantei A care apare în expresia funcției $\mathcal{U}_0$ în cazul bordurilor de atac supersonice.

4. CAZUL OSCILAȚIILOR DE TANGAJ

Considerînd acum mișcarea oscilatorie de tangaj a sistemului considerat definită de relația (1), în acest caz este evident că vor apare atît mișcarea conică corespunzătoare potențialului Φ_1 cît și cea conică de ordin doi corespunzătoare potențialului Φ_2.

Viteza axială redusă q_0 din prima mișcare va fi dată, așa cum am arătat mai sus, de relația (26) în care funcțiile $\mathcal{U}_a$ și $\mathcal{V}_a$ vor avea aceleași expresii ca cele care corespund vitezei axiale reduse q_0^* din cazul precedent, cu singura mențiune că în acest caz în expresiile constantelor din aceste funcții va trebui să se înlocuiască $\zeta_0\, e^{i\delta_1}$ prin $-\alpha_0$.

În ceea ce privește viteza axială redusă q_1^*, aceasta va fi dată pe aripă și fuzelaj și respectiv pe placă de relațiile (31) și (32), unde funcția $F_{200}^{(a)}$ se determină în modul indicat în [3].

Astfel de exemplu, în cazul cînd bordurile de atac ale aripii și plăcii sînt subsonice, se va obține procedînd în același mod pentru funcția $F_{200}^{(a)}$, care este definită prin condițiile la limită

$$\operatorname{Im}\,[F_{200}^{(a)}]_{A_2A_1} = 0, \quad \operatorname{Re}\,[F_{200}^{(a)}]_{-\infty A_2, A_1\infty} = 0, \tag{43}$$

expresia

$$F_{200}^{(a)} = \frac{A_0 + A_1\chi + A_2\chi^2 + \cdots + A_6\chi^6}{\chi^3(\Lambda_1 - \chi)^{3/2}(\Lambda_2 + \chi)^{3/2}}, \tag{44}$$

Constantele A_j care intervin în această expresie se determină în modul indicat în [3].

Primită la redacție la 26 decembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, D. Mateescu, *Mouvement oscillatoire harmonique du système aile-fuselage conique en régime supersonique*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **11**, 5 (1966).
2. D. Mateescu, *Cruciform wings and tails fitted with conical bodies in supersonic flow*, Part I — Conical flow. Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., **13**, 6 (1968).
3. — *Cruciform wings and fitted with conical bodies in Supersonic flow*, Part II — High order conical flows, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **14**, 1 (1969).
4. E. Carafoli, D. Mateescu, A. Năstase, *Wing theory in supersonic flow*, Pergamon Press, 1969.
5. E. Carafoli, *High speed aerodynamics*, Edit. tehnică, București, 1956.
6. J. W. Miles, *The potential theory of unsteady flow*, Cambridge University Press, 1959.

DEZLOCUIREA INTEGRALĂ A FLUIDELOR ÎN MEDII POROASE PE DOMENII MULTIPLU CONEXE

de V. IONESCU, C. COZMA
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

Se studiază problema dezlocuirii în medii omogene cu front de separare între cele două fluide, atunci cînd la momentul inițial fluidul de dezlocuire ocupă un domeniu multiplu conex. Studiul mișcării este redus la o problemă de tip Riemann generalizată pentru funcții olomorfe pe porțiuni, problemă echivalentă cu o ecuație integrală de tip Fredholm.

1. **Introducere.** Într-o lucrare anterioară [1] ne-am ocupat de dezlocuirea cu front de separare a unui fluid de către altul într-un mediu poros omogen, în cazul cînd la momentul inițial frontul de separare L este o curbă simplă, închisă, care cuprinde în interior toate sondele de injecție. Cazul cel mai general care de fapt se întîlnește în practică este acela în care fiecare sondă de injecție în parte, sau grupe de sonde, sînt înglobate în interiorul cîte unui contur simplu închis. Fluidul de injecție ocupă în felul acesta un domeniu multiplu conex, pentru care problemele matematice sînt o generalizare a celor studiate în lucrarea citată.

Problema matematică la care conduce studiul mișcării este o problemă la limită pentru domenii multiplu conexe, în clasa funcțiilor olomorfe pe porțiuni. Față de metoda utilizată de V. L. Danilov în [2], credem că punctul de vedere adoptat de noi în rezolvarea problemei este mai general, putînd fi extins și la cazul dezlocuirii în medii poroase neomogene.

2. **Ipoteze de mișcare. Problema la limită.** Presupunem că în planul complex avem un sistem arbitrar de sonde de injecție plasate în punctele z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de debite Q_i^+ și unul de sonde de extracție plasate în punctele ζ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ de debite Q_j^- (fig. 1). Presupunem că fluidul injectat are viscozitatea μ_1 și ocupă domeniul multiplu conex $D^+ = \bigcup_{r=1}^{p} D_r$ mărginit de curba $L = \bigcup_{r=1}^{p} L_r$, iar fluidul de extracție are viscozitatea μ_2 și ocupă domeniul D^-, complementar lui $D^+ + L$ față de planul complex. Curbele L_r, cunoscute la momentul inițial, satisfac con-

dițiile lui Liapunov. Ne punem problema determinării evoluției în timp a curbelor L_r. Observăm de la început că

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^+ = \sum_{j=1}^{m} Q_j^-.$$

Adoptînd legea ce filtrație a lui Darcy, în fiecare domeniu vitezele de filtrare vor avea expresiile

$$\boldsymbol{V}^+ = -\frac{k}{\mu_1} \nabla p^+; \quad \boldsymbol{V}^- = -\frac{k}{\mu_2} \nabla p^-, \tag{1}$$

unde indicii $(\ )^+$ și $(\ )^-$ se referă la domeniul D^+ respectiv D^-, convenție pe care o vom păstra în mod constant de aici înainte. Aplicînd relațiilor (1) ecuațiile de continuitate

$$\nabla \boldsymbol{V}^+ = 0; \quad \nabla \boldsymbol{V}^- = 0, \tag{2}$$

deducem pentru presiuni ecuațiile

$$\Delta p^+ = 0; \quad \Delta p^- = 0. \tag{3}$$

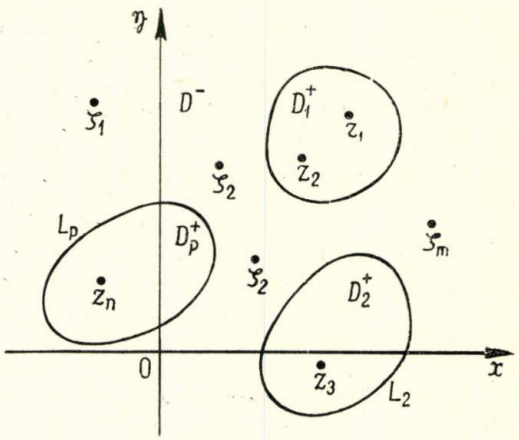


Fig. 1

Pentru determinarea lor introducem funcția olomorfă pe porțiuni (cu excepția singularităților din sonde)

$$f(z) = \begin{cases} p^+(x, y) + iq^+(x, y), & \text{în } D^+, \\ p^-(x, y) + iq^-(x, y), & \text{în } D^-, \end{cases} \tag{4}$$

pentru care vom deduce condițiile la limită pe L din condițiile fizice de mișcare. Acestea sînt

$$p^+ = p^-; \qquad \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial p^+}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial p^-}{\partial n}, \tag{5}$$

prima arătînd egalitatea presiunilor iar a doua egalitatea vitezelor normale la traversarea lui L. Ținînd seama în a doua relație (5) de condițiile lui Cauchy-Riemann deducem

$$q^+ = \lambda q^-; \qquad \lambda = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Înmulțind această relație cu i și adunînd la prima relație (5) găsim pe L condiția

$$\frac{\lambda+1}{2\lambda} f^+(t) - f^-(t) + \frac{\lambda-1}{2\lambda}\overline{f^+(t)} = 0; \qquad t \in L. \tag{6}$$

Problema revine așadar la determinarea funcției olormofe pe porțiuni $f(z)$ care satisface pe L condiția (6).

Deoarece atît în D^+ cît și în D^- sondele introduc singularități, vom căuta funcția $f(z)$ sub forma

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{Q_i^+}}{\prod_{j=1}^{m} (z - \zeta_j)^{Q_j^-}} + F^+(z); & z \in D^+, \\ \dfrac{1}{2\pi\lambda} \ln \dfrac{\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{Q_i^+}}{\prod_{j=1}^{m} (z - \zeta_j)^{Q_j^-}} + F^-(z); & z \in D^-, \end{cases} \tag{7}$$

în care a fost izolată partea regulată $F(z)$ de partea singulară datorată sistemului de sonde considerat. Factorul λ de la numitorul expresiei (7) a lui $f(z)$ în D^- a fost introdus pentru ca termenul liber al condiției la limită (8) să fie uniform la parcurgerea conturelor L_r. Condiția la limită pentru $F(z)$ va fi

$$\frac{\lambda+1}{2\lambda} F^+(t) - F^-(t) + \frac{\lambda-1}{2\lambda}\overline{F^+(t)} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln \left| \frac{\prod_{i=1}^{n} (t - z_i)^{Q_i^+}}{\prod_{j=1}^{m} (t - \zeta_j)^{Q_j^-}} \right|, \tag{8}$$

similară cu (6), unde membrul drept este o funcție hölderiană și uniformă pe L.

3. **Soluția matematică a mișcării.** Problema la limită de mai sus va fi redusă la rezolvarea unei ecuații integrale de tip Fredholm. Pentru aceasta vom nota

$$F(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

după care condiția la limită (8) poate fi scrisă

$$F^+(t) - F^-(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln\left|\frac{\prod_{i=1}^{n}(t-z_i)^{Q_i^+}}{\prod_{j=1}^{m}(t-\zeta_j)^{Q_j^-}}\right| + i\frac{\lambda-1}{\lambda}Q^+(s),$$

unde s este abscisa curbilinie a punctului de afixă t pe L. Din egalitatea precedentă, care exprimă saltul lui $F(z)$ la traversarea lui L, deducem, conform relațiilor lui Plemelj

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-\lambda}{\lambda}G(z) + \frac{1}{2\pi}\frac{\lambda-1}{\lambda}\int_L \frac{Q^+(\sigma)\,d\tau}{\tau - z} \tag{9}$$

(σ este abscisa curbilinie a punctului de afixă τ). Funcția $G(z)$ este analitică pe porțiuni și are expresia

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \ln\left|\frac{\prod_{i=1}^{n}(t-z_i)^{Q_i^+}}{\prod_{j=1}^{m}(t-\zeta_j)^{Q_j^-}}\right|\frac{dt}{t-z}.$$

Pentru deducerea elementelor mișcării la momentul inițial este suficientă cunoașterea funcției $Q^+(x, y)$. De asemenea, după cum se va arăta mai jos, această funcție ajută și la determinarea poziției fronturilor la momentul următor. Ecuația integrală la care ne-am referit va fi dedusă chiar pentru această funcție.

Prin trecerea la limită a relației (9) din D^+ pe L se obține

$$F^+(t) \equiv P^+(s) + iQ^+(s) = \frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}G^+(t) + \frac{i(\lambda-1)}{2\lambda}Q^+(s) +$$

$$+ \frac{\lambda-1}{2\pi\lambda}\int_L \frac{Q^+(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{9'}$$

Separînd în egalitatea precedentă partea imaginară găsim

$$Q^+(s) + \frac{1-\lambda}{\pi(1+\lambda)}\int_L Q^+(\sigma)\,\mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t} = \frac{1-\lambda}{\pi(1+\lambda)}\,\mathrm{Im}\,G^+(t). \quad (10)$$

Dacă avem în vedere că, [3],

$$\mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t} = \frac{\cos(\boldsymbol{n}_R, \boldsymbol{RT})}{r_{RT}}\,\mathrm{d}\sigma,$$

în care s-a notat cu R punctul de afixă τ și abscisă curbilinie σ, T punctul de afixă t, $\boldsymbol{n}_R$, $\boldsymbol{RT}$) unghiul în sens direct făcut de normala interioară la L în punctul R cu vectorul $\boldsymbol{RT}$ și $r_{RT} = |\tau - t|$, ecuația (10) se scrie

$$\pi Q^+(s) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\int_L Q^+(\sigma)\,\frac{\cos(\boldsymbol{n}_R, \boldsymbol{RT})}{r_{RT}}\,\mathrm{d}\sigma_R = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,\mathrm{Im}\,G^+(t), \quad (11)$$

care este o ecuație de tip Fredholm cu nucleu continuu. Deoarece λ este pozitiv și subunitar, rezultă

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} < 1.$$

Conform unei demonstrații dată în [4] pentru un caz mai general, ecuația (11) este rezolvabilă fără condiții suplimentare.

Funcția $Q^+(s)$, soluție a ecuației (11), permite determinarea lui $F(z)$ din relația (9) și a lui $f(z)$ din relațiile (7). Aceasta este suficientă pentru determinarea tuturor elementelor mișcării la momentul inițial.

4. **Evoluția fronturilor.** Ca și în cazul domeniului simplu conex, vom considera evoluția fronturilor determinată de pozițiile lor succesive la diferite momente. Pornind de la configurația inițială considerată cunoscută (fig. 1), elementele obținute mai sus sînt suficiente pentru determinarea pozițiilor lor la momentul următor t_1 suficient de apropiat de momentul inițial. Atîta timp cît curbele L_r își păstrează individualitatea, ele rămîn netede și problema la limită pentru oricare moment din acest interval de timp este identică cu cea de la momentul inițial. Dacă ecuația conturului L_r este $F_r(x, y, T) = 0$, ea va trebui să satisfacă relația [5], [6]

$$\frac{\partial F_r}{\partial T} + \boldsymbol{V}\nabla F_r \equiv \frac{\partial F_r}{\partial T} + V_n\,\frac{\mathrm{d}F_r}{\mathrm{d}n} = 0\,, \quad (12)$$

în care $\boldsymbol{V}$ este viteza moleculelor fluide pe L_r, iar V_n este componenta

sa normală la curbă. V_n poate fi exprimat prin intermediul funcţiei $Q^+(s)$

$$V_n = -\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p^+}{\partial n} = \frac{k}{\mu_1}\frac{\partial q^+}{\partial s} = \frac{k}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{Im}\left[\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\prod_{i=1}^{n}(t-z_i)^{Q_i^+}}{\prod_{j=1}^{m}(t-\zeta_j)^{Q_j^-}}\right] +$$

$$+\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial Q^+}{\partial s},$$

din care se vede că $V_n(s)$ depinde ea însăşi de curba L_r a cărei ecuaţie o determină prin relaţia (12), prin intermediul lui $Q^+(s)$. Rezolvarea exactă a problemei presupune soluţionarea simultană a ecuaţiilor (11) şi (12) în necunoscutele $F_r(x, y, T)$ şi $Q(s, T)$. Acest lucru nu este în general posibil şi de aceea se recurge la un procedeu iterativ, din moment în moment.

5. **Intersecţia fronturilor.** În evoluţia lor în timpul injecţiei, două curbe vecine se pot intersecta la un moment care poate fi determinat, formîndu-se un singur front comun care evoluează din acest moment

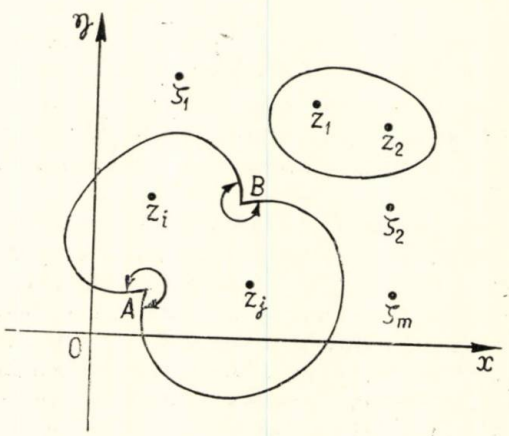


Fig. 2

ca şi celelalte. Particularitatea sa principală este că are puncte unghiulare, aşa cum se vede în figura 2. Trebuie văzut dacă consideraţiile făcute mai sus în punctele ordinare ale contururilor rămîn valabile şi în aceste puncte speciale. Cele stabilite în §§ 1 şi 2 se pot extinde şi la cazul în care

conturul are puncte unghiulare. Expresia (9′) a valorilor limită a lui $F(z)$ în A dată de (9) este, [7], [8]

$$F^+(t) \equiv P^+(s) + \mathrm{i}\,Q^+(s) = \frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\,G^+(t) +$$

$$+ \frac{\mathrm{i}\,\lambda - 1}{\lambda}\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)Q^+(s) + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\lambda - 1}{\lambda}\int_L \frac{Q^+(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - t}, \qquad (13)$$

unde α este valoarea unghiului din A măsurat ca în figura 2. În toate celelalte vîrfuri se poate scrie o relaţie asemănătoare. Pentru a unifica notaţiile vom presupune că α este o funcţie de s (arcul pe contururi) care ia valoarea π în punctele ordinare şi $\alpha \neq \pi$ în vîrfuri (α diferă de la vîrf la vîrf). Cu această convenţie formulele (9′) şi (13) vor căpăta forma unitară

$$F^+(t) \equiv P^+(s) + \mathrm{i}Q^+(s) = \frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\,G^+(t) +$$

$$+ \mathrm{i}\,\frac{\lambda - 1}{\lambda}\left[1 - \frac{\alpha(s)}{2\pi}\right]Q^+(s) + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\lambda - 1}{\lambda}\int_L \frac{Q^+(\sigma)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - t}. \qquad (14)$$

Separînd în (14) partea imaginară se obţine pentru determinarea lui $Q^+(s)$ ecuaţia integrală de tip Fredholm

$$\frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{\lambda - 1}{2\pi}\,\alpha(s)\right]Q^+(s) +$$

$$+ \frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\int_L \frac{Q^+(\sigma)\cos \boldsymbol{n}_{R_i}(\boldsymbol{RT})}{r_{RT}}\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{Im}\,G^+(t). \qquad (15)$$

Nucleul integralei are în acest caz o discontinuitate de speţa întîia în punctele unghiulare, unde este discontinuu şi coeficientul lui $Q^+(s)$. Şi în aceste condiţii se pot aplica metodele generale de rezolvare [9], care cer numai mărginirea nucleului ecuaţiei, condiţie care este îndeplinită în relaţia (15).

Se poate demonstra că funcţia $Q^+(s)$ este continuă pe L, inclusiv punctele unghiulare. Pe baza acestui rezultat vom arăta că şi $F^+(t)$ este continuă în aceleaşi puncte. Să arătăm în primul rînd că $Q^+(s)$ este continuă pentru orice $t \in L$. Scriem pentru aceasta relaţia (15) în A (notînd t_0 afixa lui A şi s_0 abscisa sa curbilinie) sub forma

$$\left[1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda}\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\right]Q^+(s_0) + \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-\lambda}{\lambda}\int_L Q^+(\sigma)\,\mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t_0} =$$

$$= \frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\,\mathrm{Im}\,G^+(t_0),$$

din care scădem relația (10) înmulțită cu $\frac{\lambda+1}{2\lambda}$. Obținem, într-o scriere convenabilă pentru cele ce vor urma

$$\frac{Q^+(s_0)}{\lambda}+\frac{\alpha}{2\pi}\,\frac{\lambda-1}{\lambda}\,Q^+(s_0)-\frac{\lambda-1}{2\lambda}\,Q^+(s)+$$

$$+\frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\int_L Q^+(\sigma)\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\tau-t_0}-\frac{1}{\tau-t}\right]\mathrm{d}\tau=\frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\,\mathrm{Im}[G^+(t_0)-G^+(t)].$$

Deoarece avem egalitățile evidente

$$\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}=\mathrm{i}\pi;\qquad\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t_0}=\mathrm{i}\alpha,\tag{16}$$

ultima relație se poate pune sub forma

$$\frac{Q^+(s_0)}{\lambda}-\frac{\lambda-1}{2\lambda}\,Q^+(s)-\frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\int_L Q^+(s_0)\,\mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t_0}+$$

$$+\frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\int_L Q^+(\sigma)\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\tau-t_0}-\frac{1}{\tau-t}\right]\mathrm{d}\tau=\frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\,\mathrm{Im}[G^+(t_0)-G^+(t)].$$

Descompunînd primul termen din relația precedentă în mod convenabil și ținînd seama de prima relație (16) obținem

$$\frac{\lambda+1}{2\lambda}\,Q^+(s_0)+\frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\int_L Q^+(s_0)\,\mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}-\frac{\lambda+1}{2\lambda}\,Q^+(s)-$$

$$-\frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\int_L Q^+(s_0)\,\mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t_0}+\frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\int_L Q^+(\sigma)\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\tau-t_0}-\frac{1}{\tau-t}\right]\mathrm{d}\tau=$$

$$=\frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\,\mathrm{Im}\,[G^+(t_0)-G^+(t)]$$

sau, după gruparea termenilor, se găsește pentru $Q^+(s)-Q^+(s_0)$ ecuația integrală de tip Fredholm

$$\pi[Q^+(s)-Q^+(s_0)]+\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\int_L(Q^+(\sigma)-Q^+(s_0)]\,\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t_0}-\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}\right]=$$

$$=\frac{1-\lambda}{2\pi\lambda}\,\mathrm{Im}\,[G^+(t)-G^+(t_0)].\tag{17}$$

Funcția $h(s) = Q^+(s) - Q^+(s_0)$ este unic determinată căci $\left|\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right| < 1$ și continuă în orice punct $t \neq t_0$. În $t = t_0$ ea este identic nulă căci termenul liber din (17) este nul, ceea ce înseamnă că

$$\lim_{s \to s_0} Q^+(s) = Q^+(s_0).$$

Scriind explicit soluția ecuației (17) se poate arăta că $Q^+(s)$ este chiar derivabilă.

Acest rezultat poate fi folosit pentru demonstrarea continuității funcției $F^+(t)$ în toate punctele lui L. Pornim pentru aceasta de la expresia (9) a lui $F(z)$. Funcția $G^+(t)$ este evident continuă pe L în orice punct, ca valoare limită a unei integrale de tip Cauchy în care distribuția are această proprietate. Rămîne să arătăm că și valoarea limită pe L a funcției

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q^+(\sigma)}{\tau - z}\,d\tau,$$

din D^+ se bucură de aceeași proprietate; mai mult, ea este derivabilă pe L dacă și $Q^+(\sigma)$ este. Avem

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}Q^+(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q^+(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau,$$

$$\Phi^+(t_0) = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)Q^+(s_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q^+(\sigma)}{\tau - t_0}\,d\tau.$$

Din aceste relații se deduce prin scădere

$$|\Phi^+(t) - \Phi^+(t_0)| = \left|\frac{1}{2}Q^+(s) - \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)Q^+(s_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_L Q(\sigma)\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - t_0}\right]d\tau\right|$$

care, datorită relațiilor (16) mai poate fi scrisă sub forma

$$|\Phi^+(t) - \Phi^+(t_0)| = \left|\frac{1}{2}[Q^+(s) - Q^+(s_0)] - \frac{Q^+(s_0)(t - t_0)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{(\tau - t)(\tau - t_0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{t - t_0}{2\pi i}\int_L \frac{Q^+(\sigma)\,d\tau}{(\tau - t)(\tau - t_0)}\right| \leqslant \frac{A}{2}|t - t_0| +$$

$$+ \frac{A|t - t_0|^2}{2\pi}\left|\int_L \frac{d\tau}{(\tau - t)(\tau - t_0)}\right|, \qquad (18)$$

unde s-a utilizat condiția lui Lipschitz

$$|Q^+(s) - Q^+(s_0)| \leqslant A|t - t_0|.$$

Deoarece

$$\frac{|t - t_0|}{2\pi}\left|\int_L \frac{d\tau}{(\tau - t)(\tau - t_0)}\right| = \frac{\pi - \alpha}{2\pi},$$

inegalitatea (18) se scrie

$$|\Phi^+(t) - \Phi^+(t_0)| \leqslant \frac{A}{2}\left(1 + \frac{\pi - \alpha}{\pi}\right)|t - t_0|,$$

ceea ce justifică afirmația făcută mai sus.

Rezultatele obținute arată că punctele de vîrf ale conturului L se comportă în mișcare ca și celelalte puncte ordinare; vitezele, presiunile și toate celelalte elemente hidrodinamice ale mișcării se extind în aceste puncte prin continuitate.

Punctele unghiulare pot apare nu numai datorită intersecției conturelor de separare, ci și atunci cînd un contur în evoluția sa întîlnește o sondă de extracție. Dacă presupunem că în acest moment sonda de extracție respectivă este închisă, evoluția ulterioară a conturului se poate determina după procedeul indicat mai sus. O situație specială apare în cazul în care se continuă extracția și prin această sondă, datorită faptului că apar discontinuități chiar pe contur. Rezolvarea problemei în acest caz cere un studiu special de care nu ne vom ocupa în această lucrare.

Considerațiile de mai sus au fost făcute în ipoteza că mediul poros omogen este nelimitat. Vom arăta în continuare că situația în care mediul poros este limitat de o curbă impermeabilă C conținînd în interior sondele de injecție și de extracție, precum și fronturile de dezlocuire (fig. 3), se reduce fără dificultate la cazul studiat. Într-adevăr, dacă vom efectua o transformare conformă a interiorului domeniului mărginit de curba C pe semiplanul superior al planului Z, vom obține o configurație geometrică ca în figura 4, iar condiția la limită se va transpune în mod asemănător. Considerînd acum configurația geometrică simetrică în semiplanul inferior ajungem la o situație asemănătoare cu cea din figura 1; în acest caz axa OX va fi linie de curent în tot timpul mișcării. Prin transformarea conformă efectuată, conturul L_r, care în planul z se sprijină pe curba C, în planul Z se sprijină pe axa reală. În cazul general tangenta la contur în punctele de întîlnire A_1 și B_1 formează cu axa OX un unghi diferit de $\frac{\pi}{2}$. Prin simetrizarea configurației transformate în planul Z, punctele A_1 și B_1 vor fi unghiulare, ca și punctele A și B din figura 2. Conform celor arătate mai sus însă, relațiile stabilite în punctele ordinare sînt valabile și în vîrfuri.

Metoda folosită la studiul dezlocuirii pe domenii simplu conexe poate fi aşadar aplicată şi la cazul mai general al domeniilor multiplu

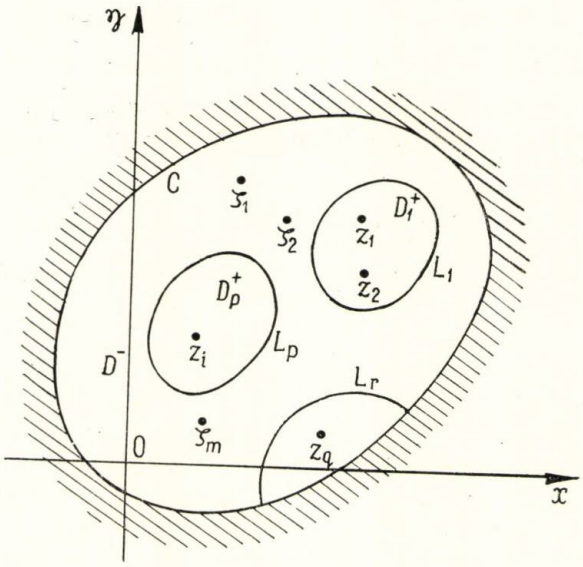


Fig. 3

conexe, unde trebuie făcute completările menţionate în punctele unghiulare. Ceva mai mult, ea poate fi extinsă şi la cazul dezlocuirii în medii neomogene.

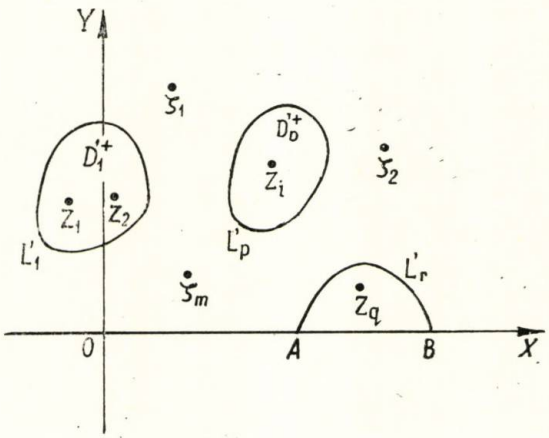


Fig. 4

Primită la redacţie la 24 decembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. V. Ionescu, C. Cozma, *Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase omogene*, St. cerc. mec. apl., **27**, 7 (1968).
2. V. L. Danilov, *Ob odnovremennom uravnenii nescolkimi konturami neftenosnosti s ucetom razliciia veazcostei vodî i nefti*, Izv. Kazan. Fil. A. N. SSSR, *9* (1956).
3. C. Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei, București, 1959.
4. C. Jacob, *Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites*, Applications à l'hydrodynamique, Thèse, Cluj, 1935.
5. N. Cristea, *Hidraulică subterană*, Edit. tehnică, București, 1956.
6. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Edit. Academiei, București, 1966.
7. N. I. Mushelișvili, *Singulearnie integralnie uravneniia*, Fizmatiz, 1962, Ediția a II-a.
8. F. D. Gahov, *Kraevie zadaci*, Gostehizdat, Moskva, 1963.
9. V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare*, Edit. tehnică, București, 1956.

UTILIZAREA TEXTOLITULUI ÎN CONSTRUCȚIA GHIDAJELOR RECTILINII PLANE

II. CERCETĂRI ASUPRA ALUNECĂRII INTERMITENTE LA CUPLELE DE FRECARE TEXTOLIT-FONTĂ

de. V. CALCAN, L. CIGAN, N. RĂDĂCINĂ
C.N.C.S., București

Lucrarea prezintă rezultatele unor încercări parțiale din cadrul unui program de cercetări cu tema „Utilizarea textolitului în construcția ghidajelor rectilinii plane", având ca obiect studierea posibilităților de folosire în construcția ghidajelor rectilinii plane a textolitelor de fabricație românească, respectiv textolitele tip *M* și *E*. Pentru comparație, s-au încercat în paralel dytronul și materialul plastic GFG, de fabricație germană și fonta Fc. 25.

1. OBIECTUL LUCRĂRII

Într-o lucrare anterioară [1] s-au prezentat rezultatele încercărilor de uzură efectuate cu cuple de frecare textolit-fontă și s-au reliefat posibilitățile de utilizare în construcția ghidajelor rectilinii plane a textolitelor românești.

Lucrarea de față redă în continuare o serie de încercări destinate studierii comportării la frecare a acestor cuple, în special a aspectelor legate de mișcarea intermitentă a suprafețelor în frecare, urmărindu-se influența principalilor factori ai frecării : viteza de alunecare, presiunea de contact, calitatea lubrifiantului și natura materialelor cuplei de frecare.

S-au cercetat materialele plastice armate de tip textolit din producția curentă a Fabricii de cabluri și materiale electroizolante din București, respectiv textolitele tip *E* și *M*. Pentru comparație, s-au încercat în paralel epruvete din dytron și material plastic GFG — de fabricație germană, folosite pentru construcția ghidajelor rectilinii plane ale unor mașini-unelte grele, precum și epruvete din fontă cenușie superioară, calitatea Fc 25 (STAS 568-61), utilizată la turnarea batiurilor mașinilor — unelte grele.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 3, P. 725–740, 1970

Modul de obţinere a textolitelor tip E şi M, caracteristicile materialelor de armare şi condiţiile de presare a plăcilor sînt redate în [2]. Compoziţia chimică a fontei Fc 25 : 2,80% C; 0,50% C legat; 1,80 % Si; 0,80% Mn; 0,064% S; 0,106 % P, iar duritatea 187 HB.

2. INSTALAŢIA DE ÎNCERCARE

Pentru determinarea coeficienţilor de frecare şi studierea fenomenelor ce apar în cuplele de frecare textolit-fontă în cazul mişcării de alunecare alternativă la viteze de deplasare mici, s-a utilizat standul experimental prezentat în figura 1, prevăzut cu două posturi de lucru şi echipament pentru măsurători de precizie.

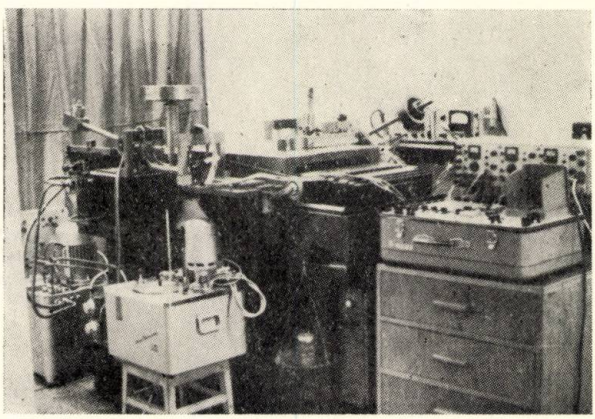


Fig. 1. — Standul experimental pentru modelarea frecării de alunecare alternativă şi a fenomenului de alunecare intermitentă.

Acţionarea hidraulică a standului permite reglarea fină a vitezei de alunecare în limitele $v = 0{,}002 - 0{,}4$ m/min, încărcarea maximă admisibilă fiind de 70 kgf.

În figura 2 se redă o secţiune printr-un post de lucru, în care s-a evidenţiat cadrul elastic.

Cu ajutorul mărcilor tensometrice R_1, T_1 şi R_2, T_2, lipite pe lamele elastice 5, s-a înregistrat cu un oscilograf variaţia forţei de frecare şi evoluţia fenomenului de alunecare intermitentă în funcţie de viteza de alunecare, schema-bloc a circuitului de înregistrare fiind identică cu cea folosită în [3].

Aşa cum rezultă din diagrama de tarare, prezentată în figura 3, deformaţia lamelor elastice este proporţională cu forţa de frecare în întreg domeniul cercetat.

Dreapta obţinută are ecuaţia $f = 0{,}25561\ F$ pentru o rigiditate a lamelor elastice de 39,480 kgf/cm.

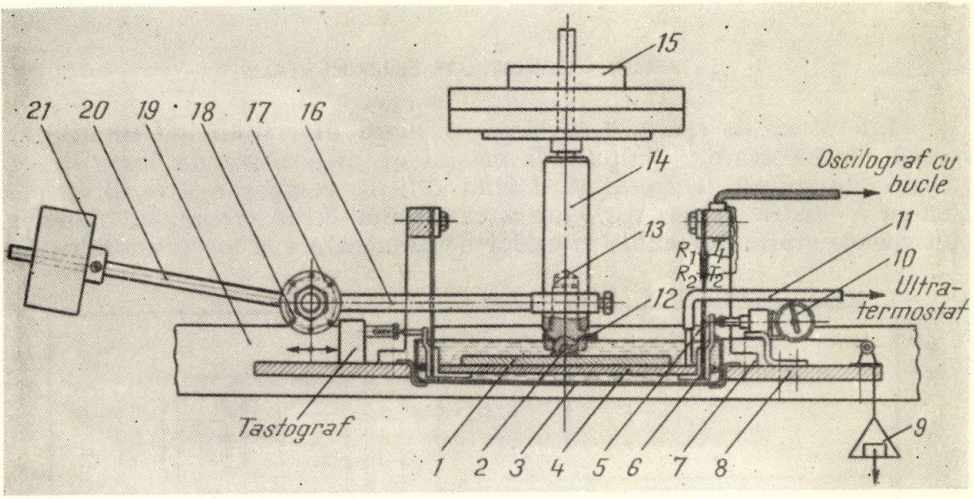


Fig. 2. — Secţiune printr-un post de lucru :

1 — epruvetă fixă; *2* — epruvetă mobilă; *3* — baie de ulei cu pereţi dubli; *4* — placă; — *5* lame elastice; *6* — colţar; *7* — cadru rigid; *8* — suport; *9* — talerul pentru tarare; *10* — comparator pentru măsurarea săgeţii lamelor elastice; *11* — tub de legătură între baia de ulei şi ultratermostat; *12* — nucă cu ghidaj conic; *13* — poanson port nucă; *14* — tijă de presiune; *15* — greutăţi; *16* — braţ de antrenare; *17* — articulaţie; *18* — traversă solidară cu sania standului; *19* — sania standului; *20* — tijă; *21* — contragreutate.

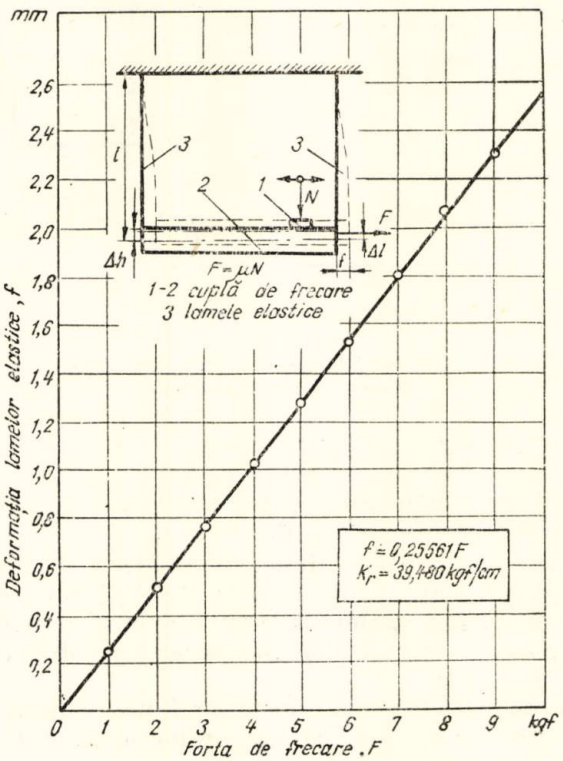


Fig. 3. — Diagrama de tarare şi schema deformării cadrului elastic faţă de forţa de frecare F şi forţa normală de apăsare N :

1, 2 — cupla de frecare; *3* — lamele elastice.

3. STABILIREA CONDIȚIILOR EXPERIMENTALE

Literatura de specialitate oferă o mare diversitate de condiții și metode de încercare, de tipuri de mașini și dispozitive de înregistrare folosite de diferiți cercetători, făcînd dificilă compararea rezultatelor. Pentru a ilustra marea varietate a condițiilor de încercare, în figura 4 sînt redate grafic domeniile vitezelor de alunecare v și ale presiunilor de

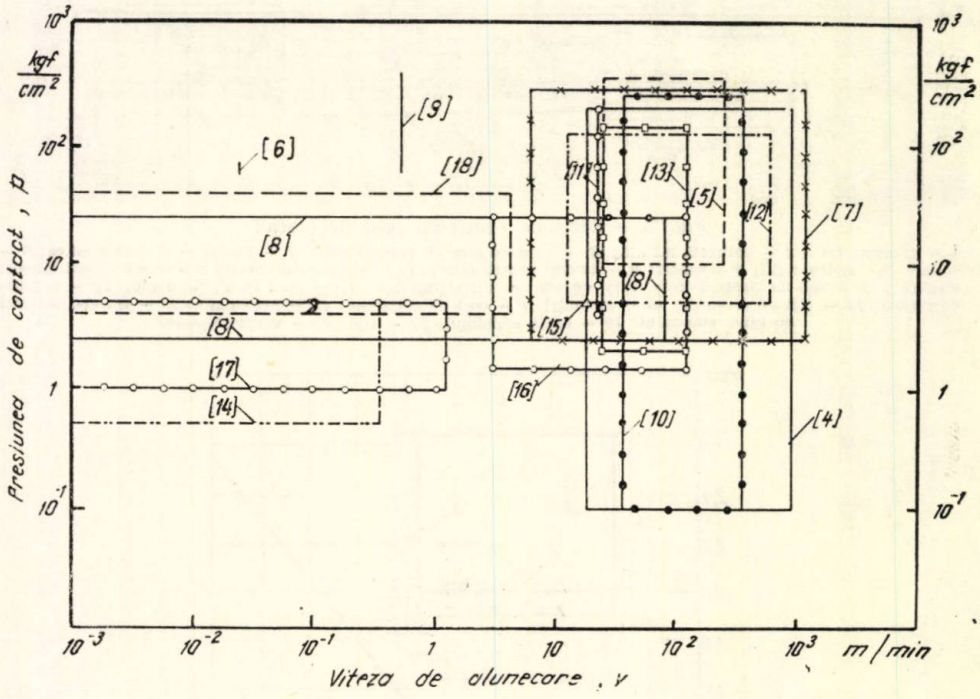


Fig. 4. — Domenii explorate pentru determinarea coeficienților de frecare în cuplele metal-polimer și polimer-metal.

contact p citate în literatură pentru determinarea coeficienților de frecare în cuplele metal-polimer și polimer-metal.

Pentru stabilirea condițiilor experimentale ale încercărilor prezentate în această lucrare, s-au avut în vedere:

— domeniile vitezelor de alunecare relativă și ale presiunilor de contact considerate de alți cercetători la determinarea coeficienților de frecare și studierea fenomenelor de alunecare intermitentă;

— caracteristicile instalațiilor de încercare utilizate și condițiile experimentale adoptate;

— limitele de variație a parametrilor funcționali ai ghidajelor mașinilor-unelte grele din programul de producție al Fabricii de mașini-unelte și agregate din București.

Analiza condițiilor experimentale ale diferitelor încercări de laborator arată că viteza de alunecare variază între 0,008 m/min [17] și

1200 m/min [7], în timp ce viteza de avans a organelor mobile ale ansamblurilor de ghidare este cuprinsă între 0,006 m/min — avans continuu la unele mașini orizontale de alezat și frezat și 4,0 m/min — avans rapid la mașinile de frezat longitudinal cu portal. Similitudinea cu situațiile din practică este evidentă în [18], domeniul de viteze explorat fiind 0,001—4,0 m/min.

Presiunea de contact a fost de asemenea studiată în limite mari de variație, între minimum 0,1 kgf/cm² [4] și maximum 400 kgf/cm² [9]. Valorile cele mai apropiate de presiunea de contact admisibilă în ghidajele mașinilor-unelte grele — respectiv 10 kgf/cm² pentru viteze de deplasare mici și 4 kgf/cm² în cazul vitezelor de deplasare mari [19] — au fost utilizate în lucrările [14], [15], [17] și [18].

În ceea ce privește ungerea, variantele adoptate includ frecarea uscată, lubrifierea suprafețelor de frecare cu uleiuri aditivate sau neaditivate și Mo S_2, precum și prezența apei, emulsiilor sau a lichidelor de răcire.

Ținînd seama de obiectul lucrării, pentru determinarea coeficienților de frecare și studierea fenomenelor de frecare în cuplele textolit-fontă, s-au ales domeniile :

— viteza de alunecare : $v = 0{,}002 - 0{,}300$ m/min ;
— presiunea de contact : $p = 0 - 6$ kgf/cm².

Pentru ungere s-au folosit trei tipuri de uleiuri, caracteristicile lor fiind redate în tabela 1.

Tabela 1

Caracteristicile uleiurilor utilizate

Caracteristica	Ulei 405 AT	Ulei G-40-5	Ulei G-95-5
Densitate relativă la 15°C, max.	0,895	0,900	0,917
Viscozitate la 50°C, în °E	5,10	5,90	11,3
Indice de viscozitate Dean Davis, min.	90	85	85
Aciditate minerală și alcalinitate	lipsă	lipsă	lipsă
Aciditate organică, în mg KOH/g ulei, max.	0,05	—	—
Impurități mecanice	lipsă	lipsă	lipsă

În toate cazurile s-au cercetat cinci cuple de frecare, epruvetele mobile fiind confecționate din textolit tip *E*, textolit tip *M*, dytron, material plastic GFG și fontă Fc 25, iar cele fixe din fontă Fc 25.

În funcție de aspectele urmărite, epruvetele mobile au avut dimensiunile Ø = 16 mm, 20 × 20 mm, 20 × 30 mm și 18 × 60 mm, iar epruveta fixă 25 × 300 mm.

Epruvetele mobile au fost prelucrate mecanic prin frezare fină, $R_z = 2{,}8$ μm, iar cele fixe prin rectificare cu periferia pietrei, $R_z = 0{,}8$ μm.

Epruvetele din material plastic au fost prerodate în baie de ulei pe un parcurs de frecare de 500 m, la presiunea de contact $p = 5$ kgf/cm² și viteza de alunecare $v = 0{,}200$ m/min.

4. DETERMINAREA VALORILOR NUMERICE ALE COEFICIENȚILOR DE FRECARE

Încercările s-au efectuat în următoarele condiții :
— viteza de alunecare : $v = 0{,}01$ m/min ;
— presiunea de contact : $p = 5$ kgf/cm^2 ;
— sistemul de ungere : baie de ulei ;
— lubrifiant : ulei 405 aditivat ;
— dimensiunile epruvetelor :
  — epruveta mobilă : Ø = 16 mm ;
  — epruveta fixă : 25 × 300 mm.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabela 2.

Tabela 2

Valorile numerice ale coeficienților de frecare

Cupla de frecare	μ_s	μ_c
Textolit M — Fontă Fc 25	0,200400	—
Textolit *E* — Fontă Fc 25	0,148670	—
Dytron — Fontă Fc 25	0,214780	0,106730
GFG — Fontă Fc 25	0,154460	—
Fontă Fc 25 — Fontă Fc 25	0,163930	—

Se remarcă faptul că, în condițiile date, cupla de frecare textolit *E* — fontă Fc 25 a înregistrat valorile minime, iar dytron — fontă Fc 25 valorile maxime, apărînd totodată și mișcarea intermitentă a suprafețelor în frecare.

5. ALUNECAREA INTERMITENTĂ

Avînd în vedere importanța alunecării intermitente pentru ghidajele mașinilor-unelte care lucrează în domeniul vitezelor de alunecare mici, s-a considerat concludentă viteza de alunecare $v = 0{,}01$ m/min și gama presiunilor de contact $p = 2, 3, 4$ și 5 kgf/cm^2. Totodată, pentru a mări posibilitățile de comparație cu cercetările efectuate în alte țări, s-au folosit patru dimensiuni de epruvete : Ø = 16 mm ; 20 × 20 mm ; 20 × 30 mm și 18 × 60 mm.

Rezultatele experimentale au permis precizarea alurii curbelor care redau dependența dintre forța de frecare maximă în perioada de lipire (F_{max}) și forța de frecare minimă în perioada de alunecare (F_{min}), respectiv coeficienții de frecare static (μ_s) și cinetic (μ_c) și factorii de influență analizați : presiunea de contact și mărimea suprafeței de frecare. Astfel, relațiile $F_{max} = f(p, A)$ și $\mu_s = f(p, A)$ au un caracter liniar, în timp ce $F_{min} = f(p, A)$ și $\mu_c = f(p, A)$ au o alură parabolică. Pentru a avea o precizie cît mai ridicată, dependențele analizate au fost exprimate prin ecuații.

În cazul forței de frecare maximă și coeficientului de frecare static s-a folosit criteriul grafic de concordanță, dreptele $F_{max} = f(p, A)$ și

$\mu_s = f(p, A)$ trecînd prin originea coordonatelor. Ecuaţiile pot fi scrise sub forma

$$F_{max_i} = mp_i , \tag{1}$$

coeficientul unghiular m fiind dat de

$$m = \frac{\sum_1^5 F_{max_i}}{\sum_1^5 p_i} .$$

Pentru reprezentarea grafică a dependenţelor $F_{min} = f(p, A)$ şi $\mu_c = f(p, A)$ s-a utilizat metoda valorilor medii, care conduce la rezul-

Tabela 3

Ecuaţiile $F_{max} = f(p)$ şi $F_{min} = f(p)$

Cuplul de frecare	Dimensiunile epruvetelor mobile mm	Forţa de frecare	
		F_{max}	F_{min}
Textolit *M* / Fontă Fc 25	Ø16	0,380520 p	Fără alunecare intermitentă
	20×20	0,799536 p	0,974550 p − 0,180533 p^2 + 0,005525 p^3
	20×30	1,557571 p	1,250330 p − 0,442750 p^2 + 0,036920 p^3
	18×60	1,591421 p	1,844670 p − 0,429000 p^2 + 0,034330 p^3
Textolit *E* / Fontă Fc 25	Ø16	0,311144 p	Fără alunecare intermitentă
	20×20	0,726537 p	0,757920 p − 0,021033 p^2 + 0,010350 p^3
	20×30	1,024733 p	1,230750 p − 0,217230 p^2 + 0,011217 p^3
	18×60	1,556334 p	2,272100 p − 0,480620 p^2 + 0,197900 p^3
Dytron / Fontă Fc 25	Ø16	0,409600 p	0,392542 p − 0,032400 p^2 + 0,015342 p^3
	20×20	0,746035 p	0,881948 p − 0,141035 p^2 + 0,005121 p^3
	20×30	1,120013 p	0,825683 p − 0,198300 p^2 + 0,018543 p^3
	18×60	1,878829 p	1,088330 p − 0,317500 p^2 + 0,024166 p^3
GFG / Fontă Fc 25	Ø16	0,321586 p	Fără alunecare intermitentă
	20×20	0,573743 p	Fără alunecare intermitentă
	20×30	1,132557 p	1,563750 p − 0,630625 p^2 + 0,88125 p^3
	18×60	1,976479 p	1,211330 p − 0,380000 p^2 + 0,024670 p^3
Fontă Fc 25 / Fontă Fc 25	Ø16	0,325696 p	Fără alunecare intermitentă
	20×20	0,708239 p	Fără alunecare intermitentă
	20×30	1,192907 p	1,061250 p − 0,254370 p^2 + 0,016875 p^3
	18×60	1,840350 p	1,140330 p − 0,270830 p^2 + 0,017830 p^3

tate comparabile cu cele obţinute prin metoda celor mai mici pătrate [20]. Forma generală a ecuaţiei adoptate este

$$F_{min_i} = b\,p_i + c\,p_i^2 + d\,p_i^3 \tag{2}$$

în care $i = 2, 3, 4, 5$.

După determinarea coeficienţilor unghiulari m şi a constantelor arbitrare b, c şi d, s-au obţinut ecuaţiile $F_{max} = f(p)$ şi $F_{min} = f(p)$ date în tabela 3, care au servit la calcularea valorilor forţelor de frecare maximă şi minimă — respectiv a coeficienţilor de frecare static şi cinetic — curbele corespondente fiind prezentate în figurile 5 şi 6.

5.1. INFLUENŢA PRESIUNII DE CONTACT

Dependenţa dintre forţa de frecare F_{max} şi F_{min} şi variaţia presiunii de contact p este ilustrată în figura 5 pentru epruvetele mobile Ø = 16 mm, viteza de alunecare $v = 0{,}01$ m/min şi ungere cu ulei 405 AT.

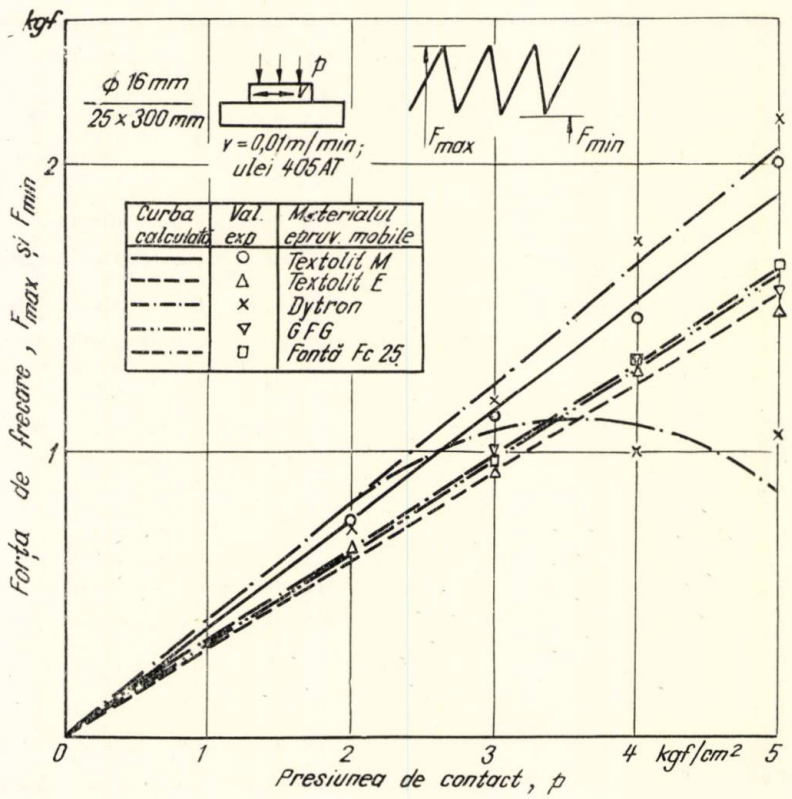


Fig. 5. — Influenţa presiunii de contact asupra forţei de frecare.

În perioada de lipire forța de frecare crește liniar cu mărirea presiunii de contact, respectiv $F_{max} = mp$. Cele mai mari valori s-au înregistrat la dytron, iar cele mai mici la textolitul tip *E*.

Fenomenul de alunecare intermitentă a apărut numai la cupla de frecare dytron-fontă Fc 25, în perioada de alunecare curba avînd o alură parabolică.

5.2. INFLUENȚA MĂRIMII SUPRAFEȚEI DE ALUNECARE

Pentru a sesiza influența mărimii suprafeței de alunecare, s-au încercat epruvete mobile cu dimensiunile 18 × 60 mm, 20 × 30 mm, 20 × 20 mm și Ø = 16 mm, respectiv cu suprafețele de 10,80; 6,00; 4,00 și 2,00 cm². Alura curbelor $F_{max} = f(p, A)$ și $F_{min} = f(p, A)$ este prezentată în figura 6 pentru viteza de alunecare $v = 0{,}01$ m/min și ungere cu ulei 405 aditivat.

La toate cuplele de frecare și dimensiunile de epruvete încercate forța de frecare maximă crește proporțional cu presiunea de contact; în același timp, mărirea suprafeței epruvetelor mobile de la 2,00 la 10,80 cm² conduce la creșterea forței de frecare maxime.

Înclinația spre alunecare intermitentă s-a manifestat cel mai evident la cupla de frecare dytron-fontă Fc 25, fenomenul apărînd la toate dimensiunile de epruvete cercetate (la epruvetele cu Ø = 16 mm pentru $p > 3$ kgf/cm², la 20 × 20 mm pentru $p > 2$ kgf/cm², iar la 20 × 30 mm și 18 × 60 mm chiar de la $p > 1$ kgf/cm²).

La cuplele de frecare textolit tip *M* — fontă Fc 25 și textolit tip *E* — fontă Fc 25 nu s-a înregistrat alunecare intermitentă la epruvetele cu Ø = 16 mm. Fenomenul a apărut la prima cuplă la epruvetele de 20 × 20 mm pentru $p > 2$ kgf/cm², iar la epruvetele 20 × 30 mm și 18 × 60 mm pentru $p > 1$ kgf/cm². La a doua cuplă fenomenul s-a semnalat la epruvetele 20 × 20 mm pentru $p > 3$ kgf/cm², iar la epruvetele 20 × 30 mm și 18 × 60 mm pentru $p > 2$ kgf/cm².

Cuplele de frecare material plastic GFG — fontă Fc 25 și fontă Fc 25 — fontă Fc 25 n-au înregistrat fenomene de alunecare intermitentă decît la epruvetele 20 × 30 mm și 18 × 60 mm, pentru $p > 1$ kgf/cm².

Sub aspectul frecvenței apariției fenomenului de alunecare intermitentă cea mai bună comportare au avut-o materialul plastic GFG și fonta Fc 25, iar cea mai slabă dytronul.

Din analiza curbelor se desprinde observația generală că înclinația spre apariția fenomenului de alunecare intermitentă și amplitudinea acestui fenomen se accentuează cu mărirea presiunii de contact și creșterea suprafeței de frecare. Cele mai mari amplitudini s-au înregistrat la dytron, material plastic GFG și fontă Fc 25 — la care alunecarea intermitentă s-a evidențiat la suprafețe de frecare mari chiar de la $p > 1$ kgf/cm², iar cele mai mici amplitudini la textolitul tip *M*, urmat de textolitul tip *E*, fapt care ilustrează capacitatea acestor materiale de a amortiza vibrațiile.

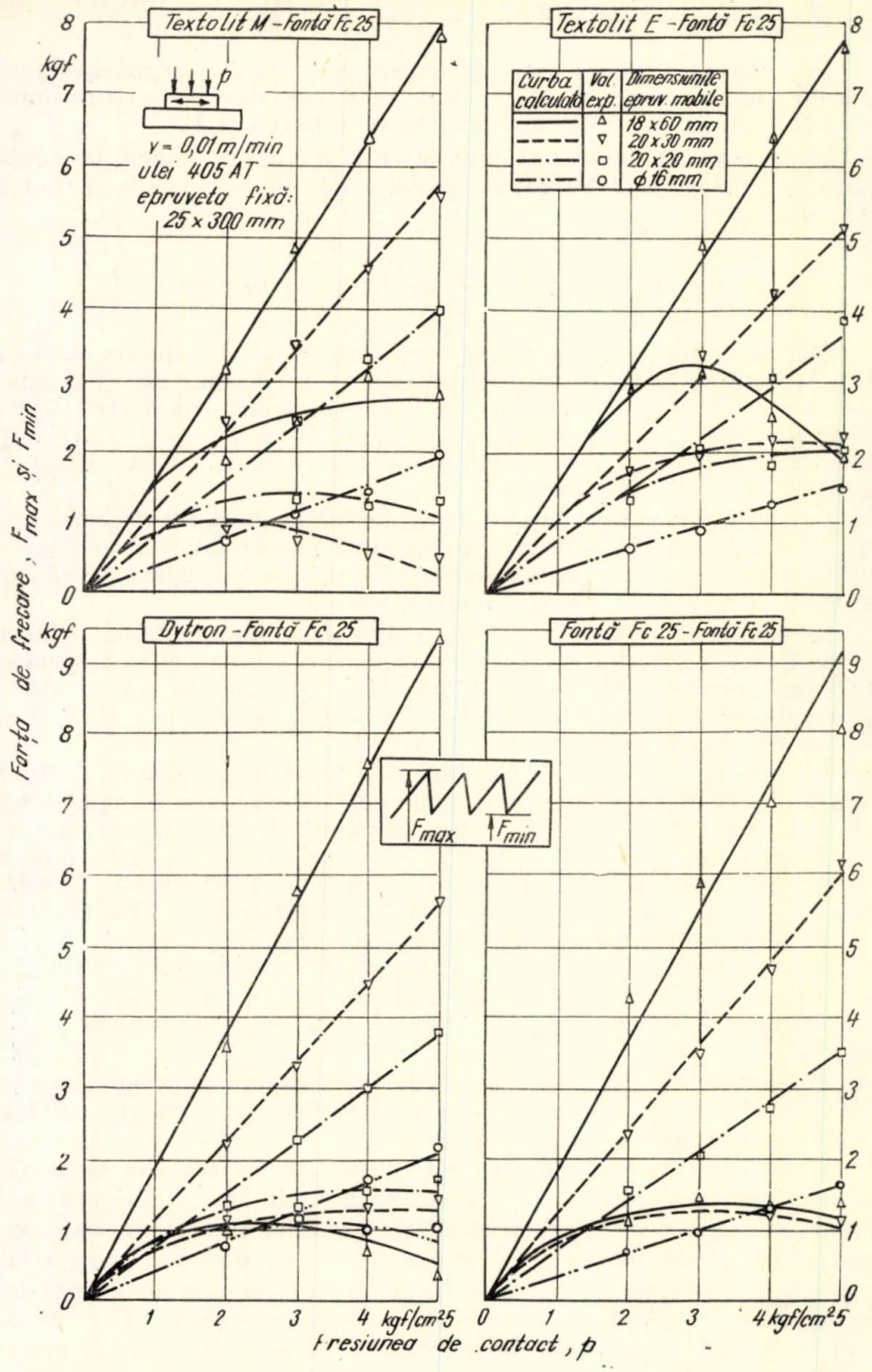


Fig. 6. — Influența mărimii suprafeței de alunecare și a presiunii de contact asupra **forței** de frecare.

5.3. INFLUENȚA VITEZEI DE ALUNECARE

Încercările s-au efectuat pe epruvete cu dimensiunile 20 × 20 mm, în domeniul vitezelor de alunecare $v = 0{,}002-0{,}300$ m/min, la presiunea de contact $p = 6$ kgf/cm² și ungere cu ulei 405 aditivat.

Comportarea celor cinci cuple de frecare este prezentată în figura 7.

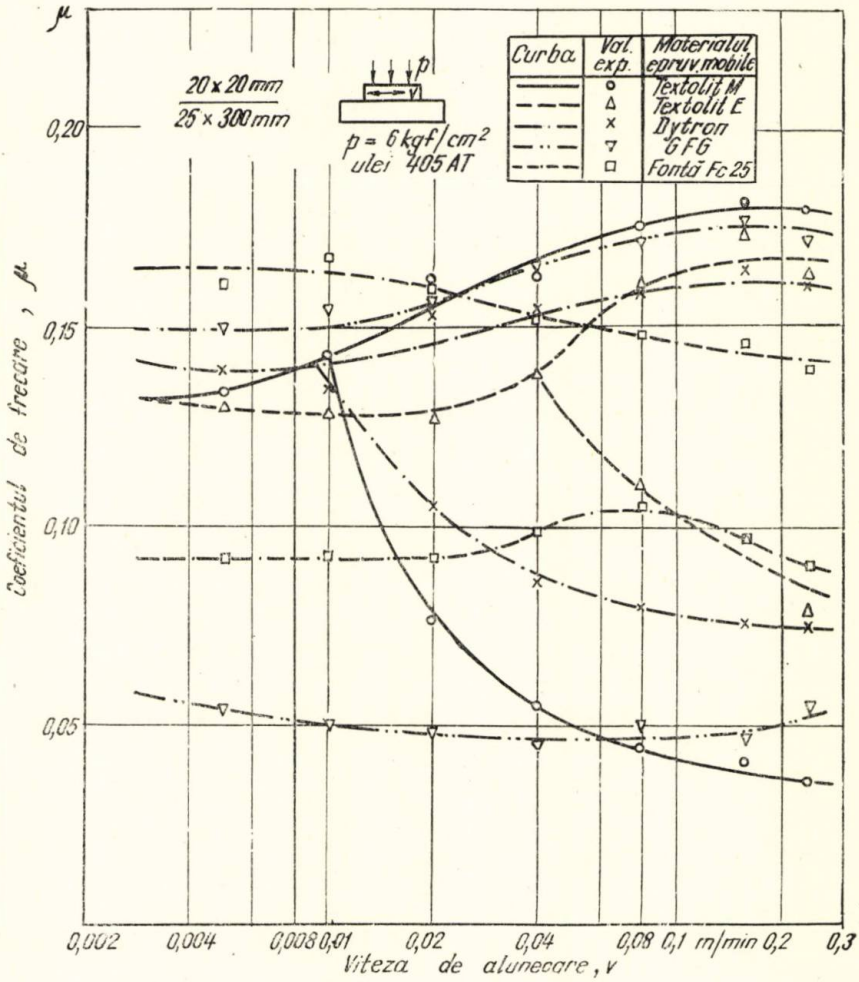


Fig. 7. — Influența vitezei de alunecare asupra coeficientului de frecare în cazul lubrifierii cu ulei 405 aditivat.

Se remarcă faptul că la nici o cuplă de frecare nu s-a sezisat în mod distinct fenomenul de alunecare intermitentă, fiind evidentă însă prezența vibrațiilor, care ilustrează slaba capacitate de amortizare a uleiului 405 aditivat.

La cupla de frecare fontă Fc 25 — fontă Fc 25 se observă tendința de convergență pînă la $v = 0{,}08$ m/min și de divergență peste această valoare, a curbelor $\mu_s = f(v)$ și $\mu_c = f(v)$. În prima porțiune a curbelor este posibilă coexistența vibrațiilor și a fenomenului de alunecare intermitentă, iar în cea de a doua, în care curba $\mu_c = f(v)$ are un caracter descendent, se manifestă vibrațiile proprii ale sistemului elastic, confirmîndu-se rezultatele obținute de [21].

În cazul cuplei de frecare material plastic GFG — fontă Fc 25 vibrațiile proprii, combinate cu alunecarea intermitentă, sînt prezente în tot domeniul de viteze cercetat, coeficientul de frecare cinetic menținîndu-se practic constant în jurul valorii $\mu_c = 0{,}05$.

La celelalte trei cuple de frecare nu a apărut fenomenul de alunecare intermitentă. Vibrațiile proprii ale sistemului elastic s-au semnalat de la $v = 0{,}01$ m/min pentru textolit tip *M* și dytron și de la $v = 0{,}04$ m/min pentru textolit tip *E*, amplitudinea vibrațiilor mărindu-se cu creșterea vitezei de alunecare. La $v = 0{,}240$ m/min diferența $\mu_s - \mu_c$ are valorile 0,144 pentru textolitul tip *M*, 0,087 pentru dytron și 0,085 pentru textolitul tip *E*.

Cea mai bună comportare la alunecare a avut-o cupla de frecare textolit tip *E* — fontă Fc 25, care a înregistrat valori minime ale coeficientului de frecare static ($\mu_s = 0{,}127 - 0{,}174$), absența fenomenului de alunecare intermitentă și amplitudine mică a vibrațiilor proprii ale sistemului elastic. Cea mai slabă comportare a revenit cuplelor de frecare material plastic GFG — fontă Fc 25 și fontă Fc 25 — fontă Fc 25.

5.4. INFLUENȚA CALITĂȚII LUBRIFIANTULUI

În afara uleiului 405 aditivat, aflat în fabricație curentă și folosit pentru lubrifierea ghidajelor mașinilor-unelte, s-au experimentat și uleiurile G-40-5 și G-95-5, a căror fabricație industrială începe în acest an și care au caracteristici similare uleiurilor străine, recomandate pentru ungerea ghidajelor mașinilor-unelte grele.

Încercările s-au efectuat în condițiile specificate la paragraful 5.3, rezultatele fiind prezentate în figura 8.

Utilizarea uleiului G-40-5 conduce la îmbunătățirea evidentă a procesului de frecare față de uleiul 405 aditivat prin:

— micșorarea generală a valorilor coeficienților de frecare, grupate în jurul lui $\mu = 0{,}10$ și a dependenței lor față de variația vitezei de alunecare;

— diminuarea diferențierilor datorite naturii și calității materialelor cuplelor de frecare;

— absența vibrațiilor proprii ale sistemului elastic, respectiv buna capacitate de amortizare a uleiului;

— reducerea tendinței de apariție a fenomenului de alunecare intermitentă.

În domeniul de viteze studiat, $v = 0{,}002 - 0{,}300$ m/min, cea mai bună comportare au avut-o cuplele de frecare textolit tip *E* — fontă Fc 25, textolit tip *M* — fontă Fc 25 și fontă Fc 25 — fontă Fc 25, la care nu s-au înregistrat fenomene de alunecare intermitentă, iar coeficienții de

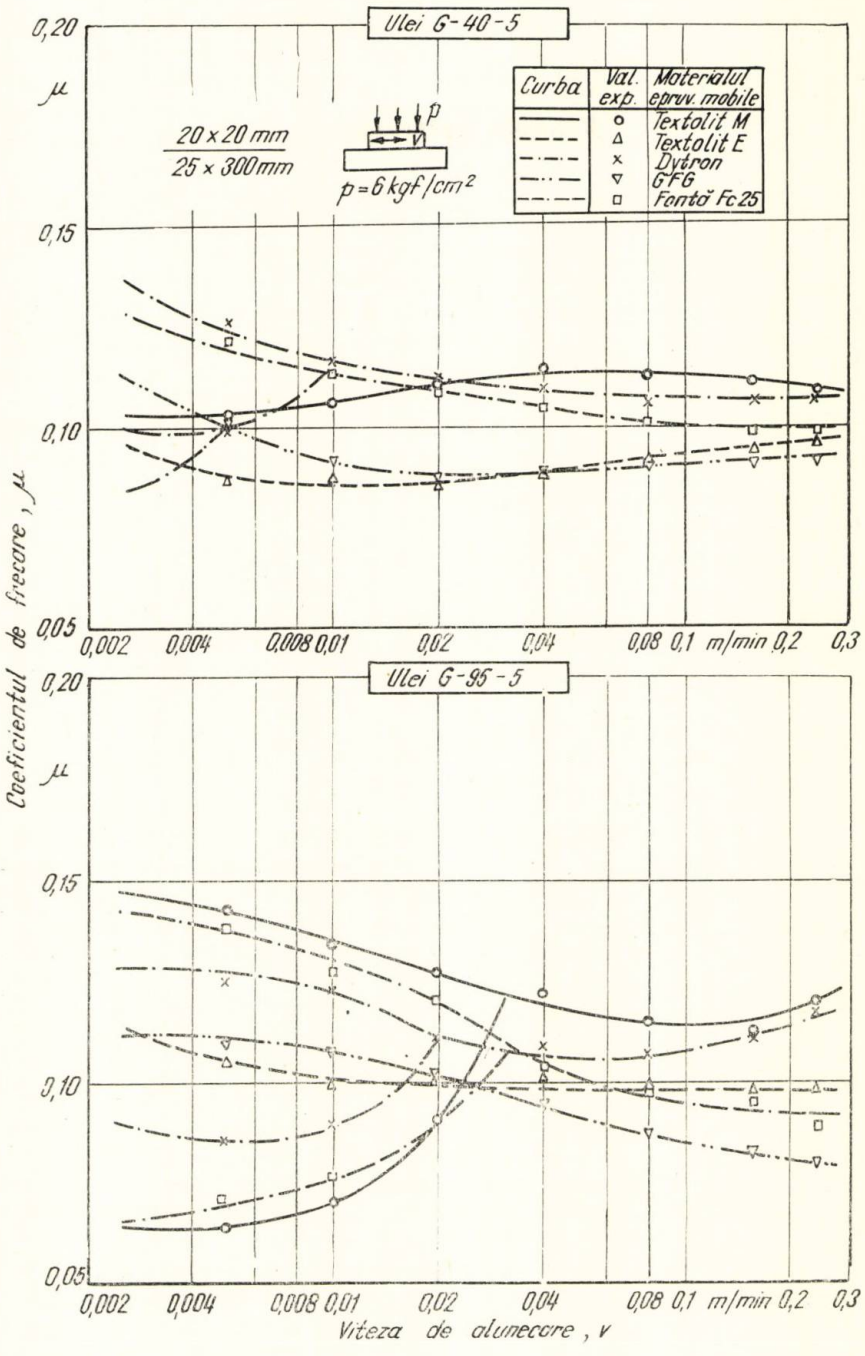


Fig. 8. — Influența vitezei de alunecare asupra coeficientului de frecare în cazul lubrifierii cu ulei G-40-5 și G-95-5.

frecare s-au situat între $\mu_s = 0{,}085-0{,}099$ (textolit tip E), $\mu_s = 0{,}099 - 0{,}115$ (textolit tip M) şi $\mu_s = 0{,}099-0{,}126$ (fontă Fc 25). La cuplele de frecare dytron — fontă Fc 25 şi material plastic GFG — fontă Fc 25 s-a observat o uşoară înclinaţie spre alunecare intermitentă pînă la $v = 0{,}01$ m/min, respectiv $v = 0{,}005$ m/min.

Comportarea uleiului G-95-5 este superioară uleiului 405 aditivat, dar inferioară uleiului G-40-5. Şi în acest caz s-a remarcat capacitatea de amortizare a vibraţiilor, însă fenomenul de alunecare intermitentă s-a observat la trei cuple de frecare : textolit tip M — fontă Fc 25, dytron — fontă Fc 25 şi fontă Fc 25 — fontă Fc 25. Cele mai bune rezultate s-au înregistrat la textolitul tip E şi materialul plastic GFG, care pe lîngă absenţa alunecării intermitente au avut şi cei mai reduşi coeficienţi de frecare cuprinşi între 0,093—0,117, respectiv 0,078—0,114.

6. CONCLUZII

Rezultatele încercărilor prezentate în această lucrare conduc la următoarele concluzii :

a. cele mai mici valori ale coeficienţilor de frecare (pentru $v = 0{,}01$ m/min, $p = 5$ kgf/cm^2 şi ungere cu ulei 405 aditivat) s-au înregistrat la cuplele de frecare textolit tip E — fontă Fc 25 ($\mu = 0{,}149$) şi material plastic GFG — fontă Fc 25 ($\mu = 0{,}154$) ; valorile maxime au revenit cuplei de frecare dytron — fontă Fc 25 ($\mu = 0{,}215$) ;

b. forţa de frecare maximă creşte proporţional cu presiunea de contact la toate cuplele de frecare şi dimensiunile de epruvete încercate ;

c. tendinţa spre alunecare intermitentă şi amplitudinea fenomenului se accentuează cu creşterea presiunii de contact şi a suprafeţei de frecare.

Înclinaţia spre alunecare intermitentă s-a manifestat cel mai evident la cupla de frecare dytron — fontă Fc 25, la care fenomenul a fost prezent la toate dimensiunile de epruvete considerate.

Sub aspectul frecvenţei apariţiei fenomenului de alunecare intermitentă, cea mai bună comportare au avut-o materialul plastic GFG şi fonta Fc 25, iar cea mai slabă dytronul.

Cele mai mari amplitudini s-au înregistrat la dytron, urmat de materialul plastic GFG şi fonta Fc 25, iar cele mai mici amplitudini la textolitele tip M şi E ;

d. în domeniul de viteze $v = 0{,}002-0{,}300$ m/min şi ungere cu ulei 405 aditivat, cea mai bună comportare la alunecare a avut-o cupla de frecare textolit tip E — fontă Fc 25, care a înregistrat valori minime ale coeficientului de frecare static, absenţa fenomenului de alunecare intermitentă şi cea mai mică amplitudine a vibraţiilor proprii ale sistemului elastic ; cea mai slabă comportare a revenit cuplelor de frecare material plastic GFG — fontă Fc 25 şi fontă Fc 25 — fontă Fc 25 ;

e. sub aspectul alunecării intermitente, privită în ansamblul factorilor de influenţă, încercările au evidenţiat comportarea excelentă a textolitelor româneşti şi în special a tipului E, comportare net superioară fontei Fc 25 şi cel puţin echivalentă cu cea a materialelor plastice străine — dytron şi material plastic GFG.

f. dintre cele trei uleiuri experimentate, s-au remarcat proprietăţile bune de ungere ale uleiului G-40-5, evidenţiate prin micşorarea generală a coeficienţilor de frecare şi a dependenţei lor faţă de variaţia vitezei de alunecare, diminuarea diferenţierilor datorite naturii şi calităţii materialelor cuplelor de frecare, reducerea tendinţei de apariţie a fenomenului de alunecare intermitentă şi absenţa vibraţiilor proprii ale sistemului elastic, respectiv buna capacitate de amortizare. În ordine, s-au situat uleiurile G-95-5 şi 405 aditivat;

g. rezultatele încercărilor permit recomandarea textolitelor româneşti ca materiale de construcţie pentru ghidajele rectilinii plane ale maşinilor-unelte grele, utilizarea tipului *E* — care a demonstrat cele mai bune calităţi de alunecare — fiind condiţionată însă de exigenţele faţă de valorile uzurii. Dintre uleiuri, se impune recomandarea uleiului G-40-5, indiferent de natura materialelor cuplei de frecare.

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. V. Calcan, *Utilizarea textolitului în construcţia ghidajelor rectilinii plane, (I). Comportarea la uzură a cuplurilor de frecare textolit-fontă*, St. cerc. mec. apl., **28**, *4* (1969).
2. V. Calcan, C. Obejdeanu, *Modificările dimensionale şi variaţia masei la imersiunea în apă şi în ulei a unor materiale plastice armate de tip textolit*, St. cerc. mec. apl., **28**, *1*, 212—213 (1969).
3. D. Pavelescu, *Dependenţa regimului de frecare şi a mişcării sacadate de principalii factori ai uzării*, St. cerc. mec. apl., **27**, *1*, 50 (1968).
4. Ş. M. Bilik, B. S. Salenko, *Koeffiţienti treniia plastmass*, Trudî VNIIJT, **242** M, Transjeldorizdat, 31—44 (1962).
5. I. Ia. Alşiţ, L. N. Suşkina, *Ispîtaniia antifrikţionnîh svoistv plastmass*, Izd. ONTI, Goskomiteta po avtomatizaţii i maşinostroeniiu, 1959.
6. R. M. Matveevskii, *Issledovanie treniia nekotorîh plastmass na maşine KT—2 v usloviiah smazki i bez smazki. Sb. „Plasticeskie massî cac antifrikţionnîe materiali"*, Izd. AN SCSR, 1961, p. 22—42.
7. G. V. Vinogradov, Iu. Ia. Podolskii, M. D. Bezborodko, *Ispolzovanie maşin s tocecinîmi kontaktom tel treniia dlia oţenki protivoiznosnîh i antifrikţionnîh svoist smazocinîh materialov Sb. „Metodî ispîtaniia na iznaşivanie"*, Izd. AN SSR, 1962, p. 152—163.
8. V. P. Mitrovici, *Issledovanie treniia poliamidov po stali*, Moskva, 1963, Izd. AN SSR.
9. K. N. Vlasova, *Antifricţionnîe kompoziţii na osnove napolnennîk poliamidov.*, Plasticeskie massî, *4*, 33—37 (1964).
10. Z. Massot, *Friction des materiaux plastiques, Industrie des plastiques modernes*, **13**, *10*, 49—53 (1962) şi **14**, *2*, 30—40 (1963).
11. L. Iu. Prujanskii, *Ispîtanie floroplasta 4 na trenie, Sb. „Plastmassî cac antifrikţionnîe materiali"*, Izd. AN SSSR, 1961, p. 74—79.
12. A. V. Smirnov, *Drevesnîe plastiki-zameniteli metallov*, Mosoblsovnarkoz, ŢBTI, 1961, 3—20.
13. I. P. Zemliakov, *Kapron — material dlia detalei maşin*, Moskva, 1960, Maşghiz.
14. A. S. Lapidus, E. A. Maiorova, *Nakladnîe napravliaiuşcie iz kaprona dlia mettalorejuşcih stankov*, Stanki i instrument, **10**, 19—23 (1965).
15. A. P. Semenov, R. M. Matveevski, V. V. Pozdniakov, *Tehnologhiia, izgotovlenia i svoistva soderjaşcik floroplast antifricţionnîh materialov*, Izd. AN SSSR, Moskva, 1963.
16. N. A. Kozulin, B. E. Lopacenok, A. I. Şapiro, *Studiul influenţei vitezei de alunecare asupra coeficienţilor de frecare ai materialelor plastice*, Buletinul construcţiilor de maşini, **6**, 409—412 (1965).
17. B. G. Lurie, *Coeficienţii de frecare ai materialelor folosite la ghidajele maşinilor-unelte*, Stanki i instrument, *1* (1961).

18. D. Domrös, *Reibungs — und Verschleissverhalten von Werkzeugmaschinen — Gleitführungen*, Industrie — Anzeiger Werkzeugmaschine und Fertigungstechnik, **VIII**, 66, 19—25 (1967).

19. I Gh. Sandu, V. Moraru, C. Minciu, *Ghidajele mașinilor-unelte*, București, 1967, Editura tehnică, p. 76.

20. A. Worthing, I. Geffner, *Prelucrarea datelor experimentale*, București, 1959, Editura tehnică, p. 160—181.

21. L. Cigan, *Influența principalilor factori ai frecării asupra alunecării intermitente la ghidajele mașinilor-unelte*, St. cerc. mec. apl. **27**, 5, 1084 (1968).

RECENZII

J. L. MERIAM, *Statics and Dynamics* (Statica și dinamica). John Wiley & Sons, Inc. New-York, London, Sydney, Second Printing 1967; 690 pagini.

J. L. Meriam, profesor de mecanică inginerească la College of Engineering Duke University, a publicat un deosebit de interesant curs de mecanică, intitulat *Statics and Dynamics*, pentru studenții din învățămîntul superior tehnic din S.U.A.

Pornind de la ideea că profesiunea de inginer trebuie să îmbine în mod armonios imaginația creatoare cu cunoștințele practice, autorul lucrării insistă asupra semnificației fizice a diferitelor fenomene și asupra însușirii raționamentului matematic. Considerînd că însușirea temeinică a mecanicii nu poate fi făcută decît o dată cu dobîndirea unei serioase stăpîniri a calculului, fiecare dintre capitolele tratate este ilustrat printr-un mare număr de probleme specifice practicii inginerești.

Instrumentul matematic utilizat este calculul analitic și vectorial; uneori calculul matricial și cel tensorial.

Lucrarea este împărțită în:

Statica, cuprinzînd capitolele: principiile staticii, forțe și echilibru, structuri, forțe distribuite, frecarea, lucrul mecanic virtual, momente de inerție.

Dinamica, cuprinzînd: principiile dinamicii, cinematica și cinetica particulei și sistemelor de particule, dinamica corpului rigid, vibrațiile, dinamica sistemelor nerigide.

Cartea are anexe privind calculul vectorial și matricial și unele tabele uzuale, necesare pentru calculul problemelor de mecanică.

În *partea I-a* autorul face o trecere în revistă concisă a conceptelor principale (timp, masă, forță, materie, inerție, rigiditate).

În legătură cu forțele și cuplele, autorul stabilește condițiile de echilibru și examinează din acest punct de vedere unele structuri care se întîlnesc în viața practică; cîteva probleme de hidraulică și de echilibru al eforturilor interne. Studiază frecările unor mașini folosite mai des. Interesantă este expunerea cu privire la lucrul mecanic virtual, unde partea teoretică se îmbină armonios cu partea practică. Sînt prezentate atractiv, în încheierea acestei părți, stabilitatea echilibrului și momentele de inerție.

Partea a II-a începe cu expunerea principiilor dinamicii, atrăgîndu-se atenția asupra concepțiilor de bază, legilor lui Newton, gravitației, sistemelor de unități. Apoi se studiază mișcarea particulei și mișcarea sistemelor de particule, făcîndu-se aplicații la mișcarea rectilinie, mișcarea curbilinie generală, lansarea proiectilelor, mișcarea relativă; se insistă asupra lucrului mecanic și energiei, impulsului și momentului cinetic.

Se trece la studiul mișcării corpului rigid (forță, masă, accelerație) și se acordă o deosebită atenție problemei vibrațiilor.

Partea a III-a cuprinde capitole cu privire la dinamica sistemelor nerigide, corpurile cu masă variabilă şi propagarea vibraţiilor; se examinează ecuaţiile lui Lagrange şi principiul lui Hamilton.

Toată lucrarea respiră o strînsă legătură între teorie şi practică; partea teoretică este concisă, iar partea aplicativă abundă în exemple variate şi ingenioase. Se prezintă, în afară de exemple clasice, numeroase cazuri din aplicaţiile inginereşti moderne.

Cartea are o prezentare excelentă, atractivă şi se urmăreşte cu plăcere. Considerăm că autorul reuşeşte să dea studenţilor o carte de mecanică teoretică de o calitate superioară.

acad. *Ştefan Bălan*

MAURICE ALBIGÈS, ANDRÉ COIN şi HENRI JOURNET, *Étude des structures par les méthodes matricielles* (Studiul structurilor prin metode matriciale). Editions Eyrolles şi Société de Diffusion des Techniques du Bâtiment et des Travaux Publics; Paris, 1969, 253 pagini.

Calculul structurilor a cunoscut progrese spectaculoase datorită răspîndirii calculatoarelor electronice; aceste progrese au fost posibile datorită perfecţionării aparatului matematic, reprezentat în cazul de faţă de calculul matriceal.

Cartea pe care o prezentăm se evidenţiază printr-o redactare remarcabil de accesibilă. Prima parte conţine *elemente de calcul matriceal*, iar partea a doua *studiul structurilor*.

La prima parte ne vom mărgini să enunţăm titlurile celor 13 capitole, datorită aspectului strict matematic; acestea sînt: 1) Noţiuni de algebră modernă; 2) Structurile fundamentale ale unei mulţimi: grup, inel, corp; 3) Spaţiu vectorial; 4) Determinantul $a\ n$ vectori; 5) Matrice: definiţii-rang; 6) Ecuaţii liniare; 7) Operator liniar: primul aspect al matricelor; 8) Operaţii cu matrice; 9) Matrice pătrate; 10) Schimbarea bazei. Al doilea aspect al matricelor; 11) Produs scalar. Matrice ortogonale; 12) Valori proprii, vectori proprii, diagonalizarea unei matrice; 13) Introducere în studiul formelor pătratice.

Partea a doua conţine şapte capitole în care sînt tratate următoarele probleme.

Cap. I. *Generalităţi* (principii fundamentale, noţiunea de matrice de rigiditate şi de flexibilitate, expresia potenţialului interior, teoremele lui Castigliano); Cap. II. *Convenţii şi notaţii*; Cap. III. *Studiul barei raportată la un reper asociat* (definiţii, matrice de echilibru şi rigiditate, deformaţia pură, energia potenţială, matricea de transfer, expresiile diferitelor matrice pentru barele legate la noduri, cazuri particulare); Cap. IV. *Studiul unei osaturi raportată la un reper asociat*; Cap. V. *Calculul structurilor*; Cap. VI. *Matricea de transfer*; Cap. VII. *Aplicaţii diverse* (corespondenţa dintre matricele de rigiditate şi flexibilitate ale barei, vibraţiile structurilor, instabilitatea structurilor, sarcina de rupere a unei structuri în stadiul plastic, vibraţiile unui masiv indeformabil pe reazeme elastice, introducere în metoda elementelor finite).

Scrisă într-o formă clară, într-un număr de pagini moderat, cartea de faţă constituie o excelentă introducere în Statica construcţiilor moderne. Ea va putea fi consultată cu deosebit folos atît de studenţii facultăţilor de construcţii, cît şi de inginerii din cercetare şi proiectare.

dr. ing. *Mircea Soare*

M. ALBIGÈS, A. COIN, *Résistance des Matériaux Appliquée*, Tome I (Rezistența materialelor aplicată, vol. I), Société de diffusion des techniques du bâtiment et des travaux publics, Editions Eyrolles, Paris, 1969, 592 pagini.

Într-o excelentă prezentare grafică, cei doi autori prezintă un amplu tratat de rezistența materialelor aplicată, care conține tot ce este indispensabil să cunoască un inginer care are de elaborat proiecte de structuri.

Autorii, binecunoscuți prin publicații anterioare, îndeplinesc dubla funcție de profesori la Școala superioară de lucrări publice din Paris și de experimentați ingineri elaboratori și verificatori de proiecte.

Rod al acestei activități, lucrarea se distinge prin claritatea expunerii, ordonarea judicioasă a diferitelor paragrafe și un număr mare de exemple numerice.

Primul volum cuprinde două părți, respectiv *Teoria elementară* (18 capitole) și *Aplicații practice* (referitoare la primele 11 capitole). Aplicațiile referitoare la restul capitolelor urmează să facă obiectul unui al doilea volum.

Un capitol introductiv (O) definește momentele de inerție.

Primul capitol definește eforturile unitare și variația stării de eforturi plană în secțiuni înclinate.

În capitolul al doilea se definesc proprietățile mecanice ale materialelor : aici se introduce curba intrinsecă a materialului (după A. Caquot).

În capitolul al treilea se dau noțiuni de teoria elasticității (ecuații de deformații, variația deformațiilor specifice în jurul unui punct, relații de elasticitate, ecuațiile de echilibru în coordonate carteziene și polare) care la noi formează obiectul unei discipline distincte.

Capitolul 4 introduce ipotezele simplificatoare pentru calculul grinzilor.

În capitolul 5 se determină eforturile și deformațiile pentru toate solicitările simple și compuse (compresiune și întindere simplă, încovoierea pură și oblică, compresiunea excentrică, sîmbure central, forfecare și lunecare, torsiune, analogia cu membrana, centrul de torsiune).

Capitolul 6 (formulele lui Bresse, energia de deformație) cuprinde teoremele generale care stau la baza staticii construcțiilor.

Problemele de statică grafică fac obiectul capitolului 7.

Grinda dreaptă este studiată în capitolul 8 (reacțiuni, diagrame T și M, sarcini mobile, înfășurătoare, linii de influență, deformații).

În următoarele trei capitole (9, 10, 11) sînt examinate sistemele indeformabile pe reazeme elastice, grinda static nedeterminată și grinzile continui.

Arcele triplu articulate, dublu articulate (fără tirant) și dublu încastrate sînt studiate în capitolul 12.

Capitolele 13 și 14 constituie o introducere în calculul cadrelor plane, respectiv al grinzilor cu zăbrele plane.

Problemele de flambaj sînt tratate în capitolul 15.

În capitolul 16 este expusă teoria de membrană a plăcilor curbe subțiri și teoria barelor cu pereți subțiri.

Elemente de teoria vibrațiilor sînt date în capitolul 17 (vibrații libere și forțate, vibrații amortizate, șocuri).

Ultimul capitol (18) tratează elemente de teoria plasticității, cu aplicații la structuri în cadre.

Prima parte cuprinde 237 pagini. În partea a doua se dau 194 aplicații care reprezintă fie exemple numerice fie extinderi ale teoriei. Pe această ultimă cale apar o serie de probleme de teoria elasticității, grinzi pe mediu elastic etc.

Experiența încercată de autori și anume aceea de a da la început partea teoretică și apoi de a relua totul și extinde pe baza aplicațiilor pare interesantă. Este ceea ce remarcă în prefața sa P. Lebelle, președintele biroului de verificare a proiectelor Securitas din Paris : „...Lucrarea trebuie de asemenea să permită cititorului ca, plecînd de la un număr restrîns de cunoștințe de bază, să ajungă, progresiv, prin studiu personal a unor exerciții de dificultate mereu crescîndă, la stăpînirea meseriei de inginer de structuri".

Recomandăm în mod deosebit acest prim volum și așteptăm apariția anunțată a celui de al doilea volum.

dr. ing. *Mircea V. Soare*

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectarea în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

*

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

N. D. POPESCU

STABILITATEA DINAMICĂ A PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE SOLICITATE DE SARCINI MOBILE

Luîndu-se în considerație forțele de inerție de care sînt animate elementele de masă ale plăcilor și ale corpurilor cărora li se datoresc forțele mobile, precum și factorii dinamici suplimentari se stabilește ecuația diferențială a mișcării de vibrație. Rezolvarea acestei ecuații diferențiale a pus în evidență faptul că pentru anumite valori ale vitezei de deplasare a sarcinilor mobile, numite „viteze critice", are loc o creștere în timp a amplitudinii mișcării de vibrație, ceea ce arată că s-a produs fenomenul de rezonanță, care marchează apariția instabilității dinamice a plăcii. Se stabilesc expresiile vitezelor critice, a săgeților și a coeficienților dinamici și se constată că vitezele critice sînt din domeniul vitezelor de circulație în curs de realizare.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 523—545.
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. I. MANOLESCU, GH. POPA

CUBICA POLILOR RELATIVI DE ROTAȚIE LA MECANISMUL MANIVELĂ-PISTON

Lucrarea extinde noțiunea de cubică a polilor relativi de rotație (C.P.—R.R.) la mecanismul manivelă-piston. Se demonstrează analitic existența acestei cubice ca loc geometric și se analizează proprietățile ei (existența și ecuația asimptotei, puncte de traversare, tangente remarcabile). Ecuația cubicei s-a stabilit în două variante : implicit și parametric, arătîndu-se avantajul fiecărei variante și posibilitățile de trasare a cubicei C.P.—R.R.
Lucrarea prezintă cinci teoreme fundamentale referitoare la cubica C.P.—R.R. la mecanismul manivelă-piston. În final se analizează formele acestei cubice, capitol esențial în sinteza mecanismelor pe baza acestor cubice.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 569—586.
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

SERGIU CHIRIACESCU

AUTOVIBRAȚII LA STRUNJIREA AXELOR ZVELTE

Precizia prelucrării prin așchiere este determinată de menținerea poziției relative inițiale (reglate) dintre sculă și piesa care se prelucrează. Modificarea acestei poziții se datorește unor factori de natură statică sau dinamică.
Cu aceste considerații, în lucrare se prezintă : ecuațiile generatoarelor axelor strunjite în absența factorilor dinamici ; influența variației rigidității piesei care se prelucrează asupra apariției vibrațiilor ; ecuațiile care descriu mișcarea vibratorie și considerațiuni asupra domeniului de stabilitate parametrică ; confirmarea experimentală a studiilor teoretice.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 547—568.
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CHR. PELECUDI, I. SAVA

STUDIUL EXPERIMENTAL AL DINAMICII MECANISMELOR CU CAME

În lucrare se analizează comparativ, comportarea în regim dinamic a diverselor profile de camă, atît pe cale teoretică cît și experimentală.
Studiul teoretic se efectuează considerînd două modele matematice folosite de literatura de specialitate.
Camele al căror profil este analizat teoretic sînt experimentate pentru diverse condiții de funcționare.
Marele număr de oscilograme permite ridicarea condițiilor de folosire al unuia sau altuia dintre cele două modele matematice considerate.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 587—613
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

LEON LIVOVSCHI

IDENTIFICAREA SISTEMELOR CRITICE

Utilizînd metodele mecanicii clasice şi analitice, în lucrare se dă fundamentarea riguroasă a două metode de identificare ale sistemelor critice. Cu ajutorul acestor metode se deduc diferite criterii de identificare ale sistemelor critice printre care şi unele criterii cunoscute. Lucrarea se încheie cu o analiză a noţiunii de deplasare virtuală şi se arată că noţiunea de deplasare virtuală de ordinul doi este inconsistentă, deoarece conduce la contradicţii.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 615—633
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

S. HÂNCU, L. PREDESCU, V. MARINESCU

CU PRIVIRE LA MIŞCAREA FLUIDELOR ÎN JURUL UNEI REŢELE DE PLĂCI PLANE

În lucrare se prezintă un model de calcul al mişcării fluidelor în jurul unei reţele de plăci plane, pornind de la teoria mişcării potenţiale a fluidelor, variabilă în domeniul de mişcare exterior vîrtejurilor, şi de la utilizarea unui principiu variaţional care se admite că substituie ecuaţiile mişcării în interiorul vîrtejurilor. Rezultatele calculelor concordă cu datele experimentale. De exemplu, pentru coeficientul de rezistenţă al unei plăci plane normale pe direcţia unui curent nelimitat se obţine valoarea $C_n = 1{,}95$ (aceeaşi cu cea obţinută experimental), faţă de valoarea $C_n = 0{,}88$ rezultată folosind modelul de calcul clasic cunoscut.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 661—681
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

V. FLORIAN, N. ŢOPA

CONTRIBUŢII LA CALCULUL STRUCTURILOR MULTIETAJATE OARECARE ACŢIONATE ORIZONTAL

În lucrare se examinează alcătuirea unui algoritm de calcul pentru secţiuni orizontale (mişcare seismică, acţiunea vîntului) asupra structurilor multietajate, avînd o configuraţie oarecare în plan.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 635—660
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

N. N. PATRAULEA, C. OPREANU

ASUPRA PERFORMANŢELOR POMPELOR TURBOMOLECULARE ÎN CAZUL REFLEXIEI OGLINDĂ

Se dă o teorie a pompelor turbomoleculare adoptînd modelul unor pale foarte mici şi în număr foarte mare. Aplicînd ecuaţii de transport Maxwell, convenabile, se obţin formule pentru calculul performanţelor în ipoteza reflexiei perfect oglindă a moleculelor de gaz la suprafaţa elementelor de pale.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 683—688
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

I. FILIMON

CÎTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA APLICĂRII UNEI METODE HODOGRAFICE ÎN DINAMICA GAZELOR

Obiectul lucrării îl constituie trecerea în revistă a unor rezultate obținute de autor privind mișcările circulatorii în regim subsonic al gazelor perfecte, în jurul unui obstacol convex dat *a priori*. Pornind de la problema la limită se definește mișcarea și plasîndu-se ipoteza înlocuirii gazului perfect cu gazul fictiv a lui S. A. Ciaplîghin, se dezvoltă o metodă de aproximații succesive după un parametru, funcție de numărul lui Mach M_∞. Se dau în continuare indicații asupra rezolvării problemelor la limită rezultate din aplicarea metodei și se stabilește formula distribuției vitezelor pe obstacol. Cazul obstacolului circular este analizat în detaliu, în sensul rezolvării problemei la limită cu aproximație a termenilor în M_∞^2

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 689—697
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

V. IONESCU. C. COZMA

DEZLOCUIREA INTEGRALĂ A FLUIDELOR ÎN MEDII POROSEA PE DOMENII MULTIPLU CONEXE

Lucrarea conține rezolvarea matematică a problemei dezlocuirii integrale a fluidelor în medii poroase în cazul în care fluidul injectat ocupă la momentul inițial un domeniu multiplu conex. Se deduce problema la limită și se indică o cale de rezolvare a ei prin reducerea la o ecuație integrală de tip Fredholm. De asemenea, se ia în considerare și cazul cînd contururile, în evoluția lor, se intersectează la un anumit moment. Pentru această situație, în care apar puncte unghiulare ale contururilor, se efectuează un studiu special demonstrîndu-se că se poate determina evoluția contururilor și în aceste cazuri.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 713—724
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

DAN MATEESCU

CURGEREA SUPERSONICĂ NEPERMANENTĂ ÎN JURUL SISTEMELOR ARIPĂ CRUCIFORMĂ-FUZELAJ AVÎND MIȘCĂRI OSCILATORII

Lucrarea tratează, în scopul determinării vitezelor de perturbație și distribuției de presiuni, cazul sistemului aripă cruciformă — fuzelaj situat într-un curent supersonic uniform și executînd mișcări oscilatorii de tangaj, ruliu și translație pe verticală. Metoda folosită se bazează pe reducerea mișcării supersonice nepermanente la o serie de mișcări permanente în jurul aceluiași sistem, ale căror soluții sînt date în lucrare.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 699—711
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

VICTOR CALCAN, LEONTIN CIGAN, NICOLAE RĂDĂCINĂ

UTILIZAREA TEXTOLITULUI ÎN CONSTRUCȚIA GHIDAJELOR RECTILINII PLANE

II. Cercetări asupra alunecării intermitente la cuplele de frecare textolit-fontă

Lucrarea prezintă rezultatele unor încercări parțiale din cadrul unui program de cercetări cu tema „Utilizarea textolitului în construcția ghidajelor rectilinii plane", avînd ca obiect studierea posibilităților de folosire în construcția ghidajelor rectilinii plane a textolitelor de fabricație românească, respectiv textolitele tip *M* și *F*. Pentru comparație s-au încercat în paralel dytronul și materialul plastic GFG, de fabricație germană și fonta Fc 25.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 3, 1970, p. 725—740
Redacția: București, str. Const. Mille. nr. 15

ERATĂ

La pagina	rîndul sau formula	în loc de	se va citi
641	(1.19)	$(-H') = {}_1^{-1} \cdot (-H) \cdot M_1^{-1}$	$(-H')=M_1^{-1} \cdot (-H) \cdot M_1^{-1}$
648	Primul rînd de sus	...oarecarene— —simetrică...	...oarecare— nesimetrică...

St. cerc. mec. aplic. 3/970

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

T. HACKER, Stabilitate şi comandă în teoria zborului, 1968, 322 p., 21,50 lei.

V. V. GHIA, Recirculaţia gazelor la cuptoare, 1968, 336 p., 29 lei.

ŞT. N. SĂVULESCU, Tranziţia de la scurgerea laminară la cea turbulentă, 1968, 312 p., 15 lei.

DAN TEODORESCU, Servomotorul amplificator şi aplicaţiile lui în automatizări, 1968, 260 p., 12,50 lei.

A. MILLION şi C. MILLION, Hidrogenul în oţeluri şi în îmbinări sudate, 1968, 354 p., 27 lei.

GH. BUZDUGAN, Dinamica fundaţiilor de maşini, 1968, 368 p., 24 lei.

PAUL DIMO, Analiza nodală a sistemelor electroenergetice, 1968, 628 p., 44 lei.

I. S. GHEORGHIU şi AL. FRANSUA, Tratat de maşini electrice, vol. I. Maşini de curent continuu, 1968, 412 p., 27 lei.

R. C. BOGDAN şi DAN LARIONESCU, Analiza armonică complexă şi mecanoelectrică a mecanismelor plane, 1968, 432 p., 29 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, Aplicaţii industriale ale lagărelor cu aer, 1968 282, 16,50 lei.

MIRCEA SOARE, Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri, 1968, 622 p., 33 lei.

L. LIBRESCU, Statica şi dinamica structurilor elastice anizotrope şi eterogene, 1969, 320 p., 18,50 lei.

LUCIAN Z. DUMITRESCU, Cercetări în tuburile de şoc, 1969, 306 p., 21 lei.

ANDREI RIPIANU, Mişcările vibratorii ale arborilor drepţi şi cotiţi, 1969, 483 p., 30 lei.

F. DINCĂ şi C. TEODOSIU, Vibraţii neliniare şi aleatoare, 1969, 462 p., 24 lei.

V. VISARION şi C. STĂNESCU, Calculul stărilor de tensiune în teoria plăcilor curbe, 1969, 714 p., 32 lei.

C. ŞORA, Introducere în studiul generatorului Hall, 1969, 310 p., 18,50 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE METALURGIE

REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES

— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE

— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 3, p. 519—744, Bucureşti, 1970

I.P. „Informaţia" — c. 5239

43832

Lei 40. —

F2557

4
TOMUL 29
1970

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

MŰSZAKI KÖZPONTI

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI**, *redactor responsabil*,
Acad. **D. DUMITRESCU**, *redactor responsabil adjunct*,
Prof. **I. ANTON**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ȘTEFAN BĂLAN**,
Prof. **GH. MANEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CR. MATEESCU**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU C. BOGDAN**,
Conf. **DAN PAVELESCU**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacție*.

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Centrala cărții, Oficiul de comerț exterior Căsuța poștală 134 — 135 (Calea Victoriei 126), București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția: București,

Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ

Bucureşti, 23—27 iunie, 1969

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 29, nr. 4 1970

S U M A R

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ
Bucureşti, 23 — 27 iunie 1969

ELASTICITATE, PLASTICITATE, REOLOGIE

Pag

GORUN MANOLESCU, Studiul concentrării eforturilor unitare în jurul găurilor de sondă. I 749
N.S. PÂRVULESCU, Despre ecuaţiile de compatibilitate în domeniul superelastic . . 777

TEORIA VIBRAŢIILOR

GH. SILAŞ, H.J. KLEPP, Studiul spectrului de frecvenţe al autovibraţiilor transversale ale unei bare produse de frecarea uscată 787

TEORIA PLĂCILOR ŞI STRUCTURILOR CURBE

C. STĂNESCU, V. VISARION, Plăci plane nesubţiri 797
N.D. POPESCU, Stabilitatea dinamică a plăcilor circulare solicitate de sarcini variabile periodic 817

TEORIA MECANISMELOR ŞI DINAMICA MAŞINILOR

ŞT. S. MIHĂIESCU, Consideraţii de mecanică asupra sapelor cu conuri pentru foraj. I 847
CHR. PELECUDI, T.V. HUNCHER, Diagrame, nomograme şi tabele pentru mecanisme plane 867

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

ŞTEFAN BĂLAN, VALERIU PETCU, Un concept nou de exprimare a gradului de siguranţă în calculul structurilor elasto-plastice. I 897
AL. NEGOIŢĂ, V. IANCĂU, Contribuţii privind aspectele probabiliste ale încărcărilor climatice şi siguranţa construcţiilor 919

FLUIDE INCOMPRESIBILE

Pag.

E. CARAFOLI, N. CĂMĂRĂȘESCU, Noi cercetări asupra aripilor de alungire mică cu jeturi laterale 947

DINAMICA GAZELOR ȘI MAGNETOFLUIDODINAMICA

DAN MATEESCU, Caracteristicile aerodinamice în regim supersonic ale aripilor dreptunghiulare și trapezoidale cu profil variabil în anvergură 963

FLUIDE VÎSCOASE, STRAT-LIMITĂ, TURBULENȚĂ, TRANSFER DE CĂLDURĂ

I. POP, Asupra stratului-limită compresibil nestaționar pe un disc în rotație 981

RECENZII 987

STUDIUL CONCENTRĂRII EFORTURILOR UNITARE ÎN JURUL GĂURILOR DE SONDĂ

PARTEA I. DETERMINAREA GREUTĂȚII SPECIFICE MINIME A NOROIULUI DE FORAJ CARE POATE ÎMPIEDICA APARIȚIA ZONEI DE STARE-LIMITĂ ÎN JURUL GĂURII DE FORAJ

de GORUN MANOLESCU
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

În lucrare se determină relația de calcul a greutății specifice minime a noroiului de foraj cu care trebuie traversat un masiv de roci omogene și izotrope, în așa fel încît să fie asigurată stabilitatea pereților găurii.

1. NOTAȚII

σ_1, σ_2, σ_3 — eforturile unitare normale principale;
σ_{L1}, σ_{L3} — eforturile unitare normale principale limită;
σ_x, σ_y, σ_z — eforturile unitare normale în direcția axelor: X, Y, Z;
σ_r, σ_θ — eforturile unitare normale în direcțiile razei și tangentei;
$\tau_{\theta r}$ — efortul unitar tangențial;
σ_{re}, $\sigma_{\theta e}$ — eforturile unitare normale în direcțiile razei și tangentei în exteriorul zonei de stare-limită pentru $r = b$;
σ_{rc}, $\sigma_{\theta c}$ — eforturile unitare normale în direcțiile razei și tangentei în interiorul zonei de stare limită pentru $r = b$;
σ_n, τ_n — eforturile unitare normal și tangențial care acționează pe planul P' (vezi fig. 8 și 11);
σ_l, τ_l — eforturile unitare normal și tangențial care acționează pe planul P (vezi fig. 8 și 11);
σ_{Lc}, σ_{Lt} — rezistența-limită de rupere a materialului la încercare de compresiune simplă, respectiv de tracțiune simplă;

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 4, P. 749–775 1970,

C_1 — efortul unitar normal limită la tracțiune triaxială uniformă (punctul în care înfășurătoarea cercurilor lui Mohr întîlnește axa σ);

C — efortul unitar tangențial limită de rupere corespunzător stării de eforturi mixtă în care $\sigma_{L1} = \sigma_{Lc}$ și $\sigma_{L3} = \sigma_{Lt}$ (vezi fig. 2);

γ_n — greutatea specifică a noroiului de foraj;

γ_r — greutatea specifică medie a rocilor;

p_b — presiunea pe conturul zonei de stare-limită;

P_{ra} — presiunea statică a noroiului de foraj dată de relația $P_{ra} = H\gamma_n$

P — presiunea litostatică dată de relația $P = H\gamma_r$

H — adîncimea măsurată de la un punct din interiorul masivului sau găurii de sondă pînă la suprafață (sistemul de coordonate are originea în punctul considerat, deci H, care se măsoară în lungul axei Z, are sens pozitiv de la punct spre suprafață; vezi fig. 13);

m, μ — constanta, respectiv coeficientul lui Poisson;

ν — coeficientul de neuniformitate al stării de eforturi;

ρ_0 — unghiul de frecare interioară;

r — raza curentă;

a — raza sondei;

b — raza zonei de stare-limită;

r_∞ — raza la care influența concentrării eforturilor din jurul găurii de sondă nu se mai simte;

H_{cr} — adîncimea la care apare zona de stare-limită;

D — constantă de integrare;

σ_{ec} — efortul unitar limită echivalent.

În privința eforturilor normale, în lucrarea de față se va adopta convenția de a considera eforturile unitare de compresiune pozitive și eforturile unitare normale de tracțiune negative. Această convenție este adoptată în toate lucrările care se ocupă de mecanica rocilor, în timp ce lucrările din domeniul rezistenței materialelor adoptă convenția inversă: eforturile unitare normale de tracțiune sînt considerate pozitive, iar cele de compresiune negative.

2. INTRODUCERE

Problema distribuției eforturilor unitare în zona de stare-limită care apare în jurul găurilor circulare executate în masive omogene și izotrope a fost abordată într-o serie de lucrări [1]—[8]. În aceste lucrări ea a fost tratată diferențiat pentru următoarele cazuri: medii fără coeziune, medii cu coeziune cuprinse între corpurile elasto-fragile și elasto-plastice și medii cu coeziune cu pronunțat caracter plastic.

Trebuie remarcat de la început că aparatajul matematic folosit în aceste lucrări este destul de laborios.

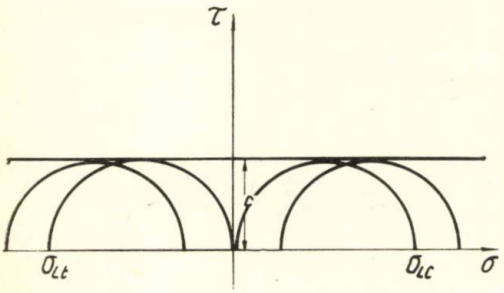


Fig. 1

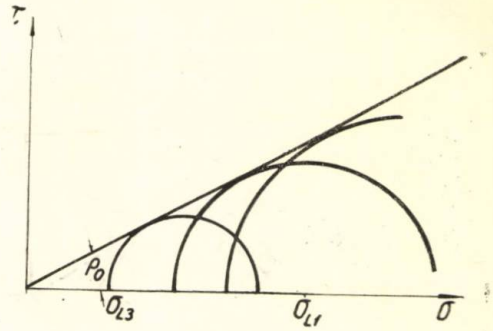


Fig. 3

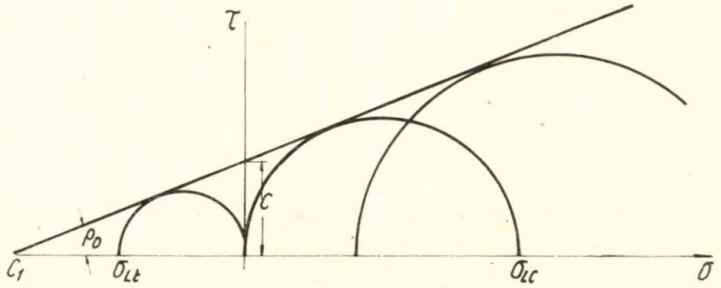


Fig. 2

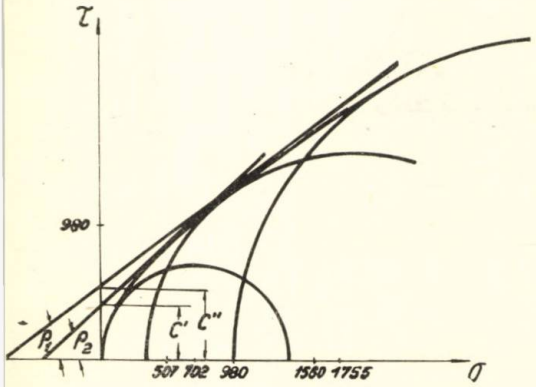


Fig. 4

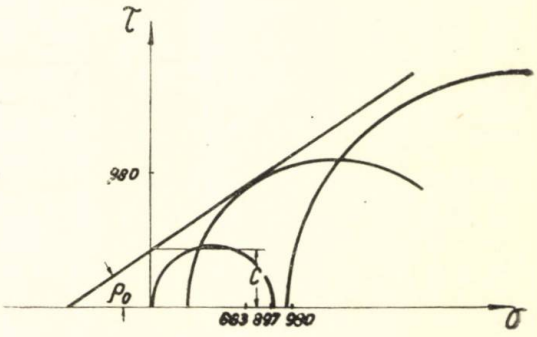


Fig. 5

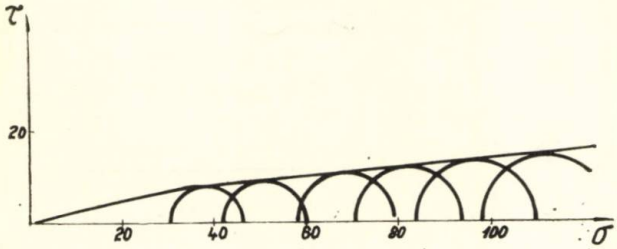


Fig. 6

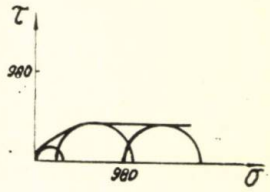


Fig. 7

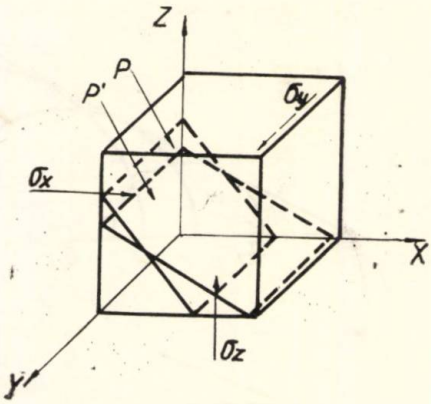


Fig. 8

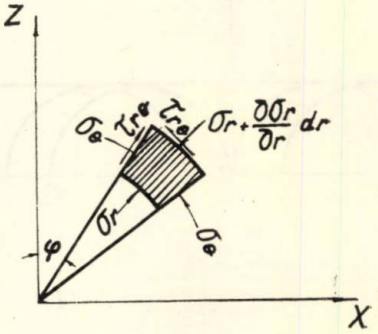


Fig. 9

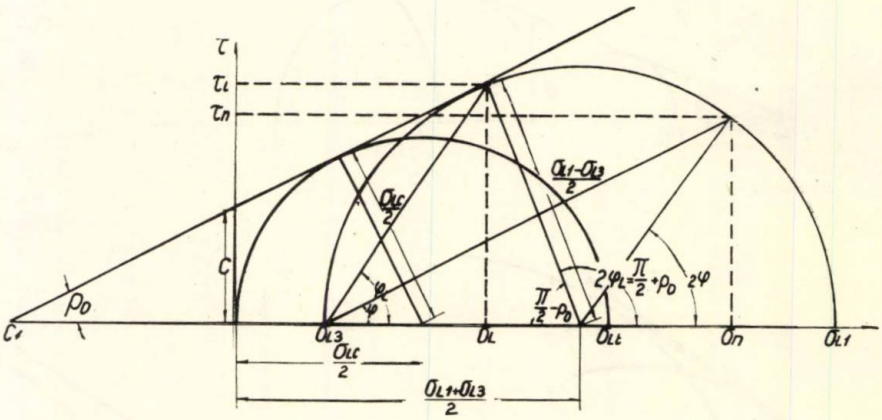


Fig. 10

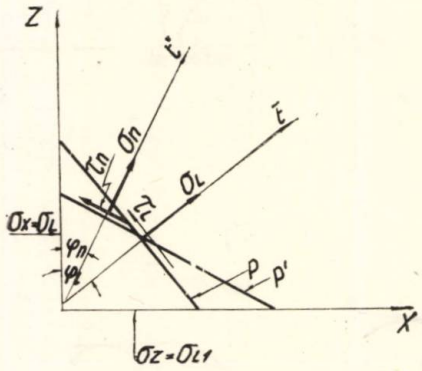


Fig. 11

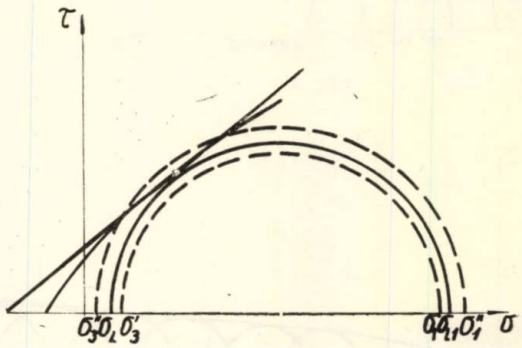


Fig. 12

Scopul lucrării de față este de a trata aceeași problemă printr-o metodă mai puțin laborioasă, care însă, în final, conduce la aceleași expresii ale distribuției eforturilor unitare în cazul rocilor cuprinse între categoriile elasto-fragile și elasto-plastice. Mai departe se calculează greutatea

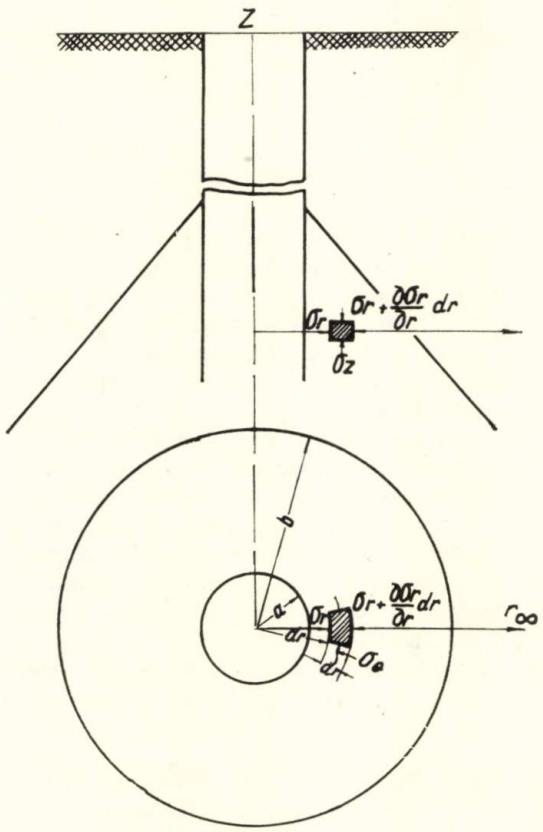


Fig. 13

specifică minimă a noroiului de foraj cu care trebuie traversat un masiv omogen și izotrop, în așa fel încît să se evite apariția zonei de plasticizare, cu alte cuvinte să nu fie afectată stabilitatea pereților găurii. Calculul greutății specifice minime a noroiului de foraj, prezentat în lucrarea de față, diferă de cele prezentate de alți autori [2], [5] prin introducerea unui coeficient care ține seama de caracteristicile materialului. Acest coeficient este propus pentru prima dată în literatura de specialitate. Cu ajutorul curbelor experimentale ridicate în partea a doua a acestei lucrări și al unor curbe experimentale obținute de alți cercetători [9]—[11] se caută să se justifice calculul propus al greutății specifice minime a noroiului de foraj.

Mai departe se generalizează relațiile obținute pentru masive omogene, coezive și elasto-plastice, arătîndu-se că acestea pot fi aplicate cu ușurință și suficientă exactitate la toată gama de roci existente, punînd pentru fiecare categorie de roci în parte condițiile necesare la limită.

Mai trebuie menţionat că, întrucît din punctul de vedere al forajului interesează mai ales găurile aproximativ verticale, nu a fost tratat decît acest caz, găurile orizontale şi cele cu înclinări mari interesînd mai ales mineritul.

Şi, în fine, o ultimă precizare : se studiază numai aspectul static al problemei, adică distribuţia finală a eforturilor unitare după producerea relaxării, aspectul dinamic, reologic urmînd să constituie obiectul altei lucrări.

3. IPOTEZE DE CALCUL

În diversele lucrări din literatura de specialitate care s-au ocupat de problema distribuţiei eforturilor unitare din zona de stare-limită care apare în jurul unei găuri de sondă executate într-un masiv de roci omogene şi izotrope [1]—[3], [5], nu există o unitate în privinţa adoptării ipotezelor de calcul referitoare la presiunea litostatică.

Noi am considerat că cea mai logică este ipoteza lui P. Khun care este citată în [11], completată cu ipoteza lui Timbarevici [12].

În cadrul acestor ipoteze reunite se consideră că, în cazul rocilor, particulele se pot deplasa mai uşor numai după direcţia verticală. Deci direcţia principală după care se va transmite presiunea litostatică va fi direcţia gravitaţiei, în celelalte două direcţii orizontale transmiţîndu-se doar o fracţiune a acesteia. O dată cu creşterea adîncimii însă se produce o apropiere treptată de starea hidrostatică de presiune, care este caracterizată prin transmiterea presiunii integral şi în toate direcţiile, valoarea coeficientului lui Poisson (μ), respectiv a constantei lui Poisson (m), apropriindu-se de valorile 0,5 şi 2, ceea ce se întîmplă însă la adîncimi mari. În acest caz, rocile se vor găsi într-o stare plastică (semilichidă), lucru explicabil prin valorile foarte mari ale presiunii litostatice şi ale temperaturii.

Această ipoteză a fost parţial verificată de către o serie de cercetători [9], [10], [13] şi prin măsurători executate în interiorul galeriilor şi tunelurilor subterane cu ajutorul diverselor metode descrise în lucrările [14]—[17].

În partea a doua a lucrării de faţă se încearcă o verificare mai exactă a acestei ipoteze.

4. DISTRIBUŢIA EFORTURILOR UNITARE ÎN MASIVEJ ALCĂTUITE DIN ROCI ELASTICE, OMOGENE ŞI IZOTROPE

Izolînd dintr-un masiv un volum elementar în jurul unui punct aflat la o adîncime H de la suprafaţă (fig. 8) şi aplicînd ipoteza lui Khun, după care singura componentă a deformaţiei diferită de zero în punctul considerat al masivului este cea după direcţia axei Z, distribuţia eforturilor unitare va fi dată de relaţiile [6] :

$$\sigma_3 = \sigma_2 = \frac{\sigma_2}{m-1} = \frac{P}{m-1}. \tag{4.1}$$

Starea de eforturi caracterizată de relația (4.1) este o stare de eforturi de compresiune triaxială, în care cele trei eforturi unitare în direcțiile axelor de coordonate sînt eforturi unitare principale [18].

Tratînd problema în coordonate polare (fig. 9), distribuția eforturilor unitare în jurul punctului considerat va fi dată de relațiile lui Fenner [6].

$$\sigma_r = \frac{P}{2(m-1)}\,[m + (m-2)\cos 2\varphi],$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2(m-1)}\,[m - (m-2)\cos\varphi], \tag{4.2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{P(m-2)}{2(m-1)}\sin 2\varphi.$$

5. DISTRIBUȚIA EFORTURILOR UNITARE ÎN MASIVE OMOGENE ȘI IZOTROPE CARE SE AFLĂ ÎN STARE DE ECHILIBRU LIMITĂ

Înainte de a trece la atacarea problemei, vom aminti că „starea-limită" a unui material corespunde situației în care intensitatea eforturilor unitare care acționează asupra acelui material este egală cu efortul unitar normal corespunzător rezistenței la rupere a materialului [18], [19]. Această noțiune va fi mai precis lămurită în paragraful următor.

În anexa acestei prime părți a lucrării de față este prezentată rezolvarea clasică a problemei propuse și, în final, se ajunge la stabilirea relației lui Terzaghi [5], care caracterizează starea de echilibru-limită în cazul unui masiv omogen și izotrop

$$\sigma_{L1} = 2C\sqrt{\lambda} + \sigma_{L3}\lambda, \tag{5.1}$$

în care, în afara notațiilor cunoscute, λ are expresia

$$\lambda = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho_0}{2}\right). \tag{5.2}$$

În cazul masivului omogen și izotrop, relația care leagă între ele eforturile unitare principale maxim și minim este (vezi (4.1))

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = m - 1. \tag{5.3}$$

Din relația (5.1), prin împărțire cu σ_{L3}, se obține

$$\frac{\sigma_{L1}}{\sigma_{L3}} = \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda. \tag{5.4}$$

Prin analogie cu relația (5.3), propunem introducerea unui coeficient K_1, care să caracterizeze starea de echilibru limită, întocmai cum constanta lui Poisson m caracterizează starea elastică de deformare. În acest caz rezultă

$$\frac{\sigma_{L1}}{\sigma_{L3}} = K_1 - 1 = \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda, \tag{5.5}$$

de unde

$$K_1 = \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda + 1. \tag{5.6}$$

Introducerea acestui coeficient K_1, dat de relația (5.6), nu a fost pînă în prezent propusă în nici una dintre lucrările din literatura de specialitate. Așa cum se va vedea în paragraful următor, acest coeficient K_1 va juca un rol important în stabilirea relației de calcul a greutății specifice minime a noroiului de foraj, care poate împiedica apariția zonei de stare-limită în jurul găurii de sondă. De asemenea cu ajutorul aceluiași coeficient se va demonstra că relațiile obținute în cazul stării de echilibru limită a masivelor omogene, coezive și elasto-plastice au caracterul cel mai general posibil, din ele putîndu-se obține, prin punerea condițiilor la limită, relațiile pentru masive omogene și necoezive și pentru masive omogene, coezive și plastice.

Folosindu-se de figura 12, care reprezintă curba intrinsecă a unui material elasto-plastic, vom observa că, atîta timp cît $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_1'}{\sigma_3'} = m - 1 < \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda = K_1 - 1$, depășirea stării elastice a corpului nu se produce; cînd $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_{L1}}{\sigma_{L3}} = \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda = K_1 - 1$, apare starea-limită și cînd $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_1''}{\sigma_3''} > \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda = K_1 - 1$ atît starea elastică cît și starea-limită au fost depășite.

6. DISTRIBUȚIA EFORTURILOR UNITARE ÎN ZONA DE EXISTENȚĂ A STĂRII-LIMITĂ DIN JURUL GĂURILOR VERTICALE EXECUTATE ÎN MASIVE COEZIVE ȘI ELASTO-PLASTICE

Spre deosebire de schema de calcul adoptată de Terzaghi [5], noi propunem o nouă schemă, cu ajutorul căreia aparatajul matematic se simplifică. În final, relațiile obținute vor fi identice cu cele ale lui Terzaghi.

În cazul străpungerii unui astfel de masiv cu o sondă în care în locul rocii forate, care avea greutatea specifică γ_r, se introduce fluid de foraj cu greutatea specifică $\gamma_n < \gamma_r$, în jurul găurii de sondă apare o concentrare de eforturi, care, în funcție de intensitatea sa, poate duce la una dintre următoarele situații :

a) o deformare elastică a rocilor din pereții găurii ;

b) o deformație permanentă, cu tendință de creștere în timp, care poate fi de natura unei curgeri plastice sau de natura unei ruperi cu caracter mai plastic sau mai fragil, în funcție de natura materialului.

Așa cum s-a arătat în paragraful anterior, în cazul în care raportul dintre efortul unitar principal maxim și cel minim dintr-un punct al masivului din jurul găurii de sondă este mai mare decît $\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda$, în material se depășește starea elastică și încep să apară transformări ireversibile.

Pentru a determina direcția eforturilor unitare principale dintr-un punct din jurul găurii de sondă, vom recurge la raționamentul următor. Admițînd apriori că pe direcția verticală componenta deformației ε_z este neglijabilă, ipoteză suficient de exactă în cazul găurilor de lungime foarte mare și practic infinită din punct de vedere al calculului nostru, putem scrie $\varepsilon_z = 0$. Atunci cînd $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ este mai mare decît $\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda$, putem spune că în zona din jurul găurii de sondă în care este îndeplinită această condiție va începe o deplasare a materialului pe direcția razei, ceea ce va echivala cu o destindere, fără ca particulele care se aflau la un moment dat pe circumferința aceluiași cerc să se poată deplasa relativ unele față de altele. Particulele care se aflau anterior pe un cerc de rază mai mare se vor afla ulterior pe un cerc de rază mai mică deci, mai „înghesuite", ceea ce presupune o comprimare în direcția tangentei.

Avînd în vedere cele de mai sus, din care rezultă că nu există pe cele trei direcții — a razei, a tangentei și cea verticală — alunecări ale particulelor unele față de altele, se poate trage concluzia că cele trei direcții sînt direcții principale de deformație (componentele deformației de alunecare sînt zero).

Mai departe, folosind una dintre ipotezele de bază ale teoriei plasticității în care se arată că tensorul director al deformațiilor corespunde cu tensorul eforturilor unitare [18], sau, altfel spus, că direcțiile componentelor principale ale deformațiilor corespund cu direcțiile eforturilor unitare principale [19], [20], vom putea afirma că eforturile unitare principale vor trebui să se exercite tot pe cele trei direcții : a razei, a tangentei și a verticalei. Ținînd seama că toate cele trei eforturi unitare principale sînt de compresiune, deci, prin convenția de semn adoptată în prezenta lucrare, pozitive, înseamnă că efortul unitar principal maxim σ_1 va fi în direcția tangentei, unde apare o creștere a comprimării materialului ; efortul unitar în direcția razei va fi efort unitar principal minim σ_3, deoarece în această direcție apare o destindere a materialului, iar efortul unitar pe direcția verticalei va fi un efort unitar intermediar σ_3, deoarece $\varepsilon_z = 0$.

Revenind la cele afirmate anterior că atunci cînd $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} > \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda$ începe o deplasare a materialului din zona din jurul găurii de sondă în care este îndeplinită această condiţie, trebuie arătat că respectiva deplasare se va manifesta prin pătrunderea unei cantităţi oarecare de material în interiorul găurii de sondă, această pătrundere încetînd o dată cu apariţia stării-limită în toate punctele zonei, stare caracterizată prin $\frac{\sigma_{L1}}{\sigma_{L3}} = \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda$, sau, mai concret, pînă cînd copresiunea asigurată de noroi în gaura de sondă va fi suficientă pentru apariţia acestei condiţii de echilibru limită în toate punctele zonei de cedare.

Pentru a preciza mai bine natura acestei stări-limită de echilibru, trebuie arătat că materialul din jurul găurii de sondă aflat într-o astfel de stare a depăşit starea elastică, în el producîndu-se anumite deformaţii plastice nepericuloase, avînd loc o transferare a concentrării de eforturi dinspre gaură spre interiorul masivului în toată zona adiacentă, numită uneori zonă de cedare. Cu alte cuvinte, materialul aflat într-o astfel de stare s-a adaptat în timp stării de eforturi.

Aşa cum s-a arătat şi în paragraful 2, în lucrarea de faţă nu se urmăreşte decît rezultatul final : apariţia stării-limită în această zonă, aspectul dinamic, reologic urmînd să fie analizat cu altă ocazie. În acest sens trebuie arătat că starea de echilibru limită în toate punctele zonei de cedare formate în jurul găurii de sondă apare numai atunci cînd în fiecare punct este îndeplinită condiţia (5.1).

Se va trece acum la rezolvarea problemei.

Presupunînd că în masiv (fig. 13) s-a executat o gaură de sondă şi că în jurul acesteia a luat naştere zona de cedare, care, în final, după relaxarea completă a eforturilor, devine zona stării-limită în care roca se află în echilibru labil condiţionat de valoarea P_{ra} a contrapresiunii din gaura de sondă, atunci asupra volumului elementar cu înălţimea egală cu unitatea vor acţiona forţele din figura 13.

Scriind ecuaţia de echilibru pe direcţia razei, deoarece pe direcţia tangentei şi a verticalei forţele se anulează, obţinem

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \tag{6.1}$$

Aşa cum s-a văzut înainte, efortul unitar principal maxim va fi σ_θ, iar cel minim σ_r, deci condiţia de existenţă a stării-limită (5.1) devine

$$\sigma_\theta = 2C\sqrt{\lambda} + \sigma_r \lambda. \tag{6.2}$$

Înlocuind în (6.1) pe σ_θ cu expresia sa din (6.2), se obţine următoarea ecuaţie diferenţială :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(1-\lambda)\sigma_r}{r} - \frac{2C\sqrt{\lambda}}{r} = 0, \tag{6.3}$$

care după integrare va da

$$\sigma_r = Dr^{(\lambda-1)} - \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}, \tag{6.4}$$

Punînd condiția la limită pentru $r = a$, $\sigma_r = P_{ra}$, se determină constanta de integrare:

$$D = \left(P_{ra} + \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^{(\lambda-1)} - \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}. \tag{6.5}$$

Înlocuind pe D din (6.5) în (6.4), se obține

$$\sigma_r = \left(P_{ra} + \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{(\lambda-1)} - \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}. \tag{6.6}$$

Ținînd seama de (6.2), rezultă expresia lui σ_θ

$$\sigma_\theta = \lambda\left(P_{ra} + \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{(\lambda-1)} + \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1.}. \tag{6.7}$$

Pentru determinarea distribuției eforturilor unitare în exteriorul zonei de cedare, propunem adoptarea unei analogii formale între un tub cu pereții groși de lungime infinită și un tub imaginar, format în jurul găurii de sondă prin izolarea rocii din această porțiune cu un cilindru concentric cu gaura și care are rază foarte mare.

Într-adevăr, dacă se procedează așa cum s-a arătat și dacă raza tubului imaginar este mult mai mare decît raza zonei de cedare b, practic infinită în comparație cu aceasta, conform principiului efortului unitar local eforturile unitare pe suprafața exterioară a tubului imaginar se vor deosebi, de fapt, prea puțin de cazul în care masivul ar fi continuu. Acest considerent justifică acceptarea analogiei propuse.

În acest caz putem folosi relațiile lui Lamé de la tuburi cu pereți groși pentru a determina distribuția eforturilor unitare pentru o deformație elastică, cu corectivul că vom considera raza exterioară $r_2 = \infty$. Aceste relații sînt

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}, \tag{6.8}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}. \tag{6.9}$$

Notaţiile au următoarele semnificaţii :

p_1 — presiunea interioară, în cazul nostru presiunea pe conturul zonei de cedare, deci $p_1 = p_b$;

p_2 — presiunea exterioară, în cazul nostru presi nea la o rază suficient de mare încît influenţa concentrării eforturilor pe conturul zonei de cedare practic să nu se mai simtă faţă de situaţia în care masivul nu era deranjat, deci $p_2 = \frac{P}{m-1}$;

r_1 — raza interioară, în cazul nostru raza zonei de cedare : $r_1 = b$;

r_2 — raza exterioară, în cazul nostru ea tinde către infinit;

r — raza curentă.

Făcînd înlocuirile necesare în relaţiile (6.8) şi (6.9) şi trecîndu-le la limită pentru $r_2 \to \infty$, se obţin relaţiile

$$\sigma_r = \frac{P}{m-1} + \left(p_b - \frac{P}{m-1}\right)\left(\frac{b}{r}\right)^2, \tag{6.10}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{m-1} - \left(p_b - \frac{P}{m-1}\right)\left(\frac{b}{r}\right)^2. \tag{6.11}$$

Pentru a-l determina pe p_b punem condiţia ca, la $r = b$, $\sigma_{rc} = \sigma_{re}$ (adică efortul unitar radial din zona de cedare să fie egal cu efortul unitar radial din zona elastică) şi atunci din (6.6) şi (6.10), egalîndu-le, rezultă

$$p_b = -\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda-1} + \left(P_{ra} + \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{(\lambda-1)}. \tag{6.12}$$

Înlocuind pe p_b în (6.10) şi (6.11) cu expresia sa dată de (6.12), se obţine

$$\sigma_r = \frac{P}{m-1} + \left[\left(P_{ra} + \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{(\lambda-1)} - \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda-1} - \frac{P}{m-1}\right]\left(\frac{b}{r}\right)^2, \tag{6.13}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{m-1} - \left[\left(P_{ra} + \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{(\lambda-1)} - \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda-1} - \frac{P}{m-1}\right]\left(\frac{b}{r}\right)^2. \tag{6.14}$$

Relaţiile (6.6), (6.7), (6.13) şi (6.14) au fost obţinute sub aceeaşi formă şi de Terzaghi [5], însă printr-o metodică mai complicată.

Pentru a se obţine acum raza zonei de cedare, trebuie să ţinem seama că σ_{rc} şi $\sigma_{\theta c}$ sînt egale cu σ_{re} şi $\sigma_{\theta e}$ la $r = b$ şi că m în acest caz devine egal cu K_1.

În lucrarea sa, Terzaghi consideră că m pe conturul zonei de stare-limită este egal cu 2, materialul din interiorul zonei de stare-limită trecînd într-o stare plastică asimilabilă cu cea fluidă pentru care distribuția eforturilor unitare este hidrostatică ($\sigma_1 = \sigma_3$), și deci din relația (4.1) ar rezulta

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = m - 1 = 1, \qquad m = 2. \tag{6.15}$$

Dacă ținem însă seama de expresia lui K_1 propusă de noi, vom observa din relația (5.2) că pentru $\rho_0 = 0$, care caracterizează corpurile plastice sau intrate în stare plastică, $\lambda = 1$ și deci relația (5.6) devine

$$K_1 = \frac{2C}{\sigma_{L3}} + 2. \tag{6.16}$$

Din (6.16) se poate observa că în acest caz K_1 este diferit de 2, el depinzînd atît de coeziunea materialului, cît și de starea de eforturi unitare triaxiale caracterizată de σ_{L3}, deci fiind diferit de o constantă. Acest lucru va fi analizat mai pe larg în paragraful următor.

În concluzie se poate remarca că Terzaghi, considerîndu-l pe m egal cu 2, va introduce erori în calculele următoare. Deci, revenind la calculul nostru, egalîndu-l pe m cu K_1 și punînd condiția

$$r = b \rightarrow \sigma_{rc} + \sigma_{\theta c} = \sigma_{re} + \sigma_{\theta e}, \tag{6.17}$$

din relațiile (6.13) și (6.14) va rezulta

$$\sigma_{re} + \sigma_{\theta e} = \frac{2P}{K_1 - 1}, \tag{6.18}$$

iar din relațiile (6.6) și (6.7)

$$\sigma_{rc} + \sigma_{\theta c} = \left(P_{ra} + \frac{2C\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{(\lambda-1)}(\lambda + 1) - \frac{4C\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}. \tag{6.19}$$

Înlocuind pe K_1 în (6.18) cu expresia sa dată de (5.6) și egalînd rezultatul obținut cu (6.19), se poate determina raza zonei de cedare:

$$b = a\left\{\frac{2\left[P\sigma_{L3}(\lambda - 1) + 2\sqrt{\lambda}(2C\sqrt{\lambda} + \sigma_{L3}\lambda)\right]}{(\lambda + 1)(2C\sqrt{\lambda} + \sigma_{L3}\lambda)\left[P_{ra}(\lambda - 1) + 2C\sqrt{\lambda}\right]}\right\}^{1/\lambda - 1}. \tag{6.20}$$

Relația (6.20) diferă de relația lui Terzaghi tocmai prin faptul că am considerat $m = K_1$ și nu $m = 2$. De asemenea toate relațiile pe care le vom obține în continuare vor diferi de cele ale lui Terzaghi din același motiv.

În relația (6.20), dacă vom pune condiția $b = a$, se poate determina adîncimea H_{cr} la care începe apariția zonei de cedare, ținînd seama și de faptul că în acest caz $P_{cr} = H_{cr}\gamma_r$ și $P_{ra} = \sigma_{L3} = H_{cr}\gamma_n$:

$$H_{cr} = \frac{\gamma_n C\sqrt{\lambda}(2\lambda^2-\lambda-1) \pm \sqrt{\gamma_n^2 C^2\lambda(2\lambda^2-\lambda-1)^2 + 4\gamma_n C^2\lambda(\lambda-1)^2[2\gamma_r - \gamma_n\lambda(\lambda+1)]}}{\gamma_n(\lambda-1)\ [2\gamma_r - \gamma_n\lambda(\lambda+1)]}. \tag{6.21}$$

Pentru ca expresia adîncimii critice dată de (6.21) să aibă un sens fizic, trebuie ca $H_{cr} > 0$. Această condiție este îndeplinită în următoarele situații:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_n C\sqrt{\lambda}(2\lambda^2-\lambda-1 \pm \\ &\pm\sqrt{\gamma_n^2 C^2\lambda(2\lambda^2-\lambda-1)^2 + 4\gamma_n C^2\lambda(\lambda-1)^2[2\gamma_r-\gamma_n\lambda(\lambda+1)]} \geqslant 0 \quad \text{(a)},\\ &\gamma_n(\lambda-1)[2\gamma_r - \gamma_n\lambda(\lambda+1)] > 0 \quad \text{(b)}; \end{aligned}\right\} \quad \text{I}$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_n C\sqrt{\lambda}(2\lambda^2-\lambda-1) \pm \\ &\pm\sqrt{\gamma_n^2 C^2\lambda(2\lambda^2-\lambda-1)^2 + 4\gamma_n C^2\lambda(\lambda-1)^2[2\gamma_r-\gamma_n\lambda(\lambda+1)]} \leqslant 0 \quad \text{(a)},\\ &\gamma_n(\lambda-1)[2\gamma_r - \gamma_n\lambda(\lambda+1)] > 0 \quad \text{(b)}; \end{aligned}\right\} \quad \text{II}$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_n C\sqrt{\lambda}(2\lambda^2-\lambda-1) \pm \\ &\pm\sqrt{\gamma_n^2 C^2\lambda(2\lambda^2-\lambda-1)^2 + 4\gamma_n C^2\lambda(\lambda-1)^2[2\gamma_r-\gamma_n\lambda(\lambda+1)]} > 0 \quad \text{(a)},\\ &\gamma_n(\lambda-1)[2\gamma_r - \gamma_n\lambda(\lambda+1)] = 0 \quad \text{(b)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{III}$$

Vom analiza pe rînd cele trei cazuri.

Cazul I. Condiția I(b) implică

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\gamma_n}{\gamma_r} < \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \quad \text{(a)},\\ &\lambda > 1 \quad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\gamma_n}{\gamma_r} > \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \quad \text{(a)},\\ &\lambda < 1. \end{aligned}\right\} \tag{6.23}$$

Ţinînd seama de relaţia (14) din anexa lucrării,

$$\lambda = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho_0}{2}\right), \tag{6.24}$$

din care rezultă că λ nu poate fi mai mic decît 1, se poate observa că sistemul (6.23) de inegalităţi nu are sens. Deci rămîne numai sistemul (6.22).

În afara condiţiilor I(a) şi I(b), tot pentru păstrarea sensului fizic mai trebuie îndeplinită şi condiţia

$$\gamma_n^2 C^2\lambda(2\lambda^2-\lambda-1) + 4\gamma_r C^2\lambda(\lambda-1)^2[2\gamma_r-\gamma_n\lambda(\lambda-1)] \geqslant 0, \tag{6.25}$$

de unde rezultă

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_r} \geqslant -8, \tag{6.26}$$

condiţie care este realizată avînd în vedere că atît γ_n, cît şi γ_r sînt pozitive.

Mai departe, ţinînd seama de I(b), care implică

$$4\gamma_n C^2\lambda(\lambda-1)^2[2\gamma_r - \gamma_n\lambda(\lambda+1)] > 0, \tag{6.27}$$

rezultă că

$$\gamma_n C\sqrt{\lambda}(2\lambda^2 - \lambda - 1) <$$

$$< \sqrt{\gamma_n^2 C^2\lambda(2\lambda^2 - \lambda - 1)^2 + 4\gamma_n C^2\lambda(\lambda-1)^2[2\gamma_r-\gamma_n\lambda(\lambda+1)]}, \tag{6.28}$$

deci pentru îndeplinirea simultană a condiţiilor I(a) şi I(b) va trebui să se ia numai semnul plus în faţa radicalului.

Cazul II. Condiţia II (b) implică

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma_n}{\gamma_r} > \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} && \text{(a).} \\ &\lambda > 1 && \text{(b)} \end{aligned} \tag{6.29}$$

sau

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma_n}{\gamma_r} < \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} && \text{(a),} \\ &\lambda < 1 && \text{(b).} \end{aligned} \tag{6.30}$$

Ţinînd seama de relaţia (6.24), din care rezultă că λ nu poate fi mai mic decît 1, rezultă că sistemul (6.30) de inegalităţi nu are sens. Rămîne deci sistemul (6.29).

În afara condițiilor II(a) și II(b), pentru păstrarea sensului fizic mai trebuie îndeplinită și condiția (se ține seama și de II(b), respectiv de (6.29))

$$\gamma_n^2 C^2 \lambda (2\lambda^2 - \lambda - 1)^2 \geqslant 4\gamma_n \lambda C^2 (\lambda - 1)^2 [2\gamma_r - \gamma_n \lambda(\lambda + 1)], \tag{6.31}$$

care conduce la

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_r} \geqslant \frac{8}{8\lambda^2 + 8\lambda + 1} \tag{6.32}$$

sau, ținînd seama de (6.29),

$$\frac{8}{8\lambda^2 + 8\lambda + 1} > \frac{2}{\lambda(\lambda + 1)}. \tag{6.33}$$

Din (6.33), după transformări, rezultă

$$4\lambda(\lambda + 1) < 1. \tag{6.34}$$

Inegalitatea (6.34) contrazice condiția ca λ să fie mai mare decît 1.

În concluzie se poate spune despre cazul II că nu prezintă semnificație fizică pentru modul în care s-a tratat problema *).

Cazul III. Din condiția III(b) rezultă

$$\gamma_n = \frac{2\gamma_r}{\lambda(\lambda + 1)}. \tag{6.35}$$

Prin introducerea condiției (6.35) în III(a) rezultă că doar valoarea care se obține prin luarea în considerație a semnului plus din fața radicalului este valabilă. Această valoare va fi

$$2\gamma_n C \sqrt{\lambda}(2\lambda^2 - \lambda - 1) > 0. \tag{6.36}$$

Dacă se ia minus în fața radicalului, se obține zero, ceea ce contrazice condiția III(a) și, în plus, duce la o nedeterminare în relația (6.21).

Cazul I corespunde situației în care la o adîncime critică este posibilă apariția zonei de cedare în jurul unei găuri de sondă care traversează o anumită formație caracterizată prin parametrii C și λ.

Cazul III, prin condiția III(b) introdusă, corespunde situației în care $H_{cr} = \infty$ și, prin urmare, este absolut exclusă apariția zonei de cedare

*) În realitate, și acest caz prezintă o semnificație fizică, și anume aceea că, în cazul existenței condiției II (b), va apărea la o anumită adîncime zona de cedare, însă de data aceasta materialul nu va pătrunde în sondă, ci se va produce, dimpotrivă, o mărire a diametrului găurii. Un astfel de caz implică însă o punere a problemei diferită de cea adoptată de noi.

la traversarea unei anumite formaţii caracterizate prin parametrii C şi λ, indiferent de adîncimea la care se află această formaţie.

Cu ajutorul relaţiei (6.35) se poate calcula greutatea specifică a noroiului de foraj necesară pentru a împiedica apariţia zonei de cedare, indiferent de adîncimea la care se află formaţia ce urmează a fi traversată.

În literatură se dau următoarele relaţii pentru calculul greutăţii specifice a fluidului de foraj, necesară pentru a menţine stabilitatea găurii de sondă :

$$\gamma_n = \frac{\gamma_r}{1 + \dfrac{\sin \rho_0}{1 - \sin \rho_0}}, \tag{6.37}$$

relaţia dată de Ruppeneit şi Pesleak [2], şi

$$\gamma_n = \frac{2\delta_r}{\lambda + 1} \tag{6.38}$$

care rezultă din lucrarea lui Terzaghi [5].

De fapt, ţinînd seama că

$$\lambda = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho_0}{2}\right) = \frac{1 + \sin \rho_0}{1 - \sin \rho_0}, \tag{6.39}$$

se poate observa că relaţiile (6.37) şi (6.38) sînt echivalente cu relaţia

$$\gamma_n = \gamma_r(1 - \sin \rho_0). \tag{6.40}$$

Pentru a compara între ele relaţiile (6.35) şi (6.40), vom recurge la două exemple concrete. Astfel, în lucrările [21], [22] sînt citate sondele : Meillon I, care s-a săpat cu aer în gresie dură pe intervalul 1557—2528 m, şi Meillon 2, care s-a săpat cu aer în calcare compacte pe intervalul 2400—3400 m. În ambele cazuri, aşa cum se specifică în lucrările citate, forajul s-a desfăşurat în condiţii extrem de bune, neînregistrîndu-se nici cel mai mic deranjament de gaură.

Alegînd dintre curbele intrinseci date în lucrarea [9] pe cele corespunzătoare gresiei şi calcarului, care au pantele cele mai abrupte şi care sînt prezentate în figurile 4 şi 5, asimilînd cu drepte porţiunile din curbe corespunzătoare lui σ cuprins între 507 şi 702 kg/cm^2 pentru gresie (fig. 4) şi între 1560 şi 1755 kg/cm^2 pentru calcare (fig. 5) (intervalelor alese le corespunde un σ mediu egal cu presiunea litostatică la adîncimile de 2500 şi, respectiv, 3400 m) şi calculînd pe γ_n cc relaţiile (6.35) şi (6.40),

s-au obţinut rezultatele din tabela 1. În aceeaşi tabelă sînt trecute şi greutăţile specifice ale noroiului de foraj, calculate cu ajutorul aceloraşi relaţii, pentru argile cu conţinut de apă de 8, 13, 18 şi 23% şi pentru adîncimile de 1000 şi 2000 m, folosind curbele intrinseci obţinute din experienţele descrise în partea a doua a prezentei lucrări.

Tabela 1

Roca	H, m	φ_0, grade	λ	$\sin \varphi_0$	γn, kg/dm³	
					(6.35)	(6.40)
Gresie	2500	44°30'	5,66	0,7	0,128	0,720
Calcar	3250	36°	3,84	0,58	0,252	0,991
Argilă cu 8% apă	1000	11°	1,46	0,19	1,333	1,951
	2000	6°	1,23	0,10	1,777	2,152
Argilă cu 13% apă	1000	7°	1,27	0,12	1,655	2,114
	2000	3°	1,1	0,05	2,078	2,181
Argilă cu 18 % apă	1000	4°	1,14	0,07	1,98	2,243
	2000	2°	1,06	0,03	2,2	2,33
Argilă cu 23% apă	1000	0°	1	0	2,4	2,4
	2000	0°	1	0	2,4	2,4

Din această tabelă se observă că pentru gresii şi calcare care se află la adîncimi de 2500 şi, respectiv, 3250 m, calculînd pe γ_n cu relaţia (6.40), se obţin valori de 0,720 kg/dm³ pentru gresii şi de 0,991 kg/dm³ pentru calcare. De aici rezultă că aceste roci, aflate la adîncimile menţionate, nu vor putea fi traversate cu fluide gazoase fără să apară semnele evidente ale cedării pereţilor găurii şi ale pătrunderii rocii în sondă. Şi, totuşi, formaţii asemănătoare au fost traversate fără nici un fel de dificultăţi în sondele Meillon 1 şi 2. Din calculele făcute cu relaţia (6.35) rezultă însă greutăţi specifice ale noroiului de foraj de 0,128 kg/dm³ pentru gresie şi de 0,252 kg/dm³ pentru calcar. Se observă că aceste greutăţi specifice sînt mai apropiate de greutatea specifică a aerului.

Din cele de mai sus se poate trage concluzia că relaţia (6.35) este mai apropiată de realitate decît relaţia (6.40).

Faptul că relaţiile (6.37) şi (6.38), care sînt echivalente cu relaţia (6.40), prezintă un grad mai mare de aproximare decît relaţia (6.35) se explică prin următoarele. Relaţia (6.37) s-a stabilit considerînd pe $m = 2$ în interiorul zonei de cedare, deci asimilîndu-se starea-limită cu o stare hidrostatică, ceea ce nu se întîmplă decît la compresiuni triaxiale foarte mari. Acelaşi lucru se poate spune şi despre relaţia (6.38), care a fost stabilită acceptîndu-se apriori ipoteza distribuţiei hidrostatice. Din acest motiv, cele două relaţii sînt şi echivalente.

7. CLASIFICAREA ROCILOR DIN PUNCTUL DE VEDERE AL COMPORTĂRII LOR LA DIVERSE STĂRI DE EFORTURI UNITARE

Unul dintre criteriile de clasificare a materialelor din punctul de vedere al comportării lor la diverse stări de eforturi unitare este valoarea coeficientului de neuniformitate. Acest criteriu este folosit în teoria elasticității și a plasticității [18], dar nu a fost pînă acum aplicat, în forma pe care o vom prezenta în continuare, în cadrul mecanicii rocilor. Vom încerca să propunem o clasificare a rocilor din acest punct de vedere.

Coeficientul de neuniformitate al eforturilor se notează cu ν și se definește ca fiind egal cu raportul $\frac{\sigma_{L1}}{\sigma_{L3}}$ pentru materiale necoezive și cu raportul $\frac{\sigma_{Lc}}{\sigma_{Lt}}$ pentru materiale coezive în cazul acceptării ipotezei simplificate a lui Mohr, în care se asimilează curba intrinsecă a unui material cu o dreaptă [18], [19], [23].

În funcție de valoarea lui ν, materialele se pot clasifica astfel:

— pentru $\nu = 1$: materiale plastice; înfășurătoarea cercurilor lui Mohr, asimilată cu o dreaptă, este paralelă cu axa σ (fig. 1);

— pentru $\sigma > 1$: materialele elasto-fragile sau elasto-plastice, după cum ν este mai îndepărtat sau mai apropiat de unitate. În acest caz, înfășurătoarea cercurilor lui Mohr, aproximată cu o linie dreaptă, intersectează axa σ sub un unghi ρ_0, care reprezintă unghiul de frecare interioară a materialului (fig. 2).

Dintre roci, sing rele care pot fi încadrate într-una din categoriile sus-citate, și anume în categoria materialelor elasto-fragile, sînt rocile cu coeziune foarte mică, practic nulă (mai ales nisipurile), a căror curbă intrinsecă reprezintă o dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate (fig. 3). În cazul nisipurilor, în cadrul experiențelor executate pînă la presiuni de ordinul a 2 500 at [9], nu s-a observat nici un fel de deviere a curbei intrinseci de la linia dreaptă, ceea ce ar fi indicat o trecere spre starea plastică (semilichidă), așa cum se observă în cazul altor roci [9]—[11].

În privința tuturor celorlalte tipuri de roci, curba intrinsecă este evident, diferită de o dreaptă (fig. 4, gresie [9]; fig. 5, calcar [9]; fig. 6, argilă cu umiditate mare, curbă ridicată pe baza experiențelor descrise în partea a doua a prezentei lucrări: fig. 7, sare gemă [9]).

Curbele intrinseci diferite de drepte au fost aproximate de diverși autori [12] cu cicloide sau parabole. Se pare că cel mai corect este să aproximăm aceste curbe cu niște parabole [11]. Considerînd o astfel de curbă (fig. 4), pentru a putea fi folosită teoria simplificată a lui Mohr va fi necesar să aproximăm diferitele intervale ale curbei cu niște drepte și nu întreagă curbă. Astfel, pentru intervalul cuprins între $\sigma = 507$ și $\sigma = 102$ kg/cm^2 se observă că unghiul de frecare interioară ρ_{01} este mai mare decît unghiul de frecare interioară ρ_{02}, corespunzător intervalului cuprins între $\sigma = 1560$ și $\sigma = 1755$ kg/cm^2. În același timp, pentru primul

interval, efortul unitar tangențial corespunzător lui $\sigma = 0$, notat pe figură cu C', este mai mic decît același efort unitar tangențial C'', corespunzător intervalului al doilea.

Deducem din cele de mai sus că ρ_0, unghiul de frecare interioară, și C, efortul unitar tangențial limită de rupere, corespunzător stării de eforturi mixtă în care $\sigma_{L1} = \sigma_{Lc}$ și $\sigma_{L3} = \sigma_{Lt}$, nu mai sînt niște constante în cazul rocilor (exceptînd rocile necoezive), aceste caracteristici depinzînd de starea de eforturi.

Ținînd seama de aceste considerente, se poate face totuși convenția de a plasa în categoria materialelor plastice acele roci ale căror curbe intrinseci tind rapid către o dreaptă paralelă cu axa σ la valori mici ale eforturilor unitare triaxiale. Aceste roci sînt : sarea gemă (fig. 7) și argilele cu conținut mare de apă (fig. 6). Toate celelalte tipuri de roci, cu excepția rocilor necoezive, se pot încadra în categoria materialelor elasto-plastice.

Dar orice rocă de tip elasto-plastic prezintă o curbă intrinsecă, care tinde, la valori mari ale eforturilor unitare triaxiale, să devină paralelă cu axa σ. Revenind acum la ipoteza de calcul adoptată în paragraful 3, reiese că în cazul rocilor elasto-plastice, pentru o stare de eforturi caracterizată prin σ_{L1} și σ_{L3} suficient de mari încît curba intrinsecă să fie o paralelă la axa σ, se poate afirma că aceste roci se vor găsi în stare plastică întocmai ca sarea gemă sau argila cu conținut mare de apă, la care însă apare această stare cînd sînt supuse la eforturi unitare triaxiale mult mai mici. Dacă ținem seama că raportul $\frac{\sigma_{L1}}{\sigma_{L3}}$ este în aceste condiții destul de apropiat de unitate (și el este cu atît mai apropiat de unitate, în cazul curbei intrinseci paralele cu axa σ, cu cît valorile absolute ale lui σ_{L1} și σ_{L3} sînt mai mari, diferența dintre ele rămînînd constantă), putem denumi această stare „semilichidă", în interiorul materialului făcîndu-și apariția o stare de eforturi unitare apropiată de distribuția hidrostatică, dar nu identică cu aceasta.

8. CARACTERUL GENERAL AL RELAȚIILOR OBȚINUTE PENTRU CORPURI ELASTO-PLASTICE ÎN STARE DE ECHILIBRU LIMITĂ ȘI MODUL LOR DE PARTICULARIZARE

8.1. *Masive neatacate.* Ținînd seama că am asimilat pe m din cazul stării elastice cu un coeficient K_1 propus de noi și care caracterizează starea-limită a corpului, vom putea înlocui pe m din relațiile (4.2) cu expresia lui K_1, dată de (5.6), și în acest caz se vor obține relațiile de distribuție a eforturilor unitare dintr-un masiv omogen și izotrop, elasto-plastic și coeziv, care se găsește în stare de echilibru-limită :

$$\sigma_r = \frac{P}{2\left(\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda\right)}\left[\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda + 1 + \left(\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda - 1\right)\cos 2\varphi\right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\left(\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda\right)}\left[\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda + 1 - \left(\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda - 1\right)\cos 2\varphi\right],$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{P\left(\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda - 1\right)}{2\left(\frac{2C\sqrt{\lambda}}{\sigma_{L3}} + \lambda\right)} \sin 2\varphi. \tag{8.1}$$

Vom arăta în continuare că, punînd anumite condiţii la limită în relaţiile (8.1), care sînt valabile în cazul corpurilor coezive cu $\nu \neq 1$, se pot obţine relaţiile de distribuţie a eforturilor unitare pentru corpuri necoezive şi pentru corpuri plastice care se găsesc în stare de echilibru limită.

În cazul corpurilor necoezive $C_1 = C = 0$, diagrama lui Mohr căpătînd aspectul din figura 3.

Din relaţia (5.6) se observă că pentru $C = 0$ avem

$$K_1 = \lambda + 1. \tag{8.2}$$

Relaţiile (8.1) pentru corpuri necoezive devin

$$\sigma_r = \frac{P}{2\lambda}[\lambda + 1 + (\lambda - 1)\cos 2\varphi],$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\lambda}[\lambda + 1\lambda - (\lambda - 1)\cos 2\varphi], \tag{8.3}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{P(\lambda - 1)}{2\lambda}\sin 2\varphi.$$

În cazul corpurilor plastice ($\nu = 1$), diagrama lui Mohr este cea din figura 1. În acest caz, $\rho_0 = 0$ şi $\lambda = 1$ (vezi (5.2)), deci relaţiile (8.1) devin

$$\sigma_r = \frac{C\sigma_{L3}P}{2C + \sigma_{L3}}\left[1 + \frac{1}{\sigma_{L3}}(1 + \cos 2\varphi)\right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{C\sigma_{L3}P}{2C + \sigma_{L3}}\left[1 + \frac{1}{\sigma_{L3}}(1 - \cos 2\varphi)\right], \tag{8.4}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{CP}{2C + \sigma_{L3}}\sin 2\varphi.$$

Relaţiile (8.4) arată că, în cazul unui corp cu caracter plastic pronunţat distribuţia eforturilor unitare nu este hidrostatică. Pentru ca această distribuţie să fie hidrostatică ar fi necesar ca

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta = P, \\ \tau_{rL} &= 0. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Lucrurile se clarifică dacă privim figura 1 unde este trasată diagrama unui corp plastic. Se observă din această figură că, oricît ar fi de mare σ_{L1}, va exista totdeauna un decalaj între valoarea sa şi valoarea lui σ_{L3}, decalaj care însă rămîne constant. Pentru ca σ_{L1} să fie egal cu σ_{L3} ar fi necesar ca această curbă intrinsecă să intersecteze axa σ în dreapta axei τ.

Tot din figura 1 şi din relaţiile (8.4) mai rezultă însă că pentru valori mari ale lui σ_{L1} şi σ_{L3} în relaţiile (8.4) se pot neglija termenii care conţin pe σ_{L3} la numitor, şi în acest caz se poate considera cu destulă exactitate că $\sigma_r = \sigma_{L1} = \sigma_\theta = \sigma_{L3}$ şi $\tau_{r\theta} = 0$.

8.2. *Masive atacate.* Dacă în relaţiile (6.6) şi (6.7) punem condiţia $C = 0$ şi ţinînd seama că în acest caz expresia lui K_1 din (5.6) devine identică cu cea a coeficientului K propus de Fenner [6] pentru roci necoezive [6], rezultă

$$1 + \lambda = K, \tag{8.6}$$

$$C = 0.$$

Înlocuind pe λ şi C din relaţiile (6.6) şi (6.7) cu expresiile lor din (8.6), se obţine

$$\sigma_r = P_{ra}\left(\frac{r}{a}\right)^{(K-2)}, \tag{8.7}$$

$$\sigma_\theta = (K-1)\,P_{ra}\left(\frac{r}{a}\right)^{(K-2)}. \tag{8.8}$$

Relaţiile (8.7) şi (8.8) sînt absolut identice cu cele care au fost stabilite de Fenner [6], care însă a plecat de la cu totul altă schemă de calcul la stabilirea lor.

Pentru corpurile plastice, ţinînd seama că în acest caz λ tinde la limită către 1 şi trecînd la limită, matematic, relaţiile (6.6) şi (6.7), se obţine

$$\lim_{\lambda \to 1} \sigma_r = P_{ra} + 2C \ln \frac{r}{a}, \tag{8.9}$$

$$\lim_{\lambda \to 1} \sigma_\theta = P_{ra} + 2C\left(\ln \frac{r}{a} + 1\right). \tag{8.10}$$

În anexa prezentată în partea a doua a acestei lucrări este arătat modul de a se obţine relaţiile de distribuţie a eforturilor unitare în interiorul zonei de stare-limită pentru corpuri plastice. În acest caz, relaţiile care dau eforturile unitare în zona în care s-a stabilizat starea-limită sînt

$$\sigma_r = P_{ra} + \frac{4C}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{a}, \tag{8.11}$$

$$\sigma_\theta = P_{ra} + \frac{4C}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right). \tag{8.12}$$

Relaţiile (8.11) şi (8.12) sînt asemănătoare cu (8.9) şi (8.10). Ceea ce diferă este coeficientul numeric al termenului al doilea din partea dreaptă, care în primul caz este 2,3, iar în al doilea 2. Această diferenţă provine din faptul că în modul de calculare al relaţiilor (8.9) şi (8.10) s-a aplicat teoria simplificată a lui Mohr, în timp ce la stabilirea relaţiilor (8.11) şi (8.12) s-a folosit teoria energiei specifice de variaţie a formei. Aceste teorii diferite dau rezultate calitativ similare, însă cantitativ diferite [18], [19], [23] lucru care, de altfel, a reieşit şi din cele de mai sus.

Faptul că din relaţiile stabilite pentru corpuri coezive elasto-plastice s-au putut deduce relaţiile pentru corpuri necoezive şi pentru corpuri coezive plastice prin punerea condiţiilor la limită ne dă posibilitatea să afirmăm că introducerea coeficientului K_1, propusă în această lucrare, este justificată perfect, ea dînd posibilitatea unei generalizări a calculului pentru determinarea eforturilor unitare în cazul rocilor intrate în stare de echilibru limită.

ANEXĂ

DISTRIBUŢIA EFORTURILOR UNITARE ÎN MASIVE OMOGENE ALCĂTUITE DIN ROCI COEZIVE ELASTO-PLASTICE CARE SE AFLĂ ÎN STARE DE ECHILIBRU LIMITĂ

Pentru rezolvarea problemei propuse vom apela la teoria simplificată a lui Mohr, în care se asimilează înfăşurătoarea cercurilor care reprezintă diversele stări-limită cu o linie dreaptă sau se aproximează cu linii drepte diversele intervale ale curbei intrinseci. În acest caz, situaţia va fi cea din figura 10.

Se observă din figură că efortul unitar principal maxim σ_{L1} şi cel minim σ_{L3} corespund stării-limită, deoarece cercul cu diametrul $\sigma_{L1} - \sigma_{L3}$ este tangent la înfăşurătoare.

Conform teoriei simplificate a lui Mohr, pentru materiale cu $\nu \neq 1$ vom putea scrie relaţia

$$\sigma_{L1} - \nu \sigma_{L3} = \sigma_{ec}. \tag{1}$$

Din figura 10 rezultă

$$\sigma_{ec} = \sigma_{LC} \tag{2}$$

De asemenea din aceeaşi figură se vede că

$$\frac{\sigma_{LC}}{2} = \left(\frac{\sigma_{LC}}{2} + C_1\right) \sin \rho_0, \tag{3}$$

iar din (3,) după transformări, se obţine

$$\sigma_{LC} = \frac{2C_1 \sin \rho_0}{1 - \sin \rho_0}. \tag{4}$$

Relaţia (1), ţinînd seama de (2), se mai poate scrie

$$\sigma_{L1} - \nu\sigma_{L3} = \sigma_{LC} \tag{5}$$

Pentru clarificarea notaţiilor din figura 10 vom recurge la figura 11, corelată cu figura 8. În figura 11 s-a reprezentat intersecţia planelor P şi P' din figura 8 cu planul ZOX. S-a recurs la această reprezentare deoarece, conform relaţiei (4.1), $\sigma_x = \sigma_y$, ceea ce justifică reducerea problemei spaţiale la o problemă plană. În figura 8 se observă că toate planele paralele cu planele XOY, XOZ şi YOZ sînt plane principale în care, prin urmare, nu vor acţiona decît eforturi unitare normale, în timp ce pe oricare alt plan a cărui normală face un unghi φ, diferit de 90° sau de 0°, cu una din axele de coordonate, va acţiona atît un efort normal, cît şi unul tangenţial. În această situaţie este şi planul P, paralel cu axa OY, a cărui normală face unghiul φ_l, diferit de 90° sau 0°, cu axa OZ (fig. 11). S-a ales acest plan, care corespunde pe cele două figuri, deoarece, aşa cum se va vedea, este un plan remarcabil.

Revenind la figura 10, se observă că pentru un plan oarecare P' care face unghiul φ cu axa OZ şi este paralel cu axa OY (vezi fig. 8 şi 11) se pot determina grafic valorile eforturilor unitare σ_n şi τ_n care acţionează pe acest plan. Astfel, din figura 10 se vede că

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{L1} + \sigma_{L3}}{2} + \frac{\sigma_{L1} - \sigma_{L3}}{2} \cos 2\varphi, \tag{6}$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_{L1} - \sigma_{L3}}{2} \sin 2\varphi. \tag{7}$$

Planul P este un plan remarcabil deoarece în acest plan, corespunzător unghiului φ_l din figurile 10 şi 11, se observă că pentru o anumită stare de eforturi unitare, caracterizată prin eforturile unitare principale σ_{L1} şi σ_{L3}, apare starea de echilibru limită a corpului respectiv, cu alte cuvinte dintre toate planele care trec printr-un punct al masivului respectiv, supus la o stare de eforturi unitare triaxiale neuniforme, doar pe planul a cărui normală face unghiul φ_l cu axa OZ apare starea-limită de echilibru.

Valoarea lui φ_t rezultă din figura 10 :

$$\varphi_t = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho_0}{2}. \tag{8}$$

De asemenea din figura 10 se vede că

$$\operatorname{tg} \rho_0 = \frac{\tau_t}{\sigma_t + C_1}. \tag{9}$$

Dacă înlocuim în (9) pe σ_t și τ_t cu expresiile lor din (6) și (7) (în care s-a înlocuit σ_n și τ_n cu σ_t și τ_t, iar φ cu φ_t) și pe φ_t cu expresia sa din (8), după o serie de transformări rezultă

$$\sigma_{L1} - \sigma_{L3} \frac{1 + \sin \rho_0}{1 - \sin \rho_0} = \frac{2C_1 \sin \rho_0}{1 - \sin \rho_0}. \tag{10}$$

Ținînd seama de relațiile (5) și (4), se poate determina expresia lui ν din (10) :

$$\nu = \frac{1 + \sin \rho_0}{1 - \sin \rho_0}. \tag{11}$$

Dacă, mai departe, vom exprima pe C_1 în funcție de C (vezi fig. 10) și anume

$$C_1 = \frac{C}{\operatorname{tg} \rho_0}, \tag{12}$$

și vom înlocui această expresie a lui C_1 în (10), după transformări se obține condiția de existență a stării-limită după Terzaghi [5] în cazul mediilor coezive elasto-plastice :

$$\sigma_{L1} = 2C \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho_0}{2}\right) + \sigma_{L3} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho_0}{2}\right). \tag{13}$$

Notînd

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho_0}{2}\right) = \lambda, \tag{14}$$

relația (13) devine

$$\sigma_{L1} = 2C\sqrt{\lambda} + \sigma_{L3}\lambda. \tag{15}$$

Din relaţia (14), prin transformări, rezultă

$$\lambda = \frac{1 + \sin \rho_0}{1 - \sin \rho_0}, \tag{16}$$

iar din relaţiile (11) şi (16) reiese

$$\lambda = \nu. \tag{17}$$

Primită la redacţie la 13 decembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. I. A. Fekete *Comportarea rocilor în jurul unei găuri de sondă*, Petroleum Engineer, **35**, 62—73 (1963).
2. K. V. Ruppeneit, I. Pesleak, *Teoria presiunii rocilor şi metode de calcul ale coloanei de tubaj*, Moscova, 1962.
3. D. Stan, L. Constantinescu, I. Stănculescu, *Stabilitatea structurală a pereţilor golurilor din masivele de sare*, Buletinul I.P.G.G., **XIII** (1965).
4. G. Savin, *Stress Concentration Around Holes*, New York, Pergamon Press, 1961.
5. K. Terzaghi, *Mecanique theoretique des sols*, Paris, Dunod, 1951.
6. R. Fenner, *Probleme din teoria presiunii rocilor*, Moscova, 1961, p. 5—58.
7. A. Labas, *Probleme din teoria presiunii rocilor*, Moscova, 1961, p. 59—164.
8. F. K. T. Van Interson, *Probleme din teoria presiunii rocilor*, Moscova, 1961, p. 182—199.
9. G. Baron, P. Habib, P. Molier, *Deformations des roches sous contraines. Phenomenes phisyco-mecaniques apparissant dans les roches entres dans le domaine ductile*, Revue de l'Institute Français du Pétrole, hors serie (1963).
10. V. V. Belousov, *Noi probleme de geotehnică*, Moscova, 1954,
11. M. Stamatiu, *Mecanica rocilor*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1962.
12. M. P. Timbarevici, *Mecanica rocilor*, Moscova, 1948.
13. S. Serata, *Tranziţia de la starea elastică la starea plastică a rocilor supuse la compresiune triaxială*, Univ. Michinghan, U.S.A., 1961.
14. A. Mayer, J. Bernade, *Mesures des contraines dans le terrain en place en roches tendres au sensibles à la humidité*, în *Lucrările primului Congres al Societăţii internaţionale de mecanică a rocilor*, Lisabona, 1966, tema 4, p. 41—44.
15. G. Oberti, *Mesures des contraines naturelles dans les masiffs rocheaux*, în *Lucrările primului Congres al Societăţii internaţionale de mecanică a rocilor*, Lisabona, 1966, tema 4, p. 31—34.
16. Ko Suzuki, *Fundamental study on the rock stress measurement by berhole deformation method*, în *Lucrările primului Congres al Societăţii internaţionale de mecanică a rocilor*, Lisabona, 1966, tema 4, p. 35—39.
17. V. T. Galuşko, A. Z. Sirokov, *Mecanica rocilor şi susţinerea lucrărilor subterane*, Kiev, Akademia Nauk, S.S.S.R., 1967.
18. S. D. Ponomariov ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, ed. a 2-a, vol. I, Bucureşti, Editura tehnică, 1963, traducere. din l. rusă.
19. A. Naday, *Theory of Flow and Fracture of solids*, New York, Mc. Graw-Hill, 1950.
20. N. I. Bezuhov, *Teoria elasticităţii şi a plasticităţii*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1957, trad. din l. rusă.
21. M. F. Deyer, *Dezvoltarea recentă a forajului cu aer*, Revue de l'Association française des techniciens du pétrole, *181*, 31—39 (1967).
22. Gerard Godet, *Experienţa dobîndită în Europa la forajul cu aer al sondelor adînci*, Erdöl und Khole-Erdgas-Petrochemie, **18**, *9*, 692—695 (1965).
23. R. L'Hermite, *Resistance des materiaux, theoretique et experimentale*, Paris, Dunod, 1953.
24. Gr. Ioachim, *Extracţia petrolului şi a gazelor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965.
25. Gr. Ioachim, *Extracţia petrolului şi a gazelor. Curs internaţional pentru perfecţionarea cadrelor*, UNESCO, 1968, în l. franceză.
26. V. V. Sokolovski, *Teoria plasticităţii*, Bucureşti, 1954, Edit. tehnică, 1954 trad. din l. rusă.

27. PRESTON L. MOORE, *How to Handle Problems?* The Oil and Gas Journal, **64**, *7*, 103—114 (1966).
28. R. L. ZENKOV, *Mecanica corpurilor necoezive*, Moscova, 1952.
29. GORUN MANOLESCU, *Repartizarea tensiunillor în jurul găurilor de sonde înclinate, executate în medii elastice, omogene și izotrope*, Petrol și gaze, **17**, *9*, 463—468 (1966).
30. — *Corecția care trebuie adusă la calculul presiunii și a debitului în cazul forajului cu aer în formațiuni instabile*, Petrol și gaze, **17**, *3*, 124—132 (1966).
31. — *Este creșterea umidității formațiunilor argiloase un fenomen real în condițiile găurilor de sondă?* Petrol și gaze, **19**, *2*, 87—92 (1968).
32. — *Tratamentul clasic al noroiului de foraj nu poate da rezultate la traversarea formațiunilor argiloase cu conținut anormal de apă*, Petrol și gaze, **19**, *12*, 751—754 (1968).
33. — *Instabilitatea formațiunilor argiloase*, Petrol și gaze, **13**, *11*, 457—482 (1962).

DESPRE ECUAȚIILE DE COMPATIBILITATE ÎN DOMENIUL SUPERELASTIC

de N. S. PÂRVULESCU
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

După ce se arată expresiile deformației permanente în două ipoteze, autorul trece la teoria superelasticității, oricare ar fi ipoteza acceptată.
Cu anumite premise simplificatoare se arată alungirile, deformațiile în jurul unui punct și ecuațiile de compatibilitate și se particularizează teoria în cazul axial-simetric, pentru care se stabilește și funcția de tensiune φ^* și condiția respectivă de compatibilitate.
În concluzie se arată cum se rezolvă problemele din elasticitate după ce s-a depășit limita de proporționalitate elastică.

1. INTRODUCERE

În examinarea curbei caracteristice a metalelor am admis [1], [2] ca premisă simplificatoare o variație liniară a modulelor cu intensitatea sarcinii dincolo de limita de proporționalitate elastică, formulînd două ipoteze, după cum ne referim la modulul tangent sau la modulul redus. Prin urmare :

— în ipoteza I acceptăm o variație liniară a modulului tangent E_t în raport cu tensiunea normală σ, și anume

$$\frac{dE_t}{d\sigma} = -a_1; \tag{1}$$

— în ipoteza II acceptăm o variație liniară a modulului redus E_r în raport cu tensiunea normală σ, și anume

$$\frac{dE_r}{d\sigma} = -a_2, \tag{2}$$

unde a_1 și a_2 sînt pantele constante de descreștere a modulelor.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 29, NR. 4, P. 777–786, 1970

Modulele E_t și E_r sînt definite prin expresiile

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \tag{3}$$

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}, \tag{4}$$

în care E este valoarea constantă a modulului longitudinal pînă la limita de proporționalitate elastică. Dacă avem îndeplinite aceleași condiții la limită de proporționalitate, unde $E_t = E = E_r$, și la limita totală de curgere, unde $E_t = 0 = E_r$, în acest caz ambele module variază după aceeași dreaptă, exprimată prin

$$E_t = b - a\sigma, \tag{5}$$

unde E_t este modulul de variație liniară și întrucît $a_1 = a = a_2$, $b_1 = b = b_2$ anume

$$a = \frac{E}{\sigma_{ct} - \sigma_p}, \qquad b = a\sigma_{ct}, \tag{6}$$

în care σ_p este tensiunea (efortul unitar) normală la limita de proporționalitate și σ_{ct} tensiunea normală la limita totală de curgere.

În ambele ipoteze am admis apariția unei deformații longitudinale permanente ε_0 dincolo de limita de proporționalitate, dată de expresia

$$\varepsilon_0 = \varepsilon^* - \varepsilon, \tag{7}$$

în care ε^* este alungirea în domeniul superelastic și ε alungirea corespunzătoare modulului constant, dat de expresia

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \tag{8}$$

Prin acceptarea premisei (7) ne referim la materiale care, după ce au depășit limita de proporționalitate elastică, păstrează la descărcarea elementului de construcție valoarea modulului E pe care a avut-o sub limita de proporționalitate.

Prin urmare, alungirea ε_0, deși apare în intervalul intermediar dintre domeniul plastic și cel elastic, este de fapt o deformare plastică, adică pentru care coeficientul lui Poisson ν_0 capătă valoarea

$$\nu_0 = 0{,}5. \tag{9}$$

2. DEFORMAȚIA PERMANENTĂ

În ambele ipoteze menționate mai sus, deformația permanentă este dată de formula generalizată

$$\varepsilon_0 = \frac{2^{3(2-n)}}{a}\left(q^n + \ln\frac{1}{q^n} - 1\right), \tag{10}$$

în care

$$q^n = \frac{E_t}{E} = \frac{\sigma_{ct} - \sigma}{\sigma_{ct} - \sigma_p} = \frac{a}{E}(\sigma_{ct} - \sigma), \tag{11}$$

iar a este dat de prima expresie (6).

În prima ipoteză $n = 2$ și expresia (10) devine

$$\varepsilon_{0I} = \frac{1}{a}\left(\ln\frac{1}{q^2} + q^2 - 1\right), \tag{12}$$

iar în a doua ipoteză $n = 1$ și expresia (10) devine

$$\varepsilon_{0II} = \frac{8}{a}\left(\ln\frac{1}{q} + q - 1\right). \tag{13}$$

Expresiile (12) și (13) au fost stabilite anterior [1], [2].

Ipoteza întîi poate fi folosită [2] pentru oțeluri tari, al căror modul tangent se apropie de această ipoteză. Ipoteza a doua, mai acoperitoare, se potrivește mai bine pentru oțeluri moi. Aceasta din urmă și-a găsit aplicațiile în probleme de instabilitate superelastică [3]—[6].

În tabela 1 se dă pentru comparație raportul alungirilor în cele două ipoteze.

Tabela 1

Raportul deformațiilor permanente

Nr	q^2	q	$\varepsilon_{0I}/\varepsilon_{0II}$	Nr	q^2	q	$\varepsilon_{0I}/\varepsilon_{0II}$
1	1	1	—	6	0,25	0,50	0,413
2	0,81	0,9	0,5	7	0,1353	0,368	0,387
3	0,667	0,818	0,465	8	0,1	0,316	0,375
4	0,5	0,707	0,456	9	0,04	0,02	0,349
5	0,368	0,607	0,43	10	0,01	0,1	0,323

Este posibil ca pentru alte materiale să se potrivească mai bine alte valori pentru n între 1 și 2.

3. ALUNGIRILE SUPERELASTICE DUPĂ TREI AXE RECTANGULARE

În cele ce urmează reţinem premisa (7) fără să facem vreo precizare asupra valorii ε_0, oricare ar fi ipoteza ce se va accepta, fie cele menţionate, fie altele.

După cele trei axe rectangulare Ox, Oy, Oz, relaţia (7) devine

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \varepsilon_x + \varepsilon_{0x}, \\ \varepsilon_y^* &= \varepsilon_y + \varepsilon_{0y}, \\ \varepsilon_x^* &= \varepsilon_x + \varepsilon_{0x}, \end{aligned} \tag{14}$$

unde

ε_x^*, ε_y^*, ε_z^* sînt alungirile superelastice,
ε_x, ε_y, ε_z — alungirile elastice,
ε_{0x}, ε_{0y}, ε_{0x} — alungirile plastice.

Legea de invarianţă a dilatării volumice (cubice) ε_v este dată de expresia

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{15}$$

Dilatarea volumică plastică ε_{0v} fiind nulă, avem

$$\varepsilon_{0v} = \varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0y} + \varepsilon_{0z} = 0. \tag{16}$$

şi, prin urmare, dilatarea volumică îşi păstrează valoarea şi dincolo de limita de proporţionalitate elastică, adică

$$\varepsilon_v^* = \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^* + \varepsilon_z^* = \varepsilon_v. \tag{17}$$

Poate să apară cazul particular în care limita elastică este depăşită după o direcţie principală, de exemplu după Oz. În cazul simetriei în raport cu această axă, din expresia (16) rezultă

$$\varepsilon_{0x} = \varepsilon_{0y} = \frac{-1}{2}\varepsilon_{0z}. \tag{18}$$

4. DEFORMAŢIILE ÎN JURUL UNUI PUNCT

Ne referim la materiale ale căror curbe caracteristice prezintă un interval de proporţionalitate, însă cercetăm domeniul dincolo de această limită, adică ne depărtăm progresiv de ipoteza modulului de elasticitate constant, admisă în teoria elasticităţii. Presupunem deocamdată (ca o primă aproximaţie) că deformaţiile superelastice nu depăşesc prea mult

limita de proporționalitate ca să putem neglija pătratii și produsele deformațiilor, ca în teoria elasticității. Cu această premisă simplificatoare, o bună parte din relațiile cunoscute din teoria elasticității rămîn valabile și în domeniul superelastic. Pentru concentrarea scrisului nu reproducem aceste relații, ci facem trimiteri la binecunoscutul manual [7] al lui S. Timoshenko.

Urmăm aceeași cale ca în manualul citat mai sus, distingînd cu un asterisc ca indice superior notațiile referitoare la domeniul superelastic. Cele menționate aici rămîn valabile și pentru paragrafele următoare.

În mod analog cu relația (14) referitoare la alungiri, avem relațiile referitoare la deformațiile transversale în planele *xoy*, *yoz*, *zox*:

$$\begin{aligned} \gamma^*_{xy} &= \gamma_{xy} + \gamma_{0xy}, \\ \gamma^*_{yz} &= \gamma_{yz} + \gamma_{0yz}, \\ \gamma^*_{zx} &= \gamma_{zx} = \gamma_{0zx}, \end{aligned} \tag{19}$$

în care

γ^*_{xy}, γ^*_{yz}, γ^*_{zx} sînt deformațiile transversale superelastice,
γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} — deformațiile transversale elastice,
γ_{0xy}, γ_{0yz}, γ_{0zx} — deformațiile transversale plastice.

Cu premisele acceptate, cunoscuta ecuație (111) din [7] rămîne valabilă și în domeniul superelastic, sub forma

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*_x l^2 + \varepsilon^*_y m^2 + \varepsilon^*_z n^2 + \gamma^*_{xy} lm + \gamma^*_{yz} mn + \gamma^*_{zx} nl, \tag{20}$$

unde l, m, n sînt cosinusurile directoare ale elementului liniar considerat.

Dacă *Ox*, *Oy*, *Oz* sînt axe principale de deformație, unde deformațiile transversale sînt nule, cunoscutele relații din „Elasticitate" (114) și (115) din [7] rămîn valabile și în domeniul superelastic, sub forma

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \varepsilon^*_x l^2 + \varepsilon^*_y m^2 + \varepsilon^*_z n^2, \\ \gamma^*_{rr'} &= 2(\varepsilon^*_x ll' + \varepsilon^*_y mm' + \varepsilon^*_z nn'), \end{aligned} \tag{21}$$

unde r, r' sînt două direcții perpendiculare.

Prin urmare, ca și în domeniul elastic, deformația într-un punct dat este determinată dacă se cunosc axele principale de deformație și mărimile alungirilor principale.

5. ECUAȚIILE DE COMPATIBILITATE

În considerațiile paragrafului precedent, cunoscutele condiții de compatibilitate (118) din [7] ale „Elasticității' rămîn valabile și în domeniul superelastic.

Avînd în vedere relaţiile (14), (19), condiţiile de compatibilitate în domeniul superelastic se pot pune sub forma

$$\begin{aligned} A_x^* &= A_x + A_{0x}, & B_x^* &= B_x + B_{0x}, \\ A_y^* &= A_y + A_{0y}, & B_y^* &= B_y + B_{0y}, \\ A_z^* &= A_z + A_{0z}, & B_z^* &= B_z + B_{0z}, \end{aligned} \tag{22}$$

în care

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ B_x &= 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Expresiile analoge capătă şi celelalte mărimi A_y, A_z, B_y, B_z ale ecuaţiilor lor (22).

Termenii referitori la deformările plastice din (22), conform relaţiilor (14, 19), capătă expresiile

$$\begin{aligned} A_{0x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{0y}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{0z}}{\partial y^2} - \frac{\partial \gamma_{0yz}}{\partial y \partial z}, \\ A_{0y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{0x}}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{0zx}}{\partial z \partial x}, \\ A_{0z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{0x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{0y}}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_{0xy}}{\partial x \partial y}, \\ B_{0x} &= 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{0x}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{0yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{0zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{0xy}}{\partial z}\right), \\ B_{0y} &= 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{0y}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{0yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{0zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{0xy}}{\partial z}\right), \\ B_{0z} &= 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{0z}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{0yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{0zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{0xy}}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Procedînd ca în „Elasticitate" [7], păstrăm expresiile (23) cu cele analoge lor, care, referindu-se la domeniul elastic, ascultă de legea lui Hooke :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y + \sigma_z}{E}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z + \sigma_x}{E}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}, \end{aligned} \tag{25}$$

și menținem, deocamdată și dincolo de limita de proporționalitate, valabilitatea ecuațiilor de echilibru (116) din [7], și anume

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,\\
&\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0,\\
&\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0,
\end{aligned} \tag{26}$$

unde X, Y, Z sînt forțele masice. Cu accepțiile menționate și neglijînd forțele masice, cunoscutele condiții de compatibilitate (119) din [7] ale „Elasticității" în domeniul superelastic devin

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 2GA_{0x}, \qquad \nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = -GB_{0x},\\
&\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = 2GA_{0y}, \qquad \nabla^2\tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial x} = -GB_{0y},\\
&\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 2GA_{0z}, \qquad \nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = -GB_{0z},
\end{aligned} \tag{27}$$

în care

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \tag{28}$$

iar termenii deformărilor plastice sînt dați de (24).

Sub limita de proporționalitate elastică, termenii din membrul al doilea ai ecuațiilor (27) se anulează și regăsim ecuațiile (119) din [7].

6. TENSIUNI DISTRIBUITE SIMETRIC ÎN RAPORT CU AXA UNUI SOLID DE REVOLUȚIE

În cazul axial-simetric, componentele deformației și ale tensiunii fiind independente de unghiul θ, toate derivatele în raport cu θ sînt nule și, prin urmare, se anulează, precum și derivatele deformației plastice în raport cu x și y, încît ecuațiile (24) devin

$$\begin{aligned}
&A_{0x} = \frac{\partial^2\varepsilon_{0y}}{\partial z^2}, \qquad A_{0y} = \frac{\partial^2\varepsilon_{0x}}{\partial z^2}, \qquad A_{0z} = 0,\\
&B_{0x} = 0 = B_{0y}, \qquad B_{0z} = \frac{\partial^2\gamma_{0xy}}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Pentru a trece la coordonate cilindrice urmăm calea folosită în „Elasticitate", încît sistemul de ecuații diferențiale (*g*) din [7], p. 366, ținînd seama de relațiile (18) din domeniul superelastic, devin

$$\begin{aligned}
\nabla^2\sigma_r - \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} &= -G\frac{\partial^2\varepsilon_{0z}}{\partial z^2},\\
\nabla^2\sigma_\theta + \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r} &= -G\frac{\partial^2\varepsilon_{0z}}{\partial z^2},\\
\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} &= 0,\\
\nabla^2\tau_{rz} - \frac{1}{r^2}\tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\Theta^2}{\partial r\,\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Pentru $\varepsilon_{0z} = 0$ se regăsesc ecuațiile diferențiale (*g*) din [7], p. 366. Însumînd primele trei ecuații (30), se obține

$$\nabla^2\left(\Theta + \frac{E}{2+\nu}\varepsilon_{0z}\right) = 0. \tag{31}$$

7. FUNCȚIA DE TENSIUNI φ^*

Relațiile (30) se pot pune sub forma

$$\begin{aligned}
\nabla^2(\sigma_r + G\varepsilon_{0z}) - \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} &= 0,\\
\nabla^2(\sigma_\theta + G\varepsilon_{0z}) + \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r} &= 0,\\
\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} &= 0,\\
\nabla^2\tau_{rz} - \frac{1}{r^2}\tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\,\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Să introducem funcția φ^*, dată de expresiile

$$\begin{aligned}
\sigma_r + G\varepsilon_{0z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi^* - \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial r^2}\right),\\
\sigma_\theta + G\varepsilon_{0z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi^* - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^*}{\partial r}\right),\\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2\varphi^* - \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial z^2}\right],\\
\tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2\varphi^* - \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial z^2}\right].
\end{aligned} \tag{33}$$

Însumînd primele trei ecuații, din (33) se obține

$$\Theta + 2G\varepsilon_{0z} = (1 + \nu)\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\varphi^*. \tag{34}$$

Făcînd înlocuirile date de ecuațiile (33) în (32) și ținînd seama de (34), rezultă

$$\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\nabla^2\varphi^* = 0 = \frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\nabla^2\varphi^*. \tag{35}$$

Prin urmare, condiția de compatibilitate

$$\nabla^2\nabla^2\varphi^* = 0 \tag{36}$$

verifică ecuațiile (32) de compatibilitate, deci funcția de tensiune φ^*, definită de (33) este o funcție biarmonică, după cum este și funcția φ, dată de relația (175) din [7], corespunzătoare domeniului elastic și care se regăsește prin anularea deformației plastice.

Cunoscutele ecuații de echilibru din „Elasticitate", redate în coordonate carteziene la (26) și în coordonate cilindrice în cazul simetriei axiale devin cele din (172) din [7] ,și anume

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial_z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \\ &\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Procedînd în același mod ca la ecuațiile de compatibilitate, constatăm că prima ecuație se verifică prin înlocuirile menționate fără condiția (36), iar cea de-a doua ecuație se verifică numai cu această condiție.

8. CONCLUZII

În final găsim ecuațiile de compatibilitate (32) și ecuațiile funcției φ^* de tensiuni (33), cu condiția de compatibilitate (34), care împreună cu condițiile la limită rezolvă problemele din domeniul superelastic.

Cu notațiile

$$\sigma_r^c = \sigma_r + G\varepsilon_{0z}, \quad \sigma_\theta^c = \sigma_\theta + G\varepsilon_{0z}, \quad \Theta^c = \Theta + 2G\varepsilon_{0z}, \tag{38}$$

ecuațiile menționate capătă aspectul celor din „Elasticitate", cu deosebirea că tensiunile σ_r și σ_θ apar ca adaosurile $G\varepsilon_{0z}$ pentru a deveni σ_r^c și σ_θ^c, care sînt mărimi convenționale de calcul și care intră în ecuațiile „Superelasticității". Prin urmare, soluțiile problemelor din „Elasticitate" rămîn valabile, cu modificările respective, și în domeniul superelastic.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. PÂRVULESCU, *Uber den Superlastizitätsmodul*, Rev. de mécanique appliquée, **1**, *6* (1961).
2. — *Unele aspecte ale modului tangent din superelasticitate*, Sesiunea ştiinţifică a Institutului de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti, mai 1967, Bul. I.P.G.G., V, XVI.
3. — *Sur le flambage hyperélastique des barres d'acier*, Rev. Roum. Sci. Techn-Mec. Appl. **9**, *5* (1964).
4. — *Turtirea supraelastică a burlanelor*, St. cerc. mec. apl., **14**, *5* (1963).
5. — *Starea de tensiune superelastică a tuburilor sub presiune*, St. cerc. mec. apl., **15**, *1* (1964).
6. — *Presiunile critice superelastice ale tuburilor*, St. cerc. mec. apl., **16**, *3* (1964).
7. S. TIMOSHENKO, *Theorie de l'Elasticité*, trad. din l. engleză, Paris-Liege, Libr. Polytechn. Berauger 1948.

STUDIUL SPECTRULUI DE FRECVENȚE AL AUTOVIBRAȚIILOR TRANSVERSALE ALE UNEI BARE PRODUSE DE FRECAREA USCATĂ

de GH. SILAȘ, și H. J. KLEPP
Institutul politehnic Timișoara

O bară în consolă este în contact la capătul liber cu un corp în mișcare uniformă cu viteza V. Forța de frecare care acționează asupra barei este o funcție neliniară a vitezei relative a punctelor în contact. Această forță va excita autovibrații ale barei. Se cercetează teoretic și experimental spectrul de frecvențe al vibrațiilor barei, considerînd componentele ca mișcări cvasiarmonice. Pentru aceasta se consideră bara ca un mediu continuu și se determină ecuația diferențială cu metoda lui Lagrange. Pentru integrarea acestei ecuații diferențiale autonomă neliniară se folosește metoda lui Krîlov-Bogoliubov. Se studiază stări staționare și stabilitatea lor. Se determină de asemenea influența vitezei V și a forței de apăsare normală asupra intensității componentelor spectrului de frecvențe. Rezultatele teoretice sînt în concordanță cu cele obținute cu un dispozitiv experimental.

1. INTRODUCERE

În studiul autovibrațiilor produse prin frecarea uscată a mediilor continue și a sistemelor discrete s-au obținut o mulțime de rezultate experimentale în legătură cu existența unor mișcări staționare stabile, cu spectrele de frecvență, cu dependența acestora de parametrii sistemului considerat etc. S-au făcut numeroase încercări pentru explicarea teoretică a rezultatelor experimentale și cuprinderea lor într-o teorie generală. Astfel în [1]—[3] se încearcă de a formula matematic problema oscilației unei coarde puse în mișcare cu ajutorul unui arcuș. Se caută un model în cadrul teoriei liniare a oscilațiilor pentru a explica spectrul de frecvențe al sunetului produs și forma de oscilație a coardei.

În studiile teoretice, problema esențială este expresia analitică a forței de frecare.

În [4] se studiază teoretic și experimental vibrațiile unei bare în consolă în contact la capătul liber cu un disc rotitor. Pentru studiul teoretic se folosește metoda lui Lagrange. Forța de frecare care acționează asupra capătului barei se consideră succesiv constantă sau depinzînd liniar de viteza relativă a punctelor în contact.

Pentru sisteme autooscilante cu un singur grad de libertate s-a constatat experimental că forţa de frecare depinde neliniar de viteza relativă a punctelor în contact [5]. Este clar deci că explicarea teoretică a rezultatelor experimentale va trebui să considere forţa de frecare ca funcţie neliniară de viteză relativă. Acest studiu va trebui făcut în cadrul teoriei neliniare a oscilaţiilor.

În prezenta lucrare se studiază cu metoda lui Lagrange autovibraţiile transversale ale unei bare în consolă în contact la capătul liber cu un corp în mişcare cu viteza constantă V. Forţa de frecare se exprimă printr-o funcţie neliniară a vitezei relative dintre punctele în contact. Se determină spectrul de frecvenţe, stabilitatea componentelor mişcării şi influenţa lui V şi a forţei de apăsare normală asupra spectrului. De asemenea se prezintă spectrele de frecvenţă ale sunetului produs cu un dispozitiv experimental.

2. STABILIREA ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A MIŞCĂRII

Modelul mecanic al sistemului este reprezentat în figura 1.

Bara se consideră că are lungimea l, secţiunea transversală constantă cu aria F, densitatea γ, modulul de elasticitate longitudinal E şi momentul de inerţie al secţiunii transversale a barei egal cu I. Corpul de la extremitatea liberă a barei se mişcă cu viteza constantă V, presupusă neinfluenţată de frecare.

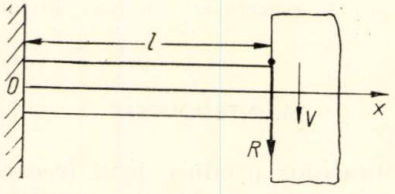


Fig. 1

Deplasarea transversală a barei se notează cu $u(x, t)$.

Energia cinetică a barei în oscilaţie transversală este [6]

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^l \gamma F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\gamma F\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x, \tag{1}$$

ar energia potenţială pentru cazul deformaţiilor mici [6]

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}EI\int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Funcţia de disipare a energiei datorită amortizării interne din material este

$$D = \frac{1}{2}c_1\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Forța de frecare care acționează la extremitatea liberă a barei se determină experimental. Curbe care exprimă dependența coeficientului de frecare de viteza relativă pentru diferite presiuni normale, stabilite experimental [5] sînt reprezentate în figura 2.

Pentru studiul teoretic este necesar ca aceste curbe experimentale să fie exprimate printr-o funcție cu mai mulți parametri. Valorile acestor parametri se vor alege convenabil, astfel încît funcția să reprezinte cît mai exact curba experimentală.

Pentru aceasta vom folosi funcția cu cinci parametri, de forma

$$R(v_r) = \left(\frac{R_0 - R_1}{1 + \lambda |v_r|} + R_1\right) \operatorname{sgn} v_r + \alpha_1 v_r + \beta_1 v_r^3,$$

unde

$$v_r = V - \dot{u}(l, t).$$

Pentru cazul mișcărilor cvasiarmonice pe care le studiem, $\dot{u}(l, t) < V$, avem $\operatorname{sgn} v_r = +1$. Forța de frecare o scriem sub forma

$$R(v_r) = \Phi[\dot{u}(l, t)] = \Phi[0] + \psi[\dot{u}(l, t)],$$

$$\psi[\dot{u}(l, t)] = \frac{(R_0 - R_1)\,\lambda \dot{u}(l, t)}{(1 + \lambda V)\,[1 + \lambda V - \lambda \dot{u}(l, t)]} - (\alpha_1 + 3\beta_1 V^2)\,\dot{u}(l, t) +$$

$$+ 3\beta_1 V \dot{u}^2(l, t) - \beta_1 \dot{u}^3(l, t).$$

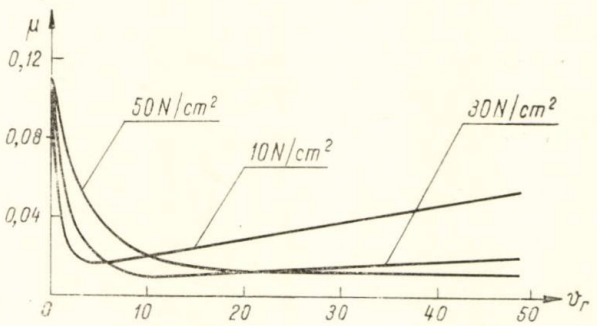


Fig. 2

Presupunem funcția $u(x, t)$ reprezentată printr-un produs de două funcții, fiecare depinzînd de un singur parametru [6]:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Drept funcţii $X(x)$ se consideră funcţiile proprii ale barei în oscilaţie de încovoiere. Aceste funcţii satisfac condiţiile la limită ale barei în consolă şi au forma [7], [8]:

$$X(x) = \frac{\cos ml + \operatorname{ch} ml}{\sin ml - \operatorname{sh} ml}(\cos mx - \operatorname{ch} mx) + \sin mx - \operatorname{sh} mx.$$

Valorile lui ml sînt soluţiile ecuaţiei $\cos ml \operatorname{ch} ml + 1 = 0$ şi determină frecvenţele diferitelor moduri normale de vibraţie.

Urmează să se determine în continuare, folosind metoda lui Lagrange, funcţiile $T(t)$ care corespund diferitelor funcţii proprii $X(x)$.

Înlocuind $u = X(x)\, T(t)$ în expresiile (1), (2) şi (3), se obţine

$$E_c = \frac{1}{2}\gamma F \dot{T}^2 \int_0^l X^2 \, dx = \frac{1}{2}\gamma F a_1 \dot{T}^2,$$

$$E_p = \frac{1}{2} EI T^2 \int_0^l X''^2 \, dx = \frac{1}{2} EI a_2 T^2,$$

$$D = \frac{1}{2} c_1 \dot{T}^2 \int_0^l X^2 \, dx = \frac{1}{2} c_1 a_1 \dot{T}^2.$$

Ecuaţia lui Lagrange [6] este

$$\gamma F a_1 \ddot{T} + E I a_2 T = - c_1 a_1 \dot{T} + \Phi[0] + \psi[X(l)\dot{T}].$$

Facem schimbarea de funcţie $T(t) = q(t) + \dfrac{\Phi(0)}{EIa_2}$ şi ecuaţia lui Lagrange devine

$$\gamma F a_1 \ddot{q} + E I a_2 q = - c_1 a_1 \dot{q} + \psi[X(l)\dot{q}] = \psi_1[X(l)\dot{q}].$$

Introducem notaţiile

$$\frac{EIa_2}{\gamma F a_1} = \omega_n^2; \frac{c_1}{\gamma F} = cX(l); \frac{(R_0 - R_1)\lambda}{(1 + \lambda V)^2} \cdot \frac{1}{\gamma F a_1} = \varepsilon,$$

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda V} = \mu; \quad \frac{\alpha_1}{\gamma F a_1} = \alpha; \quad \frac{\beta_1}{\gamma F a_1} = \beta. \tag{4}$$

Ecuaţia diferenţială devine

$$\ddot{q} + \omega_n^2 q = \frac{\varepsilon X(l) \cdot \dot{q}}{1 - \mu X(l) \cdot \dot{q}} - (\alpha + 3\beta V^2)\, X(l)\dot{q} - cX(l)\dot{q} +$$

$$+ 3\beta V X^2(l) \cdot \dot{q}^2 - \beta X^3(l)\dot{q}^3$$

sau

$$\frac{dq}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = -\omega_n^2 q - f(q, v),$$

$$f(q, v) = -\frac{\varepsilon X(l).v}{1 - \mu X(l).v} + (\alpha + c + 3\beta V^2) X(l)\, v - 3\beta V X^2(l) v^2 + \beta X^3(l) v^3.$$

3. INTEGRAREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A MIȘCĂRII

Pentru studiul mișcărilor cvasiarmonice se folosește metoda de aproximare asimptotică a lui Krîlov-Bogoliubov [7]. Soluția se presupune de forma

$$q = r(t) \cos\theta(t) \qquad \text{și} \qquad v = -r(t)\omega_n \sin\theta(t).$$

Funcțiile necunoscute $r = r(t)$ și $\theta = \theta(t)$ se determină din sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\omega_n} \varphi(r, \theta) \sin\theta \qquad r\left(\frac{d\theta}{dt} - \omega_n\right) = \frac{1}{\omega_n} \varphi(r, \theta) \cos\theta,$$

unde

$$\varphi(r, \theta) = f(r\cos\theta, -r\omega_n \sin\theta).$$

Pentru determinarea primei aproximații se consideră sistemul

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\omega_n} a_0(r), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\omega_n r} \alpha_0(r),$$

unde

$$a_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) \sin\theta d\theta, \qquad \alpha_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) \cos\theta d\theta$$

și

$$\psi = \theta - \omega_n t.$$

Efectuînd calculele, se obține

$$a_0(r) = -\frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\mu\omega_n r X(l)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2 \omega_n^2 r^2 X^2(l)}}\right) - \frac{1}{2} (\alpha + c +$$

$$+ 3\beta V^2) X(l) r\omega_n - \frac{3}{8} \beta X^3(l) \omega_n^3 r^3, \qquad \alpha_0(r) = 0.$$

Introducem notația $\rho = \mu\omega_n r$ și găsim

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\varepsilon}{X(l)\rho}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - X^2(l)\ \rho^2)}}\right) - \frac{1}{2}(\alpha + c + 3\beta V^2)X(l)\rho - \\ - \frac{3}{8}\frac{\beta}{\mu^2}X^3(l)\rho^3, \\ \frac{d\psi}{dt} = 0. \tag{5}$$

Din a doua ecuație rezultă $\psi = \psi_0 = \text{const}$, deci $\theta = \omega_n\ t + \psi_0$. Autooscilațiile cvasiarmonice se fac deci cu frecvențele proprii ale sistemului.

4. STUDIUL VARIAȚIEI FUNCȚIEI $y(\rho) = \frac{d\rho}{dt}$

Pentru cazul autovibrațiilor cvasiarmonice, $\dot{u}(l, t) < V$, adică $|X(l)||\dot{q}| < V$. Rezultă $|X(l)||\rho| = \mu\omega_n\ |r||X(l)| = \frac{\lambda\omega_n |r||X(l)||}{1+\lambda V} < 1$. De aceea pentru studiul variației, funcția $y(\rho)$ se va dezvolta în serie Mac Laurin, neglijînd termenii cu puteri mai mari decît cinci ai lui $X(l)\rho$ Parametrul $X(l)\rho$ caracterizează viteza stării staționare a extremității barei. Se obține expresia aproximativă

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}X(l)\rho\left\{[\varepsilon - (\alpha + c + 3\beta V^2)] - \frac{3}{4\mu^2}(\beta - \varepsilon\mu^2)X^2(l)\ \rho^2 + \right. \\ \left. + \frac{5}{8}\varepsilon X^4(l)\ \rho^4\right\}. \tag{6}$$

Valorile funcției proprii $X(l)$ pentru diferite moduri de vibrații sînt

$$X_0(l) = 2{,}7226,\ X_1(l) = -1{,}9640,\ X_2(l) = 1{,}0338,\ X_n(l) = (-1)^n, n \geqslant 3. \tag{7}$$

Condiția ca să existe o mișcare de tip cvasiarmonică staționară este ca $y(\rho)$ să aibă rădăcini reale pozitive mai mici cel mult egale cu $\frac{1}{|X(l)|} \cdot \frac{\lambda V}{1+\lambda V}$.

Reprezentarea grafică a funcției $y(\rho)$ este arătată în figurile 3 și 4. În figura 3 sînt reprezentate cazurile cînd $X(l) > 0$, adică pentru modul fundamental și pentru modurile de vibrații pare, iar în figura 4 pentru $X(l) < 0$, adică pentru modurile de vibrații impare.

Prin integrarea ecuației (6) se obține $\rho = \rho(t)$. Soluția poate fi scrisă sub forma

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{y(\rho)} = t.$$

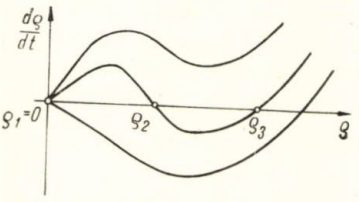


Fig. 3

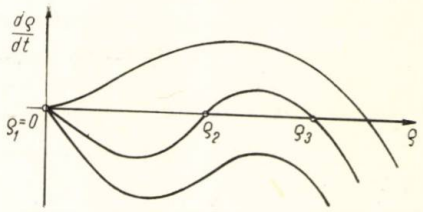


Fig. 4

Rădăcinile funcției $y(\rho)$ determină stările staționare, deoarece pentru aceste valori $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Stabilitatea acestor mișcări depinde de semnul lui $\frac{d\rho}{dt}$ în vecinătatea rădăcinii [7]. Se constată din figura 3 că pentru tonul fundamental și pentru tonurile superior de ordin par se realizează numai mișcările staționare corespunzătoare rădăcinii ρ_2 care este stabilă, celelalte $\rho_1 = 0$, ρ_3 fiind instabile.

Din figura 4 se constată că pentru tonurile superioare de ordin impar se realizează stările corespunzătoare lui $\rho_1 = 0$ și ρ_3, deoarece acestea sînt stabile, și nu se realizează mișcarea caracterizată prin ρ_2, care este nestabilă.

Pentru a studia influența parametrului V asupra spectrului de frecvențe a vibrației barei se observă că în

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{5}{16} X(l) \cdot \rho\varepsilon \left[\frac{8}{5} \left(1 - \frac{\alpha + 3\beta V^2 + c}{\varepsilon} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{6}{5} \left(\frac{\beta}{\varepsilon\mu^2} - 1 \right) X^2(l)\rho^2 + X^4(l)\rho^4 \right] \tag{8}$$

creșterea lui V are ca urmare descreșterea parametrilor ε și μ, definiți în (4). Componenta cu frecvența cea mai joasă și tonurile superioare de ordin par au $X(l) > 0$, astfel încît stările staționare stabile corespunzătoare sînt caracterizate prin ρ_2 (fig. 3). Scăderea termenului liber din paranteza relației (8) și creșterea factorului termenului cu $X^2(l)\rho^2$ duc la scăderea valorii rădăcinii ρ_2, astfel încît o creștere a vitezei V are ca urmare o scădere relativă a intensității componentei cu frecvența cea mai joasă și a tonurilor superioare de ordin par. Totodată crește și valoarea rădăcinii ρ_3, care caracterizează stările staționare stabile ale tonurilor

superioare de ordin impar pentru care $X(l) < 0$. Rezultă deci o creștere a intensității a acestor componente. Modelul matematic ales permite astfel explicarea fenomenului constatat experimental că, la creșterea vitezei V, în spectrul sunetului produs de bară apar mai intens tonurile superioare impare.

Pentru a studia influența forței de apăsare normală asupra spectrului de frecvențe trebuie luat în considerare că creșterea forței de apăsare normală schimbă forma dependenței forței de frecare de viteza relativă. Așa cum au arătat experiențele [5] (fig. 2), o dată cu creșterea forței de apăsare normală se modifică panta negativă a porțiunii descrescătoare a caracteristicii de frecare, și anume crește. Aceasta înseamnă că panta $\left[\frac{dR}{dv_r}\right]_{v_r=0} = -\lambda(R_0 - R_1) + \alpha$, care este negativă, scade în valoare absolută. Pentru aceasta este necesar ca $(R_0 - R_1) > 0$ să scadă sau α să crească în valoarea algebrică. Prin urmare, parametrul ε, definit în (4), va scădea, iar parametrul α va crește o dată cu creșterea apăsării normale. De asemenea și primul termen din paranteza ecuației (8) scade, iar factorul lui $X^2(l)\rho^2$ crește, ceea ce duce, ca și creșterea vitezei V, la scăderea valorii rădăcinii ρ_2 și la creșterea valorii rădăcinii ρ_3. Rezultă deci că creșterea forței de apăsare normală are ca urmare o creștere a intensității componentelor cu $X(l) < 0$ și în special a componentei având frecvența primului ton superior. Acest rezultat coincide cu datele experimentale.

5. REZULTATE EXPERIMENTALE

Influența parametrului V asupra intensității componentelor spectrului sunetului și influența forței de apăsare normală au fost stabilite și experimental. O bară de oțel în consolă este apăsată cu capătul liber pe un disc greu de fontă în rotație la o anumită distanță de axa de rotație.

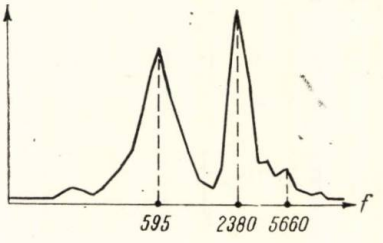


Fig. 5

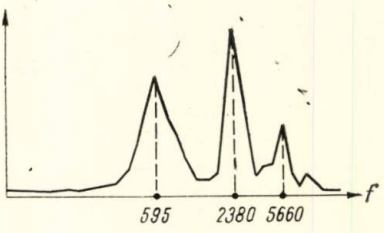


Fig. 6

Presiunea sonoră a sunetului produs de bară pentru diferite turații ale discului, adică pentru diferite valori ale vitezei V, au fost analizate cu ajutorul unui analizor F. Sp. 10 a Typ 4353.5.

Pentru o bară de oțel în consolă având lungimea $l = 16$ cm sînt reprezentate în figurile 5—7 spectrele de frecvențe pentru diferite valori ale vitezei V 230 cm/s, 380 cm/s și 480 cm/s și aceeași forță de apăsare,

iar în figurile 8—10 spectrele pentru diferite valori ale forței de apăsare normală și aceeași valoare pentru $V = 380$ cm/s. Din figurile 5—10 rezultă o creștere a intensității componentei avînd frecvența egală cu primul

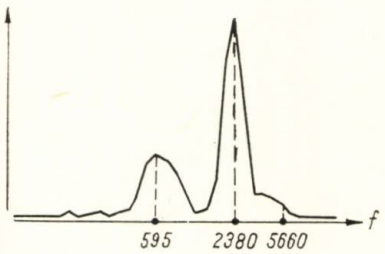


Fig. 7

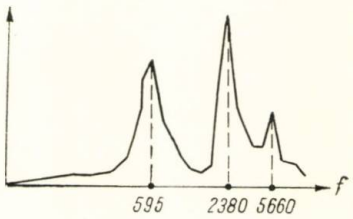


Fig. 8

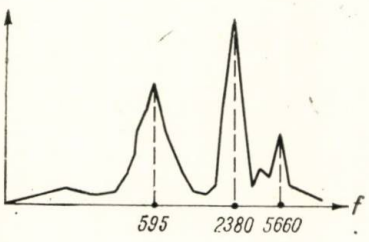


Fig. 9

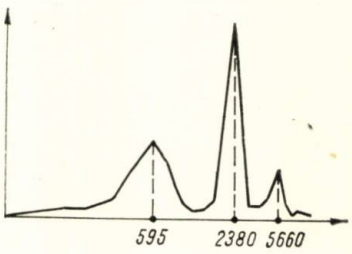


Fig. 10

ton superior față de componenta fundamentală, o dată cu creșterea vitezei V, respectiv cu creșterea forței de apăsare normală.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Helmholtz H., *Die Lehre von den Tonempfindungen*, Braunschweig, Vieweg & Sohn.
2. Rayleigh, *The Theory of Sound*, vol. I, 1955.
3. Richardson, E. G., *Technical Aspects of Sound*, I, Elsevier Publishing Company, 1958.
4. Jarvis, R. P., Mills, B, *Vibrations Induced by Dry Friction*. The Institution of Mechanical Engineers. Applied Mechanics Group, 1964.
5. Krause, R., *Selbsterregte Reibungsschwingungen bei Kupplungslamellen eine experimentelle Untersuchung*, Dissertation, Technische Hochschule Karlsruhe, 1965.
6. Hamburger, L., Buzdugan, Gh., *Teoria vibrațiilor*, București, Edit. tehnică, 1958.
7. Kauderer, H., *Nichtlineare Mechanik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1958.
8. Harris, C., Crede, C., *Shock and Vibration Handbook*, New York, McGraw-Hill Book Comp., 1961.
9. Bădărău, E., Grumăzescu, M., *Bazele acusticii moderne*, București, Edit. Academiei, 1961.

PLĂCI PLANE NESUBȚIRI

de CRISTIAN STĂNESCU, VIOREL VISARION

În cadrul formulării ecuațiilor teoriei elasticității este elaborat un model de calcul bazat pe descompunerea în stări de tensiune pentru plăci nesubțiri plane elastice. În acest scop este folosit principiul lui Saint-Venant aplicat distribuțiilor pe grosime de tensiuni, precum și seriile Légendre.

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1] a fost propusă o metodă pentru calculul plăcilor curbe nesubțiri în care problema generală a teoriei elasticității este scindată în mai multe probleme prin folosirea unor proprietăți decurgînd din principiul lui B. de Saint-Venant. În acest scop, componentele tensiunii, deformației și deplasării sînt dezvoltate în serii de polinoame Legendre.

Sînt obținute pe această cale în [1] următoarele probleme :

a) problema liniară pe grosime. În cadrul acestei probleme bidimensionale se obține o soluție a ecuațiilor teoriei elasticității. Forțele masice și datele pe suprafețele-limită superioară și inferioară S_+, S_-, afectate unui element normal din placă, sînt însă modificate prin adăugarea unui sistem suplimentar de forțe masice și de suprafață cu rezultantă și moment rezultant nul ;

b) problema de pseudostrat-limită. Ea oferă două soluții consecutive, de asemenea exacte, care permit eliminarea sistemului suplimentar de forțe masice și de suprafață introdus în etapa precedentă ;

c) problema de strat-limită.

În prima problemă pot fi satisfăcute condiții de margine pe suprafața laterală a plăcii în limitele principiului lui B. de Saint-Venant, corespunzător primilor termeni din dezvoltările Legendre pe grosime ale necunoscutelor. Soluțiile date pentru cea de-a doua problemă au un caracter particular, nefiind impuse condiții pe suprafața laterală.

Se observă de aici că problema de strat-limită apare ca fiind necesară pentru satisfacerea punctuală a condițiilor pe suprafața laterală a plăcii.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 4, P. 797–816, 1970

În lucrarea de față, rezultatele obținute în [1] sînt aplicate la cazul plăcii plane nesubțiri. Sînt obținute explicit sistemele de ecuații care caracterizează fiecare problemă și în final este dat un exemplu.

În cele ce urmează sînt folosite notațiile utilizate în [1].

2. PROBLEMA LINIARĂ PE GROSIME

Considerăm placa raportată la un sistem de coordonate θ^α, θ^3, planul median fiind caracterizat prin ecuația

$$\theta^3 = 0. \tag{2.1}$$

Grosimea constantă a plăcii o vom nota cu $2h$ și în locul coordonatei θ^3 se folosește variabila adimensională

$$x = \frac{\theta^3}{h}. \tag{2.2}$$

Pentru componentele vectorului deplasării se consideră expresiile

$$u_\alpha = u_\alpha^{(0)} + x u_\alpha^{(1)}, \quad u_3 = u_3^{(0)} \tag{2.3}$$

sau

$$u_\alpha = u_\alpha^{(0)} P_0(x) + u_\alpha^{(1)} P_1(x), \quad u_3 = u_3^{(0)} P_0(x), \tag{2.4}$$

$P_0(x)$ și $P_1(x)$ fiind primele două polinoame Legendre iar $u_\alpha^{(0)}$, $u_\alpha^{(1)}$, și $u_3^{(0)}$ funcții de θ^α. Rezultă deformațiile

$$\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{1} \gamma_{\alpha\beta}^{(n)} P_n(x), \quad \gamma_{\alpha 3} = \gamma_{\alpha 3}^{(0)} P_0(x), \quad \gamma_{33} = 0, \tag{2.5}$$

unde

$$2\gamma_{\alpha\beta}^{(0)} = u_{\alpha|\beta}^{(0)} + u_{\beta|\alpha}^{(0)}, \quad 2\gamma_{\alpha\beta}^{(1)} = u_{\alpha|\beta}^{(1)} + u_{\beta|\alpha}^{(1)},$$

$$2\gamma_{\alpha 3}^{(0)} = \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \theta^\alpha} + \frac{1}{h} u_\alpha^{(1)}, \tag{2.6}$$

linia verticală reprezentînd derivarea covariantă în raport cu metrica suprafeței mediane. $P_n(x)$ este polinomul Legendre de grad n.

Din relațiile constitutive se obțin tensiunile

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{1} \sigma_{(n)}^{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2) P_n(x), \quad \sigma^{\alpha 3} = \sigma_{(0)}^{\alpha 3}(\theta^1, \theta^2) P_0(x), \tag{2.7}$$

coeficienții dezvoltărilor (2.7) fiind

$$\sigma_{(0)}^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}^{(0)}, \quad \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}^{(1)}, \quad \sigma_{(0)}^{\alpha 3} = E^{\alpha 3\lambda 3}\gamma_{\lambda 3}^{(0)}. \tag{2.8}$$

Ecuațiile de echilibru ale problemei liniare sînt

$$\begin{gathered}\sigma_{(0)|\alpha}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2h} R^{\beta} = 0, \quad \sigma_{(0)|\alpha}^{\alpha 3} + \frac{1}{2h} R^{3} = 0, \\ \sigma_{(1)|\alpha}^{\alpha\beta} - \frac{3}{h} \sigma_{(0)}^{\beta 3} + \frac{3}{2h^2} C^{\beta} = 0,\end{gathered} \tag{2.9}$$

componentele R^{β}, R^{3}, C^{β} avînd expresiile

$$\begin{aligned} R^{\beta} &= \sigma^{3\beta}(1) - \sigma^{3\beta}(-1) + h\int_{-1}^{+1} P_0(x) F^{\beta}\, \mathrm{d}x, \\ R^{3} &= \sigma^{33}(1) - \sigma^{33}(-1) + h\int_{-1}^{+1} P_0(x) F^{3}\, \mathrm{d}x, \\ C^{\beta} &= h^2\left[\frac{\sigma^{3\beta}(1) + \sigma^{3\beta}(-1)}{h} + \int_{-1}^{+1} P_1(x) F^{\beta}\, \mathrm{d}x\right], \end{aligned} \tag{2.10}$$

care sînt cunoscute.

Observăm că în cazul izotrop omogen avem

$$\begin{aligned} E^{\alpha\beta\lambda\mu} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-2\nu} a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right), \\ E^{\alpha 3\lambda 3} &= \frac{E}{1+\nu} a^{\alpha\lambda}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$a^{\alpha\beta}$ fiind componentele contravariante ale tensorului metric al planului median, iar E, ν modulul de elasticitate, respectiv coeficientul lui Poisson.

Sistemul de ecuații (2.9), (2.8), (2.6) formează un sistem complet de ecuații, din care se determină $u_{\alpha}^{(0)}$, $u_{\alpha}^{(1)}$, $u_{3}^{(0)}$. Făcînd înlocuirile corespunzătoare, obținem

$$\Delta u_{(0)}^{\beta} + \frac{1}{1-2\nu} a^{\beta\omega}\Theta_{|\omega}^{(0)} + \frac{1+\nu}{Eh} R^{\beta} = 0, \tag{2.12}$$

şi

$$\Delta u_3^{(0)} + \frac{1}{h}\,\Theta^{(1)} + \frac{1+\nu}{Eh}\,R^3 = 0, \tag{2.13}$$

$$\Delta u_{(1)}^{\beta} + \frac{1}{1-2\nu}\,a^{\beta\omega}\Theta_{|\omega}^{(1)} - \frac{3}{h}\,a^{\beta\lambda}\left(u_{3|\lambda}^{(0)} + \frac{1}{h}\,u_{\lambda}^{(1)}\right) + \frac{3(1+\nu)}{Eh^2}\,C^{\beta} = 0, \tag{2.14}$$

unde

$$u_{(i)}^{\alpha} = a^{\alpha\lambda}u_{\lambda}^{(i)} \quad (i = 0, 1). \tag{2.15}$$

S-a introdus de asemenea notaţia

$$\Theta^{(i)} = u_{(i)|\lambda}^{\lambda} \quad (i = 0, 1). \tag{2.16}$$

Acest sistem de ecuaţii are ordinul 10, permiţînd satisfacerea a cîte o condiţie marginală pentru $u_{\alpha}^{(0)}$, $u_{\alpha}^{(1)}$, $u_3^{(0)}$ sau $\sigma_{(0)}^{\alpha\alpha}$, $\sigma_{(1)}^{\alpha\alpha}$, $\sigma_{(0)}^{\alpha\beta}$, $\sigma_{(1)}^{\alpha\beta}$, $\sigma_{(0)}^{\alpha 3}$ în lungul marginii $\theta^{\alpha} = \text{const}$. El include şi un efect de tip Reissner.

Se mai observă scindarea în două probleme, simetrică şi nesimetrică. În timp ce formal ecuaţiile problemei simetrice (2.12) coincid cu cele care se obţin în problema plană a teoriei elasticităţii, ecuaţiile problemei nesimetrice (2.13), (2.14) conţin suplimentar efectul Reissner menţionat.

Ca atare, în cele ce urmează ne vom preocupa de integrarea ecuaţiilor corespunzătoare problemei nesimetrice.

Pentru determinarea unei soluţii particulare a sistemului neomogen format din ecuaţiile (2.13), (2.14), în cazul în care C^{β} derivă dintr-un potenţial C,

$$C_{\beta} = -\,C_{|\beta}, \tag{2.17}$$

vom folosi următoarea lemă:

LEMĂ. Fie $P(\theta^1, \theta^2)$ şi $Q(\theta^1, \theta^2)$ două integrale particulare ale ecuaţiilor Poisson:

$$\Delta P = -\,\frac{1+\nu}{Eh}\,R^3, \tag{2.18}$$

$$\Delta Q = \frac{3(1-2\nu)}{2h(1-\nu)}\left(P + \frac{1+\nu}{Eh}\,C\right). \tag{2.19}$$

Atunci o integrală particulară a sistemului neomogen este

$$u_3^{(0)} = P - \frac{1}{h}\,Q, \quad u_{\alpha}^{(1)} = Q_{|\alpha}. \tag{2.20}$$

DEMONSTRAȚIE. Ecuația (2.13), în baza notației (2.16), se mai poate scrie sub forma

$$a^{\alpha\beta}\left(u^{(0)}_{3|\alpha}+\frac{1}{h}u^{(1)}_{\alpha}\right)_{|\beta}=-\frac{1+\nu}{Eh}R^3 \tag{2.21}$$

și, introducînd funcția $P(\theta^1, \theta^2)$ astfel încît

$$u^{(0)}_{3|\alpha}+\frac{1}{h}u^{(1)}_{\alpha}=P_{|\alpha}, \tag{2.22}$$

din (2.21) și (2.22) obținem ecuația (2.18).

Din relația (2.22) deducem

$$u^{(0)}_{3|\alpha\beta}+\frac{1}{h}u^{(1)}_{\alpha|\beta}=P_{|\alpha\beta}$$

sau

$$\frac{1}{h}\varepsilon^{\alpha\beta}u^{(1)}_{\alpha|\beta}=0, \tag{2.23}$$

unde $\varepsilon^{\alpha\beta}$ sînt componentele contravariante ale tensorului de permutare ε :

$$\varepsilon^{11}=\varepsilon^{22}=0, \qquad \varepsilon^{12}=-\varepsilon^{21}=\frac{1}{\sqrt{a}}, \tag{2.24}$$

a fiind determinantul metricei planului median :

$$a=a_{11}a_{22}-a_{12}^2. \tag{2.25}$$

Condiția (2.23) este satisfăcută dacă se consideră pentru $u^{(1)}_{\alpha}$ expresia dată în (2.20).

Rezultă de asemenea în continuare

$$u^{\beta}_{(1)}=a^{\alpha\beta}Q_{|\alpha}, \qquad \Theta^{(1)}=u^{\beta}_{(1)|\beta}=\Delta Q. \tag{2.26}$$

Din ecuațiile (2.14), folosind (2.17), (2.22) și (2.26), rezultă

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}a^{\alpha\beta}(\Delta Q)_{|\alpha}=\frac{3}{h}a^{\beta\alpha}\left(P+\frac{1+\nu}{Eh}C\right)_{|\alpha},$$

identic satisfăcută dacă Q este o soluție a ecuației (2.19).

Pentru deducerea soluției generale a sistemului omogen asociat sistemului (2.13), (2.14), se procedează în modul următor. Ecuația omogenă asociată ecuației (2.13),

$$a^{\alpha\beta}\left(u^{(0)}_{3|\alpha}+\frac{1}{h}u^{(1)}_{\alpha}\right)_{|\beta}=0, \tag{2.27}$$

este verificată identic dacă

$$u^{(0)}_{3|\alpha}+\frac{1}{h}u^{(1)}_{\alpha}=\varepsilon_{\alpha\gamma}\,a^{\gamma\omega}\,\varphi_{|\omega}, \tag{2.28}$$

φ fiind o funcție arbitrară de θ^1, θ^2.

Din această ecuație deducem

$$\frac{1}{h}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,u^{(1)}_{\alpha|\beta}=\Delta\varphi, \tag{2.29}$$

$$\frac{1}{h}\,\Theta^{(1)}=-\,\Delta u^{(0)}_{3}. \tag{2.30}$$

Asemănător, ecuațiilor (2.14) li se asociază sistemul omogen

$$\Delta u^{\beta}_{(1)}+\frac{1}{1-2\nu}\,a^{\beta\omega}\,\Theta^{(1)}_{|\omega}-\frac{3}{h}\,\varepsilon^{\beta\omega}\,\varphi_{|\omega}=0, \tag{2.31}$$

în scrierea căruia s-a ținut seama de (2.28). Din (2.31) rezultă prin derivare

$$\Delta u^{\beta}_{(1)|\lambda}+\frac{1}{1-2\nu}\,a^{\beta\omega}\,\Theta^{(1)}_{|\omega\lambda}-\frac{3}{h}\,\varepsilon^{\beta\omega}\,\varphi_{|\omega\lambda}=0. \tag{2.32}$$

Înmulțind (2.32) cu $\varepsilon^{\rho\alpha}a_{\mu\alpha}$ și contractînd, obținem ecuația pe care o satisface funcția φ:

$$\Delta\left(\Delta\varphi-\frac{3}{h^2}\,\varphi\right)=0, \tag{2.33}$$

care, conform cu teorema lui Boggio, admite ca soluție

$$\varphi=\varphi_{(a)}+\varphi_{(h)}, \tag{2.34}$$

unde $\varphi_{(a)}$ este o funcție armonică, iar $\varphi_{(h)}$ o soluție a ecuației lui Helmholtz:

$$\Delta\varphi_{(a)}=0, \tag{2.35}$$

$$\Delta\varphi_{(h)}-\frac{3}{h^2}\,\varphi_{(h)}=0. \tag{2.36}$$

Introducînd pe (2.30) și (2.34) în (2.31), rezultă

$$(\Delta u_3^{(0)})_{|\alpha} = -\frac{3(1-2\nu)}{2h^2(1-\nu)} a_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\beta\omega}\,\varphi_{(a)|\omega}. \tag{2.37}$$

Din acest sistem rezultă $\Delta u_3^{(0)}$, condițiile de integrabilitate fiind satisfăcute. Determinarea lui $u_3^{(0)}$ implică apoi găsirea unei soluții particulare pentru o ecuație de tip Poisson și apariția unei noi funcții armonice arbitrare.

Astfel arbitrariile care intervin în determinarea funcțiilor $\varphi_{(a)}$, $\varphi_{(h)}$, $u_3^{(0)}$ permit satisfacerea celor trei condiții-limită asociate sistemului (2.13), (2.14). Se observă că $\varphi_{(h)}$ caracterizează efectul Reissner.

Presupunînd pe $u_3^{(0)}$ determinat, din (2.28) rezultă

$$\frac{1}{h}\,u_\alpha^{(1)} = -\,u_{3|\alpha}^{(0)} + \varepsilon_{\alpha\gamma}a^{\gamma\omega}(\varphi_{(a)} + \varphi_{(h)})_{|\omega}. \tag{2.38}$$

Dacă sistemul de coordonate θ^1, θ^2 este ortogonal, atunci, deoarece

$$ds^2 = a_{11}(d\theta^1)^2 + a_{22}(d\theta^2)^2,$$

rezultă

$$a = a_{11}a_{22};\quad \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0;\quad \varepsilon^{12} = -\,\varepsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}.$$

În acest caz, (2.37) devine

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta u_3^{(0)}}{\partial \theta^1} &= -\frac{3(1-2\nu)}{2h^2(1-\nu)}\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\,\frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial \theta^2},\\ \frac{\partial \Delta u_3^{(0)}}{\partial \theta^2} &= \frac{3(1-2\nu)}{2h^2(1-\nu)}\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,\frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial \theta^1}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Fie $\psi_{(a)}$ conjugatul armonic al lui $\varphi_{(a)}$. Folosind condițiile de monogeneitate Cauchy-Riemann scrise în coordonate curbilinii ortogonale:

$$\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,\frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial \theta^1} = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,\frac{\partial \psi_{(a)}}{\partial \theta^2};\quad \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,\frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,\frac{\partial \psi_{(a)}}{\partial \theta^1},$$

din (2.39) deducem ecuația

$$\Delta u_3^{(0)} = \frac{3(1-2\nu)}{2h^2(1-\nu)}\,\psi_{(a)}. \tag{2.40}$$

3. PROBLEMA DE PSEUDOSTRAT-LIMITĂ. ETAPA I

Din rezolvarea problemei liniare au rezultat tensiunile-limită $\sigma^{3i}_{(l)}(\theta^1, \theta^2, \pm h)$ şi forţele masice $F^i_{(l)}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$. Acestea, în general, diferă de cele reale printr-un sistem cu rezultantă nulă şi moment rezultant nul, corespunzător fiecărui element normal în parte.

În prima etapă a problemei de pseudostrat-limită se adaugă o soluţie a ecuaţiilor teoriei elasticităţii tridimensionale, pentru care condiţiile pe suprafeţele-limită corectează pe cele obţinute în cadrul problemei liniare pe grosime:

$$\sigma^{3i}_{(c)}(\theta^1, \theta^2, \pm h) = \sigma^{3i}(\theta^1, \theta^2, \pm h) - \sigma^{3i}_{(l)}(\theta^1, \theta^2, \pm h), \tag{3.1}$$

forţele masice rezultînd arbitrar. De asemenea nu se impun condiţii pe suprafaţa marginală.

Prin aceste caracteristici, soluţia primei etape a problemei de pseudostrat-limită are un caracter particular.

Se mai observă că deoarece forţele masice şi de suprafaţă afectate unui element normal au forţă rezultantă şi moment rezultant nul, este necesar ca şi tensiunile interne corespunzătoare unui element de secţiune normală la planul median să aibă rezultanta şi moment rezultant nul. Această condiţie este îndeplinită dacă

$$\sigma^{\alpha i}_{(0)} = \sigma^{\alpha\beta}_{(1)} = 0$$

în dezvoltările Legendre ale tensiunilor. Într-adevăr, polinoamele Legendre satisfac condiţiile de ortogonalitate

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_0(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_1(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad (n \geqslant 2),$$

unde

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

deci tensiunile variind ca $P_n(x)$ pe grosime pentru $n \neq 0, 1$ sînt autoechilibrate.

În lucrarea [1] soluţia corespunzătoare primei etape a problemei de pseudostrat-limită a fost obţinută în cazul general pentru o placă curbă nesubţire.

Prin particularizare, considerînd că placa este referită la un sistem triplu ortogonal de coordonate θ^1, θ^2, $\theta^3 = hx$, se observă că parametrii lui Lamé au expresiile

$$H_1 = A_1, \quad H_2 = A_2, \quad H_3 = 1.$$

Se observă de asemenea, cu notațiile din [1], că

$$H = A_1 A_2.$$

În cele ce urmează vor fi folosite componentele *fizice* ale tensiunii deformației și deplasării. Tensiunile-limită vor fi scindate în simetrice și asimetrice, după cum urmează:

$$\tau_{13}(\theta^1, \theta^2, \pm 1) = \pm t_1(\theta^1, \theta^2); \quad \tau_{33}(\theta^1, \theta^2, \pm 1) = s(\theta^1, \theta^2)\ (1 \leftarrow\rightarrow 2), \tag{3.2}$$

$$\tau_{13}(\theta^1, \theta^2, \pm 1) = t_1(\theta^1, \theta^2); \quad \tau_{33}(\theta^1, \theta^2, \pm 1) = \pm s(\theta^1, \theta^2)\ (1 \leftarrow\rightarrow 2), \tag{3.3}$$

unde pentru problema simetrică (3.2)

$$\begin{aligned} t_1(\theta^1, \theta^2) &= \frac{1}{2}[\tau_{13}^{(c)}(\theta^1, \theta^2, 1) - \tau_{13}^{(c)}(\theta^1, \theta^2, -1)]\ \ (1 \leftarrow\rightarrow 2), \\ s(\theta^1, \theta^2) &= \frac{1}{2}[\tau_{33}^{(c)}(\theta^1, \theta^2, 1) + \tau_{33}^{(c)}(\theta^1, \theta^2, -1)], \end{aligned} \tag{3.4}$$

iar pentru problema antisimetrică

$$\begin{aligned} t_1(\theta^1, \theta^2) &= \frac{1}{2}[\tau_{13}^{(c)}(\theta^1, \theta^2, 1) + \tau_{13}^{(c)}(\theta^1, \theta^2, -1)]\ \ (1 \leftarrow\rightarrow 2), \\ s(\theta^1, \theta^2) &= \frac{1}{2}[\tau_{33}^{(c)}(\theta^1, \theta^2, 1) - \tau_{33}^{(c)}(\theta^1, \theta^2, -1)]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Prin particularizarea rezultatelor obținute în [1], deplasările sînt date de

$$\begin{aligned} v_i = A_1^2 A_2^2 [&C_{v_i}(\theta^1, \theta^2)(P_5(x) - P_3(x)) + \\ &+ D_{v_i}(\theta^1, \theta^2)(P_4(x) - P_2(x))]\ \ (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{3.6}$$

funcțiile $C_{v_i}(\theta^1, \theta^2)$ și $D_{v_i}(\theta^1, \theta^2)$ putînd fi deduse din următoarele sisteme liniare algebrice de ecuații:

$$\begin{aligned} 9C_{v_1}(\theta^1, \theta^2) + 7D_{v_1}(\theta^1, \theta^2) &= \frac{h}{A_1^2 A_2^2} \cdot \frac{2(1+\nu)}{E} t_1\ \ (1 \leftarrow\rightarrow 2), \\ 9C_{v_1}(\theta^1, \theta^2) - 7D_{v_1}(\theta^1, \theta^2) &= (-1)^k \frac{h}{A_1^2 A_2^2} \cdot \frac{2(1+\nu)}{E} t_1, \end{aligned} \tag{3.7}$$

și

$$9C_{v_3}(\theta^1, \theta^2) + 7D_{v_3}(\theta^1, \theta^2) = \frac{h}{A_1^2 A_2^2} \cdot \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} s,$$

$$9C_{v_3}(\theta^1, \theta^2) - 7D_{v_3}(\theta^1, \theta^2) = (-1)^{K'} \frac{h}{A_1^2 A_2^2} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} s. \tag{3.8}$$

În cazul problemei simetrice, K este impar și K' par și invers în cazul problemei antisimetrice. Deplasările fiind determinate, deformațiile și tensiunile rezultă fără dificultăți.

Din ecuațiile de echilibru rezultă forțele masice $\mathcal{F}_i^{(\mathrm{I})}(i = 1, 2, 3)$, introduse de soluția acestei etape.

4. PROBLEMA DE PSEUDOSTRAT-LIMITĂ. ETAPA A II-A

Soluția corespunzătoare acestei etape a fost dată în lucrarea [1] pentru placa plană referită la un sistem cartezian triortogonal de coordonate.

În această etapă se dă o soluție a ecuațiilor teoriei elasticității, cu condiții omogene pe S_+, S_- și forțe masice de corecție impuse:

$$\mathcal{F}_i^{(\mathrm{II})} = \mathcal{F}_i - \mathcal{F}_i^{(\mathrm{I})} - \mathcal{F}_i^{(\mathrm{I})}, \tag{4.1}$$

unde $\mathcal{F}_i$ sînt componentele fizice ale forței masice, iar $\mathcal{F}_i^{(\mathrm{I})}$ și $\mathcal{F}_i^{(\mathrm{I})}$ componentele fizice ale forței masice rezultate în rezolvarea problemei liniare pe grosime, respectiv a problemei de pseudostrat-limită etapa I.

Se remarcă că $\mathcal{F}_i^{(\mathrm{II})}$ formează un sistem cu rezultantă și moment rezultant nul, astfel că

$$\mathcal{F}_1^{(\mathrm{II})}(\theta^1, \theta^2, x) = \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}_{1;n}^{(\mathrm{II})}(\theta^1, \theta^2) P_n(x) \qquad (1 \leftarrow\!\rightarrow 2),$$

$$\mathcal{F}_3^{(\mathrm{II})}(\theta^1, \theta^2, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{3;n}^{(\mathrm{II})}(\theta^1, \theta^2) P_n(x). \tag{4.2}$$

Luîndu-se deplasările de forma

$$v_1 = \sum_{n=4}^{\infty} v_{1;n}^2(\theta^1, \theta^2) P_n^2(x); \qquad v_2 = \sum_{n=4}^{\infty} v_{2;n}^2(\theta^1, \theta^2) P_n^2(x),$$

$$v_3 = \sum_{n=3}^{\infty} v_{3;n}^2(\theta^1, \theta^2) P_n^2(x), \tag{4.3}$$

unde s-a notat

$$P_n^2 = \frac{P_{n+1}^1 - P_{n-1}^1}{2n+1}, \qquad P_n^1 = \frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{2n+1}, \tag{4.4}$$

funcțiile $v_{i;n}^2 (i = 1, 2, 3)$ se determină, printr-un proces recurent, din ecuațiile de echilibru scrise în deplasări. Rezultă ecuațiile

$$\Delta v_{1;n}^2 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \theta^1} \left(\frac{\partial v_{1;n}^2}{\partial \theta^1} + \frac{\partial v_{2;n}^2}{\partial \theta^2} \right) =$$

$$= (4n^2 - 1) \left[\frac{1}{(1-2\nu)(2n+1)h} \frac{\partial v_{3;n-1}^2}{\partial \theta^1} - \frac{2(1+\nu)}{E} \mathcal{F}_{1;n-2}^{(II)} + L_1^{(n-2)} \right] \tag{4.5}$$

$$(1 \leftarrow \rightarrow 2),$$

$$\Delta v_{3;n-1}^2 = (2n-3)(2n-1) \left[-\frac{2(1+\nu)}{E} \mathcal{F}_{3;n-2}^{(II)} + L_3^{(n-2)} \right] \qquad (n \geqslant 4),$$

funcțiile $L_i^{(n-2)}(\theta^1, \theta^2)$ $(i = 1, 2, 3)$ fiind cunoscute, deoarece ele depind de mărimi determinate în etapele anterioare; în particular,

$$L_i^{(2)}(\theta^1, \theta^2) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Remarcăm că soluția problemei de pseudostrat-limită etapa a II-a are un caracter particular, în sensul că nu se pretinde satisfacerea condițiilor la limită pe suprafața laterală a plăcii plane. Prin urmare, pentru sistemul (4.5) ne interesează o soluție particulară. Determinarea acestei soluții nu prezintă dificultăți, deoarece primele două ecuații din care se obțin $v_{\alpha;n}^2 (\alpha = 1, 2)$ corespund problemei plane, iar $v_{3;n-1}^2$ este o soluție particulară a unei ecuații de tip Poisson.

Deplasările v_1, v_2, v_3 fiind astfel determinate, deducem tensiunile. Din proprietățile etapei a II-a a problemei de pseudostrat-limită rezultă că, pentru un element de placă normal la planul median, rezultanta și momentul rezultant al tensiunilor sînt nule, caracteristică a stărilor de pseudostrat-limită.

5. EXEMPLU

Considerăm o placă circulară încastrată pe contur și încărcată cu o sarcină constantă p pe S_+ și fără forțe masice. Fie R raza plăcii, ca în figura 1.

Presupunem că placa este referită la coordonate cilindrice :

$$\theta^1 = r, \quad \theta^2 = \theta, \qquad \theta^3 = hx. \tag{5.1}$$

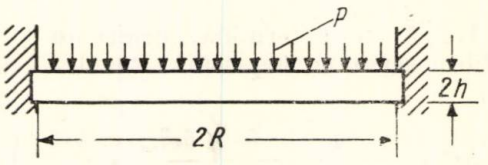


Fig. 1

Rezultă

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + h^2\, dx^2$$

şi deci

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1; \quad a_{22} = r^2; \quad a_{12} = 0; \quad a = r^2, \\ &a^{11} = 1; \quad a^{22} = \frac{1}{r^2}; \quad a^{12} = 0, \\ &\varepsilon_{11} = 0; \quad \varepsilon_{22} = 0; \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = r, \\ &\varepsilon^{11} = 0; \quad \varepsilon^{22} = 0; \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = \frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Condiţiile la limită sînt

$$\begin{aligned} &\sigma^{\beta 3} = 0 && \text{pentru } x = \pm 1, \\ &\sigma^{33} = -p && \text{pentru } x = 1, \\ &\sigma^{33} = 0 && \text{pentru } x = -1, \end{aligned} \tag{5.3}$$

pe suprafaţa laterală a plăcii, urmînd a fi satisfăcute condiţiile marginale

$$u_i = 0 \text{ pentru } r = R. \tag{5.4}$$

5.1. *Studiul problemei liniare pe grosime.* Forţele masice fiind nule, din (2.10), conform cu (5.3), rezultă

$$R^\beta = 0; \; R^3 = -p; \; C^\beta = 0. \tag{5.5}$$

Ecuațiile (2.12), (2.13) și (2.14), corespunzătoare problemei liniare, urmează a fi integrat în domeniul $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, componentele R^β, R^3, C^β fiind date de (5.5).

Din reprezentarea (2.3) și din condițiile (5.4) se obțin condițiile la limită asociate acestei probleme:

$$u_\alpha^{(0)} = 0 \qquad \text{pentru} \qquad r = R, \tag{5.6}$$

$$u_\alpha^{(1)} = u_3^{(0)} = 0 \qquad \text{pentru} \qquad r = R. \tag{5.7}$$

Soluția sistemului (2.12), care este omogen în acest caz, satisfăcînd condițiile (5.6), este evident

$$u_\alpha^{(0)} = 0. \tag{5.8}$$

Să considerăm acum sistemul format din ecuațiile (2.13) și (2.14), pentru care condițiile de margine sînt (5.7). Determinarea unei soluții particulare a sistemului (2.13)—(2.14) se efectuează după cum urmează.

Ecuația (2.18) devine în acest caz

$$\Delta P = \frac{(1 + \nu)\, p}{Eh}$$

și admite soluția particulară.

Prin urmare, ecuația (2.19) trece în

$$\Delta Q = \frac{3(1 - 2\nu)(1 + \nu)\, p}{8Eh^2(1 - \nu)}\, r^2,$$

pentru care o soluție particulară este

$$Q = \frac{3(1 - 2\nu)(1 + \nu)\, p}{128\, Eh^2(1 - \nu)}\, r^4.$$

Pe baza formulelor (2.20) se obține soluția particulară a problemei liniare pe grosime

$$\begin{aligned} u_{3;(p)}^{(0)} &= \frac{1 + \nu}{4\, Eh}\left[1 - \frac{3(1 - 2\nu)}{32(1 - \nu)}\,\frac{r^2}{h^2}\right] p r^2, \\ u_{1;(p)}^{(1)} &= \frac{3(1 + \nu)(1 - 2\nu)\, p}{32\, Eh^2(1 - \nu)}\, r^3; \qquad u_{2;(p)}^{(1)} = 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Pentru sistemul omogen asociat se construiește în primul rînd soluția generală în coordonate polare.

Se construiesc funcțiile armonice $\varphi_{(a)}$ și $\psi_{(a)}$, ele fiind partea reală, respectiv imaginară a unei funcții olomorfe, de variabilă complexă $\theta^1 + i\theta^2 = re^{i\theta}$, în domeniul ocupat de planul median al plăcii.

Găsim *)

$$\varphi_{(a)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta),$$

$$\psi_{(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\alpha_n \sin n\theta + \beta_n \cos n\theta). \tag{5.10}$$

Aplicînd metoda separării variabilelor, se obține soluția ecuației lui Helmholtz (2.36), mărginită pentru $r = 0$:

$$\varphi_{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{\sqrt{3}}{h} r\right) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \tag{5.11}$$

unde $I_n \left(\frac{\sqrt{3}}{h} r\right)$ este funcția Bessel modificată (de argument imaginar).

Din ecuația (2.40) deducem

$$u_3^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (C_n \cos n\theta) + D_n \sin n\theta) +$$

$$+ \frac{3(1-2\nu)}{8h^2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+2}}{n+1} (\alpha_n \sin n\theta + \beta_n \cos n\theta). \tag{5.12}$$

Componentele $u_\alpha^{(1)}$ se obțin din formulele (2.38)

$$\frac{1}{h} u_1^{(1)} = -\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varphi_{(a)} + \varphi_{(h)}),$$

$$\frac{1}{h} u_2^{(1)} = -\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \theta} - r \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_{(a)} + \varphi_{(h)}).$$

Constantele arbitrare α_n, β_n, A_n, B_n, C_n, D_n se determină prin satisfacerea pe suprafața laterală a condițiilor la limită ale problemei liniare pe grosime.

*) Se observă că funcția $\varphi_{(a)}$ este determinată, abstracție făcînd de o constantă; într-adevăr, înlocuind pe $\varphi_{(a)}$ cu $\varphi_{(a)} + \alpha_0$, unde α_0 este o constantă, componentele deplasări $u_3^{(0)}$, $u_\alpha^{(1)}$ rămîn nemodificate.

În cazul studiat, soluția nu va depinde de θ. Obținem pe calea indicată următoarea soluție generală a sistemului omogen asociat :

$$\varphi_{(a)} = 0; \quad \psi_{(a)} = \beta_0; \quad \varphi_{(h)} = A_0 I_0\left(\frac{\sqrt{3}}{h} r\right),$$

$$u^{(0)}_{3;(g)} = C_0 + \frac{3(1-2\nu)}{8h^2(1-\nu)} r^2 \beta_0; \quad \frac{1}{h} u^{(1)}_{1;(g)} = -\frac{3(1-2\nu)}{4h^2(1-\nu)} r\beta_0, \tag{5.13}$$

$$\frac{1}{h} u^{(1)}_{2;(g)} = -A_0 r I_0'\left(\frac{\sqrt{3}}{h} r\right).$$

Însumînd soluțiile (5.9) și (5.13), se găsește soluția generală a sistemului neomogen (2.13), (2.14) și din condițiile la limită (5.7) deducem

$$A_0 = 0; \qquad \beta_0 = \frac{(1+\nu)p}{8Eh} R^2,$$
$$C_0 = -\frac{1+\nu}{4Eh}\left[1 + \frac{3(1-2\nu)}{32(1-\nu)}\frac{R^2}{h^2}\right] pR^2. \tag{5.14}$$

Prin urmare, deplasările u_i ale problemei liniare pe grosime sînt

$$u_1 = x u_1^{(1)}; \qquad u_2 = 0; \qquad u_3 = u_3^{(0)}, \tag{5.15}$$

unde

$$u_1^{(1)} = \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)}{32Eh^2(1-\nu)} pr(r^2 - R^2),$$
$$u_3^{(0)} = \frac{(1+\nu)p}{4Eh}(r^2 - R^2) - \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)p}{128Eh^3(1-\nu)}(r^2 - R^2)^2. \tag{5.16}$$

Folosind relațiile geometrice și constitutive, găsim următoarele componente *fizice* ale tensiunii care corespund problemei liniare pe grosime :

$$\sigma^{(l)}_{11} = \frac{3px}{32h^2(1-\nu)}[(3-2\nu)r^2 - R^2]; \quad \sigma^{(l)}_{12} = 0,$$

$$\sigma^{(l)}_{22} = \frac{3px}{32h^2(1-\nu)}[(1+2\nu)r^2 - R^2]; \quad \sigma^{(l)}_{13} = \frac{pr}{4h}, \tag{5.17}$$

$$\sigma^{(l)}_{33} = \frac{3\nu px}{16h^2(1-\nu)}(2r^2 - R^2); \qquad \sigma^{(l)}_{23} = 0,$$

iar din ecuaţiile de echilibru componentele *fizice* $F_i^{(l)}$ ale aceleiaşi probleme găsim

$$F_1^{(l)} = -\frac{3pxr}{4h^2}\ ;\ F_2^{(l)} = 0,$$
$$F_3^{(l)} = -\frac{p}{2h}\left[1 + \frac{3\nu}{8(1-\nu)} \cdot \frac{2r^2 - R^2}{h^2}\right], \tag{5.18}$$

5.2. *Studiul etapei I a problemei de pseudostrat-limită.* În conformitate cu (5.17), din rezolvarea problemei liniare pe grosime au rezultat tensiunile-limită

$$\sigma_{13|x=\pm1}^{(l)} = \frac{pr}{4h};\quad \sigma_{23|x=\pm1}^{(l)} = 0;\quad \sigma_{33|x=\pm1}^{(l)} = \pm\frac{3\nu p}{16h^2(1-\nu)}(2r^2 - R^2), \tag{5.19}$$

care diferă de tensiunile-limită reale (5.3).

Prin urmare, tensiunile-limită de corecţie sînt, conform cu (3.1):

— pe S_+ $(x = 1)$:

$$\sigma_{13|x=1}^{(c)} = -\frac{pr}{4h};\quad \sigma_{23|x=1}^{(c)} = 0$$
$$\sigma_{33|x=1}^{(c)} = -p - \frac{3\nu p}{16h^2(1-\nu)}(2r^2 - R^2); \tag{5.20}$$

— pe S_- $(x = -1)$:

$$\sigma_{13|x=-1}^{(c)} = -\frac{pr}{4h};\quad \sigma_{23|x=-1}^{(c)} = 0,$$
$$\sigma_{33|x=-1}^{(c)} = \frac{3\nu p}{16h^2(1-\nu)}(2r^2 - R^2). \tag{5.21}$$

În conformitate cu (3.4), pentru problema simetrică rezultă

$$t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ s = -\frac{p}{2}, \tag{5.22}$$

iar conform cu (3.7), (3.8)

$$C_{v_1} = D_{v_1} = C_{v_2} = D_{v_2} = 0,$$
$$C_{v_3} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)ph}{18E(1-\nu)r^2},\quad D_{v_3} = 0. \tag{5.23}$$

Analog din (3.5), în cazul problemei antisimetrice deducem

$$t_1 = -\frac{pr}{4h},\quad t_2 = 0;\quad s = -\frac{p}{2} - \frac{3\nu p}{16\,h^2(1-\nu)}(2r^2 - R^2), \tag{5.24}$$

iar din sistemul (3.7), (3.8) rezultă

$$C_{v_1} = -\frac{(1+\nu)\,p}{18\,Er},\quad D_{v_1} = 0;\quad C_{v_2} = 0,\ D_{v_2} = 0,$$

$$C_{v_3} = 0,\ D_{v_3} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)ph}{14\,E(1-\nu)\,r^2}\left[1 + \frac{3\nu}{8h^2(1-\nu)}(2r^2 - R^2)\right]. \tag{5.25}$$

Pe baza soluțiilor (5.23) și (5.25) se deduc din (3.6) deplasările corespunzătoare celor două probleme și prin însumarea lor obținem

$$v_1 = -\frac{(1+\nu)\,pr}{18\,E}\,[P_5(x) - P_3(x)],$$

$$v_2 = 0, \tag{5.26}$$

$$v_3 = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)ph}{14\,E(1-\nu)}\left[1 + \frac{3\nu}{8h^2(1-\nu)}(2r^2 - R^2)\right]\left[P_4(x) - P_2(x)\right] - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\,ph}{18\,E(1-\nu)}\left[P_5(x) - P_3(x)\right].$$

Folosind (5.26), găsim tensiunile etapei I corespunzătoare probleme de pseudostrat-limită:

$$\sigma_{11}^{(I)} = \sigma_{22}^{(I)} = -\frac{p}{18(1-2\nu)}\left[P_5(x) - P_3(x)\right] - \frac{p\nu}{2(1-\nu)}\left[1 + \frac{3\nu}{8h^2(1-\nu)}(2r^2 - R^2)\right]P_3(x) - \frac{p\nu}{2(1-\nu)}P_4(x),$$

$$\sigma_{33}^{(I)} = -\frac{p}{2}\left[1 + \frac{3\nu}{8h^2(1-\nu)}(2r^2 - R^2)\right]P_3(x) - \frac{p\nu}{9(1-2\nu)}\left[P_5(x) - P_3(x)\right] - \frac{p}{2}P_4(x),$$

$$\tau_{12}^{(I)} = 0;\quad \tau_{23}^{(I)} = 0;$$

$$\tau_{13}^{(I)} = -\frac{pr}{4h}P_4(x) - \frac{3\nu(1-2\nu)\,pr}{56\,h(1-\nu)^2}\left[P_4(x) - P_2(x)\right]. \tag{5.27}$$

În sfîrşit, din ecuaţiile de echilibru rezultă componentele $\mathcal{F}_i^{(I)}$ ale forţei masice corespunzătoare etapei I a problemei de pseudostrat-limită.

Deoarece

$$\frac{dP_3(x)}{dx} = 5P_2(x) + P_0(x), \quad \frac{dP_4(x)}{dx} = 7P_3(x) + 3P_1(x), \tag{5.28}$$

componentele $\mathcal{F}_i^{(I)}$ se pot scrie sub forma unor dezvoltări Legendre:

$$\mathcal{F}_1^{(I)} = \mathcal{F}_{1;1}^{(I)} P_1(x) + \mathcal{F}_{1;3}^{(I)} P_3(x),$$

$$\mathcal{F}_2^{(I)} = 0, \tag{5.29}$$

$$\mathcal{F}_3^{(I)} = \mathcal{F}_{3;0}^{(I)} P_0(x) + \mathcal{F}_{3;1}^{(I)} P_1(x) + \mathcal{F}_{3;2}^{(I)} P_2(x) + \mathcal{F}_{3;3}^{(I)} P_3(x) + \mathcal{F}_{3;4}^{(J)} P_4(x),$$

unde

$$\mathcal{F}_{1;1}^{(I)} = \frac{3pr}{4h^2}; \quad \mathcal{F}_{3;0}^{(I)} = \frac{p}{2h}\left[1 + \frac{3\nu}{8h^2(1-\nu)}(2r^2 - R^2)\right] \tag{5.30}$$

şi

$$\mathcal{F}_{1;3}^{(I)} = \frac{pr}{4h^2}\left(7 + \frac{3\nu}{2(1-\nu)^2}\right); \quad \mathcal{F}_{3;1}^{(I)} = \frac{3p}{2h}, \tag{5.31}$$

$$\mathcal{F}_{3;2}^{(I)} = \frac{p}{4h(1-\nu)}\left[\frac{70 - 143\,\nu + 76\,\nu^2}{7(1-\nu)} + \frac{15\,\nu}{4h^2}(2r^2 - R^2)\right].$$

$$\mathcal{F}_{3;3}^{(I)} = \frac{7p}{2h},$$

$$\mathcal{F}_{3;4}^{(I)} = \frac{p(14 - 25\,\nu + 2\nu^2 + 12\,\nu^3)}{28\,h(1-\nu)^2(1-2\nu)}. \tag{5.32}$$

În modul acesta am determinat efectiv soluţia particulară care caracterizează etapa I a problemei de pseudostrat-limită.

5.3. *Studiul etapei a II-a a problemei de pseudostrat-limită.* În cadrul acestei etape, după cum s-a menţionat anterior, se determină o soluţie particulară a ecuaţiilor teoriei elasticităţii cu condiţii omogene pe S_+, S_-, forţele masice fiind date de (4.1).

În conformitate cu (5.18) şi (5.29), componentele fizice ale forţei masice corespunzătoare etapei a II-a a problemei de pseudostrat-limită sînt

$$\mathcal{F}_1^{(II)} = -\mathcal{F}_{1;3}^{(I)} P_3(x); \quad \mathcal{F}_2^{(II)} = 0,$$

$$\mathcal{F}_3^{(II)} = -\mathcal{F}_{3;1}^{(I)} P_1(x) - \mathcal{F}_{3;2}^{(I)} P_2(x) - \mathcal{F}_{3;3}^{(I)} P_3(x) - \mathcal{F}_{3;4}^{(I)} P_4(x). \tag{5.33}$$

Datorită simetriei, soluția problemei nu depinde de variabila θ. Pe baza rezultatelor anteriore (4.3) și (4.4), soluția va fi căutată sub forma

$$v_1 = \sum_{n=2}^{\infty} V_1^{(n)}(r)\left(\frac{P_{n+4} - P_{n+2}}{2n+7} - \frac{P_{n+2} - P_n}{2n+3}\right),$$
$$v_3 = \sum_{n=1}^{\infty} V_3^{(n)}(r)\left(\frac{P_{n+4} - P_{n+2}}{2n+7} - \frac{P_{n+2} - P_n}{2n+3}\right), \tag{5.34}$$

În cazul utilizării coordonatelor cilindrice, prima aproximație a sistemului iterativ care determină componentele $V_1^{(n)}(r)$, $V_3^{(n)}(r)$ care nu depind de θ este

$$\frac{1}{5}\left(\frac{d^2V_3^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_3^{(1)}}{dr}\right) + \frac{2(1+\nu)}{E}\mathcal{F}_{3;1}^{(II)} = 0, \tag{5.35}$$

$$\frac{1}{7}\left(\frac{d^2V_1^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_1^{(2)}}{dr} - \frac{V_1^{(2)}}{r^2}\right) - \frac{1}{2h(1-\nu)}\frac{dV_3^{(1)}}{dr} +$$
$$+ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\mathcal{F}_{1;2}^{(II)} = 0. \tag{5.36}$$

Folosind (5.33), deducem soluțiile particulare ale ecuațiilor diferențiale (5.35) și (5.36):

$$V_3^{(1)} = \frac{15(1+\nu)p}{4Eh}r^2;\ V_1^{(2)} = \frac{105(1+\nu)p}{32Eh^2(1-\nu)}r^3, \tag{5.37}$$

astfel încît deplasările etapei a II-a sînt

$$v_1 = \frac{105(1+\nu)p}{32Eh^2(1-\nu)}r^3P_2(x);\ v_3 = \frac{15(1+\nu)p}{4Eh}r^2P_1(x). \tag{5.38}$$

5.4. *Problema de strat-limită.* Condițiile de margine (5.4), corespunzătoare încastrării, sînt satisfăcute numai de soluția problemei liniare pe grosime.

Din etapa I și a II-a a problemei de pseudostrat-limită au rezultat deplasări nenule în lungul marginilor. Ca atare, problemei de strat-limită îi revine sarcina corectării acestor deplasări marginale. În cazul de față, această corecție de strat-limită trebuie să satisfacă condițiile marginale

$$v_1 = \frac{(1+\nu)pR}{18E}(P_5(x) - P_3(x)) - \frac{105(1+\nu)pR^3}{32Eh^2(1-\nu)}P_2(x),$$

$$v_2 = 0,$$

$$v_3 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)ph}{14E(1-\nu)}\left[1+\frac{3\nu R^2}{8h^2(1-\nu)}\right](P_4(x)-P_2(x))+$$

$$+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)ph}{18E(1-\nu)}(P_5(x)-P_3(x))-$$

$$-\frac{15(1+\nu)pR^2}{4Eh}P_1(x) \text{ pentru } r=R. \tag{5.39}$$

Pe suprafeţele S_+ şi S_- urmează a fi îndeplinite condiţiile omogene

$$\sigma_{3i}=0 \text{ pentru } x=\pm 1. \tag{5.40}$$

În afara acestor condiţii soluţia trebuie să satisfacă condiţiile de amortizare proprii stratului-limită. În modul acesta sînt formulate toate condiţiile problemei de strat limită.

În lucrarea de faţă nu vom căuta soluţia acestei probleme, care implică rezolvarea unei ecuaţii biarmonice a cărei soluţionare poate fi făcută prin metode cunoscute.

BIBLIOGRAFIE

1. В. Висарион, К. Стэнеску, *Расчет нетонких оболочек*, ПММ, **32**, *6* (1968).

STABILITATEA DINAMICĂ A PLĂCILOR CIRCULARE SOLICITATE DE SARCINI VARIABILE PERIODIC

de N. D. POPESCU
Institutul de mine,
Petroşani,

Aplicînd o nouă variantă a metodei energetice, se stabileşte ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie pentru suprafaţa mediană a plăcilor circulare, avînd diferite condiţii de rezemare pe contur şi solicitate în planul suprafeţei mediane de forţe radiale, care variază periodic. Se constată că, indiferent de condiţiile de rezemare pe contur, ecuaţia diferenţială este de tip Mathieu dacă solicitarea este provocată de o mişcare oscilatorie armonică sau de tip Whittaker în cazul unei solicitări sub formă de impulsuri dreptunghiulare.
Ambele tipuri de ecuaţii au permis efectuarea unei analize complete a fenomenului de stabilitate şi de instabilitate dinamică a plăcilor circulare, iar prin particularizare au condus la determinarea sarcinilor critice de flambaj — pentru cazul solicitărilor statice — precum şi a pulsaţiilor oscilaţiilor proprii de încovoiere.
Se constată că fenomenul descris de ecuaţiile de tip Whittaker este mult mai complex decît cel descris de ecuaţiile de tip Mathieu.

1. INTRODUCERE

În majoritatea problemelor de stabilitate studiate pînă în prezent s-a considerat că sarcinile care solicită structurile de rezistenţă au o acţiune statică, ceea ce presupune că valoarea şi poziţia lor nu se schimbă în timp. Asemenea sarcini se întîlnesc însă destul de rar în practică.

De obicei acţiunea unei sarcini este însoţită de şocuri, vibraţii etc., care produc mişcări ale structurilor de rezistenţă asupra cărora se aplică, astfel că diferitele lor elemente de masă vor fi animate de acceleraţii şi, în consecinţă, eforturile şi deformaţiile elementelor structurale vor fi funcţii de timp. Deci cazul general de solicitare este cel provocat de acţiunea dinamică a sarcinilor.

Se pune deci întrebarea dacă raţionamentele care stau la baza metodelor de cercetare a problemelor de stabilitate pentru elementele solicitate de sarcini statice rămîn valabile şi în cazul solicitărilor cu sarcini dinamice şi ce interpretare trebuie să se dea noţiunilor de pierdere a stabilităţii şi de forţă critică.

Deoarece forţa care acţionează static poate fi considerată drept un caz particular al unei sarcini dinamice vibratorie cu perioada infinită (deci

cu frecvența egală cu zero), fenomenul de pierdere a stabilității cînd forța acționează static poate fi considerat ca un fel de rezonanță, deoarece frecvența oscilațiilor forței și a elementului de rezistență coincid (ambele frecvențe fiind egale cu zero).

Experiența arată că atunci cînd o bară este solicitată de o sarcină dinamică, variabilă periodic în timp, pentru anumite valori ale frecvenței sarcinii (care diferă de zero) se poate produce fenomenul rezonanței, caracterizat printr-o creștere în timp a amplitudinei oscilațiilor barei. Acest fenomen poartă denumirea de instabilitate dinamică a barei. Deci fenomenul de instabilitate statică este un caz particular al instabilității dinamice. Această analogie dintre cele două fenomene de instabilitate, statică și dinamică, are un caracter pur convențional, ea permițînd doar să se tragă concluzia că ecuațiile care descriu fenomenul de instabilitate dinamică pot fi folosite, prin particularizare, și la studiul instabilității statice.

Ținînd însă seama de faptul că fenomenul de rezonanță, care caracterizează instabilitatea dinamică are loc pentru frecvențe ale sarcinii dinamice și ale elementului solicitat diferite de zero, este de așteptat să apară o serie de fenomene noi, care nu pot fi puse în evidență de metodele folosite la studiul instabilității statice.

Prima lucrare în domeniul stabilității dinamice aparține lui Beleaev. Ea a apărut în 1924 și se referă la studiul stabilității unei bare dublu articulate solicitate de o forță variabilă periodică, provocînd barei o mișcare oscilatorie armonică [1]. Aceeași problemă a fost reluată ulterior de mai mulți autori, printre care și Timoshenko, care a rezolvat-o prin metode de calcul exacte [6].

De remarcat faptul că în timp ce Beleaev ajunge la concluzia că sarcina dinamică critică este întotdeauna mai mică decît sarcina critică obișnuită, Timoshenko, pe baza unui studiu riguros, demonstrează că sarcina dinamică critică poate fi mai marc sau mai mică decît sarcina critică obișnuită, în funcție de parametrii care caracterizează bara și sarcina dinamică.

În practică se întîlnesc însă și alte elemente de rezistență, ca, de exemplu, plăcile, pentru care studiul stabilității dinamice este de primă importanță în vederea asigurării securității construcțiilor, instalațiilor și mașinilor.

În lucrarea [5] s-a studiat problema stabilității dinamice a plăcilor dreptunghiulare subțiri, ajungîndu-se la concluzia că pentru anumite valori ale caracteristicilor elastice, mecanice sau geometrice ale plăcilor, în funcție de parametrii sarcinilor variabile periodic, pot avea loc vibrații violente ale plăcilor, care pot duce la distrugerea lor chiar pentru valori mici ale sarcinilor exterioare, în timp ce pentru alte condiții plăcile nu vibrează, iar flambajul se poate produce pentru valori ale sarcinilor exterioare mai mici sau mai mari decît sarcinile critice de flambaj stabilite pentru cazul unei solicitări statice.

Aplicînd noua variantă a metodei energetice, descrisă în lucrarea [4], în această lucrare se va studia stabilitatea dinamică a plăcilor circulare (cu sau fără centru consolidat) și inelare, solicitate în planul suprafeței mediane de forțe de compresiune radiale a căror intensitate variază periodic în timp.

2. STABILIREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A MIȘCĂRII DE VIBRAȚIE

Conform noii variante a metodei energetice, ecuația diferențială a mișcării de vibrație se obține cu ajutorul expresiei

$$L_e = W, \tag{1}$$

unde L_e este lucrul mecanic produs de toate forțele care acționează asupra plăcii (inclusiv forțele de inerție), iar W este energia potențială de deformație acumulată de placă.

Atît lucrul mecanic L_e, cît și energia potențială W pentru cazul plăcilor circulare se deduc cu ușurință, prin particularizare, din expresiile folosite la studiul plăcilor dreptunghiulare.

Astfel, pentru o placă dreptunghiulară avînd diferite condiții de rezemare pe contur, acționată în planul său median de-a lungul laturilor de o sarcină uniform distribuită, energia potențială de deformație W va avea expresia [6]

$$W = \frac{D}{2}\int_{(A)} \left\{ \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \right)^2 \right] \right\} \mathrm{d}A, \tag{2}$$

unde

z este săgeata plăcii într-un punct $A\,(x, y)$,
μ — coeficientul de contracție transversală,
h — grosimea plăcii
$\mathrm{d}A$ — un element de arie,

$$D = \frac{Eh^3}{12\,(1-\mu^2)} \text{ — rigiditatea la încovoiere.} \tag{3}$$

Pentru cazul general de solicitare, cînd N_x, N_y și N_{xy} sînt forțele axiale, respectiv tangențiale, care acționează în planul xy, lucrul mecanic L_{eF}, produs de forțele exterioare cu deformațiile plăcii pe direcția lor de acționare, va fi [6]

$$L_{eF} = \frac{1}{2}\int_{(A)} \left[N_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2\,N_{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \right] \mathrm{d}A. \tag{4}$$

Dacă sarcina exterioară variază periodic, placa va intra în vibrație, astfel că elementele de masă ale acesteia vor fi animate de accelerații și, în consecință, asupra plăcii vor acționa și forțele de inerție, care pe unitatea de suprafață vor avea expresia

$$p_i = \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \tag{5}$$

unde ρ este densitatea materialului, iar produsul ρh, masa unității de suprafață a plăcii.

Deci forţele de inerţie vor produce lucrul mecanic L_{ei}, care se calculează cu relaţia

$$L_{ei} = \frac{1}{2} \int_{(A)} \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} z \, dA. \tag{6}$$

Ca sarcină exterioară se consideră o forţă de forma

$$q(t) = p_0 + p_{(t)}, \tag{7}$$

unde p_0 este sarcina radială statică distribuită uniform pe unitatea de lungime a conturului plăcii, iar $p_{(t)}$ o sarcină variabilă periodic.

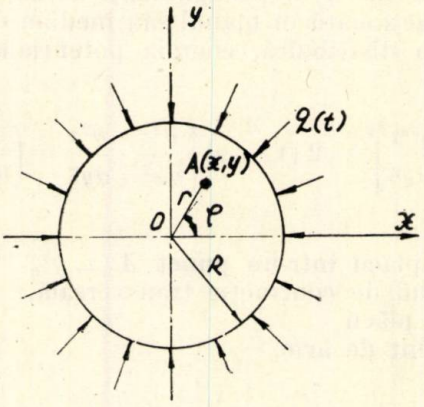


Fig. 1

Placa circulară, reprezentată în figura 1 şi avînd diferite condiţii de rezemare pe contur, se găseşte într-un cîmp omogen de eforturi unitare de compresiune, astfel că se poate scrie

$$\begin{aligned} N_x &= N_y = q(t), \\ N_{xy} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

În acest caz, expresia (4) devine

$$L_{eF} = \int_{(A)} q(t) \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dA. \tag{9}$$

Trecînd la sistemul de coordonate polare, exprimat prin relaţiile

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi, \\ y &= r \sin\varphi, \\ dA &= 2\pi r \, dr, \end{aligned} \tag{10}$$

şi admiţînd ipoteza că suprafaţa deformată a plăcii este axial-simetrică (fapt pentru care deplasarea z nu depinde de unghiul φ şi, în consecinţă, toate derivatele parţiale în raport cu această variabilă vor fi nule), expresiile (2), (6) şi (9) se pot scrie sub forma

$$W = \pi D \int_0^R \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 - 2 (1 - \mu) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \right] r \, dr, \tag{11}$$

$$L_{ei} = \pi \rho h \int_0^R \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} z \, r \, dr, \tag{12}$$

$$L_{eF} = \pi (p_0 + p_{(t)}) \int_0^R \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 r \, dr. \tag{13}$$

Substituind expresiile (11), (12) şi (13) în ecuaţia de condiţie (1) şi ţinînd seama de faptul că $L_e = L_{ei} + L_{eF}$, se obţine

$$\rho h \int_0^R \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} z \, r \, dr + (p_0 + p_{(t)}) \int_0^R \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 r \, dr =$$

$$= D \int_0^R \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 - 2 (1 - \mu) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \right] r \, dr. \tag{14}$$

Datorită caracterului staţionar al mişcării de vibraţie, deplasarea z a unui punct de pe suprafaţa mediană a plăcii se poate scrie sub forma

$$Z_{r,\,t} = X_{(r)} T_{(t)}, \tag{15}$$

unde $X_{(r)}$ este o funcţie care depinde exclusiv de variabila r, iar $T_{(t)}$ o funcţie care depinde exclusiv de timp.

În acest caz, ecuaţia (14) devine

$$\ddot{T}_{(t)} - Q_{(t)} T_{(t)} = 0, \tag{16}$$

unde

$$Q_{(t)} = \frac{D \int_0^R \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} \right)^2 - 2 (1 - \mu) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial r} \right] r \, dr - (p_0 + p_{(t)}) \int_0^R \left(\frac{\partial X}{\partial r} \right)^2 r \, dr}{\rho h \int_0^R X^2 \, r \, dr}. \tag{17}$$

Expresia (16) reprezintă ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie, care are un caracter general, condiţiile la limită influenţînd numai asupra funcţiei $Q_{(t)}$.

De menționat faptul că deplasarea $z_{(r,t)}$ trebuind să satisfacă în orice moment condițiile la limită și funcția $X_{(r)}$ va trebui să satisfacă aceleași condiții și, în consecință, expresia funcției $X_{(r)}$ se poate găsi cu ușurință.

Așa cum se va vedea în continuare, se obțin rezultate suficient de precise dacă se ia pentru funcția $X_{(r)}$ o expresie proporțională cu ecuația săgeților, stabilită pentru o grindă cu deschiderea egală cu diametrul plăcii și solicitată de o sarcină unitară uniform distribuită, grinda avînd aceleași condiții de rezemare ca și placa.

În continuare, problema se va trata pentru cîteva tipuri uzuale de plăci circulare solicitate de sarcini dinamice, provocate fie de o mișcare oscilatorie armonică, fie de impulsuri periodice de formă dreptunghiulară.

3. SARCINA VARIABILĂ ESTE PROVOCATĂ DE O MIȘCARE OSCILATORIE ARMONICĂ

În acest caz, expresia (7) se poate scrie sub forma

$$q_{(t)} = p_0 + S \cos \Omega t, \tag{18}$$

unde S este amplitudinea sarcinii variabile, iar Ω pulsația acesteia. Deci expresia (7) devine

$$Q_{(t)} = \frac{D\int_0^R \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial r}\right)^2 - 2(1-\mu)\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial r}\right] r\,dr - (p_0 + S\cos\Omega t)\int_0^R \left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)^2 r\,dr}{\varrho h \int_0^R X^2 r\,dr}. \tag{19}$$

3.1. PLACĂ CIRCULARĂ CONTINUĂ ÎNCASTRATĂ PE CONTUR

În cazul acestei plăci, reprezentată în figura 2, pe contur nu apar nici deplasări liniare și nici deplasări unghiulare, condițiile de contur fiind pentru $R = r$

$$z_{(R,t)} = \frac{\partial z_{(R,t)}}{\partial r} = 0\,; \left(X_{(R)} = \frac{\partial X_{(R)}}{\partial r} = 0\right).$$

Deci funcția $X_{(r)}$ va avea expresia

$$X_{(r)} = C\,(R^2 - r^2)^2, \tag{20}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Se observă că funcția $X_{(r)}$ este proporțională cu ecuația săgeților pentru o grindă dublu încastrată, cu deschiderea egală cu $2R$ și acționată de o sarcină transversală $p = 1$.

Substituind funcţia (20) şi primele sale două derivate în expresia (19), după efectuarea integralelor se obţine

$$Q_{(t)} = \frac{320\,D}{3\,\rho h\,R^4}\left[1 - \frac{R^2}{16\,D}\,(p_0 + S\cos\Omega t)\right]. \tag{21}$$

Deci ecuaţia diferenţială (16) devine

$$\ddot{T}_{(t)} - \frac{320\,D}{3\,\rho h\,R^4}\left[1 - \frac{R^2}{16\,D}\,(p_0 + S\cos\Omega t)\right] T_{(t)} = 0. \tag{22}$$

Expresia (22) reprezintă ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie pentru placa circulară continuă încastrată pe contur.

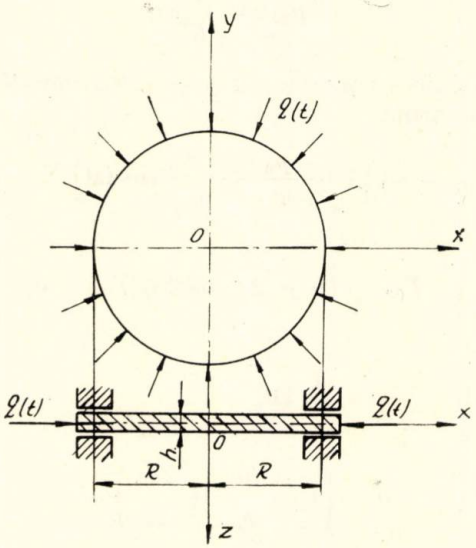


Fig. 2

În cazul particular cînd $S = 0$ şi deci placa este solicitată numai de sarcina statică, dacă $p_0 < 16DR^{-2}$, ecuaţia (22) va reprezenta o vibraţie armonică obişnuită, cu pulsaţia

$$\omega^2 = \frac{320\,D}{3\,\rho h\,R^4}\left(1 - \frac{R^2}{16\,D}\,p_0\right). \tag{23}$$

Pentru $p_0 = 0$, din ecuaţia (23) se obţine

$$\omega_0 = \frac{10{,}32}{R^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \tag{24}$$

Relaţia (24) reprezintă expresia aproximativă a pulsaţiei oscilaţiilor proprii de încovoiere pentru placa circulară continuă încastrată pe contur

şi nesolicitată de nici un fel de sarcini, valoarea exactă fiind dată de expresia [6]

$$\omega_0 = \frac{10{,}21}{R^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{10{,}21}{R^2}\sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}}. \tag{25}$$

Din analiza expresiei (23) rezultă că o dată cu creşterea sarcinii p_0 pulsaţia ω descreşte, putînd să se anuleze pentru o anumită valoare a lui p_0, caz în care nu se pot produce vibraţii, iar placa se va găsi în echilibru într-o formă uşor curbată, ceea ce arată că s-a produs fenomenul de flambaj. Deci prin rezolvarea ecuaţiei obţinute prin anularea relaţiei (23) rezultă expresia sarcinii critice de flambaj pentru cazul solicitărilor statice :

$$p_{0c} = \frac{16\,D}{R^2}. \tag{26}$$

Ţinînd seama de expresiile (24) şi (26), ecuaţia diferenţială (22) se poate scrie sub forma

$$\ddot{T}_{(t)} - \omega_0^2\left(1 - \frac{p_0}{p_{0c}} - \frac{S}{p_{0c}}\cos\Omega t\right) T_{(t)} = 0 \tag{27}$$

sau

$$\ddot{T}_{(\nu)} - (p - 2q\cos 2\nu)\, T_{(\nu)} = 0, \tag{28}$$

unde

$$\nu = \frac{1}{2}\Omega t,$$

$$p = \left(1 - \frac{p_0}{p_{0c}}\right)\left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2, \tag{29}$$

$$q = \frac{2S}{p_{0c}}\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2.$$

Deoarece pentru orice tip de placă circulară ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie se poate pune sub forma (28), rezolvarea acestei ecuaţii şi interpretarea rezultatelor se vor da la sfîrşitul lucrării.

3.2. PLACĂ CIRCULARĂ CONTINUĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR

Pentru placa reprezentată în figura 3 nu au loc pe contur nici deplasări liniare (săgeţi la încovoiere) şi nici momente radiale, condiţiile de contur fiind pentru $r = R$ următoarele :

$$z_{(R,\,t)} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 0\,;\left(X_{(R)} = \frac{\partial^2 X_{(R)}}{\partial r} = 0\right).$$

Deci funcția $X_{(r)}$ va avea expresia

$$X_{(r)} = C(r^4 - 6R^2 r^2 + 5R^4), \tag{30}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Se poate arăta cu ușurință că expresia (30) este proporțională cu ecuația săgeților, dedusă pentru o grindă simplu rezemată, cu deschiderea egală cu $2R$ și acționată de o sarcină unitară uniform distribuită.

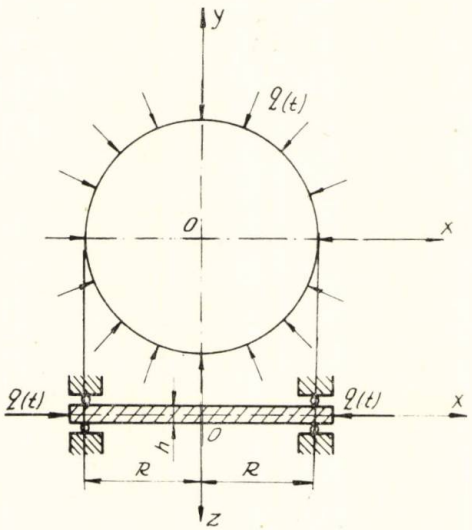


Fig. 3

Substituind funcția (30) și primele sale două derivate în expresia (19), după efectuarea calculelor se obține

$$Q_{(t)} = \frac{\frac{32}{3}(7 + 6\mu) DR^2 - 22(p_0 + S\cos \Omega t) R^8}{\frac{113}{30} \rho h R^{10}} \tag{31}$$

sau

$$Q_{(t)} = \frac{320(7 + 6\mu) D}{113 \rho h R^4} \left[1 - \frac{33(p_0 + S\cos \Omega t) R^2}{16(7 + 6\mu) D}\right]. \tag{32}$$

Ținînd seama de expresia (32), ecuația diferențială (16) devine

$$\ddot{T}_{(t)} - \frac{320(7 + 6\mu) D}{113 \rho h R^4} \left[1 - \frac{33R^2}{16(7 + 6\mu) D}(p_0 + S\cos \Omega t)\right] T_{(t)} = 0. \tag{33}$$

S-a obținut astfel ecuația diferențială a mișcării de vibrație pentru placa circulară continuă simplu rezemată pe contur.

Pentru $S = 0$, ecuația diferențială (33) reprezintă o vibrație armonică obișnuită, cu pulsația

$$\omega^2 = \frac{320(7 + 6\mu)\, D}{113\, \rho h\, R^4} \left[1 - \frac{33 R^2 p_0}{16(7 + 6\mu)\, D}\right]. \tag{34}$$

Dacă $p_0 = 0$, din relația (34) se deduce expresia pulsației oscilațiilor proprii de încovoiere pentru placa circulară continuă simplu rezemată pe contur și nesolicitată de nici un fel de sarcini:

$$\omega_0 = \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{320(7 + 6\mu)\, D}{113\, \rho h}}. \tag{35}$$

Rezolvînd ecuația obținută prin egalarea cu zero a expresiei (34), rezultă imediat sarcina critică de flambaj pentru cazul unei solicitări statice:

$$p_{0c} = \frac{16(7 + 6\mu)\, D}{33 R^2}. \tag{36}$$

Pentru $\mu = 0{,}3$, expresiile (35) și (36) devin

$$\omega_0 = \frac{5}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad \left(\text{valoarea exactă fiind } \omega_0 = \frac{5{,}08}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}\right), \tag{37}$$

$$p_{0c} = \frac{4{,}26 D}{R^2} \quad \left(\text{valoarea exactă fiind } p_{0c} = \frac{4{,}20 D}{R^2}\right). \tag{38}$$

Rezultă deci că ecuația diferențială (33) se poate scrie sub forma (27), în care ω_0 și p_{0c} au expresiile (35), respectiv (36).

În consecință, pentru p_0 și S diferiți de zero, problema se tratează n continuare ca și în cazul precedent.

3.4. PLACĂ CIRCULARĂ CONTINUĂ ÎNCASTRATĂ PE CONTUR ȘI CU CENTRUL CONSOLIDAT

Se presupune că fixarea centrului este astfel realizată, încît nu numai deplasarea liniară, ci și deplasarea unghiulară în centrul plăcii este exclusă (fig. 4). În acest caz, funcția $X_{(r)}$ trebuie să satisfacă condițiile:

— pentru $r = 0$, $X_{(0)} = \dfrac{\partial X_{(0)}}{\partial r} = 0$;

— pentru $r = R$, $X_{(R)} = \dfrac{\partial X_{(R)}}{\partial r} = 0$,

care sînt satisfăcute de funcţia

$$X_{(r)} = Cr^2(r - R)^2. \tag{39}$$

Se observă că expresia (39) este proporţională cu ecuaţia săgeţilor pentru o grindă dublu încastrată, cu deschiderea egală cu R şi acţionată de o sarcină unitară uniform distribuită.

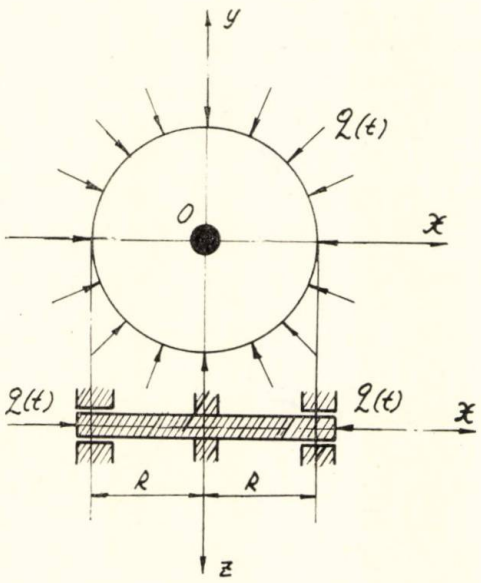


Fig. 4

Substituind funcţia (39) şi primele sale două derivate în expresia (19), se obţine

$$Q_{(t)} = \frac{588D}{\rho h R^4}\left[1 - \frac{R^2}{49D}(p_0 + S\cos\Omega t)\right]. \tag{40}$$

Deci ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie pentru acest tip de placă va fi de forma

$$\ddot{T}_{(t)} - \frac{588D}{\rho h R^4}\left[1 - \frac{R^2}{49D}(p_0 + S\cos\Omega t)\right] T_{(t)} = 0. \tag{41}$$

Prin particularizare, din ecuaţia diferenţială (41) se obţine

$$\omega_0 = \frac{24{,}24}{R^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \qquad p_{0c} = \frac{49D}{R^2}. \tag{42}$$

Ţinînd seama de expresiile (42), ecuaţia diferenţială (41) se poate scrie sub forma (27), respectiv (28), şi, în consecinţă, problema se va trata în continuare ca şi în cazul prezentat la punctul 3.1.

3.4. PLACĂ CIRCULARĂ CONTINUĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR ŞI CU CENTRUL CONSOLIDAT

Pentru placa reprezentată în figura 5, funcţia $X_{(r)}$ trebuie să satisfacă condiţiile :

— pentru $r = 0$, $X_{(0)} = \dfrac{\partial X_{(0)}}{\partial r} = 0$;

— pentru $r = R$, $X_{(R)} = \dfrac{\partial^2 X_{(R)}}{\partial r^2} = 0$.

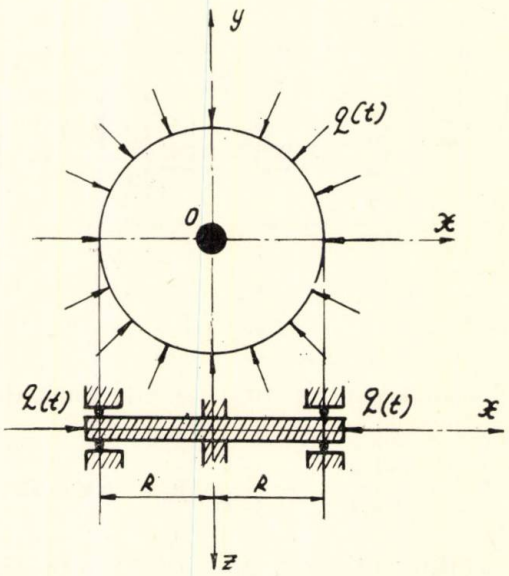


Fig. 5

Aceste condiţii sînt satisfăcute de funcţia

$$X_{(r)} = Cr^2(2r^2 + 3R^2 - 5rR). \tag{43}$$

Substituind funcţia (43) şi primele sale două derivate în expresia (19), se obţine

$$Q_{(t)} = \frac{4{,}88(47 + 12\mu)\, D}{\rho h R^4}\left[1 - \frac{2{,}57R^2}{(47 + 12\mu)\, D}(p_0 + S\cos \Omega t)\right]. \tag{44}$$

Ţinînd seama de această expresie, ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie pentru acest tip de placă devine

$$\ddot{T}_{(t)} - \frac{4{,}88(47 + 12\mu)\, D}{\rho h R^4}\left[1 - \frac{2{,}57R^2}{(47 + 12\mu)\, D}(p_0 + S\cos\Omega t)\right] T_{(t)} = 0. \tag{45}$$

Din ecuaţia diferenţială (45), prin particularizări, rezultă imediat expresia pulsaţiei şi a sarcinii critice de flambaj pentru cazul solicitărilor statice :

$$\omega_0 = \frac{1}{R^2}\sqrt{\frac{4{,}88(47 + 12\mu)\, D}{\rho h}}, \qquad p_{0c} = \frac{(47 + 12\mu)\, D}{2{,}57R^2}. \tag{46}$$

Şi acest caz se va trata în continuare ca la punctul 3.1, deoarece ecuaţia (45) se poate scrie sub forma (27), respectiv (28), dacă se ţine seama de expresiile (46).

3.5. PLACĂ INELARĂ ÎNCASTRATĂ PE CONTUR

Pentru placa inelară reprezentată în figura 6, avînd o gaură la mijloc de rază a, funcţia $X_{(r)}$ va fi dată de expresia (20).

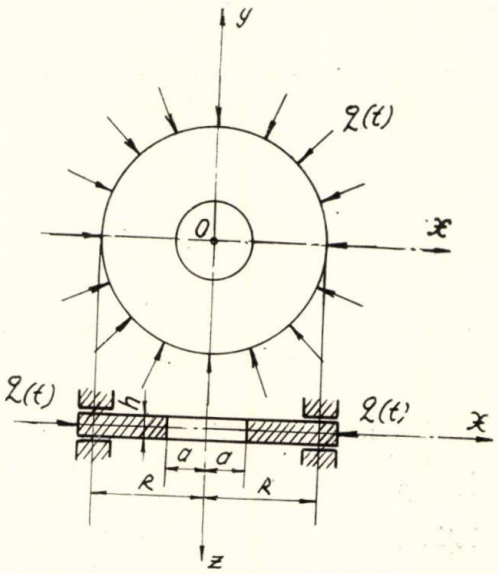


Fig. 6

În consecință, problema se va trata ca și în cazul plăcii circulare continue încastrată pe contur, singura deosebire constînd doar în faptul că limita inferioară a integralelor care intervin în expresia (19) nu mai este egală cu zero, ci cu raza găurii, adică cu a.

Dacă se fac notațiile

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{a}{R}, \\ K &= 2 - 5\beta^6 + 6\beta^4 - 3\beta^2 - 3\mu\beta(1-\beta^2)^2, \\ \alpha &= 1 - 3\beta^8 + 8\beta^6 - 6\beta^4, \\ \eta &= (1-\beta^2)^5, \end{aligned} \tag{47}$$

funcția $Q_{(t)}$, dată de expresia (19), devine

$$Q_{(t)} = \frac{160D}{3\rho h R^4} \cdot \frac{K}{\eta}\left[1 - \frac{R^2}{8D} \cdot \frac{\alpha}{K}(p_0 + S\cos\Omega t)\right]. \tag{48}$$

Substituind expresia (48) în ecuația (16), se obține ecuația diferențială a mișcării de vibrație pentru placa inelară încastrată pe contur:

$$\ddot{T}_{(t)} - \frac{160D}{3\rho h R^4} \cdot \frac{K}{\eta}\left[1 - \frac{R^2}{8D} \cdot \frac{\alpha}{K}(p_0 + S\cos\Omega t)\right] T_{(t)} = 0. \tag{49}$$

Rezultă deci următoarele expresii pentru pulsația oscilațiilor proprii de încovoiere și pentru sarcina critică de flambaj, corespunzătoare solicitărilor statice:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{7{,}3}{R^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h} \cdot \frac{K}{\eta}}, \\ p_{0c} &= \frac{8D}{R^2} \cdot \frac{K}{\alpha}. \end{aligned} \tag{50}$$

Se observă că atît pulsația ω_0, cît și sarcina critică de flambaj p_{0c} depind de raportul β, iar pentru $\beta = 0$ (deci pentru $a = 0$), din relațiile (50) se deduc imediat expresiile (24) și (26).

Legile de variație ale rapoartelor $\frac{K}{\eta}$ și $\frac{K}{\alpha}$ funcție de β (pentru $\mu = 0{,}3$) sînt date în graficele 7a și 7b.

Ţinînd seama de expresiile (50), ecuaţia diferenţială (49) se poate scrie sub forma (27), respectiv (28), astfel că problema se tratează în continuare ca în cazul precedent la punctul 3.1.

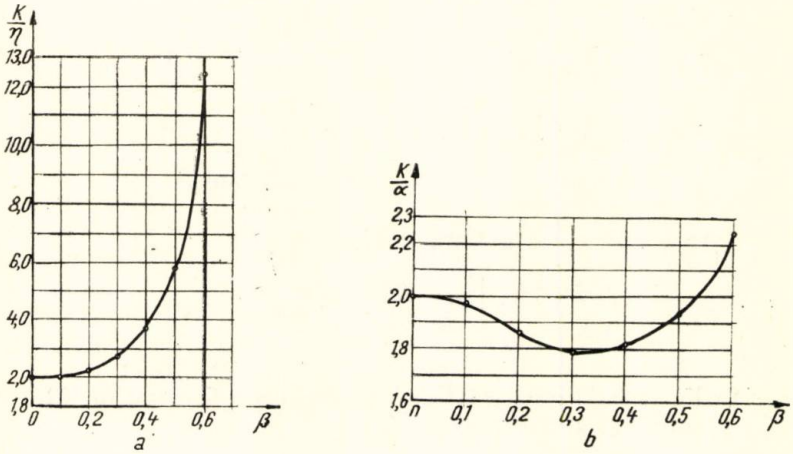


Fig. 7

3.6. PLACĂ INELARĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR

Ca şi în cazul precedent, placa inelară simplu rezemată pe contur (fig. 8) se tratează în acelaşi mod ca placa circulară continuă, avînd aceleaşi condiţii de rezemare pe contur, deosebirea constînd doar în modificarea limitei inferioare a integralelor care intervin în expresia (19).

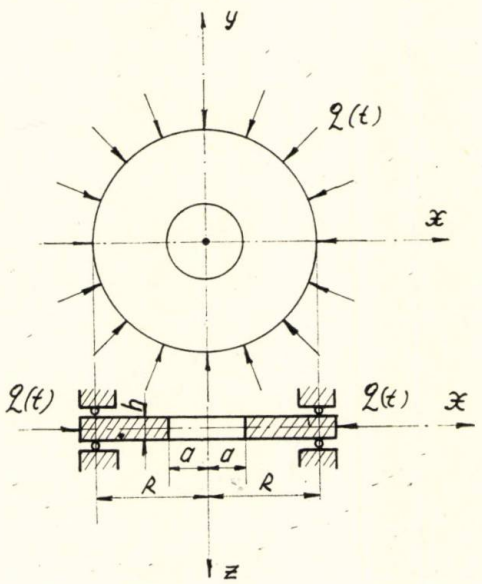


Fig. 8

Deci, luînd pentru $X_{(r)}$ o expresie de forma (30) şi făcînd notaţiile

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{a}{R}, \\ K_1 &= 14 - 5\beta^6 + 9\beta^4 - 27\beta^2 + \mu(12 - 3\beta^6 + 18\beta^4 - 27\beta^2), \\ \alpha_1 &= 11 - \beta^8 + 8\beta^6 - 18\beta^4, \\ \eta_1 &= 452 - 12\beta^{10} + 180\beta^6 + 1800\beta^4 - 1500\beta^2, \end{aligned} \tag{51}$$

funcţia $Q_{(t)}$, dată de expresia (19), devine

$$Q_{(t)} = \frac{640D}{\rho h R^4} \cdot \frac{K_1}{\eta_1} \left[1 - \frac{3R^2}{8D} \cdot \frac{\alpha_1}{K_1} (p_0 + S \cos \Omega t) \right]. \tag{52}$$

Deci ecuaţia diferenţială a mişcări de vibraţie pentru placa inelară simplu rezemată pe contur va avea expresia

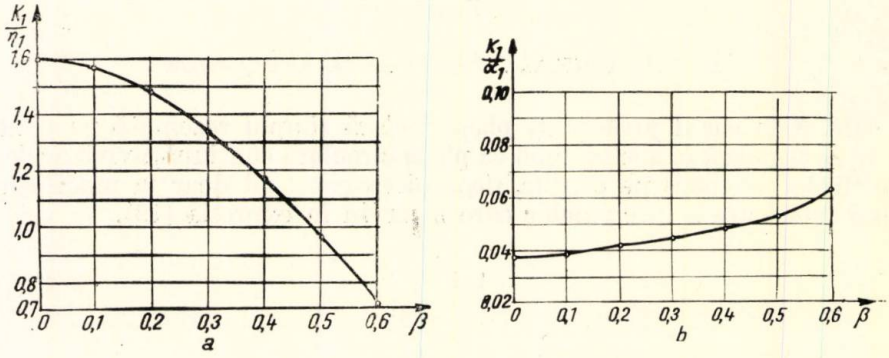


Fig. 9

$$\ddot{T}_{(t)} - \frac{640D}{\rho h R^4} \cdot \frac{K_1}{\eta_1} \left[1 - \frac{3R^2}{8D} \cdot \frac{\alpha_1}{K_1} (p_0 + S \cos \Omega t) \right] T_{(t)} = 0. \tag{53}$$

Rezultă imediat expresiile pulsaţiei de încovoiere ω_0 şi a sarcinii critice de flambaj p_{0c}:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{25{,}3}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h} \cdot \frac{K_1}{\eta_1}}, \\ p_{0c} &= \frac{8D}{3R^2} \cdot \frac{K_1}{\alpha_1}. \end{aligned} \tag{54}$$

Dacă a = 0 (respectiv $\beta = 0$), din relaţiile (54) se găsesc expresiile (35) şi (36).

Legile de variație ale rapoartelor $\frac{K_1}{\gamma_1}$ și $\frac{K_1}{\alpha_1}$ funcție de β (pentru $\mu = 0{,}3$) sînt date în graficele 9*a* și 9*b*.

Ținînd seama de expresiile (54), ecuația diferențială (53) se poate scrie sub forma (27), respectiv (28), astfel că problema se tratează în continuare ca la punctul 3.1.

3.7. REZOLVAREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A MIȘCĂRII DE VIBRAȚIE

Ecuația diferențială (28), fiind o ecuație de tip Mathieu, se poate rezolva prin metoda lui Ince [2]. În acest scop se caută o soluție periodică de forma

$$T_{(\nu)} = \sum_{r=0}^{\infty} (A_r \cos r\nu + B_r \sin r\nu). \tag{55}$$

Punînd condiția ca soluția (55) să satisfacă identic ecuația diferențială (28), se obțin relații de recurență între coeficienții A_r și B_r, relații care conțin sau numai coeficienții A_r sau numai coeficienții B_r (pari sau impari). Deci soluția periodică căutată poate lua una dintre următoarele patru forme:

$$\begin{aligned} F_1(\nu) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cos 2r\nu, \\ F_2(\nu) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1} \cos (2r+1)\,\nu, \\ G_1(\nu) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r} \sin 2r\nu, \\ G_2(\nu) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1} \sin (2r+1)\,\nu. \end{aligned} \tag{56}$$

Substituind prima soluție $F_1(\nu)$ în ecuația diferențială (28), se obțin următoarele formule de recurență între coeficienții A_{2r}:

$$\begin{aligned} &pA_0 - qA_2 = 0, \\ &(p-4)\,A_2 - q(2A_0 + A_4) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(p - 4r^2)\,A_{2r} - q(A_{2r-2} + A_{2r+2}) = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Din a doua relație (57) și din următoarele se obține

$$\frac{A_2}{2A_0} = \frac{-q\ |}{|4-p} - \frac{q^2\ |}{|16-p} - \frac{q^2\ |}{|36-p} - \ldots \frac{q^2\ |}{|4r^2-p} - \ldots \tag{58}$$

Fracţia continuă (58) este convergentă, deoarece este satisfăcut criteriul de convergenţă a lui Perron [3].

Condiţia de compatibilitate a sistemului (57) este ca raportul A_2/A_0, exprimat prin fracţia continuă (58), să fie egal cu cel obţinut din prima ecuaţie (57), adică cu p/q. Ecuaţia care rezultă din această egalitate poartă denumirea de ecuaţie caracteristică a funcţiei $F_1(\nu)$.

Pentru restul funcţiilor se procedează în acelaşi fel, aşa încît cele patru ecuaţii caracteristice vor avea expresiile

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{p}{2} - \frac{q^2\ |}{|4-p\ -\ \ldots} \frac{q^2\ |}{|4r^2-p\ -\ \ldots} && \text{pentru } F_1(\nu),\\
0 &= q+1 - \frac{q^2\ |}{|9-p\ -\ \ldots} \frac{q^2\ |}{|(2r+1)^2-p\ -\ \ldots} && \text{pentru } F_2(\nu),\\
0 &= -q+1 - \frac{q^2\ |}{|9-p\ -\ \ldots} \frac{q^2\ |}{|(2r+1)^2-p\ -\ \ldots} && \text{pentru } G_1(\nu),\\
0 &= 4-p - \frac{q^2\ |}{|16-p\ -\ \ldots} \frac{q^2\ |}{|(2r+2)^2-p\ -\ \ldots} && \text{pentru } G_2(\nu).
\end{aligned}
\tag{59}
$$

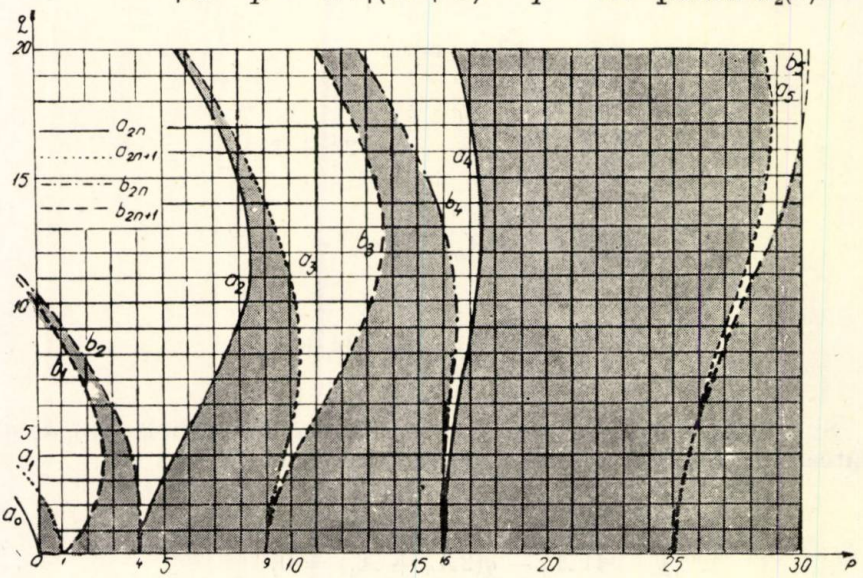


Fig. 10

Fiecare dintre ecuaţiile (59) defineşte în planul (p, q) cîte o curbă transcendentă, formată dintr-o infinitate de ramuri distincte şi fără puncte comune. Aceste curbe, notate cu a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n}, b_{2n+1} $(n = 0, 1,2, 3, \ldots)$, au fost reprezentate în graficul din figura 10.

Se poate demonstra cu uşurinţă că punctele de coordonate (p,q), situate în zonele definite de curbele a_{2n} şi b_{2n}, respectiv a_{2n+1} şi b_{2n+1}, deter-

mină soluții instabile pentru ecuația diferențială (28), în timp ce punctelor situate între curbele a_{2n} și a_{2n+1}, respectiv b_{2n} și b_{2n+1}, le corespund soluții stabile. Deci regiunile de culoare închisă din figura 10 vor reprezenta zonele de stabilitate.

Analizînd graficul reprezentat în figura 10, se constată că pentru valori mici ale parametrului q (respectiv pentru valori mici ale lui S) soluția ecuației diferențiale (28) este întotdeauna stabilă, cu excepția cazului cînd $p = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Pentru această situație, dacă $p_0 = 0$, din a doua expresie (29) se obține

$$\left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2 \simeq p = n^2, \tag{60}$$

de unde se deduce valoarea critică a pulsației Ω :

$$\Omega_c = \frac{2\omega_0}{n}. \tag{61}$$

Dacă $p_0 \neq 0$, valoarea critică a pulsației Ω descrește o dată cu mărirea forței statice p_0.

Se constată că pentru anumite valori ale parametrilor p și q care definesc puncte situate în zonele de stabilitate se obțin valori ale sarcinii critice de flambaj mult superioare celor determinate în cazul solicitărilor statice. Astfel, pentru punctul corespunzător coordonatelor $p = 1,5$ și $q = 8$, relațiile (29), în care se ia $p_0 = 0$, devin

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 &= 1{,}5, \\ \frac{2S}{P_{0c}}\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 &= 8, \end{aligned} \tag{62}$$

de unde

$$S = 10{,}66\ p_{0c} \gg p_{0c}. \tag{63}$$

4. SARCINA VARIABILĂ ESTE DATĂ DE IMPULSURI PERIODICE DE FORMĂ DREPTUNGHIULARĂ

Sarcina periodică $p_{(t)}$ $\left(\text{de perioadă } T = \frac{2\pi}{\Omega}\right)$, a cărei lege de variație în timp este reprezentată grafic în figura 11, are următoarele valori :

$$p_{(t)} = \begin{cases} S \text{ pentru } \begin{cases} -\psi < \Omega t < \psi, \\ 2\pi - \psi < \Omega t < 2\pi + \psi, \end{cases} \\ 0 \text{ pentru } \psi < \Omega t < 2\pi - \psi. \end{cases} \tag{64}$$

Dezvoltînd funcţia $p_{(t)}$ în serie Fourier, care va conţine numai termenii în cosinus ca urmare a faptului că funcţia $p_{(t)}$ este pară, se poate scrie

$$p_{(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\Omega t, \tag{65}$$

unde

$$a_i = \frac{\Omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} F_{(t)}\cos i\Omega t dt = \frac{\Omega}{\pi} S\left[\int_0^{\frac{\psi}{\Omega}} \cos i\Omega t dt + \int_{\frac{2\pi-\psi}{\Omega}}^{\frac{2\pi}{\Omega}} \cos i\Omega t dt\right] = \frac{2S\sin i\psi}{i\pi}. \tag{66}$$

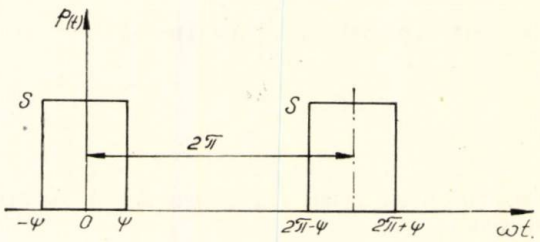


Fig. 11

Pentru $i = 0$ rezultă

$$a_0 = \lim \frac{2S\sin i\psi}{i\pi} = \lim \frac{2S\psi \sin i\psi}{i\psi\pi} = \frac{2S\psi}{\pi}. \tag{67}$$

Funcţia $p_{(t)}$ va avea deci expresia

$$p_{(t)} = \frac{S\psi}{\pi} + \frac{2S}{\pi}\left(\sin\psi\cos\Omega t + \frac{1}{2}\sin 2\psi\cos 2\Omega t + \ldots\right). \tag{68}$$

Dacă ne limităm numai la termenul liber şi la primii doi termeni cuprinşi în paranteză, expresia (7), reprezentînd forţa radială variabilă care solicită placa, se poate scrie sub forma

$$q_{(t)} = p_0 + p_{(t)} = p_0 + \frac{S\psi}{\pi} + \frac{2S\sin\psi}{\pi}\cos\Omega t + \frac{S\sin 2\psi}{\pi}\cos 2\Omega t. \tag{69}$$

Deoarece ecuaţia diferenţială (16), pentru toate tipurile de plăci, se poate scrie sub forma

$$\ddot{T}_{(t)} - \omega_0^2\left(1 - \frac{p_0}{p_{0c}} - \frac{p_{(t)}}{p_{0c}}\right) T_{(t)} = 0, \tag{70}$$

rezultă că, atunci cînd sarcina variabilă $p_{(t)}$ este de forma (68), ecuația diferențială a mișcării de vibrație devine

$$\ddot{T}_{(t)} - \omega_0^2 \left(1 - \frac{p_0 + \frac{S\psi}{\pi}}{p_{0c}} - \frac{2S\sin\psi}{\pi p_{0c}} \cos\Omega t - \frac{S\sin 2\psi}{\pi p_{0c}} \cos 2\Omega t \right) T_{(t)} = 0, \quad (71)$$

unde ω_0 este pulsația oscilațiilor proprii de încovoiere pentru placa nesolicitată, iar p_{0c} sarcina critică de flambaj pentru aceeași placă, determinată în ipoteza unei solicitări statice.

Expresiile lui ω_0 și p_{0c} pentru fiecare tip de placă au fost determinate anterior.

Pentru studierea condițiilor de stabilitate a diferitelor tipuri de plăci circulare solicitate radial de impulsuri periodice dreptunghiulare, este necesar să se rezolve ecuația diferențială (71).

Schimbînd variabila t prin variabila ν și făcînd notațiile

$$\begin{aligned} 2\nu &= \Omega t, \\ a &= \frac{p_0 + \frac{S\psi}{\pi}}{p_{0c}}, \\ b &= -\frac{2S\sin\psi}{\pi p_{0c}}, \\ c &= -\cos\psi, \end{aligned} \quad (72)$$

ecuația diferențială (71) se poate scrie sub forma

$$\ddot{T}_{(\nu)} - \left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2 (1 - a + b\cos 2\nu - bc\cos 4\nu)\, T_{(\nu)} = 0. \quad (73)$$

Se face următoarea schimbare de funcție:

$$T_{(\nu)} = Y_{(\nu)} e^{\frac{-\alpha}{2}\cos 2\nu}, \quad (74)$$

unde

$$\alpha = \frac{2\omega_0}{\Omega}\sqrt{2bc} = \frac{2\omega_0}{\Omega}\sqrt{\frac{2S\sin 2\psi}{\pi p_{0c}}}. \quad (75)$$

Derivînd de două ori funcția (74) și ținînd seama de relația

$$\sin^2 2\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\nu, \quad (76)$$

se obține

$$\ddot{T}_{(\nu)} = \left(\ddot{Y}_{(\nu)} + \dot{Y}_{(\nu)} 2\alpha \sin 2\nu + Y_{(\nu)} \frac{\alpha}{2} (\alpha + 4\cos 2\nu - \alpha \cos 4\nu)\right] e^{-\frac{\alpha}{2}\cos 2\nu}. \quad (77)$$

Substituind expresiile (74) și (77) în ecuația diferențială (73) și ținînd seama de ultimele trei notații (72) și de relația (75), se obține

$$\ddot{Y}_{(\nu)} + \dot{Y}_{(\nu)} \xi \sin 2\nu + Y_{(\nu)} (\eta - p\xi \cos 2\nu) = 0, \quad (78)$$

unde

$$\xi = \frac{4\omega_0}{\Omega} \sqrt{\frac{2\sin 2\psi}{\pi p_{0c}}},$$

$$\eta = \left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2 \left(\frac{S \sin 2\psi}{\pi p_{0c}} + \frac{p_0}{p_{0c}} + \frac{S\psi}{\pi p_{0c}} - 1\right), \quad (79)$$

$$p = \frac{\omega_0}{\Omega} \sqrt{\frac{S \operatorname{tg}\psi}{\pi p_{0c}}} - 1.$$

Expresia (78) este o ecuație de tip Whittaker, pentru a cărei rezolvare se caută o soluție de forma

$$Y_{(\nu)} = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \cos r\nu + \sum_{r=0}^{\infty} B_r \sin r\nu. \quad (80)$$

Punînd condiția ca soluția (80) să satisfacă identic ecuația diferențială (78), se obțin relații de recurențe simple între coeficienții A_r și B_r. Aceste ecuații conțin fie numai coeficienții A_r (pari sau impari), fie numai coeficienții B_r (pari sau impari). Deci, soluția periodică căutată poate lua una dintre următoarele patru forme:

$$F_1(\nu) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cos 2r\nu,$$

$$F_2(\nu) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1} \cos(2r+1)\nu,$$

$$G_1(\nu) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r} \sin 2r\nu, \quad (81)$$

$$G_2(\nu) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1} \sin(2r+1)\nu.$$

În cazul primei soluţii (soluţia $F_1(\nu)$ pară şi de perioadă π), punîndu-se condiţia ca ea să verifice identic ecuaţia diferenţială (78), se obţine următoarele formule de recurenţă între coeficienţii A_{2r}:

$$\begin{aligned}
&\eta A_0 - \frac{\xi}{2}(p+2)A_2 = 0,\\
&\xi p A_0 - (\eta - 4)A_2 + \frac{\xi}{2}(p+4)A_4 = 0,\\
&\frac{\xi}{2}(p-2)A_2 - (\eta - 16)A_4 + \frac{\xi}{2}(p+6)A_6 = 0, \qquad (82)\\
&\frac{\xi}{2}(p-4)A_4 - (\eta - 36)A_6 + \frac{\xi}{2}(p+8)A_8 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\xi}{2}(p-2r+2)A_{2r-2} - (\eta - 4r^2)A_{2r} + \frac{\xi}{2}(p+2r+2)A_{2r+2} = 0.
\end{aligned}$$

Fiecare dintre aceste relaţii, începînd cu relaţia a doua, se divizează prin coeficientul de indice median, adică prin A_{2r}, obţinîndu-se astfel în mod succesiv următoarele expresii pentru raportul A_{2r}/A_{2r-2}:

$$\begin{aligned}
\frac{A_2}{A_0} &= \frac{p\xi}{\eta - 4 - \left(\frac{p}{2}+2\right)\xi\frac{A_4}{A_2}},\\
\frac{A_4}{A_2} &= \frac{\left(\frac{p}{2}-1\right)\xi}{\eta - 16 - \left(\frac{p}{2}+3\right)\xi\frac{A_6}{A_4}}, \qquad (83)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{A_{2r}}{A_{2r-2}} &= \frac{\left(\frac{p}{2}-r+1\right)\xi}{\eta - 4r^2 - \left(\frac{p}{2}+r+1\right)\xi\frac{A_{2r+2}}{A_{2r}}}.
\end{aligned}$$

Deci raportul A_2/A_0 se poate scrie sub forma unei fracţii continue cu un număr nelimitat de termeni, care are expresia

$$\frac{A_2}{A_0} = \cfrac{p\xi}{\eta - 4 - \cfrac{\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{p}{2}+2\right)\xi^2}{\eta - 16 - \cfrac{\left(\frac{p}{2}-2\right)\left(\frac{p}{2}+3\right)\xi^2}{\eta - 36 - \cdots - \cfrac{\left(\frac{p}{2}-r+1\right)\left(\frac{p}{2}+r\right)\xi^2}{\eta - 4r^2}}}} \qquad (84)$$

Conform teoremei lui Perron [3], o fracție continuă nelimitată de forma

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots \frac{a_r|}{|b_r}, \tag{85}$$

unde a_r și b_r sînt polinoame în r, este convergentă dacă gradul polinoamelor a_r este inferior dublului gradului polinoamelor b_r.

În cazul fracției continue (84), polinoamele a_r și b_r sînt de gradul doi în raport cu r și, ca atare, polinoamele a_r au gradul inferior dublului gradului polinoamelor b_r. Deci funcția continuă (84) este convergentă.

Condiția de compatibilitate a sistemului (82) este ca valoarea raportului A_2/A_0, dat de expresia (84), să fie egal cu a celui dedus din prima ecuație (82), adică cu $\eta \left[\left(\frac{p}{2}+1\right)\xi\right]^{-1}$.

Aplicînd această condiție, se obține

$$\eta = \frac{p\left(\frac{p}{2}-1\right)\xi^2|}{|\ \eta-4} - \frac{\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{p}{2}+2\right)\xi^2|}{|\ \eta-16} - \ldots \frac{\left(\frac{p}{2}-r+1\right)\left(\frac{p}{2}+r\right)\xi^2|}{|\ \eta-4r^2}, \tag{86}$$

care este condiția necesară pentru ca funcția $F_1(\nu)$ să fie soluție a ecuației diferențiale (78).

Ecuația (86) poartă denumirea de ecuație caracteristică a funcției $F_1(\nu)$.

Procedînd în același mod, se obține pentru restul funcțiilor $F_2(\nu)$, $G_1(\nu)$ și $G_2(\nu)$ următoarele ecuații caracteristice:

— pentru funcția $F_2(\nu)$:

$$\eta = 1 + \frac{(p+1)\xi}{2} + \frac{\frac{1}{2}(p-1)(p+3)\xi^2|}{|\ 2(\eta-9)} - \ldots \frac{(p-2r+1)(p+2r+1)\xi^2|}{|\ 2[\eta-(2r+1)^2]}; \tag{87}$$

— pentru funcția $G_1(\nu)$:

$$\eta = 4 + \frac{\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{p}{2}+2\right)\xi^2|}{|\ \eta-16} - \ldots \frac{\left(\frac{p}{2}-r\right)\left(\frac{p}{2}+r+1\right)\xi^2|}{|\ \eta-4(r+1)^2}; \tag{88}$$

— pentru funcția $G_2(\nu)$:

$$\eta = 1 - \frac{(p+1)\xi}{2} + \frac{\frac{1}{2}(p-1)(p+3)\xi^2|}{|\ 2(\eta-9)} - \ldots \frac{(p-2r+1)(p+2r+1)\xi^2|}{|\ 2[\eta-(2r+1)^2]}. \tag{89}$$

Pentru o valoare dată a lui p, fiecare dintre ecuațiile (86)—(89) definește în planul (η, ξ) cîte o curbă transcendentă, formată dintr-o infinitate de ramuri.

Curbele generate de ecuația (86) au fost notate prin a^i_{2n} (unde $n = 1, 2, 3, \ldots$, iar i reprezintă valoarea parametrului p), cele generate de ecuația (87) au fost notate prin a^i_{an+1}, în timp ce pentru curbele generate de ecuațiile (88) și (89) s-au adoptat notațiile b^i_{2n}, respectiv b^i_{2n+1}.

Trasarea acestor curbe se face prin puncte, iar coordonatele punctelor se determină prin aproximații succesive. De exemplu, în cazul curbelor a^i_{2n} generate de ecuația (86), se observă că acestea intersectează axa η în punctele de coordonate $\xi = 0$ și $\eta = 4n^2$ (unde $n = 1, 2, 3, \ldots$), indiferent de valoarea parametrului p. Deci punctele care au coordonatele (0 ; 4), (0 ; 16), (0 ; 36) ... (0 ; $4n^2$) se vor găsi pe curbele a^i_2, respectiv a^i_4, a^i_6, ... a^i_{2n}.

Parametrul p luînd diferite valori (de exemplu 1, 2, 3, ..., i), rezultă că prin punctul de coordonate $\xi = 0$ și $\eta = 4$ vor trece curbele a^1_2, a^2_2, a^3_2, ... a^i_2, prin punctul de coordonate $\xi = 0$ și $\eta = 16$ curbele a^1_4, a^2_4, a^3_4, ..., a^i_4 etc.

Trasarea curbelor necesită însă determinarea coordonatelor și pentru alte puncte.

Procedeul folosit pentru găsirea celorlalte puncte fiind același pentru toate curbele ne vom referi numai la curba a^1_2.

Se constată că pentru $\xi = 0$ un punct de pe curba a^1_2 are abscisa $\eta = 4$. Deci pentru o valoare a lui ξ apropiată de zero (de exemplu pentru $\xi = 0{,}1$) va corespunde pentru η o valoare apropiată de 4. Fie această valoare 4,40, care se introduce în membrul al doilea al ecuației (86). În acest caz va rezulta pentru η din primul membru al acestei ecuații o valoare care poate fi diferită de 4,40, de exemplu 4,45. Se introduce din nou valoarea $\eta = 4{,}45$ în membrul al doilea al ecuației, rezultînd pentru η din primul membru o altă valoare. Dacă această valoare este egală cu 4,45, rezultă că noul punct de pe curba a^1_2 va avea coordonatele $\xi = 0{,}1$ și $\eta = 4{,}45$. Se ia apoi pentru ξ o altă valoare, de exemplu 0,5, și se procedează ca mai sus.

În același mod se găsesc și punctele pentru restul curbelor.

Datorită rapidei convergențe a fracțiilor continue care definesc aceste curbe, se obține o precizie satisfăcătoare, luîndu-se în calcule numai un număr limitat de termeni.

De remarcat faptul că, dacă $p = 2(r - 1)$, primul termen al ecuației generale (82) este nul. În acest caz, problema poate fi tratată în două feluri, și anume :

— luînd coeficientul $A_{2r} = 0$, atunci și coeficientul $A_{2r+2} = 0$ și, în consecință, toți coeficienții A care au indicele superior lui $2r$ vor fi de asemenea nuli. În acest caz, ecuația caracteristică (care se obține prin anularea determinantului sistemului format din primele $r - 1$ ecuații) va fi o fracție continuă finită ;

— pentru cazul general cînd A_{2r} este diferit de zero, condiția de compatibilitate va fi dată de o fracție continuă finită ce se obține din primele $r - 1$ ecuații ca în cazul precedent, precum și dintr-o fracție continuă nelimitată care se determină după metoda generală din restul ecuațiilor (ecuația r avînd numai doi termeni). Aceeași remarcă se poate face

şi pentru restul ecuaţiilor care descriu curbele a^{i}_{2n+1}, b^{i}_{2n} şi b^{i}_{2n+1} atunci cînd $p = 2r - 1$, respectiv $p = 2r$ şi $p = 2r - 1$.

În figura 12 s-au reprezentat grafic (pentru $\eta > 0$) ecuaţiile caracteristice (86)—(89), pentru $p = -1$ obţinîndu-se curbele a^{-1}_{2n}, a^{-1}_{2n+1}, b^{-1}_{2n} şi b^{-1}_{2n+1}.

Se constată că (pentru $p = -1$) ecuaţia caracteristică (87) este identică cu ecuaţia caracteristică (89) şi, ca atare, curbele a^{-1}_{2n+1} şi b^{-1}_{2n+1}

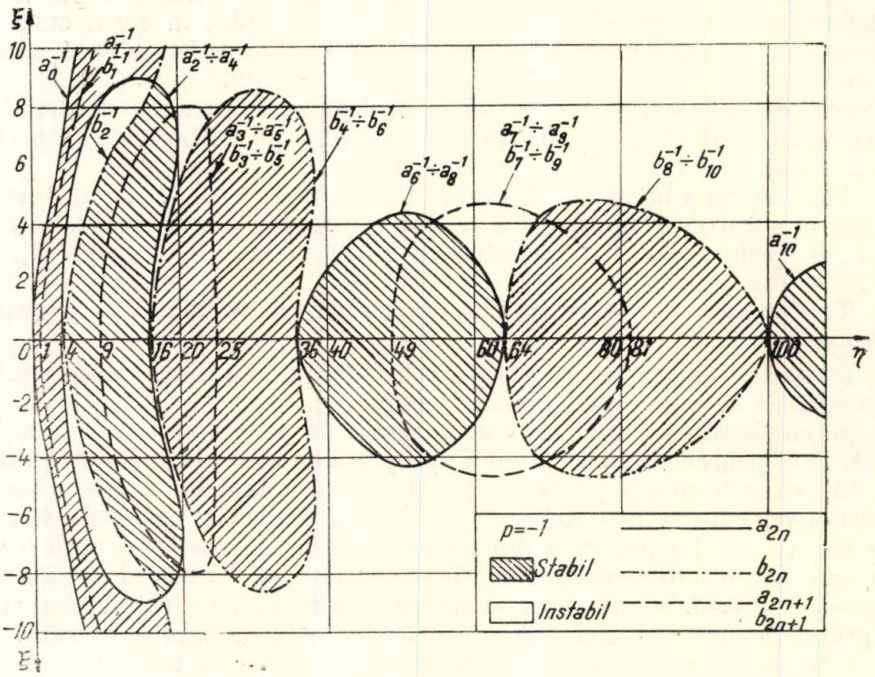


Fig. 12

se suprapun. Deci, pentru $p = -1$, soluţiile $F_2(\nu)$ şi $G_2(\nu)$ coexistă, în timp ce soluţiile $F_1(\nu)$ şi $G_1(\nu)$ sînt independente.

Din analiza graficului reprezentat în figura 12 se remarcă faptul că, în afară de ramurile a_0^{-1}, a_1^{-1} (identică cu b_1^{-1}) şi b_2^{-1} ale curbelor caracteristice, fiecare ramură care taie axa η într-un punct de abscisă n^2 (n fiind par sau impar) se continuă cu ramura următoare, corespunzătoare punctului de abscisă n^2, de valoare (pară sau impară) imediat superioară, formîndu-se astfel o infinitate de bucle închise.

Pentru studiul stabilităţii soluţiilor ecuaţiei diferenţiale (78) s-a aplicat cunoscuta teorie a lui Floquet, care permite scrierea soluţiei generale sub forma [2]

$$F_{(\nu)} = C_1 e^{\mu\nu}\varphi_{(\nu)} + C_2\, e^{-\mu\nu}\varphi(-\nu), \tag{90}$$

unde C_1 şi C_2 sînt constante arbitrare, iar μ exponentul caracteristic.

După cum se ştie, cînd μ este un număr real pozitiv, primul termen din ecuaţia (90) tinde către infinit pentru $\nu \to \infty$ şi, ca atare, soluţia ge-

nerală este nestabilă. Dacă μ este negativ, al doilea termen este nelimitat și soluția generală este nestabilă.

În cazul că $\mu = \gamma + i\delta$, iar $\delta = 0$, soluția este de asemenea nestabilă. Cînd $\mu = i\delta$, iar δ nu este un număr întreg, relația (90) reprezintă soluția stabilă. Dacă δ este o fracție rațională $\frac{r}{s}$, unde r și s sînt numere prime, ambii termeni ai ecuației (90) sînt periodici, cu perioada $2\pi s$. Cînd δ este irațional, soluția este oscilatorie finită, dar aperiodică. Deci studiul problemei stabilității sau a instabilității soluțiilor ecuațiilor diferențiale (78) se reduce la calculul exponentului caracteristic.

Se poate arăta cu ușurință că, pentru o valoare dată lui p, exponentul caracteristic este un număr real (pozitiv sau negativ) dacă parametrii η și ξ care intervin în ecuația diferențială (78) definesc în planul (η, ξ) un punct situat între două curbe caracteristice care taie axa η în același punct de coordonate $(0, n^2)$. Deci zonele situate între aceste curbe reprezintă zone de instabilitate a soluțiilor.

Dacă punctele definite de parametrii η și ξ se găsesc pe una dintre ramurile curbelor caracteristice, soluțiile ecuației diferențiale (78) vor fi periodice. Restul punctelor din planul (η, ξ) vor defini soluții stabile. Aceste zone (fig. 12) au fost haşurate. În figurile 13 și 14 s-au reprezentat grafic curbele caracteristice pentru cazul cînd $p = 1$, respectiv $p = 3$.

Se constată că pentru valori mici ale lui ξ (respectiv pentru valori mici ale lui S sau ale lui ψ ori pentru valori mari ale lui Ω) soluția ecuației diferențiale (78) este întotdeauna stabilă, cu excepția cazului cînd $\eta = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, indiferent de valoarea lui p.

În acest caz, din a doua relație (79) se deduce expresia pulsației critice a forței variabile prin egalarea lui η cu n^2:

$$\Omega_c = \frac{2\omega_0}{n}\sqrt{\frac{S}{p_{0c}}\left(\frac{\sin 2\psi}{\pi} + \frac{\psi}{\pi} + \frac{p_0}{S} - \frac{p_{0c}}{S}\right)}. \tag{91}$$

În cazul cînd $p_0 = 0$, iar S are o acțiune statică, flambajul se produce în mod evident cînd este satisfăcută egalitatea

$$S = p_{0c}. \tag{92}$$

Dacă parametrii plăcii și ai forței variabile se aleg în așa fel încît un punct situat în zona de stabilitate să aibă coordonatele $\eta = 0{,}1$ și $\xi = 7$ (pentru $p = 3$), ecuațiile (79), în care se ia $p_0 = 0$, devin

$$\begin{aligned} 7 &= \frac{4\omega_0}{\Omega}\sqrt{\frac{2\sin 2\psi}{\pi p_{0c}}}, \\ 0{,}1 &= \left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2\left(\frac{S\sin 2\psi}{\pi p_{0c}} + \frac{S\psi}{\pi p_{0c}} - 1\right), \\ 3 &= \frac{\omega_0}{\Omega}\sqrt{\frac{S\operatorname{tg}\psi}{\pi p_{0c}}} - 1. \end{aligned} \tag{93}$$

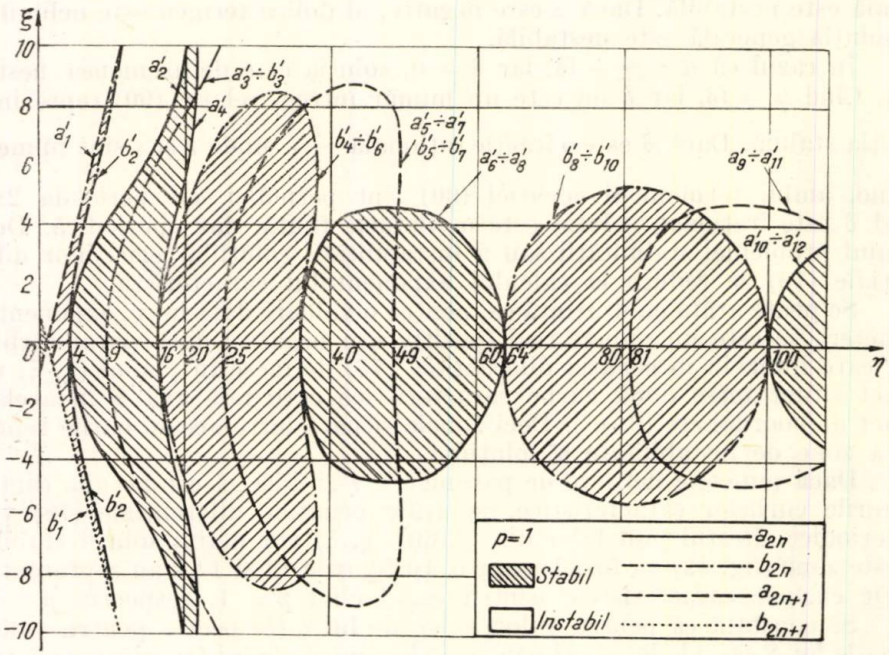

ξ
η
p=1
Stabil
Instabil
a_{2n}
b_{2n}
a_{2n+1}
b_{2n+1}
a'_1
b'_1
a'_2
b'_2
$a'_3 \div b'_3$
a'_4
$b'_4 \div b'_6$
$a'_5 \div a'_7$
$b'_5 \div b'_7$
$a'_6 \div a'_8$
$b'_8 \div b'_{10}$
$a'_9 \div a'_{11}$
$a'_{10} \div a'_{12}$

Fig. 13

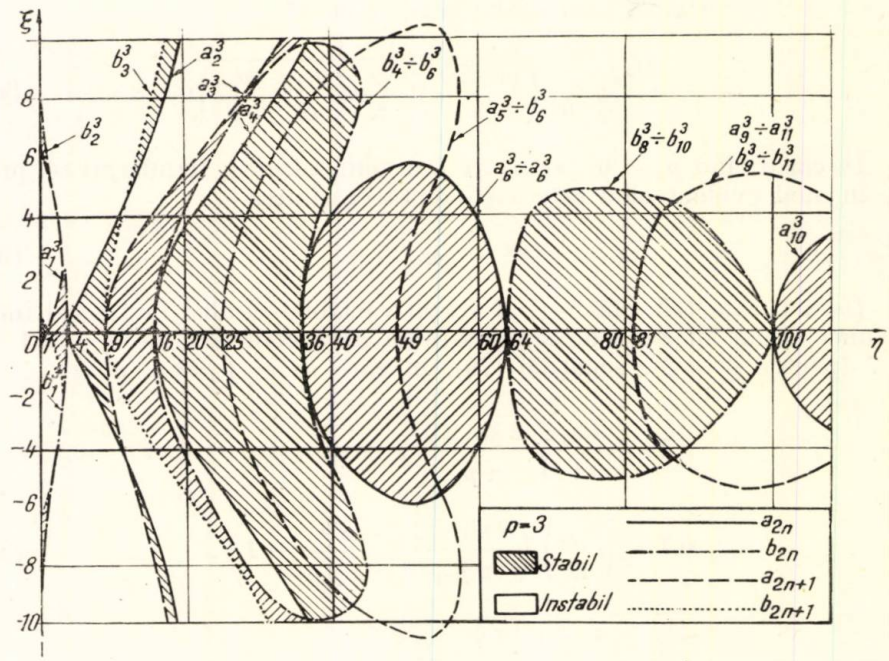

ξ
η
p=3
Stabil
Instabil
a_{2n}
b_{2n}
a_{2n+1}
b_{2n+1}
b_3^3
a_2^3
a_3^3
a_4^3
$b_4^3 \div b_6^3$
$a_5^3 \div b_6^3$
$a_6^3 \div a_8^3$
$b_8^3 \div b_{10}^3$
$a_9^3 \div a_{11}^3$
$b_9^3 \div b_{11}^3$
a_{10}^3
b_2^3
a_1^3
b_1^3

Fig. 14

Substituind în a doua relaţie (93) expresiile $\frac{S \sin 2\psi}{\pi p_{0c}}$ şi $\frac{\omega_0}{\Omega}$, prima dedusă din prima relaţie (93), iar a doua din ultima relaţie (93), se obţine

$$S = \frac{64 \pi p_{0c}}{6{,}025 \operatorname{tg} \psi + 64 \psi} . \tag{94}$$

Pentru ψ egal cu $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ şi $\frac{\pi}{6}$ se obţin următoarele valori pentru S conform relaţiei (94):

$$\begin{aligned} S &= 2{,}60\, p_{0c} > p_{0c}, \\ S &= 3{,}60\, p_{0c} > p_{0c}, \\ S &= 5{,}05\, p_{0c} > p_{0c}. \end{aligned} \tag{95}$$

Deci este posibil să se evite apariţia fenomenului de flambaj pentru valori ale sarcinii variabile superioare sarcinii critice de flambaj, dedusă pentru cazul solicitării statice.

De remarcat faptul că durata impulsului are o influenţă hotărîtoare asupra valorii dinamice a sarcinii critice de flambaj.

5. CONCLUZII

a) Ecuaţiile diferenţiale care descriu mişcarea de vibraţie pentru plăcile circulare acţionate de sarcini radiale variabile periodic sînt de tip Mathieu dacă solicitarea este provocată de o mişcare oscilatorie armonică sau de tip Whittaker în cazul solicitării sub formă de impulsuri.

b) Ambele tipuri de ecuaţii permit efectuarea unei analize complete, a fenomenului de stabilitate şi de instabilitate dinamică a plăcilor circulare iar prin particularizare conduc la determinarea sarcinii critice de flambaj pentru cazul solicitării statice, precum şi a pulsaţiilor oscilaţiilor proprii de încovoiere.

c) Între curbele caracteristice care determină domeniile de stabilitate dinamică date de ecuaţiile Mathieu şi de ecuaţiile Whittaker există deosebiri esenţiale. Astfel, în cazul ecuaţiilor Mathieu, curbele caracteristice sînt formate din ramuri distincte şi fără puncte comune, în timp ce ecuaţiile Whittaker furnizează curbe caracteristice, la care unele ramuri se suprapun, altele se intersectează, iar majoritatea se continuă cu ramurile următoare, formînd bucle închise.

Aceasta arată că fenomenul descris de ecuaţiile Whittaker este mai complex decît cel descris de ecuaţiile Mathieu.

d) Se constată că pentru anumite valori ale raportului dintre pulsaţia oscilaţiilor proprii de încovoiere şi pulsaţia sarcinilor variabile au loc vibraţii violente chiar pentru valori mici ale sarcinii exterioare, în timp ce pentru alte valori ale aceluiaşi raport pierderea stabilităţii are loc pentru valori ale sarcinilor exterioare, care pot fi mult mai mari decît sarcina critică de flambaj dedusă din condiţiile unei solicitări statice.

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Beleaev, N. M., *Ustoicivost prismaticeskih sterjnei pod deistviem peremennîh prodolnîh sil*, în *Injenernie soorujenia i stroitelnaia mehanika*, IZD—VO, Pyt. 1924.
2. Cambell, R., *Theorie générale de l'équation de Mathieu*, Paris, Masson & Cie 1955.
3. Perron, O., *Die Lehre von den Ketenbrüche*, Leipzig. 1929.
4. Popescu, N. D., *Determinarea frecvenței vibrațiilor proprii la bare, folosind o nouă formă a metodei energetice*, Standardizarea, *2* (1965).
5. — *Stabilitatea dinamică a plăcilor subțiri utilizate la construcția podurilor, navelor și avioanelor*, Congresul internațional de comunicații, Genova (Italia), 1968.
6. Timoshenko, S. P., *Theory of Elastic Stability*, New York, McGraw-Hill, 1961.

CONSIDERAȚII DE MECANICĂ ASUPRA SAPELOR CU CONURI PENTRU FORAJ. I

de ȘT. S. MIHĂIESCU
Laureat al premiului de Stat
Institutul de fizică atomică

Forțele de frecare cu alunecare care se dezvoltă pe linia de contact a unui con oarecare al sapei cu terenul, în timpul forajului, au contribuție importantă în dislocarea acestuia. Considerînd practic ca sistem mecanic conservativ un con de rotație care execută o mișcare de precesie regulată, suprafața sa exterioară tîrîndu-se cu frecare pe o suprafață adecvată, se scrie minimul lucrului mecanic total executat de forțele de frecare. Se stabilește că acest lucru mecanic depinde de elementele geometrice ale conului, de viteza de rotație a sapei din care face parte conul, de apăsarea acestuia pe talpa găurii și de momentele de frecare din axul său.
Rezultatele obținute teoretic sînt verificate de uzura conurilor sapelor care au lucrat, sînt în întrebuințare curentă în proiectarea sapelor cu conuri pentru foraj și concordă cu parametrii de foraj.

Conurile unei sape cu conuri avînd aceeași poziție față de axa de rotație a sapei și conturul exterior și interior identice va fi suficient să se studieze din punct de vedere mecanic efectele produse de mișcarea unui con oarecare.

În timpul forajului, pe conturul exterior al conului se dezvoltă forțe de frecare de alunecare, forțe de ciocnire și fenomene de frecare de rostogolire.

În sfărîmarea terenului, rol predominant îl au primele două forțe.

1°. Se consideră un trunchi de con de rotație făcînd parte dintr-un con de rotație cu vîrful V și semiunghiul la vîrf β. Axa trunchiului de con execută o mișcare de precesie regulată în jurul unei axe verticale, care este axa de rotație a sapei. În timpul acestei mișcări, trunchiul de con rămîne în mod continuu tangent în lungul generatoarei sale unei suprafețe (S) (talpa găurii) pe care este apăsat și se rostogolește (fig. 1). Pentru început se admit următoarele :

— suprafețele în contact sînt netede și rigide ;

— nu se ține seama deocamdată de frecările din axa trunchiului de con ;

— presiunea de contact este constantă în lungul liniei de contact.

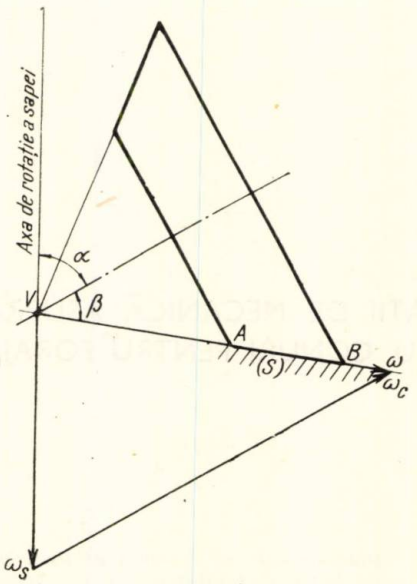


Fig. 1

1.1. Se consideră cazul cînd axa de rotație a sapei trece prin vîrful V al conului. Axa instantanee de rotație a mișcării este generatoarea de contact dintre aceste suprafețe. Se notează :

α — unghiul pe care axa de rotație a sapei îl face cu axa trunchiului de con;

ω_s — viteza de rotație a sapei, avînd valoare constantă, reprezentată printr-un vector rotație dirijat după axa de rotație a acesteia și al cărui sens corespunde cu sensul de rotație al sapei;

ω_c — viteza de rotație a trunchiului de con, reprezentată printr-un vector rotație, dirijat după axa de rotație a acestuia;

ω — viteza de rotație rezultantă, reprezentată printr-un vector rotație situat pe axa instantanee de rotație a mișcării;

ω_s fiind dat și avînd extremitatea în V, pentru a se determina ω_c și ω, ale căror direcții sînt cunoscute, prin cealaltă extremitate a lui ω_s se duce o paralelă la axa trunchiului de con. Intersecția acestei paralele cu generatoarea trunchiului de con determină triunghiul vitezelor de rotație care intervin în mișcare. Rezultă

$$\omega_c = \omega_s \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}, \qquad (1)$$

$$\omega = \omega_s \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Axoida fixă a mişcării este suprafaţa (S), iar axoida mobilă este conul din care face parte trunchiul de con.

1.2. Se consideră că axa de rotaţie a sapei intersectează axa trunchiului de con într-un punct O diferit de vîrful V (fig. 2). În acest caz intervin forţe de frecare la alunecare între suprafeţele în contact. Punctul O, situat la intersecţia axei de rotaţie a sapei cu axa de rotaţie a trunchiului de con, are, evident, viteza de rotaţie nulă. El aparţine deci axei instantanee de rotaţie a mişcării.

Se duce prin punctul O o dreaptă care taie într-un punct oarecare P linia de contact AB. În baza ipotezelor admise, forţa de frecare în lungul liniei de contact AB are o valoare constantă, astfel cum este indicat în proiecţia orizontală din figura 2. Se notează:

φ — unghiul pe care dreapta OP îl face cu axa de rotaţie a trunchiului de con;

f — forţa de frecare pe unitatea de lungime AB, avînd direcţie perpendiculară pe AB;

k_0, k_1, k_2 — distanţele de la vîrful V, respectiv la punctul O şi bazele trunchiului de con;

ω_s, ω_c, ω — vitezele de rotaţie respectiv ale sapei, trunchiului de con şi rezultantei acestora, constante ca mărime şi dirijate ca în cazul precedent.

Pentru a se determina poziţia axei instantanee de rotaţie a mişcării, respectiv unghiul φ, se procedează în modul următor: Se stabileşte lucrul mecanic total al forţelor de frecare în lungul liniei de contact AB. Lucrul mecanic elementar $\mathrm{d}\mathcal{L}$, efectuat pe secundă de forţele de frecare de pe un element $\mathrm{d}x$ situat pe generatoarea de contact la distanţa x de punctul P situat în porţiunea PA, spre exemplu, va fi

$$\mathrm{d}\mathcal{L} = v.f.\,\mathrm{d}x,$$

unde v este viteza elementului $\mathrm{d}x$.

Notînd cu h distanţa elementului $\mathrm{d}x$ la axa instantanee de rotaţie, avem

$$v = \omega.h.$$

Din figură rezultă

$$h = x \sin(\varphi - \beta),$$

iar din triunghiul vitezelor

$$\omega = \omega_s \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}.$$

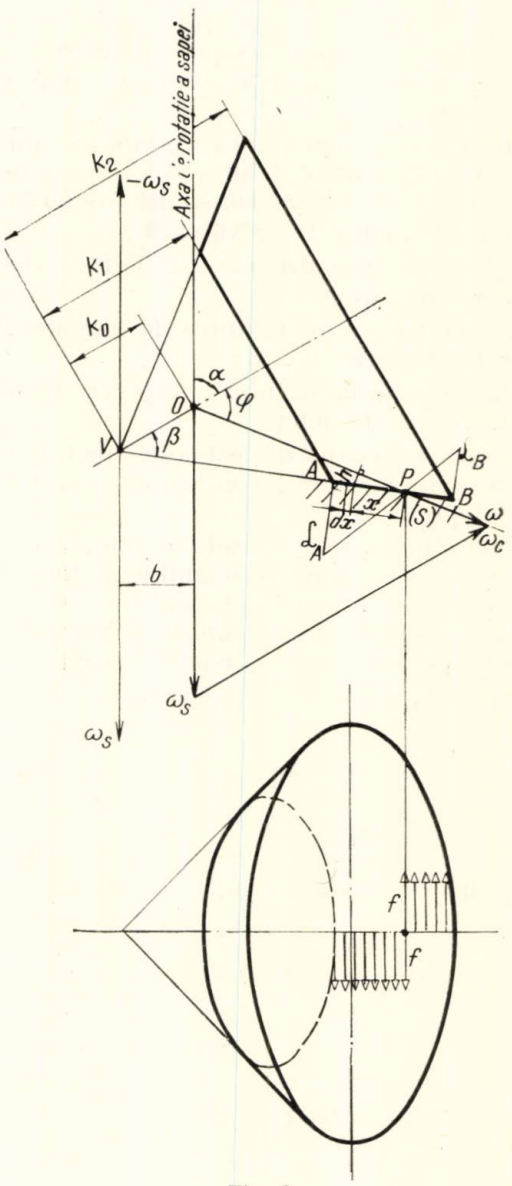

Axa de rotatie a sapei
k_2
$-\omega_s$
k_1
k_0
α
φ
O
V
β
A
P
B
$\mathcal{L}_B$
$\mathcal{L}_A$
x
dx
(S)
ω
ω_c
b
ω_s
ω_s
f
f

Fig. 2

Introducînd în expresia lucrului mecanic*) elementar, se obține

$$d\mathcal{L} = f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi} x \cdot dx.$$

Lucrul mecanic al forțelor de frecare pe intervalul PA va fi

$$\mathcal{L}_{\overline{PA}} = \int_0^{\overline{PA}} f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi} x \cdot dx = f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi} \cdot \frac{\overline{PA}^2}{2}.$$

Din figura 2 rezultă

$$\overline{PA} = \overline{VP} - \overline{VA} = k_0 \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\beta)} - \frac{k_1}{\cos\beta}. \tag{2}$$

Înlocuind în expresia lucrului mecanic, se obține

$$\mathcal{L}_{\overline{PA}} = \frac{1}{2} f\omega_s \sin\alpha \left[k_0^2 \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\beta)} + \frac{k_1^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi} - 2\frac{k_0 k_1}{\cos\beta} \right].$$

Procedînd în mod analog pentru intervalul PB, se obține

$$\mathcal{L}_{\overline{PB}} = \frac{1}{2} f\omega_s \sin\alpha \left[k_0^2 \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\beta)} + \frac{k_2^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi} - 2\frac{k_0 k_2}{\cos\beta} \right]. \tag{3}$$

Lucrul mecanic total al forțelor de frecare pe linia de contact AB va fi

$$\mathcal{L}_{\overline{AB}} = \mathcal{L}_{\overline{PA}} + \mathcal{L}_{\overline{PB}} = \frac{1}{2} f\omega_s \sin\alpha \left[\frac{k_1^2+k_2^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi} + \right.$$
$$\left. + 2k_0^2 \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\beta)} - 2\frac{k_0}{\cos\beta}(k_1+k_2) \right]. \tag{4}$$

Sistemul considerat fiind practic conservativ, lucrul mecanic total astfel determinat este minim.

Derivînd în raport cu φ expresia (4), se obține

$$\mathcal{L}'_{AB} = \frac{1}{2} f \cdot \omega_s \sin\alpha \cdot \sin\beta \left[\frac{k_1^2+k_2^2}{\cos^2\beta} \frac{1}{\sin^2\varphi} - 2\frac{k_0^2}{\sin^2(\varphi-\beta)} \right]. \tag{5}$$

*) În cele ce urmează se va scrie numai lucru mecanic în loc de lucru mecanic pe secundă (subînțelegînd pe secundă). Pentru sape este mai adecvată expresia lucru mecanic necesar abraziunii în loc de putere necesară abraziunii.

Prin egalarea cu zero a acestei expresii se obţine

$$\operatorname{ctg}\varphi = \left(1 \pm \frac{k_0\sqrt{2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\right) \operatorname{ctg}\beta. \tag{6}$$

Acelaşi rezultat se va obţine scriind că suma momentelor forţelor de frecare în raport cu vîrful V este zero. Se obţine

$$f \cdot \overline{PA}\,\frac{\overline{VA} + \overline{VP}}{2} - f \cdot \overline{PB}\,\frac{\overline{VB} + \overline{VP}}{2} = 0.$$

Simplificînd şi introducînd valorile obţinute mai sus, se obţine

$$\frac{\sin^2(\varphi - \beta)}{\sin^2\varphi \,.\, \cos^2\beta} = \frac{2k_0^2}{k_1^2 + k_2^2},$$

expresie din care se deduce valoarea lui ctg φ, deja obţinută.

Pentru a se vedea care din semnele expresiei (6) corespund valorii minime a lui $\mathcal{L}_{AB}$, se derivează expresia (5) şi se ţine seama de expresia (6). Se obţine

$$\mathcal{L}''_{AB} = -f\omega_s'(k_1^2 + k_2^2)\,\frac{\sin\alpha \sin^2\beta}{\cos^3\beta \sin^4\varphi}\left(\pm\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_0\sqrt{2}}\right). \tag{7}$$

În această expresie, toţi factorii din faţa ultimei paranteze sînt pozitivi. Într-adevăr :

— $\sin\alpha > 0$ deoarece pentru sapele uzuale $23° < \alpha < 28°45'$;
— $\cos^3\beta > 0$ deoarece pentru sapele uzuale $40° < \beta < 45°$;
— $\sin^4\varphi > 0$ oricare ar fi φ.

Ţinînd seama de acestea, se observă că, dacă în ultima paranteză a expresiei (7) se ia semnul minus, avem $\mathcal{L}''_{AB} > 0$, ceea ce ar corespunde unui minim al expresiei (4). Deoarece expresia din ultima paranteză a expresiei (7) intră în componenţa expresiei (6), rezultă că valoarea unghiului φ, care corespunde lucrului mecanic minim şi deci poziţiei axei instantanee de rotaţie a mişcării în cazul considerat este dată de expresia

$$\operatorname{ctg}\varphi = \left(1 - \frac{k_0\sqrt{2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\right) \operatorname{ctg}\beta. \tag{8}$$

Pentru a se face comparaţie între cazul 1.1 al mişcării, cînd axa de rotaţie a sapei trece prin V, şi cazul cînd această axă intersectează axa de rotaţie a trunchiului de con într-un punct O diferit de V, se procedează astfel : se introduc în vîrful V doi vectori-rotaţie ω_s şi $-\omega_s$ (fig. 2). Evident că aceasta nu schimbă datele iniţiale ale problemei. Mişcările de rotaţie definite de vectorii ω_s care trece prin O, şi ω_s, care trece prin V, au ca rezultantă o mişcare de translaţie, avînd direcţie perpendiculară pe planul

definit de acești doi vectori și viteza $b\omega_s$, unde b este distanța dintre suporții acestor vectori. Mișcarea de rotație definită de vectorul-rotație ω_s, care trece prin V, produce mișcarea de rostogolire a trunchiului de con pe suprafața (S). Rezultă că mișcarea trunchiului de con în cazul cînd axa de rotație a sapei trece prin O poate fi considerată ca rezultînd dintr-o mișcare de rostogolire a trunchiului de con (cazul 1.1 tratat precedent) și o mișcare de translație avînd direcția perpendiculară pe planul definit de axele de rotație ale sapei și trunchiului de con. Punctul P este locul de pe generatoarea de contact a trunchiului de con, unde viteza periferică a acestuia este egală și de sens contrar vitezei mișcării de translație.

Poziția punctului P se poate determina geometric în modul următor : Din figura 2 rezultă

$$VP = k_0 \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi - \beta)}.$$

Ținînd seama de expresia (8), rezultă

$$VP = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\sqrt{2} \cdot \cos \beta}.$$

De semnalat că în această expresie lipsește factorul k_0. Rezultă că pentru un trunchi de con dat și ipotezele admise, poziția punctului P este fixă și independentă de O. Expresia de mai sus se poate scrie

$$VP = \sqrt{\left(\frac{\frac{k_1}{\cos \beta} + \frac{k_2}{\cos \beta}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\frac{k_2}{\cos \beta} - \frac{k_1}{\cos \beta}}{2} \right)^2}.$$

Din figura 2 se observă că expresia

$$\frac{\frac{k_1}{\cos \beta} + \frac{k_2}{\cos \beta}}{2}$$

reprezintă distanța de la vîrful V la mijlocul segmentului AB, iar expresia

$$\frac{\frac{k_2}{\cos \beta} - \frac{k_1}{\cos \beta}}{2}$$

reprezintă jumătatea segmentului AB. Rezultă următoarea construcție pentru determinarea punctului P (fig. 3) : în punctul M, mijlocul segmentului AB, se ridică segmentul MC, perpendicular pe AB și egal cu jumătatea lui AB. Cercul descris din punctul V ca centru și cu rază egală cu VC taie generatoarea de contact în punctul P.

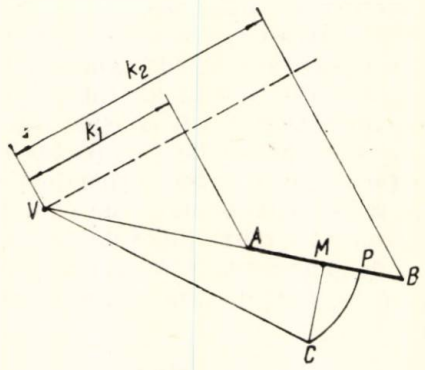


Fig. 3

În cazul cînd AB păstrează lungime constantă şi poziţie fixă, iar vîrful V se depărtează la infinit, trunchiul de con devenind cilindru, punctul P se confundă cu M.

Comparînd triunghiurile vitezelor din figurile 1 şi 2, se deduce uşor că, pentru acelaşi trunchi de con şi aceeaşi valoare a lui ω_s, valoarea lui ω_e este mai mică în cazul de faţă decît în cazul 1.1.

Înlocuind valoarea dată de expresia (8) în (4), se obţine

$$\mathcal{L}_{AB} = f\omega_s k_0 \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{k_1^2 + k_2^2} - k_1 - k_2\right). \tag{9}$$

Din această expresie rezultă că, pentru un trunchi de con de dimensiuni date, lucrul mecanic al forţelor de frecare pe linia de contact variază astfel:

a) creşte direct proporţional cu f forţa de frecare pe unitatea de lungime de contact, adică cu apăsarea trunchiului de con pe suprafaţa de contact;

b) creşte direct proporţional cu ω_s viteza de rotaţie a sapei;

c) creşte liniar cu k_0, proprietate folosită actual în construcţia sapelor carotiere şi a fost folosită în construcţia unor sape normale;

d) descreşte în acelaşi timp cu unghiurile α şi β, proprietate folosită în construcţia sapelor pentru terenuri foarte dure, la care se caută să se reducă la minimum lucrul mecanic de frecare al suprafeţelor de contact cu terenul.

Pentru terenuri moi în care este necesar să se obţină lucru mecanic de frecare mare pe suprafaţa de contact cu terenul, unghiurile α şi β au valorile cele mai mari posibile permise de geometria ansamblului trunchiurilor de con care alcătuiesc sapa.

Valori mai mari ale lucrului mecanic de frecare pe suprafaţa de contact cu terenul se creează printr-un procedeu care se va indica mai jos. Lucrul mecanic de frecare în lungul liniei de contact AB variază liniar, avînd valori absolute maxime în A şi B şi anulîndu-se în P (fig. 2).

Axoida fixă a mişcării în acest caz este un con de rotaţie avînd vîrful în O şi semiunghiul la vîrf $180 - (\alpha + \beta)$, iar axoida mobilă este un con de rotaţie avînd vîrful în O şi semiunghiul la vîrf φ.

1.3. În timpul funcționării sapei pe talpă, noroiul de foraj, conținînd în suspensie detritus provenit din săparea terenului, pătrunde în interiorul lagărului trunchiului de con. Ca urmare se dezvoltă în acest loc o

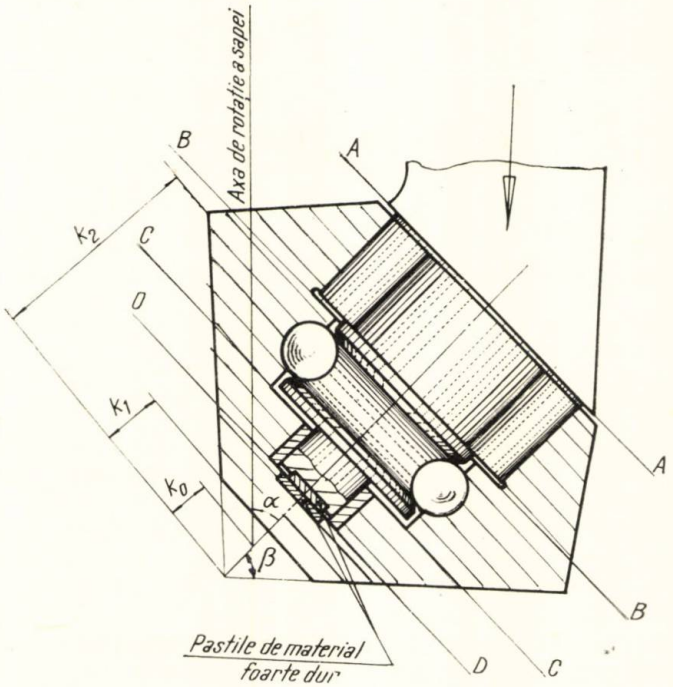


Fig. 4

frecare care provoacă o uzură treptată a elementelor care compun lagărul, urmată de o apropiere, posibilă pînă la contactul dintre ele, a unor suprafețe în mișcare dispuse concentric cu axa butonului (suprafețele situate în planuri perpendiculare pe planul figurii 4 și trecînd prin $A-A$; $B-B$; $C-C$; $D-D$). Pe aceste suprafețe apăsate între ele pot avea loc frecări cu mișcare de pivot, care, împreună cu frecarea de alunecare din lagărul de alunecare, dau naștere unui moment de frecare. Se notează cu $\mathfrak{M}_a$ valoarea acestui vector-moment al cărui suport este axa trunchiului de con. Fenomenele de frecare de rostogolire care au loc pe suprafața în contact cu terenul a trunchiului de con cît și în lagărele cu role și bile ale acestuia, pot fi reprezentate, în total, printr-un vector moment al cărui suport poate fi considerat tot pe axa trunchiului de con. Se notează cu M_r, valoarea acestui vector moment.

Pentru a se determina poziția axei instantanee de rotație a mișcării în acest caz, se va proceda în conformitate cu cele expuse precedent.

Lucrul mecanic $\mathcal{L}_f$ produs de momentul $\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_r$ este

$$\mathcal{L}_f = (\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_r)\,\omega_c .$$

Din triunghiul vitezelor rezultă

$$\omega_c = \omega_s \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi},$$

deci

$$\mathcal{L}_f = \omega_s (\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_c) \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi}.$$

Ţinînd seama de expresia (4), expresia lucrului mecanic total $\mathcal{L}$ este

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{AB} + \mathcal{L}_f = \frac{1}{2} f \omega_s \sin\alpha \left[\frac{k_1^2 + k_2^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi} + \right.$$

$$\left. + 2k_0^2 \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\beta)} - 2\frac{k_0}{\cos\beta}(k_1+k_2) \right] + (\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_r)\,\omega_s \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Derivînd în raportul cu φ şi egalînd cu zero, se obţine

$$\operatorname{ctg}\varphi = \left(1 - \frac{k_0\sqrt{2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2\frac{(\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_r)}{f}\cos\beta\operatorname{ctg}\beta}} \right) \operatorname{ctg}\beta. \qquad (10)$$

Deoarece pentru sapele uzuale $40° < \beta < 45°$, iar $\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_r$ şi f au valori pozitive, unghiul φ definit de această expresie este mai mare decît unghiul definit de expresia (8), pentru care lucrul mecanic al forţelor de frecare pe linia de contact este minim. Rezultă că lucrul mecanic corespunzător cazului de faţă este mai mare decît în cazul precedent. Valoarea sa creşte în acelaşi timp cu $(\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_r)$.

Pentru aceeaşi valoare a lui ω_s, din triunghiul vitezelor rezultă că valoarea lui ω_e în acest caz este mai mică decît în cazul precedent. Din expresia (10) rezultă că pentru valori crescătoare ale lui $(\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_r)$ unghiul φ creşte şi, în consecinţă, valoarea lui ω_e descreşte. Creşterea peste anumite limite a valorii lui $\mathfrak{M}$ produce o scădere apreciabilă a lui ω_e, fapt care ar produce o creştere nedorită a lucrului mecanic de frecare pe generatoarea de contact AB, însoţită de o uzură a suprafeţei trunchiului de con, incompatibilă cu efectul de abraziune a terenului. O măsură pentru a se evita ca $\mathfrak{M}_a$ să ia valori mari este introducerea, atît în fundul interiorului trunchiului de con, cît şi în vîrful butonului fălcei respective, a unor pastile circulare din material foarte dur. Aceste pastile avînd raze mici, valoarea momentului de frecare de pivot este mică, iar în acelaşi timp ele împiedică venirea în contact a suprafeţelor de dimensiuni mari, aflate în mişcare relativă între ele.

Cele afirmate despre creşterea valoarei lui M_a sînt valabile şi pentru creşterea valoarei lui M_r (spargeri de role şi bile, procent mare de detritus în spaţiul lagărelor de rostogolire, aşezarea axului rolelor neparalel cu axul trunchiului de con cauzată de mărirea prin uzură a jocului lagărului cu role etc....; apoi tocirea vîrfurilor dinţilor).

Tot din expresia (10) rezultă că, dacă f creşte, valoarea lui φ creşte şi o dată cu aceasta creşte şi ω_e. Creşterea lui f se obţine prin mărirea apăsării sapei pe talpa găurii. Deci pentru a se compensa creşterea lui $\mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_r$ trebuie mărit corespunzător f. Aceste consideraţii deduse pe cale teoretică se verifică în procesul de foraj.

1.4. Se consideră cazul general cînd axa de rotaţie a sapei nu întîlneşte axa de rotaţie a trunchiului de con (fig. 5).

Suprafața pe care se rostogolește trunchiul de con în acest caz este un hiperboloid riglat, generat prin rotirea generatoarei de contact AB în jurul axei de rotație a sapei.

Pentru simplificarea calculului nu se ține seama deocamdată de momentele de frecare provenind din interiorul și exteriorul (rostogolire) trunchiului de con.

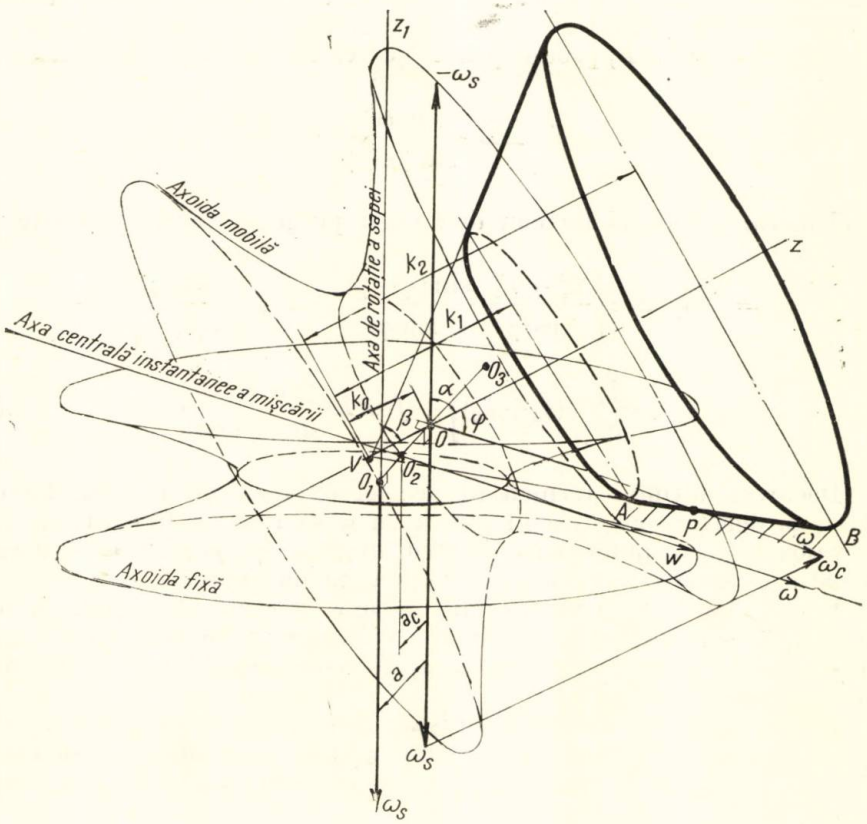


Fig. 5

Se notează O_1 și O punctele unde perpendiculara comună a axei de rotație a sapei și a axei de rotație a trunchiului de con intersectează respectiv aceste drepte, iar cu a lungimea segmentului OO_1.

Se notează cu ω_s vectorul rotației reprezentînd viteza unghiulară a sapei, dirijat după axa de rotație a acesteia și în sensul indicat în figură, care corespunde sensului uzual de rotație al sapei.

În punctul O se consideră doi vectori-rotație ω_s și $-\omega_s$, care, evident, nu influențează datele problemei.

Mișcările de rotație definite de vectorii-rotație ω_s, care trece prin punctul O_1, și $-\omega_s$, care trece prin punctul O, au ca rezultantă o mișcare de translație avînd direcția perpendiculară pe planul definit de acești vectori și viteza egală cu $a.\omega_s$. Mișcarea definită de vectorul-rotație ω_s, care trece prin punctul O, produce o mișcare de rostogolire cu frecare de alunecare a trunchiului de con în condițiile precizate la capitolul 1.2,

avînd ca axă instantanee a mişcării dreapta OP care intersectează linia de contact AB.

Mişcarea generală este o mişcare de şurub. Pentru determinarea poziţiei axei instantanee de rotaţie a mişcării şi a vitezei unghiulare a acesteia, se procedează în conformitate cu cele indicate în capitolul 1.2.

Adoptînd aceleaşi notaţii, lucrul mecanic al forţelor de frecare, datorite mişcării de rotaţie definite de vectorul ω_s care trece prin punctul O, este dat de relaţia (4). Lucrul mecanic al forţelor de frecare în lungul generatoarei de contact AB, produs prin mişcarea de translaţie cu viteza $a.\omega_s$, este

$$f \cdot \overline{AB} \frac{a \cdot \omega_s}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Lucrul mecanic total al forţelor de frecare pe generatoarea AB este

$$\mathcal{L} = f \cdot \omega_s \sin\alpha \left[\frac{k_1^2 + k_2^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi} + 2k_0^2 \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\beta)} - \right.$$

$$\left. - 2\frac{k_0}{\cos\beta}(k_1+k_2) \right] + f \cdot \overline{AB} \frac{a \cdot \omega_s}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{11}$$

Deoarece ultimul termen al acestei expresii nu conţine factorul variabil φ, derivata acesteia în raport cu φ va fi dată de expresia (5) şi deci valoarea corespunzătoare pentru unghiul φ, pentru care această expresie are valoare minimă, va fi cea dată de expresia (8).

Rezultă că direcţia vectorului-rotaţie ω în cazul cînd axele de rotaţie ale sapei şi trunchiului de con nu se intersectează este aceeaşi ca în cazul cînd aceste axe se intersectează, iar viteza unghiulară ω păstrează aceeaşi valoare.

Axa centrală instantanee a mişcării este paralelă cu direcţia vectorului ω şi intersectează perpendiculara comună a celor două axe de rotaţie într-un punct O_2 situat la distanţa a_c de punctul O. Distanţa a_c rezultă din relaţia

$$\frac{\bar{a} - \bar{a}_c}{\bar{a}_c} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}[180-(\varphi+\alpha)]}.$$

La sapele uzuale $\varphi < 90°$, $\alpha < 90°$ şi $\varphi + \beta > 90°$, astfel că valoarea lui a_c este pozitivă şi deci punctul O_2 se află între punctele O şi O_1.

Viteza de translaţie w după direcţia axei centrale se ştie că este proiecţia pe direcţia acestei axe a vitezei de translaţie $a \cdot \omega_s$. Ţinînd seama de figura 5, rezultă

$$w = a.\omega_s \sin(\varphi + \alpha).$$

De remarcat că viteza de translaţie w şi deci viteza de tîrîre în lungul generatoarei de contact depinde de poziţia axei de rotaţie a sapei faţă de axa de rotaţie a trunchiului de con. Astfel, dacă axa de rotaţie a sapei

ar trece prin punctul O_3 simetric punctului O_1 în raport cu punctul O, axa centrală instantanee a mişcării va trece prin intervalul OO_3, iar viteza w va avea sens opus celui indicat în figură. Această proprietate este folosită în construcţia sapelor cu conuri. Poziţia axei de rotaţie a sapei faţă de axa de rotaţie a trunchiului de con se alege astfel ca direcţia vitezei de

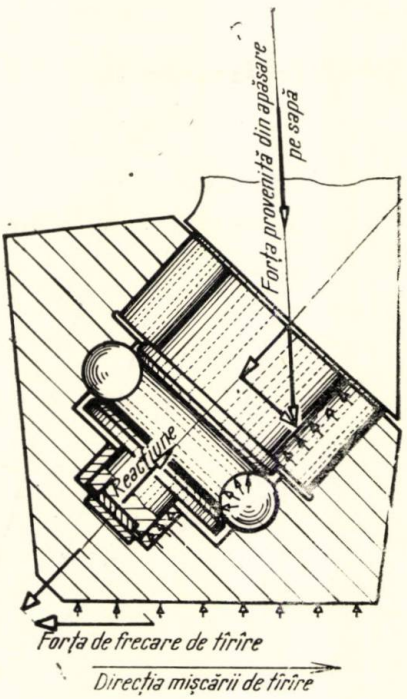


Fig. 6

translaţie w să producă o forţă de tîrîre în lungul generatoarei de contact AB care să fie de sens opus reacţiunii axiale din lagărul cu bile al trunchiului de con provenit din apăsarea acestuia cu generatoarea de contact (talpa găurii) (fig. 6). Prin aceasta se micşorează forţa axială care acţionează asupra lagărului cu bile în timpul operaţiei de foraj şi implicit solicitarea acestui lagăr.

Axoida fixă a mişcării este un hiperboloid riglat, generat prin rotirea axei centrale instantanee a mişcării în jurul axei de rotaţie a sapei. Considerînd această axă ca axă O_1Z_1, iar ca axe O_1X_1 şi O_1Y_1 două drepte perpendiculare între ele în punctul O_1 şi al cărui plan este perpendicular pe O_1Z_1, ecuaţia axoidei fixe este

$$X_1^2 + Y_1^2 - Z_1^2 \operatorname{tg}^2(\varphi + \alpha) = (a - a_c)^2.$$

Axoida mobilă a mişcării este un hiperboloid riglat generat prin rotirea axei centrale instantanee a mişcării în jurul axei de rotaţie a triunchiului de con. Considerînd ca axă OZ axa trunchiului de con şi ca axe OX

şi OY două drepte perpendiculare între ele în punctul O şi situate într-un plan perpendicular pe OZ, ecuaţia axoidei mobile este

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = a_c^2.$$

Ţinînd seama de relaţia (9), lucrul mecanic total al forţelor de frecare în lungul generatoarei de contact AB în cazul de faţă este

$$\mathcal{L} = f\omega_s k_0 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} (\sqrt{2}\sqrt{k_1^2 + k_2^2} - k_1 - k_2) + f \cdot \overline{AB} \cdot \frac{a\omega_s}{\sin(\alpha + \beta)}$$

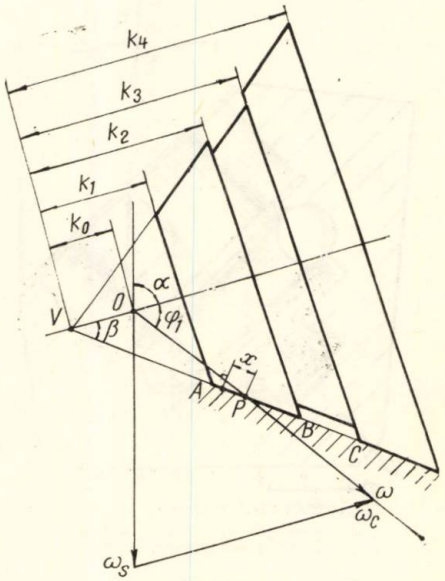


Fig. 7

Din această expresie rezultă că, în afară de factorii expuşi în cazul 1.2, lucrul mecanic al forţelor de frecare pe linia de contact AB mai depinde şi de valoarea lui a, distanţa dintre axele de rotaţie a sapei şi trunchiului de con.

După cum s-a spus mai sus, datorită geometriei ansamblului trunchiurilor de con ale sapei, elementele k_0, α, β fiind limitate ca posibilităţi de mărire a valorii lucrului mecanic de frecare pe linia de contact AB, o mărire apreciabilă a lucrului mecanic de frecare pe această generatoare, în afară de contribuţia maximă a acestor elemente geometrice, se obţine prin mărirea valorii lui a, în mod compatibil cu natura terenului în care se sapă.

Este uşor de văzut că, în cazul cînd se ţine seama şi de momentele de frecare provenind din interiorul şi exteriorul (rostogolire) trunchiului de con, concluziile de mai sus rămîn aceleaşi.

2°. În realitate, contactul trunchiurilor de con ale sapei cu talpa găurii se face după o linie întreruptă.

Iniţial se consideră cazul cînd trunchiul de con considerat în capitolul 1.2 are o singură întrerupere, avînd două intervale de contact sepa-

rate AB și CD, rigid legate între ele (fig. 7). Axele de rotație ale sapei și trunchiul de con se consideră concurente.

Se deosebesc trei cazuri. În tratarea lor se va întrebuința procedeul expus precedent. Pentru ușurința calculului se neglijează deocamdată momentele de frecare provenind din interiorul și exteriorul (rostogolire) trunchiului de con.

2.1. Se presupune că axa instantanee de rotație trece prin intervalul AB. Lucrul mecanic total $\mathcal{L}_1$ al forțelor de frecare în acest caz este

$$\mathcal{L}_1 = f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_1-\beta)}{\sin\varphi_1}\left(\int_0^{\overline{PA}} x\,dx + \int_0^{\overline{PB}} x\,dx + \int_{\overline{PC}}^{\overline{PD}} x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2} f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_1-\beta)}{\sin\varphi_1}\left(\left|x^2\right|_0^{\overline{PA}} + \left|x^2\right|_0^{\overline{PB}} + \left|x^2\right|_{\overline{PC}}^{\overline{PD}}\right).$$

Valorile lui PA și PB sînt date de expresia (2) și analoga sa, în care se înlocuiește φ cu φ_1. Din figura 7 rezultă

$$\overline{PC} = \overline{VC} - \overline{VP} = \frac{k_3}{\cos\beta} - k_0 \frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1-\beta)},$$

$$\overline{PD} = \overline{VD} - \overline{VP} = \frac{k_4}{\cos\beta} - k_0 \frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1-\beta)}.$$

Introducînd în expresia lui $\mathcal{L}_1$, se obține

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} f\omega_3 \sin\alpha\left[\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2}{\cos^2\beta}\,\frac{\sin(\varphi_1-\beta)}{\sin\varphi_1} + \right.$$

$$\left. + 2k_0^2 \frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1-\beta)} - \frac{2k_0}{\cos\beta}(k_1+k_2+k_3+k_4)\right]. \qquad (12)$$

Se derivează această expresie în raport cu φ_1 și prin egalare cu zero se obține

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 = \left(1 - \frac{k_0\sqrt{2}}{\sqrt{k_1^2+k_2^2-k_3^2+k_4^2}}\right)\operatorname{ctg}\beta. \qquad (13)$$

Se obține același rezultat scriind ecuații de momente în raport cu vîrful V.

Prin procedeul expus mai sus se poate arăta că semnul minus din paranteză corespunde minimului lucrului mecanic. Valoarea lucrului mecanic minim în acest caz se obține introducînd valoarea lui $\operatorname{ctg}\varphi_1$ în expresia lui $\mathcal{L}_1$. Rezultă

$$\mathcal{L}_1 = k_0 f \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\left[\sqrt{2}\sqrt{k_1^2+k_2^2-k_3^2+k_4^2} - (k_1+k_2-k_3+k_4)\right]. \qquad (14)$$

2.2. Se presupune că axa instantanee de rotaţie trece prin intervalul BC (fig. 8).

Lucrul mecanic total $\mathcal{L}_2$ al forţelor de frecare în acest caz este

$$\mathcal{L}_2 = f\,\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_2 - \beta)}{\sin\varphi_2}\left(\int_{\overline{PB}}^{\overline{PA}} x\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{PC}}^{\overline{PD}} x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2} f\,\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_2 - \beta)}{\sin\varphi_2}\left(\left| x^2 \right|_{\overline{PB}}^{\overline{PA}} + \left| x^2 \right|_{\overline{PC}}^{\overline{PD}}\right).$$

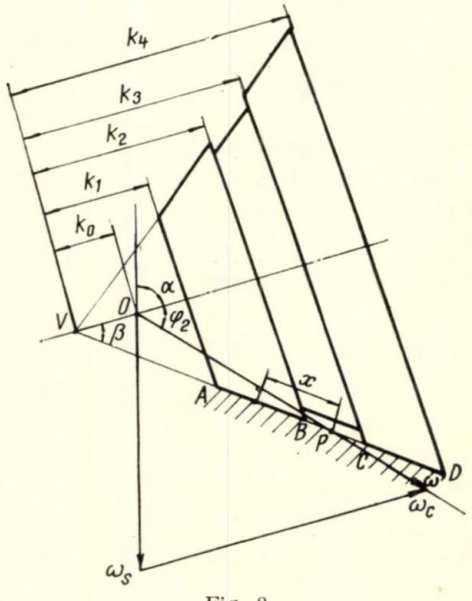


Fig. 8

Din figura 8 rezultă

$$\overline{PA} = \overline{VP} - \overline{VA} = k_0 \frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \beta)} - \frac{k_1}{\cos\beta},$$

$$\overline{PB} = \overline{VP} - \overline{VB} = k_0 \frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \beta)} - \frac{k_2}{\cos\beta},$$

$$\overline{PC} = \overline{VC} - \overline{VP} = \frac{k_3}{\cos\beta} - k_0 \frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \beta)},$$

$$\overline{PD} = \overline{VD} - \overline{VP} = \frac{k_4}{\cos\beta} - k_0 \frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \beta)}.$$

Introducînd aceste valori în expresia lui $\mathcal{L}_2$ se obține

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} f\,\omega_s \sin\alpha \left[\frac{k_2^2 - k_1^2 + k_4^2 - k_3^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \beta)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2k_0}{\cos\beta}(k_2 - k_1 + k_4 - k_3) \right].$$

Prin derivarea acestei expresii în raport cu φ_2 și egalare cu zero se obține

$$f\,\omega_s \sin\alpha \frac{k_2^2 - k_1^2 + k_4^2 - k_3^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin\beta}{\sin^2(\varphi_2 - \beta)} = 0.$$

Se obține același rezultat scriind ecuații de momente în raport cu vîrful V. Această expresie nu se poate anula pentru valori reale ale factorului φ_2. Rezultă că în acest caz lucrul mecanic total al forțelor de frecare pe generatoare de contact nu are minimum și, ca urmare, axa instantanee de rotație nu trece prin acest interval.

2. 3. Se presupune că axa instantanee de rotație a mișcării trece prin intervalul CD (fig. 9).

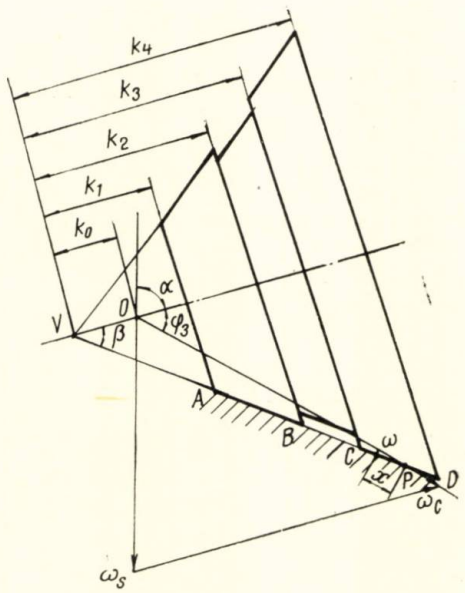


Fig. 9

Lucrul mecanic total $\mathcal{L}_3$ al forțelor de frecare pe linia de contact este în acest caz

$$\mathcal{L}_3 = f\,\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_3 - \beta)}{\sin\varphi_3} \left(\int_{\overline{PA}}^{\overline{PB}} x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\overline{PC}} x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\overline{PD}} x\,\mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{1}{2} f\,\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_3 - \beta)}{\sin\varphi_3} \left(\left| x^2 \right|_{\overline{PA}}^{\overline{PB}} + \left| x^2 \right|_0^{\overline{PC}} + \left| x^2 \right|_0^{\overline{PD}} \right).$$

Din figura 9 rezultă

$$\overline{VP} = k_0 \frac{\sin \varphi_3}{\sin (\varphi_3 - \beta)},$$

$$\overline{PA} = \overline{VP} - \overline{VA} = k_0 \frac{\sin \varphi_3}{\sin (\varphi_3 - \beta)} - \frac{k_1}{\cos \beta},$$

$$\overline{PB} = \overline{VP} - \overline{VB} = k_0 \frac{\sin \varphi_3}{\sin (\varphi_3 - \beta)} - \frac{k_2}{\cos \beta},$$

$$\overline{PC} = \overline{VP} - \overline{VC} = k_0 \frac{\sin \varphi_3}{\sin (\varphi_3 - \beta)} - \frac{k_3}{\cos \beta},$$

$$PD = \overline{VD} - \overline{VP} = \frac{k_4}{\cos \beta} - k_0 \frac{\sin \varphi_3}{\sin (\varphi_3 - \beta)}.$$

Se înlocuiesc aceste valori în expresia lui $\mathcal{L}_3$ şi se obţine

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2} f \omega_s \sin \alpha \left[\frac{k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 + k_4^2}{\cos^2 \beta} \frac{\sin (\varphi_3 - \beta)}{\sin \varphi_3} + 2k_0^2 \frac{\sin \varphi_3}{\sin (\varphi_3 - \beta)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2k_0}{\cos \beta} (k_1 - k_2 + k_3 + k_4) \right].$$

Se derivează această expresie în raport cu φ_3 şi se egalează cu zero. Se obţine

$$\operatorname{ctg} \varphi_3 = \left(1 - \frac{k_0 \sqrt{2}}{\sqrt{k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 + k_4^2}} \right) \operatorname{ctg} \beta. \tag{15}$$

La acelaşi rezultat se ajunge scriind ecuaţii de momente în raport cu vîrful V.

Prin procedeul expus mai sus se poate arăta că semnul minus corespunde minimului. Valoarea lucrului mecanic minim în acest caz se obţine introducînd valoarea lui ctg φ_3 în expresia lui $\mathcal{L}_3$. Se obţine

$$\mathcal{L}_3 = k_0 f \omega_s \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \left[\sqrt{2} \sqrt{k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 + k_4^2} - (k_1 - k_2 + k_3 + k_4) \right]. \tag{16}$$

Valoarea $d\varphi_1$, ată de expresia (13), diferă de valoarea φ_3, dată de expresia (15). Deoarece în cazul unui trunchi de con cu o singură întrerupere a liniei de contact trebuie să existe numai o singură axă instantanee de rotaţie, determinarea acesteia se va face ţinînd seama că lucrul mecanic al forţelor de frecare este minim. Dintre valorile $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_3$ va răspunde

problemei aceea care va avea cea mai mică (minimorum), iar corespunzător ei se va alege unghiul φ.

Poziţiile relative ale valorilor k_1, k_2, k_3, k_4 hotărăsc care dintre cele două expresii ale lucrului mecanic are valoarea cea mai mică. Într-adevăr, valorile k_0, f, α şi β fiind date, se demonstrează algebric că, avînd $k_4 > k_3 > k_2 > k_1 > 0$ şi în cazul $\mathcal{L}_3 < \mathcal{L}_1$ (spre exemplu), rezultă relaţia de condiţie

$$k_2^2 + k_3^2 < k_1^2 + k_4^2.$$

Suma pătratelor a două distanţe k definesc pe generatoarea de contact un punct P, a cărui construcţie geometrică a fost indicată în capitolul 1.2 (fig. 3). Relaţia de condiţie de mai sus exprimă că punctul P corespunzător segmentului BC este mai apropiat de vîrful V decît punctul P analog corespunzînd segmentului AD, ceea ce este adevărat.

Condiţia exprimată de inegalitatea de mai sus fiind satisfăcută, rezultă că axa instantanee a mişcării trece prin intervalul extrem CD.

Poziţia axei instantanee de rotaţie este determinată de expresia lui $\operatorname{ctg}\varphi$ corespunzătoare cazului valorii *minime minimorum* a lui $\mathcal{L}$.

În cazul cînd pe generatoarea de contact există un număr oarecare de intervale de contact, se procedează în modul următor : se presupune că axa instantanee de rotaţie trece prin fiecare interval de contact şi prin procedeul expus mai sus se stabileşte pentru fiecare interval expresia generală a lucrului mecanic de frecare total corespunzător, din care prin derivare şi egalare cu zero se deduce valoarea corespunzătoare a unghiului φ. Introducînd această valoare a lui φ în expresia lucrului mecanic total respectiv, se obţine valoarea lucrului mecanic de frecare total corespunzător intervalului considerat. Se obţin astfel toate valorile posibile pe care le poate avea lucrul mecanic de frecare total pe generatoare de contact pentru o poziţie dată a intervalelor de contact pe aceasta. Dintre aceste valori, valoarea cea mai mică (minimorum) este aceea care răspunde poziţiei intervalelor de contact considerate ; corespunzător ei se alege şi valoarea unghiului φ, care determină poziţia axei instantanee de rotaţie.

Se poate obţine o formulă de recurenţă, procedînd în modul următor :

2. 4. Pe generatoarea de contact a trunchiului de con se consideră $2p$ puncte $A, B, C, D, \ldots$, definite cu ajutorul distanţelor $k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots, k_{2p}$ la vîrful V în modul precizat mai sus. Intervalele definite cu ajutorul distanţelor-perechi k_{2n}, k_{2n+1} sînt întreruperi (n fiind număr întreg, luînd valori întregi consecutive de la 0 la $p-1$). În cazul cînd axa instantanee de rotaţie a mişcării trece prin intervalul de contact definit cu ajutorul distanţelor-perechi k_{2n+1}, , k_{2n+2}, spre exemplu, prin procedeul expus mai sus se deduce că valoarea unghiului $\varphi_{2n+1,2n+2}$, pe care axa instantanee de rotaţie îl face în acest caz cu axa de rotaţie a trunchiului de con, este dată de expresia

$$\operatorname{ctg}\varphi_{2n+1,2n+2} =$$

$$= \left[1 - \frac{k_0\sqrt{2}}{\sqrt{2k_{2n+2}^2 + \sum_{s=0}^{n}(k_{2s+1}^2 - k_{2s+2}^2) - \sum_{s=n+1}^{p-1}(k_{2s+1}^2 - k_{2s+2}^2)}}\right] \operatorname{ctg}\beta,$$

cu precizarea că semnul $\sum_{s=p}^{p-1}$ nu are sens; k_0 reprezintă distanţa de la vîrful V la punctul de intersecţie al axei trunchiului de con cu axa de rotaţie a sapei.

Procedînd analog ca mai sus, se poate demonstra că axa instantanee de rotaţie nu trece prin nici unul dintre intervalele de întrerupere ale generatoarei de contact.

Lucrul mecanic total $\mathcal{L}_{2n+1,2n+2}$ al forţelor de frecare corespunzător cazului considerat va fi

$$\mathcal{L}_{2n+1,2n+2} =$$

$$= k_0 f \omega_s \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \left[\sqrt{2} \sqrt{2k_{2n+2}^2 + \sum_{s=0}^{n} (k_{2s+1}^2 - k_{2s+2}^2) + \sum_{s=n+1}^{p-1} (k_{2s+1}^2 - k_{2s+2}^2)} - \right.$$

$$\left. - 2k_{2n+2} - \sum_{s=0}^{n} (k_{2s+1} - k_{2s+2}) + \sum_{s=n+1}^{p-1} (k_{2s+1} - k_{2s+2}) \right].$$

Se face precizarea ca mai sus asupra notaţiei $\sum_{s=p}^{p-1}$.

Dînd lui n toate valorile întregi de la 0 la p − 1, se obţin p expresii pentru lucrul mecanic $\mathcal{L}$, corespunzînd tuturor cazurilor cînd prin fiecare interval de contact ar trece axa instantanee de rotaţie a mişcării. Dintre cele p valori obţinute pentru $\mathcal{L}$, valoarea cea mai mică a sa este aceea care va defini intervalul prin care trece axa instantanee de rotaţie. Poziţia acestei axe se deduce cu ajutorul expresiei lui ctgφ, corespunzătoare intervalului astfel stabilit.

Primită la redacţie la 13 mai 1968

DIAGRAME, NOMOGRAME ŞI TABELE PENTRU MECANISME PLANE

de CHR. PELECUDI, T. V. HUNCHER

Centrul de mecanică a solidelor al Academiei Republicii Socialiste România
M.I.C.M.—C.I.M.F.A.

Plecînd de la mişcarea relativă a unui plan de bielă, se determină în acesta o serie de puncte regulat distribuite, ai căror parametri cinematici — traiectorii, viteze şi acceleraţii — sînt uşor de calculat. Pentru restul punctelor planului se utilizează interpolarea liniară pe bază de nomograme. Urmărind în continuare reducerea calculelor, s-au întocmit o serie de tabele şi diagrame pentru diverse valori ale parametrilor cinematici funcţie de unghiul φ al elementului conducător. Se particularizează apoi rezultatele în cazul unui mecanism bielă-manivelă.
Lucrarea prezintă un criteriu uniform pentru stabilirea de tabele, diagrame şi nomograme utile în rezolvarea problemelor de sinteză, din ele rezultînd în modul cel mai simplu mecanismul cel mai indicat.

Utilizarea mărită a mecanismelor cu transmisie neuniformă de la manivela conducătoare la balansierul condus, adică a mecanismelor cu bare legate prin articulaţii cilindrice sau cuple prismatice, a necesitat perfecţionarea metodelor grafice şi analitice pentru analiza mecanismelor date sau pentru sinteza unor mecanisme care să îndeplinească anumite condiţii cinematice. Volumul mare de calcule grafice sau analitice, ştiind mai ales că problema de bază a mecanismelor se referă la determinarea sau la sinteza poziţională, care este o problemă neliniară şi deci prezintă multe complicaţii, a făcut necesară introducerea calculelor automatizate.

Dar proiectarea unui mecanism cu transmisie neuniformă, care să fie satisfăcător dintr-un număr maxim de puncte de vedere, este extrem de dificilă (K. Hain, *Angewandte Getriebelehre*), deoarece în funcţie de numărul elementelor mecanismelor pot fi făcute mai multe sau mai puţine ipoteze. Unele dintre aceste libertăţi nu pot fi folosite însă pe deplin la stadiul actual al teoriei mecanismelor şi de aceea sînt necesare unele sistematizări într-o formă clară a unor grupe de mecanisme din care se poate alege un mecanism adecvat fără multă pierdere de timp şi fără cunoştinţe pregă-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 4, P. 867—895, 1970

titoare cuprinzătoare. Printre ultimele lucrări în acest sens se pot menționa cele executate de F. Freudenstein, J. Volmer, W. Lichtenheldt.

În lucrarea prezentă se realizează un criteriu uniform pentru stabilirea de tabele, diagrame și nomograme, din care să rezulte în modul cel mai simplu mecanismul cel mai indicat. Se consideră astfel un plan (fig. 1)

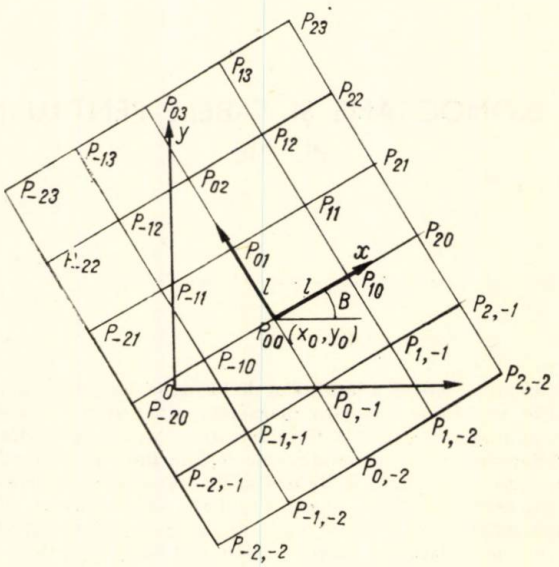


Fig. 1

de care sînt legate axele *xoy* în mișcare față de axele fixe *XOY*. Față de axele *xoy* se trasează pe planul mobil o rețea de drepte paralele și perpendiculare echidistante, care marchează la intersecție punctele ale căror parametri cinematici trebuie întabelați. Determinarea acestora se face simplu prin relații liniare din cinematica parametrilor cinematici pentru două puncte, ceea ce echivalează cu cunoașterea a patru parametri scalari, deși sînt necesari numai trei pentru completa cunoaștere a mișcării planului.

Dacă $\boldsymbol{R}_A$ și $\boldsymbol{R}_B$ sînt vectorii de poziție absoluți ai punctelor A și B din planul mobil, utilizînd coordonatele baricentrice λ_1 și λ_2 cu $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, punctul C de pe dreapta AB va avea vectorul de poziție

$$\boldsymbol{R}_c = \lambda_1 \boldsymbol{R}_A + \lambda_2 \boldsymbol{R}_B, \tag{1}$$

iar vitezele și accelerațiile vor fi

$$\boldsymbol{v}_c = \lambda_1 \cdot \boldsymbol{v}_A + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{v}_B, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}_c = \lambda_1 \cdot \boldsymbol{a}_A + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{a}_B, \tag{3}$$

cu

$$\lambda_1 = \frac{CB}{AB}\,; \qquad \lambda_2 = \frac{AC}{AB}, \tag{4}$$

relaţii valabile şi pentru proiecţiile scalare pe axele de coordonate.

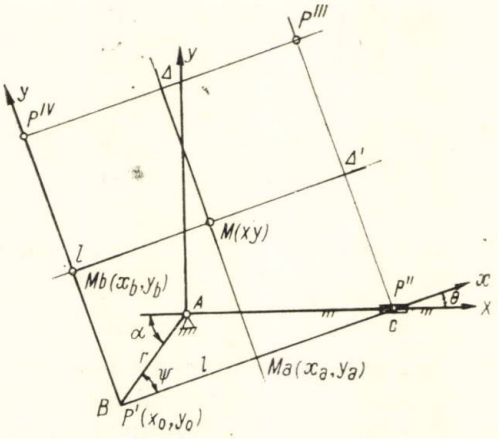


Fig. 2

Pentru obţinerea acestor determinări simple în tot planul mobil este necesar să fie obţinuţi parametrii cinematici pentru patru puncte aşezate în vîrfurile unui pătrat $P'\ P''\ P'''\ P^{IV}$ (fig. 2). Aceştia se deduc în mod obişnuit din parametrii unui punct al planului la care se adaugă parametrul ce marchează rotaţia planului. Astfel, pentru poziţii, coordonatele adimensionale obţinute luînd ca unitate de lungime mărimea manivelei r, avem

$$P' \to \frac{X'}{r} = \frac{X_0}{r} \quad ; \quad \frac{Y'}{r} = \frac{Y_0}{r}\,; \quad \lambda = \frac{r}{l}, \tag{5}$$

$$P'' \to \frac{X''}{r} = \frac{X_0}{r} + \frac{\cos\theta}{\lambda} \quad ; \quad \frac{Y''}{r} = \frac{Y_0}{r} + \frac{\sin\theta}{\lambda}, \tag{6}$$

$$P''' \to \frac{X'''}{r} = \frac{X_0}{r} + \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\lambda}\,; \quad \frac{Y'''}{r} = \frac{Y_0}{r} + \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\lambda}, \tag{7}$$

$$P^{IV} \to \frac{X^{IV}}{r} = \frac{X_0}{r} - \frac{\sin\theta}{\lambda} \quad ; \quad \frac{Y^{IV}}{r} + \frac{Y_0}{r} + \frac{\cos\theta}{\lambda}. \tag{8}$$

Pentru viteze, proiecțiile adimensionale se obțin considerînd ca unitate de viteză mărimea vitezei butonului de manivelă $r\omega$, adică

$$P' \rightarrow \frac{v'_x}{r\omega} = \frac{\dot{X}_0}{r\omega}; \qquad \frac{v'_y}{r\omega} = \frac{\dot{Y}_0}{r\omega}, \tag{9}$$

$$P'' \rightarrow \frac{v''_x}{r\omega} = \frac{\dot{X}_0}{r\omega} - \frac{\sin\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right), \qquad \frac{v''_v}{r\omega} = \frac{\dot{Y}_0}{r\omega} + \frac{\cos\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right), \tag{10}$$

$$P''' \rightarrow \frac{v'''_x}{r\omega} = \frac{\dot{X}_0}{r\omega} - \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right), \qquad \frac{v'''_y}{r\omega} = \frac{\dot{Y}_0}{r\omega} + \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right), \tag{11}$$

$$P^{IV} \rightarrow \frac{v^{IV}_x}{r\omega} = \frac{\dot{X}_0}{r\omega} - \frac{\cos\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right), \qquad \frac{v^{IV}_y}{r\omega} = \frac{\dot{Y}_0}{r\omega} - \frac{\sin\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right). \tag{12}$$

Pentru accelerații, proiecțiile adimensionale se obțin întrebuințînd ca unitate de măsură pentru accelerații mărimea accelerației normale a butonului de manivelă $r\omega^2$ (de altfel se consideră ω constant). Astfel avem

$$P' \rightarrow \frac{a'_x}{r\omega^2} = \frac{\ddot{X}_0}{r\omega^2}; \qquad \frac{a'_y}{r\omega^2} = \frac{\ddot{Y}_0}{r\omega^2}, \tag{13}$$

$$P'' \rightarrow \frac{a''_x}{r\omega^2} = \frac{\ddot{X}_0}{r\omega^2} - \frac{\cos\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 - \frac{\sin\theta}{\lambda}\left(\frac{\ddot{\theta}}{\omega^2}\right),$$

$$\frac{a''_y}{r\omega^2} = \frac{\ddot{Y}_0}{r\omega^2} - \frac{\sin\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 - \frac{\cos\theta}{\lambda}\left(\frac{\ddot{\theta}}{\omega^2}\right), \tag{14}$$

$$P''' \rightarrow \frac{a'''_x}{r\omega^2} = \frac{\ddot{X}_0}{r\omega^2} - \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 - \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\lambda}\left(\frac{\ddot{\theta}}{\omega^2}\right),$$

$$\frac{a'''_y}{r\omega^2} = \frac{\ddot{Y}_0}{r\omega^2} - \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 + \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\lambda}\left(\frac{\ddot{\theta}}{\omega^2}\right), \tag{15}$$

$$P^{IV} \rightarrow \frac{a^{IV}_x}{r\omega^2} = \frac{\ddot{X}_0}{r\omega^2} + \frac{\sin\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 - \frac{\cos\theta}{\lambda}\left(\frac{\ddot{\theta}}{\omega^2}\right),$$

$$\frac{a^{IV}_y}{r\omega^2} = \frac{\ddot{Y}_0}{r\omega^2} - \frac{\cos\theta}{\lambda}\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 - \frac{\sin\theta}{\lambda}\left(\frac{\ddot{\theta}}{\omega^2}\right), \tag{16}$$

Aplicînd aceste formule la mecanismul bielă-manivelă (fig. 2), vom avea mai întîi

$$\frac{X_0}{r} = \cos\varphi \quad ; \quad \frac{Y_0}{r} = \sin\varphi, \tag{17}$$

$$\frac{\dot{X}_0}{r\omega} = -\sin\varphi \quad ; \quad \frac{\dot{Y}_0}{r\omega} = \cos\varphi, \tag{18}$$

$$\frac{\ddot{X}_0}{r\omega^2} = -\cos\varphi \quad ; \quad \frac{\ddot{Y}_0}{r\omega^2} = -\sin\varphi, \tag{19}$$

apoi din

$$\sin\theta = \lambda \sin\varphi \tag{20}$$

se găsește

$$\frac{\dot{\theta}}{\omega} = \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}, \tag{21}$$

$$\frac{\ddot{\theta}}{\omega^2} = \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} = \operatorname{tg}\theta \cdot \frac{\cos^2\varphi - \cos^2\theta}{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\theta} = \frac{-\lambda(1-\lambda^2)\sin\varphi}{(1-\lambda^2\sin^2\varphi)^{3/2}}. \tag{22}$$

În figura 3 sînt redate diagramele funcțiilor $\theta = f(\varphi)$ ale unghiului bielei relativ la unghiul manivelei pentru diferite valori ale parametrului λ. Figura 4 conține diagramele unghiului de presiune $\psi = \varphi - \theta$ față de unghiul manivelei φ în funcție de valorile parametrului λ.

În figura 5 se găsesc diagramele vitezei unghiulare reduse a bielei $\dot{\theta}/\omega$ și, corespunzător, în figura 6 se află diagramele vitezei unghiulare reduse relative dintre manivelă și bielă, $\dot{\psi}/\omega = 1 - \dot{\theta}/\omega$, care de altfel se deduc simplu din cele anterioare.

Urmează figura 7, cu diagramele accelerației unghiulare reduse ale bielei $\ddot{\theta}/\omega^2$ ca funcții de φ și λ. Valorile accelerațiilor relative $\ddot{\psi}/\omega^2 = -\ddot{\theta}/\omega^2$ sînt egale, dar de semne contrare cu ale accelerației unghiulare ale bielei.

Pentru unghiul bielei θ, viteza unghiulară redusă $\dot{\theta}/\omega$ și accelerația unghiulară redusă $\ddot{\theta}/\omega^2$ s-au încheiat de asemenea nomograme bazate pe determinarea produsului a două funcții, adică $u \cdot v = W$. Acest gen de calcule se rezolvă prin nomograme cu puncte aliniate și suporturi paralele echidistante și cu reprezentări prin scări logaritmice astfel:

$$\begin{aligned} x_1 &= -H \quad ; \quad y_1 = a_{21}\lg u + b_{21}, \\ x_2 &= +H \quad ; \quad y_2 = a_{22}\lg v + b_{22}, \end{aligned} \tag{23}$$

și deci

$$x_3 = H\,\frac{a_{21} - a_{22}}{a_{21} + a_{22}}\;;\quad y_3 = a_{23}\lg W + b_{23}, \tag{24}$$

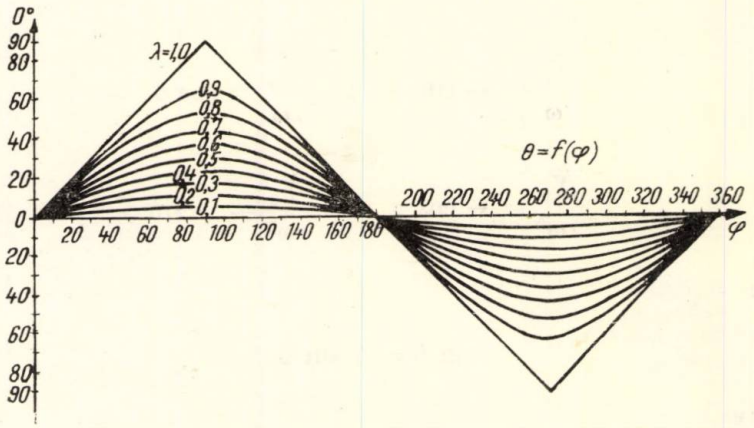


Fig. 3

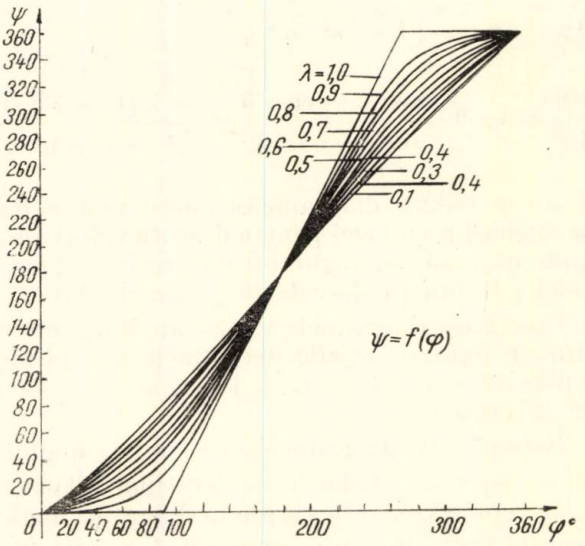


Fig. 4

cu

$$a_{23} = \frac{a_{21}\cdot a_{22}}{a_{21} + a_{22}} \quad \text{și} \quad b_{23} = \frac{a_{21}\,b_{22} + b_{21}\,a_{22}}{a_{21} + a_{22}},$$

dar se utilizează obișnuit valorile $a_{21} = a_{22} = 1$ și $b_{21} = b_{22} = 0$, astfel că $x_3 = 0$; $a_{23} = 1/2$; $b_{23} = 0$.

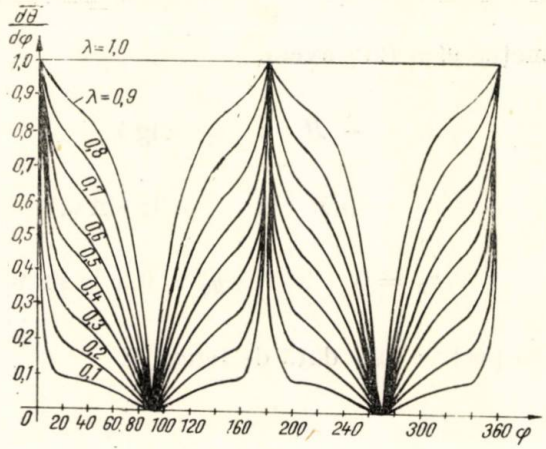


Fig. 5

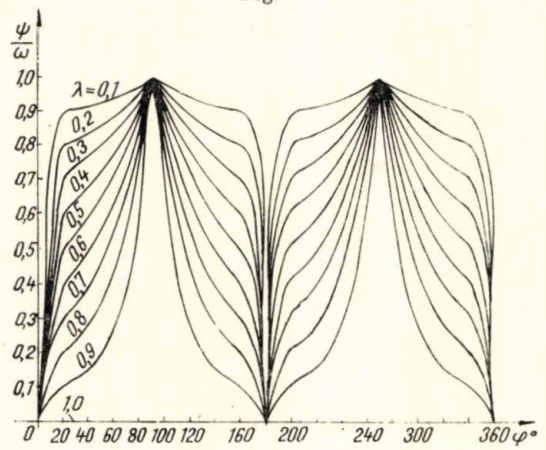


Fig. 6

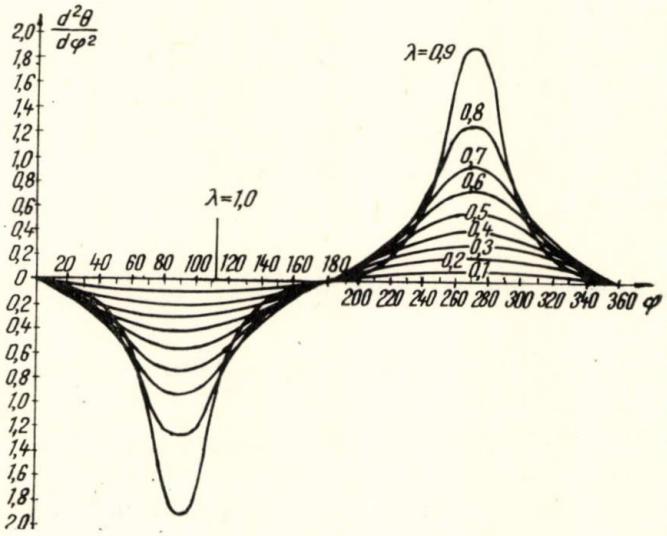


Fig. 7

Pentru funcţia $\theta(\varphi)$ (20) avem

$$\begin{aligned} x_1 &= -H \quad ; \quad y_1 = \lg \lambda, \\ x_2 &= +H \quad ; \quad y_2 = \lg \sin \varphi, \\ x_3 &= 0 \quad ; \quad y_3 = 0{,}5 \lg \sin \theta, \end{aligned} \tag{25}$$

iar nomograma respectivă este dată de figura 8.

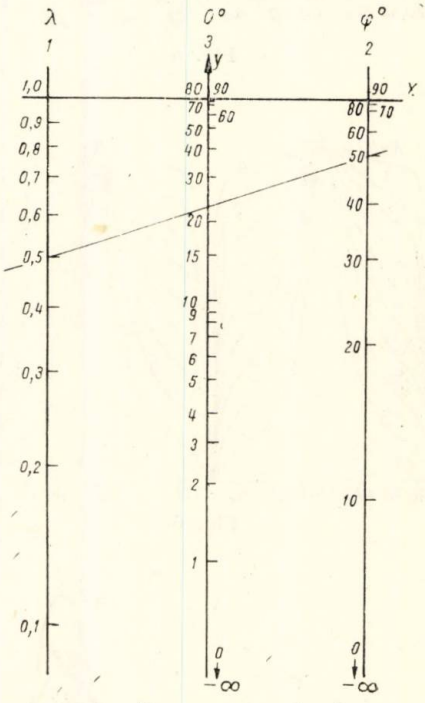


Fig. 8

Pentru funcţia $\dot{\theta}/\omega$ (21) se determină

$$\begin{aligned} x_1 &= -H \quad ; \quad y_1 = \lg \dot{\theta}/\omega, \\ x_2 &= H \quad ; \quad y_2 = \lg \operatorname{tg} \varphi, \\ x_3 &= 0 \quad ; \quad y_3 = 0{,}5 \lg \operatorname{tg} \theta, \end{aligned} \tag{26}$$

relaţii care conduc la nomograma din figura 9.

Apoi pentru funcţia $\ddot{\theta}/\omega^2$ (22) avem

$$x_1 = -H \quad ; \quad y_1 = \lg(1 - \lambda^2),$$

$$x_2 = H \quad ; \quad y_2 = \lg \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta}, \tag{27}$$

$$x_3 = 0 \quad ; \quad y_3 = 0,5 \lg \frac{\ddot{\theta}}{\omega^2},$$

nomograma respectivă fiind arătată în figura 10.

În toate trei nomogramele se dau exemple de calcul.

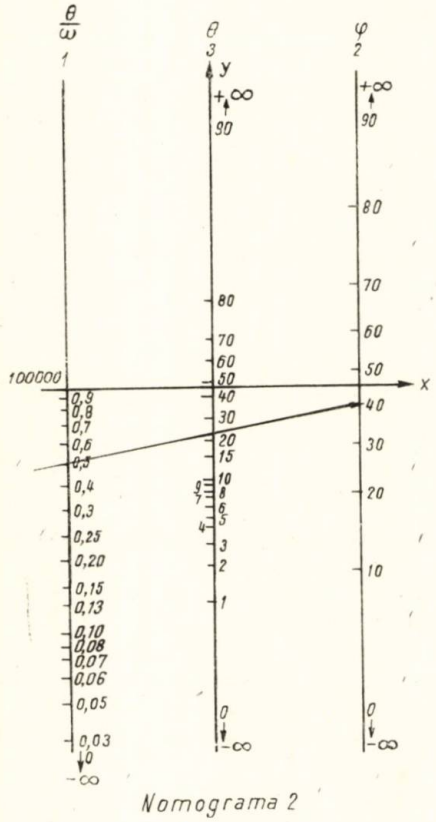


Fig. 9

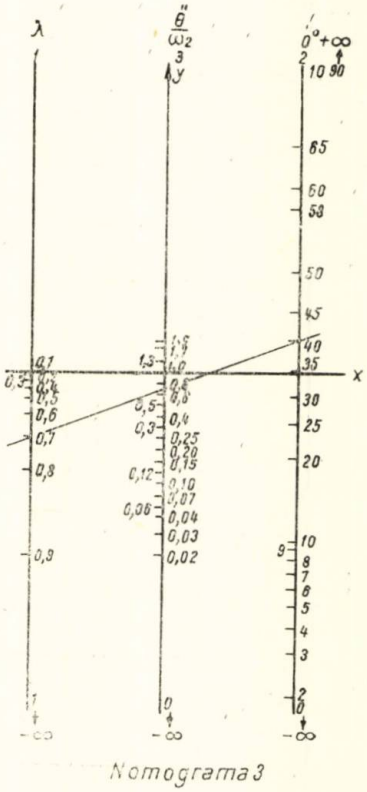


Fig. 10

Tabela 1

$\theta = f(\lambda, \varphi)$

φ°	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
30°	2°52′	5°44′	8°40′	11°35′	14°29′	17°30′	20°30′	23°35′	26°45′	30°
60°	4°58′	9°58′	15°9′	20°19′	25°39′	31°20′	37°20′	43°51′	51°19′	60°
90°	5°44′	11°35′	17°30′	23°35′	30°	36°51′	44°30′	53°9′	64°10′	90°
120°	4°58′	9°58′	15°9′	20°19′	25°39′	31°20′	37°20′	43°51′	51°19′	60°
150°	2°52′	5°44′	8°40′	11°35′	14°29′	17°30′	20°30′	23°35′	26°45′	30°
180°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
210°	−2°52′	− 5°44′	− 8°40′	−11°35′	−14°29′	−17°30′	−20°30′	−23°35′	−26°45′	−30°
240°	−4°58′	− 9°58′	−15°9′	−20°19′	−25°39′	−31°20′	−37°20′	−43°51′	−51°19′	−60°
270°	−5°44′	−11°35′	−17°30′	−23°35′	−30°	−36°51′	−44°30′	−53°9′	−64°10′	−90°
300°	−4°58′	− 9°58′	−15°9′	−20°19′	−25°39′	−31°20′	−37°20′	−43°51′	−51°19′	−60°
330°	−2°52′	− 5°44′	− 8°40′	−11°35′	−14°29′	−17°30′	−20°30′	−23°35′	−23°45′	−30°
360°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°

Tabela 2

$\psi = f(\lambda, \varphi)$

φ°	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0	0°
30°	27°8′	24°16′	21°20′	18°25′	15°31′	12°30′	9°30′	6°25′	3°15′	0°
60°	55°2′	50°2′	44°51′	39°41′	34°20′	28°40′	22°40′	16°9′	8°41′	0°
90°	84°16′	78°25′	72°30′	66°25′	60°	53°9′	45°30′	36°51′	25°50′	0°
120°	115°2′	110°2′	104°51′	99°41′	94°20′	88°40′	82°40′	76°9′	68°41′	60°
150°	147°8′	144°16′	141°20′	138°25′	135°31′	132°30′	129°30	126°25′	123°15′	120°
180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°
210°	212°52′	215°40′	218°40′	221°35′	224°28′	227°30′	230°30′	233°35′	236°45′	240°
240°	244°58′	249°58′	255°9′	260°19′	265°39′	271°20′	277°20′	283°51′	391°19′	300°
270°	275°44′	281°35′	287°30′	293°35′	300°	306°51′	314°30′	323°9′	334°10′	360°
300°	304°58′	309°58′	315°9′	320°19′	325°39′	331°20′	337°20′	343°51′	351°19′	360°
330°	332°52′	335°44′	338°40′	341°35′	344°29′	347°30′	350°30′	353°35′	356°45′	360°
360°	360°	360°	360°	360°	360°	360°	360°	360°	360°	360°

Tabela 3

$$\frac{\theta}{\omega} = f(\lambda, \varphi)$$

φ°	λ									
	0,1	0.2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
30°	0,08671	0,17407	0,26278	0,35355	0,44721	0,54482	0,64715	0,75594	0,87280	1,00000
60°	0,05019	0,10153	0,15533	0,21320	0,27735	0,35112	0,44009	0,55470	0,71828	1,00000
90°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
120°	0,05019	0,10153	0,15533	0,21320	0,27735	0,35112	0,44009	0,55470	0,71828	1,00000
150°	0,08671	0,17407	0,26278	0,35355	0,44721	0,54482	0,64715	0,75594	0,87280	1,00000
180°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
210°	0,08671	0,17407	0,26278	0,35355	0,44721	0,54482	0,64715	0,75594	0,87280	1,00000
240°	0,05019	0,10153	0,15533	0,21320	0,27735	0,35112	0,44009	0,55470	0,71828	1,00000
270°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
300°	0,05019	0,10153	0,15533	0,21320	0,27735	0,35112	0,44009	0,55470	0,71828	1,00000
330°	0,08671	0,17407	0,26278	0,35355	0,44721	0,54482	0,64715	0,75594	0,87280	1,00000
360°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Tabela 4

$$\frac{\dot{\psi}}{\omega} = f(\lambda, \varphi)$$

φ^0	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
30°	0,91329	0,82593	0,73722	0,64645	0,55279	0,45518	0,35285	0,24406	0,12720	0,00000
60°	0,94981	0,89847	0,84467	0,78680	0,72265	0,64888	0,55991	0,44530	0,28172	0,00000
90°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,00000
120°	0,94981	0,89847	0,84467	0,78680	0,72265	0,64888	0,55991	0,44530	0,28172	0,00000
150°	0,91329	0,82593	0,73722	0,64645	0,55279	0,45518	0,35285	0,24406	0,12720	0,00000
180°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
210°	0,91329	0,82593	0,73722	0,64645	0,55279	0,45518	0,35285	0,24406	0,12720	0,00000
240°	0,94981	0,89847	0,84467	0,78680	0,72265	0,64888	0,55991	0,44530	0,28172	0,00000
270°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,00000
300°	0,94981	0,89847	0,84467	0,78680	0,72265	0,64888	0,55991	0,44530	0,28172	0,00000
330°	0,91329	0,82593	0,73722	0,64645	0,55279	0,45518	0,35285	0,24406	0,12720	0,00000
360°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela 5

$$\frac{\ddot{\theta}}{\omega^2} = f(\lambda, \varphi)$$

φ°	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
30°	−0,04968	−0,09745	−0,14124	−0,17871	−0,20656	−0,22131	0,21715	−0,18705	−0,12006	0,00000
60°	−0,08670	−0,17405	−0,26261	−0,35250	−0,44344	−0,53319	−0,61429	0,66518	0,60226	0,00000
90°	−0,10000	−0,20090	−0,30924	−0,42858	−0,56574	−0,73244	−0,95165	−1,27296	−1,91425	0,00000
120°	−0,08670	−0,17405	−0,26261	−0,35250	−0,44344	−0,53319	−0,61429	−0,66518	−0,60226	0,00000
150°	−0,04968	−0,09745	−0,14124	−0,17871	−0,20656	−0,22131	−0,21715	−0,18705	−0,12006	0,00000
180°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
210°	0,04968	0,09745	0,14124	0,17871	0,20656	0,22131	0,21715	0,18705	0,12006	0,00000
240°	0,08670	0,17405	0,26261	0,35250	0,44344	0,53319	0,61429	0,66518	0,60226	0,00000
270°	0,10000	0,20090	0,30924	0,42858	0,56574	0,73244	0,95165	1,27296	1,91425	0,00000
300°	0,08670	0,17405	0,26261	0,35250	0,44344	0,53319	0,61429	0,66518	0,60226	0,00000
330°	0,04968	0,09745	0,14124	0,17871	0,20656	0,22131	0,21715	0,18705	0,12006	0,00000
360°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

S-au construit de asemenea tabele numerice pentru parametrii cinematici, poziții, viteze și accelerații la mecanismul bielă-manivelă pe baza următoarelor relații :

$$P' \to \frac{X'}{r} = \cos\varphi \quad ; \quad \frac{Y'}{r} = \sin\varphi,$$

$$\frac{v'_x}{r\omega} = -\sin\varphi \quad ; \quad \frac{v'_y}{r\omega} = \cos\varphi, \tag{28}$$

$$\frac{a'_x}{r\omega^2} = -\cos\varphi \quad ; \quad \frac{a'_y}{r\omega^2} = -\sin\varphi,$$

$$P'' \to \frac{X''}{r} = \cos\varphi + \frac{\cos\varphi}{\lambda} \quad ; \quad \frac{Y''}{r} = 0,$$

$$\frac{v''_x}{r\omega} = -\sin\varphi - \operatorname{tg}\theta.\cos\varphi \quad ; \quad \frac{v''_y}{r\omega} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{a''_x}{r\omega^2} = -\cos\varphi + \sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos^2\theta} \quad ; \quad \frac{a''_y}{r\omega^2} = 0,$$

$$P''' \to \frac{X'''}{r} = \cos\varphi + \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\lambda} \quad ; \quad \frac{Y'''}{r} = \frac{\cos}{\lambda} \tag{30}$$

$$\frac{v'''_x}{r\omega} = -\sin\varphi - \operatorname{tg}\theta\cdot\cos\varphi + \cos\varphi \quad ; \quad \frac{v'''_y}{r\omega} = -\operatorname{tg}\theta\cdot\cos\varphi,$$

$$\frac{a'''_x}{r\omega^2} = -\cos\varphi - \sin\varphi + \sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos^2\theta} \; ; \; \frac{a'''_y}{r\omega^2} =$$

$$= \sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos^2\theta},$$

$$P^{IV} \to \frac{X^{IV}}{r} = \cos\varphi - \frac{\sin\theta}{\lambda} \quad ; \quad \frac{Y^{IV}}{r} = \sin\varphi + \frac{\cos\theta}{\lambda},$$

$$\frac{v^{IV}_x}{r\omega} = -\sin\varphi + \cos\varphi \quad ; \quad \frac{v^{IV}_y}{r\omega} = \cos\varphi\,(1 - \operatorname{tg}\theta),$$

$$\frac{a^{IV}_x}{r\omega^2} = -\cos\varphi - \sin\varphi; \quad \frac{a^{IV}_y}{r\omega^2} = -\sin\varphi + \sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos^2\theta}.$$

Tabela 6

P′

φ°	$\frac{X'}{r}$	$\frac{Y'}{r}$	$\frac{V'_x}{r\omega}$	$\frac{V'_y}{r\omega}$	$\frac{a'_x}{r\omega^2}$	$\frac{a'_y}{r\omega^2}$
0°	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	−1,00000	0,00000
30°	0,86603	0,50000	−0,50000	0,86630	−0,86603	−0,50000
60°	0,50000	0,86603	−0,86603	0,50000	−0,50000	−0,86603
90°	0,00000	1,00000	−1,0000	0,00000	0,00000	−1,00000
120°	−0,50000	0,86603	−0,86603	−0,50000	0,50000	−0,86603
150°	−0,86603	0,50000	−0,50000	−0,86603	0,86603	−0,50000
180°	−1,00000	0,00000	0,00000	−1,00000	1,00000	0,00000
210°	−0,86603	−0,50000	0,50000	−0,86603	0,86603	0,50000
240°	−0,50000	−0,86603	0,86603	−0,50000	0,50000	0,86603
270°	0,00000	−1,00000	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000
300°	0,50000	−0,86603	0,86603	0,50000	−0,50000	0,86603
330°	0,86603	−0,50000	0,50000	0,86603	−0,86603	0,50000
360°	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	−1,00000	0,00000

Tabela 7a

P''

φ°	$\frac{X''}{r}$										$\frac{Y''}{r}$
	λ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
0°	11,00000	6,00000	4,33333	3,50000	3,00000	2,66667	2,42857	2,25857	2,11111	2,00000	0,00000
30°	10,85349	5,84091	4,16164	3,31551	2,80252	2,45561	2,20424	2,01167	1,85827	1,73206	0,00000
60°	10,46251	5,42442	3,71886	2,84520	2,30277	1,92400	1,63613	1,40138	1,19610	1,00000	0,00000
90°	9,94987	4,89897	3,17979	2,29128	1,73205	1,33333	1,02020	0,75000	0,48431	0,00000	0,00000
120°	9,46251	4,42442	2,71886	1,84520	1,30277	0,92400	0,63613	0,40138	0,19610	0,00000	0,00000
150°	9,12143	4,10885	2,42958	1,58345	1,07046	0,72355	0,47218	0,27961	0,12621	0,00000	0,00000
180°	9,00000	4,00000	2,33333	1,50000	1,00000	0,66667	0,42857	0,25000	0,11111	0,00000	0,00000
210°	9,12143	4,10885	2,42958	1,58345	1,07046	0,72335	0,47218	0,27961	0,12621	0,00000	0,00000
240°	9,46251	4,42442	2,71886	1,84520	1,30277	0,92400	0,63613	0,40138	0,19610	0,00000	0,00000
270°	9,94987	4,89897	3,17979	2,29128	1,73205	1,33333	1,02020	0,75000	0,48431	0,00000	0,00000
300°	10,46251	5,42442	3,71886	2,84520	2,30277	1,92400	1,63613	1,40138	1,19610	1,00000	0,00000
330°	10,85349	5,84091	4,16164	3,31551	2,80252	2,45561	2,20424	2,01167	1,85827	1,73206	0,00000
360°	11,00000	6,00000	4,33333	3,50000	3,00000	2,66667	2,42857	2,25857	2,11111	2,00000	0,00000

Tabela 7b

P''

φ^0	$\frac{v''_x}{r\omega}$										$\frac{v''_y}{v\omega}$
	λ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
30°	−0,54335	−0,58704	−0,63139	−0,67677	−0,72361	−0,77241	−0,82357	−0,87357	−0,93640	−1,00000	0,00000
60°	−0,90949	−0,95396	−1,00055	−1,05067	−1,10622	−1,17011	−1,24716	−1,34642	−1,48809	−1,73206	0,00000
90°	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	0,00000
120°	−0,82257	−0,77810	−0,73151	−0,68139	−0,62584	−0,56195	−0,48490	−0,38564	−0,24397	0,00000	0,00000
150°	−0,45665	−0,41296	−0,36861	−0,32323	−0,27639	−0,22659	−0,17643	−0,12203	−0,06360	0,00000	0,00000
180°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
210°	0,45665	0,41296	0,36861	0,32323	0,27639	0,22659	0,17643	0,12203	0,06360	0,00000	0,00000
240°	0,82257	0,77810	0,73151	0,68139	0,62584	0,56195	0,48490	0,38564	0,24397	0,00000	0,00000
270°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,00000
300°	0,90949	0,95396	1,00055	1,05067	1,10622	1,17011	1,24716	1,34642	1,48809	1,73206	0,00000
330°	0,54335	0,58704	0,63139	0,67677	0,72361	0,77241	0,82357	0,87357	0,93640	1,00000	0,00000
360°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela 7c

P''

φ°	$\frac{a''_x}{r\omega^2}$										$\frac{a''_y}{r\omega^2}$
	λ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
0°	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−0,00000
30°	−0,91627	−0,96806	−1,02299	−1,08291	−1,17505	−1,22746	−1,31790	−1,42718	−1,56191	−1,73206	0,00000
60°	−0,45000	−0,40004	−0,35030	−0,30133	−0,25465	−0,21380	−0,18777	−0,20133	−0,33760	−1,00000	0,00000
90°	0,10050	0,20412	0,31448	0,43644	0,57735	0,75000	−0,98020	1,33333	2,07479	0,00000	0,00000
120°	0,55000	0,59996	0,64970	0,69867	0,74535	0,78620	0,81223	0,79867	0,66240	0,00000	0,00000
150°	0,81579	0,76400	0,70907	0,64915	0,55701	0,50460	0,41416	0,30488	0,17015	0,00000	0,00000
180°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,000000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,00000
210°	0,81579	0,76400	0,70907	0,64915	0,55701	0,50460	0,41416	0,30488	0,17015	0,00000	0,00000
240°	0,55000	0,59996	0,64970	0,69867	0,74535	0,78620	0,81223	0,79867	0,66240	0,00000	0,00000
270°	0,10050	0,20412	0,31448	0,43644	0,57735	0,75000	0,98020	1,33333	2,07479	0,00000	0,00000
300°	−0,45000	−0,40004	−0,35030	−0,30133	−0,25465	−0,21380	−0,18777	−0,20133	−0,33760	−1,00000	0,00000
330°	−0,91627	−0,96806	−1,02299	−1,08291	−1,17505	−1,22746	−1,31790	−1,42718	−1,56191	−1,73206	0,00000
360°	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	0,00000

Tabela 8a

P'''

φ°	$X'''/_r$									
	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	11,00000	6,00000	4,33333	3,50000	3,00000	2,66667	2,42857	2,25857	2,11111	2,00000
30°	11,35349	6,34091	4,66164	3,81551	3,30252	2,95561	2,70424	2,51167	2,35827	2,23207
60°	11,32854	6,29045	4,58489	3,71123	3,16880	2,79003	2,50216	2,26741	2,06213	1,86603
90°	10,94987	5,89897	4,17989	3,29128	2,73205	2,33333	2,02020	1,75000	1,48431	1,00000
120°	10,32854	5,29045	3,58489	2,71123	2,16830	1,79003	1,50216	1,26741	1,06213	0,86603
150°	9,62143	4,60885	2,92958	2,08345	1,57046	1,22355	0,97218	0,77961	0,62621	0,50000
180°	9,00000	4,00000	2,33333	1,50000	1,00000	0,66667	0,42857	0,25000	0,11111	0,00000
210°	8,62143	3,60885	1,92958	1,08345	0,57046	0,22355	−0,02728	−0,22039	−0,37379	−0,50000
240°	8,59648	3,55839	1,85283	0,97917	0,43674	0,5797	−0,22990	−0,46465	−0,66993	−0,86603
270°	8,94987	3,89897	2,17979	1,29128	0,73205	0,33333	0,02020	−0,25000	−0,51569	−1,00000
300°	9,59648	4,55839	2,85283	1,97917	1,43674	1,05797	0,77010	0,53535	0,33007	0,13397
330°	10,35349	5,34091	3,66164	2,81551	2,30252	1,95561	1,70424	1,51167	1,35827	1,23206
360°	11,00000	6,00000	4,33333	3,50000	3,00000	2,66667	2,42857	2,25857	2,11111	2,00000

Tabela 8a

P'''

(continuare)

φ°	Y'''/r									
	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	10,00000	5,00000	3,33333	2,50000	2,00000	1,66667	1,42857	1,25000	1,11111	1,00000
30°	9,98746	4,97488	3,29561	2,44948	1,93649	1,58958	1,33821	1,14564	0,99224	0,86603
60°	9,96251	4,92442	3,21888	2,34530	1,80277	1,42400	1,13613	0,90138	0,69610	0,50000
90°	9,94987	4,89897	3,17979	2,29128	1,73205	1,33333	1,02020	0,75000	0,48431	0,00000
120°	9,96251	4,92442	3,21888	2,34530	1,80277	1,42400	1,13613	0,90138	0,69610	0,50000
150°	9,98746	4,97488	3,29561	2,44948	1,93649	1,58958	1,33821	1,14564	0,99224	0,86603
180°	10,00000	5,00000	3,33333	2,50000	2,00000	1,66667	1,42857	1,25000	1,11111	1,00000
210°	9,98746	4,97488	3,29561	2,44948	1,93649	1,58958	1,33821	1,14564	0,99224	0,86603
240°	9,96251	4,92442	3,21888	2,34530	1,80277	1,42400	1,13613	0,90138	0,69610	0,50000
270°	9,94987	4,89897	3,17979	2,29128	1,73205	1,33333	1,02020	0,75000	0,48431	0,00000
300°	9,96251	4,92442	3,21888	2,34530	1,80277	1,42400	1,13613	0,90138	0,69610	0,50000
330°	9,98746	4,97488	3,29561	2,44948	2,93649	1,58958	1,33821	1,14564	0,99224	0,86603
360°	10,00000	5,00000	3,33333	2,50000	2,00000	1,66667	1,42857	1,25000	1,11111	1,00000

Tabela 8b

P'''

φ°	$v_x'''/r\omega^2$									
	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
30°	0,32268	0,27899	0,23463	0,19926	0,14242	0,09362	0,04346	−0,01194	−0,07037	−0,13397
60°	−0,40949	−0,45396	−0,50055	−0,55067	−0,60622	−0,67011	−0,74716	−0,84642	−0,98809	−1,23206
90°	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000
120°	−1,32257	−1,27801	−1,23151	−1,17139	−1,12854	−1,06195	−0,98490	−0,88564	−0,74397	−0,50000
150°	−1,32268	−1,27899	−1,23464	−1,18926	−1,14242	−1,09362	−1,04246	−0,98806	−0,92963	−0,86603
180°	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,000000
210°	−0,40938	−0,45307	−0,49742	−0,54280	−0,58964	−0,63844	−1,68960	−0,74400	−0,80243	−0,86603
240°	0,32257	0,27810	0,23151	0,18139	0,12584	0,06195	−0,01510	−0,11436	−0,25603	−0,50000
270°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
300°	1,40949	1,45396	1,50055	1,55067	1,60622	1,67011	1,74716	1,84642	1,98809	2,23206
330°	1,40938	1,45307	1,49742	1,54280	1,58964	1,63844	1,68960	1,74400	1,80243	1,86603
360°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Tabela 8b

P''' *(continuare)*

φ°	$v_y'''/I\omega$									
	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
30°	−0,04335	−0,08704	−0,13139	−0,17677	−0,22361	−0,27241	−0,32357	−0,37797	−0,43640	−0,50000
60°	−0,04346	−0,08793	−0,13452	−0,18464	−0,24019	−0,30408	−0,38113	−0,48039	−0,62306	−0,86603
90°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
120°	0,04346	0,08793	0,13452	0,18464	0,24019	0,30408	0,38113	0,48038	0,62306	0,86603
150°	0,04335	0,08704	0,13139	0,17677	0,22361	0,27241	0,32357	0,37797	0,43640	0,50000
180°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
210°	−0,04335	−0,08704	−0,13139	−0,17677	−0,22361	−0,27241	−0,32357	−0,37797	−0,43640	−0,50000
240°	−0,04346	−0,08793	−0,13452	−0,18464	−0,24019	−0,30408	−0,38113	−0,48039	−0,62306	−0,86603
270°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
300°	0,04346	0,08793	0,13452	0,18464	0,24019	0,30408	0,38113	0,48039	0,62306	0,86603
330°	0,04335	0,08704	0,13139	0,17677	0,22361	0,27241	0,32357	0,37797	0,43640	0,50000
360°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela 8c

P'''

$\varphi°$	$a'''_x/r\omega^2$									
	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000
30°	−1,41627	−1,46806	−1,52299	−1,58291	−1,67505	−1,72746	−1,81790	−1,92718	−2,06191	−2,23206
60°	−1,31603	−1,26607	−1,21633	−1,16736	−1,12068	−1,07983	−1,05380	−1,06736	−1,20363	−1,86603
90°	−0,89950	−0,79588	−0,68552	−0,56356	−0,42265	−0,25000	−0,01980	0,33333	1,06479	−1,00000
120°	−0,31603	−0,26607	−0,21633	−0,16736	−0,12068	−0,07983	−0,05380	−0,06736	−0,20363	−0,86603
150°	0,31579	0,26400	0,20907	0,14915	0,05701	0,00460	−0,08584	−0,19512	−0,32985	−0,50000
180°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
210°	1,31579	1,26400	1,20907	1,14915	1,05701	1,00460	0,91416	0,80488	0,67015	0,50000
240°	1,41603	1,46599	1,51573	1,56470	1,61138	1,65223	1,67825	1,66470	1,52843	0,86603
270°	1,00500	1,20412	1,31448	1,43644	1,57636	1,75000	1,98020	2,33333	3,06479	1,00000
300°	0,41603	0,46599	0,51573	0,56470	0,61138	0,65223	0,67826	0,66470	0,52843	−1,13379
330°	−0,41627	−0,46806	−0,52299	−0,58291	−0,67505	−0,72746	−0,81790	−0,92718	−1,06191	−1,23206
360°	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000

Tabela 8c

P''' *(continuare)*

φ°	$a'''_y/r\omega^2$									
	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
30°	−0,50024	−0,10203	−0,15696	−0,21688	−0,30902	−0,36143	−0,45187	−0,56115	−0,69588	−0,86603
60°	0,50000	0,09996	0,14970	0,19867	0,24535	0,28630	0,31223	0,29867	0,16240	−0,50000
90°	0,10050	0,20412	0,31448	0,43644	0,57735	0,75000	0,98020	1,33333	2,06479	0,00000
120°	0,05000	0,09996	0,14970	0,19867	0,24535	0,28630	0,31223	0,29867	0,16240	−0,50000
150°	−0,05024	−0,10203	−0,15696	−0,21688	−0,30902	−0,36143	−0,45187	−0,56115	−0,69588	−0,86603
180°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
210°	−0,05024	−0,10203	−0,15696	−0,21688	−0,30902	−0,36143	−0,45187	−0,56115	−0,69588	−0,86603
240°	0,05000	0,09996	0,14970	0,19867	0,24535	0,28630	0,31223	0,29867	0,16240	−0,50000
270°	0,10050	0,20412	0,31448	0,43644	0,57735	0,75000	0,98020	1,33333	2,06479	0,00000
300°	0,05000	0,09996	0,14970	0,19867	0,24535	0,28630	0,31223	0,29867	0,16240	−0,50000
330°	−0,05024	−0,10203	−0,15696	−0,21688	−0,30902	−0,36143	−0,45187	−0,56115	−0,69588	−0,86603
360°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela 9a

P^{IV}

φ°	$\frac{X^{IV}}{r}$	$\frac{Y^{IV}}{r}$ λ									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	1,00000	10,00000	5,00000	3,33333	2,50000	2,00000	1,66667	1,42857	1,25000	1,11111	1,00000
30°	1,36603	10,48746	5,47488	3,79561	2,94948	2,43649	2,08958	1,83821	1,64564	1,49224	1,36603
60°	1,36603	10,83854	5,79047	4,08489	3,21123	2,66880	2,29003	2,00216	1,76741	1,56213	1,36603
90°	1,00000	10,94987	5,89897	4,17979	3,29128	2,73205	2,33333	2,02020	1,75000	1,48431	1,00000
120°	0,36603	10,83854	5,79047	4,08489	3,21123	2,66880	2,29003	2,00216	1,76741	1,56213	1,36603
150°	−0,36603	10,48746	5,47488	3,79561	2,94948	2,43649	2,08958	1,83821	1,64564	1,49224	1,36603
180°	−1,00000	10,00000	5,00000	3,33333	2,50000	2,00000	1,66667	1,42857	1,25000	1,11111	1,00000
210°	−1,36603	9,48746	4,47488	2,79561	1,94948	1,43649	1,08958	0,83821	0,64564	0,49224	0,36602
240°	−1,36603	9,09648	4,05839	2,35283	1,47917	0,93674	0,55797	0,27021	0,03535	−0,16993	−0,36603
270°	−1,00000	8,94987	3,89897	2,17979	1,29128	0,73205	0,33333	0,02020	−0,25000	−0,51569	−1,00000
300°	−0,36603	9,09648	4,05839	2,35283	1,47917	0,93674	0,55797	0,27021	0,03535	−0,16993	−0,36603
330°	0,36603	9,48746	4,47488	2,79561	1,94948	1,43649	1,08958	0,83821	0,64564	0,49224	0,36603
360°	1,00000	10,00000	5,00000	3,33333	2,50000	2,00000	1,66667	1,42857	1,25000	1,11111	100000

Tabela 9b

p^{IV}

φ_0	$\frac{v_x^{IV}}{r\omega}$	$\frac{v_y^{IV}}{r\omega}$									
		λ									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
30°	0,36603	0,82268	0,77899	0,73464	0,68926	0,64242	0,59362	0,54246	0,48806	0,42963	0,36603
60°	−0,36603	0,45654	0,41207	0,36549	0,31536	0,25981	0,19592	0,11887	0,01961	−0,12206	−0,36603
90°	−1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
120°	−1,36603	−0,45654	−0,41207	−0,36548	−0,31536	−0,25981	−0,19592	−0,11887	−0,01961	0,12206	0,36603
150°	−1,36603	−0,82268	−0,77899	−0,73464	−0,68926	−0,64242	−0,59362	−0,54246	−0,48806	−0,42963	−0,36603
180°	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000	−1,00000
210°	−0,36603	−0,90938	−0,95307	−0,99742	−1,04280	−1,08964	−1,13844	−1,18960	−1,24400	−1,30243	−1,36603
240°	0,36603	−0,54347	−0,58793	−0,63452	−0,68464	−0,74019	−0,80408	−0,88113	−0,98139	−1,12206	−1,36603
270°	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
300°	1,36603	0,54347	0,58793	0,63452	0,68464	0,74019	0,80408	0,88113	0,98139	0,12206	1,36603
330°	1,36603	0,90938	0,95307	0,99742	1,04280	1,08964	1,13844	1,18960	1,24400	1,30243	1,36603
360°	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Tabela 9c

P^{IV}

$\varphi°$	$\frac{a_x^{IV}}{r\omega^2}$	$\frac{a_y^{IV}}{r\omega^2}$									
		λ									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	−1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
30°	−1,36603	−0,55024	−0,60203	−0,65696	−0,71688	−0,80902	−0,86143	−0,95187	−1,06115	−1,19588	−1,36603
60°	−1,36603	−0,81603	−0,76607	−0,71633	−0,66636	−0,62068	−0,57983	−0,55380	−0,56736	−0,70363	−1,36603
90°	−1,00000	−0,89950	−0,79588	−0,68552	−0,56366	−0,42265	−0,25000	−0,01980	0,33333	1,06479	−1,00000
120°	−0,36603	−0,81603	−0,76607	−0,71633	−0,66636	−0,62068	−0,57983	−0,55380	−0,56736	−0,70363	−1,36603
150°	0,36603	−0,55024	−0,60203	−0,65696	−0,71688	−0,80902	−0,86143	−0,95187	−1,06115	−1,19588	−1,36603
180°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
210°	1,36603	0,44976	0,39797	0,34304	0,28312	0,19098	0,13857	0,04813	−0,06115	−0,19588	−0,36603
240°	1,36603	0,91693	0,96599	1,01573	1,06470	1,11138	1,15222	1,17826	1,16470	1,02843	0,36603
270°	1,00000	1,10050	1,20412	1,31448	1,43644	1,57735	1,75000	1,98020	2,33333	3,06479	1,00000
300°	0,36603	0,91693	0,96599	1,01573	1,06470	1,11138	1,15222	1,17826	1,16470	1,02843	0,36603
330°	−0,36603	0,44976	0,39797	0,34304	0,28213	0,19098	0,13857	0,04813	−0,06115	−0,19588	−0,36603
360°	−1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Deşi în original aceste diagrame s-au calculat din 10 în 10 grade ale unghiului manivelei φ, ele se vor reda aici numai patru variaţii din 30 în 30 de grade.

Se redau tabelele:

1 pentru $\theta = f(\lambda, \varphi)$, (20)

2 pentru $\psi = f(\lambda, \varphi)$,

3 pentru $\dot{\theta}/\omega = f(\lambda, \varphi)$, (21)

4 pentru $\dot{\psi}/\omega = f(\lambda, \varphi)$,

5 pentru $\ddot{\theta}/\omega^2 = f(\lambda, \varphi)$ (22)

sau $\ddot{\psi}/\omega^2 = f(\lambda, \varphi)$.

În continuare se dau tabelele 6 pentru coordonatele, vitezele şi acceleraţiile punctului P' (28), apoi 7 pentru P'' (29), 8 pentru P''' (30) şi 9 pentru P^{IV} (31).

Completînd diagramele şi nomogramele cu tabele numerice, avantajele reprezentărilor grafice privind simplitatea, rapiditatea în calcule şi observarea uşoară a felului de variaţie al funcţiilor sînt întregite printr-o precizie mai mare.

Primită la redacţie la 26 iulie 1969

UN CONCEPT NOU DE EXPRIMARE A GRADULUI DE SIGURANȚĂ ÎN CALCULUL STRUCTURILOR ELASTO-PLASTICE. I

de ȘTEFAN BĂLAN și VALERIU PETCU
Institutul de construcții, București.
I.N.C.E.R.C.

Se prezintă un concept nou de exprimare a gradului de siguranță pe care secțiunile critice ale structurilor static nedeterminate și structurile în ansamblu, alcătuite din materiale elasto-plastice, îl prezintă în raport cu stadiul lor de cedare. Forma concretă pe care o îmbracă noul concept este cea a densității mecanice. În prima parte a lucrării se dezvoltă o metodă de calcul a structurilor de oțel în domeniul plastic bazată pe conceptul densității mecanice, a cărei aplicare practică este demonstrată printr-un exemplu de calcul.

1. INTRODUCERE

Una dintre etapele principale ale procesului de proiectare a structurilor static nedeterminate constă în determinarea solicitărilor produse de încărcările de calcul pentru diferitele scheme posibile de încărcare, presupunînd inițial absente fenomenele de instabilitate locală sau generală a echilibrului și admițînd că deformațiile sînt suficient de mici pentru a nu fi necesară scrierea ecuațiilor de echilibru pe schemele deformate ale structurilor.

La structurile static nedeterminate formate din materiale capabile de a dezvolta deformații plastice suficient de mari, determinarea solicitărilor produse de încărcările de calcul poate fi făcută în două situații complet diferite una de cealaltă : prima situație corespunde *comportării perfect elastice*, iar a doua *comportării perfect plastice* a structurilor.

Prin definiție, o structură se comportă perfect elastic sub acțiunea încărcărilor de calcul dacă, pentru fiecare schemă defavorabilă formată de aceste încărcări, cel mult o singură secțiune a structurii ajunge în stadiul de atingere a capacității ei de rezistență.

Caracteristica principală a comportării perfect plastice a unei structuri constă în transformarea ei, în totalitate sau parțial, într-un mecanism pentru fiecare schemă defavorabilă formată de încărcările de calcul. Atin-

gerea stadiului de mecanism este consecinţa *fenomenului de adaptare*, generat de deformarea plastică a materialelor de construcţie.

Fenomenul de adaptare plastică prezintă două aspecte specifice :

— *aspectul fizic*, reprezentat de formarea succesivă a *articulaţiilor plastice* în dreptul secţiunilor celor mai solicitate, denumite *secţiuni critice*, şi

— *aspectul mecanic*, pus în evidenţă de redistribuţia solicitărilor provocată de formarea succesivă a articulaţiilor plastice.

Acest ultim aspect constituie sursa rezervei suplimentare de rezistenţă pe care o posedă structurile static nedeterminate formate din materiale elasto-plastice, care rămîne nevalorificată atunci cînd determinarea solicitărilor produse de încărcările de calcul se face numai în domeniul elastic. Din această cauză, solicitările date de calcul plastic sînt, în general, mai mici decît cele date de calculul elastic.

În concepţia actuală a proiectării, siguranţa construcţiilor se apreciază prin intermediul unor coeficienţi diferenţiaţi, care se referă la încărcări, la caracteristicile fizico-mecanice ale materialelor şi la condiţiile de lucru ale elementelor de construcţie. *Această concepţie apare însă incompletă, întrucît, datorită numărului şi eterogenităţii lor, coeficienţii diferenţiaţi nu pot să exprime într-o formă sintetică gradul de siguranţă pe care îl prezintă secţiunile elementelor unei structuri şi structura în ansamblu în raport cu stadiul lor de cedare.*

Avînd ca punct de plecare această constatare, prezentul studiu îşi propune să facă o completare la modul actual de apreciere a siguranţei structurilor, prin introducerea unui concept nou de exprimare într-o formă simplă, directă şi uşor controlabilă a gradului de siguranţă pe care îl prezintă faţă de stadiul de cedare atît secţiunile elementelor componente ale construcţiilor, cît şi structurile în ansamblu. Pe baza noului concept se dezvoltă apoi o teorie a calculului plastic al structurilor static nedeterminate, care prezintă aspecte specifice în funcţie de materialul de construcţie folosit.

2. CONCEPTUL DENSITĂŢII MECANICE

2.1. ÎNCĂRCĂRI ŞI COEFICIENŢI DE SUPRAÎNCĂRCARE

Din punct de vedere mecanic, acţiunea încărcărilor asupra unei structuri static nedeterminate are ca rezultat producerea de solicitări (momente încovoietoare, momente de torsiune, forţe axiale, forţe tăietoare) în secţiunile elementelor care le compun.

În calculul construcţiilor, fiecare încărcare prezintă două valori caracteristice, şi anume *valoarea nominală* şi *valoarea de calcul*.

Valorile nominale ale încărcărilor sînt precizate prin prescripţiile oficiale referitoare la încărcări. Astfel, în ţara noastră, valorile nominale ale încărcărilor permanente sînt date în standardul 504—65 [1], iar cele ale încărcărilor temporare (utile) în standardul 506—59 [2].

Încărcările nominale se utilizează în calcul pentru definirea stadiului de exploatare a construcţiilor.

Valorile de calcul ale încărcărilor se obţin din valorile nominale ale acestora prin amplificarea lor cu coeficienţi de supraîncărcare adecvaţi,

stabiliți prin prescripții oficiale de calcul. De exemplu, pentru grupările fundamentale ale încărcărilor, valorile coeficienților de supraîncărcare specificați de prescripțiile pentru calculul construcțiilor de beton armat din România [3], U.R.S.S. [4], S.U.A. [5] și India [6], precum și de noua ediție a recomandărilor Comitetului european pentru beton (CEB) [7], sînt date în tabela 1.

Tabela 1

Coeficienți de supraîncărcare de calcul

Prescripția	Încărcări fundamentale	
	permanente	temporare
STAS 8000–67	1,1–1,3	1,2–1,4
СНиП–II–B.1–62	1,1–1,3	1,2–1,4
ACI 318–63	1,5	1,8
IS 456–64	1,5	2,2
Recomandări CEB	1,4	1,6

Încărcările de calcul se utilizează pentru definirea stadiului de cedare a elementelor și a structurilor.

2.2. GRADUL DE SIGURANȚĂ AL UNEI SECȚIUNI

Pentru exprimarea gradului de siguranță pe care îl prezintă o secțiune în raport cu stadiul ei de cedare, se consideră cazul general al unei structuri formate din bare, la care solicitarea dominantă este încovoierea. Admițînd că încărcările aplicate asupra structurii pot forma toate schemele posibile de încărcare, rezultă că pentru o secțiune oarecare i există întotdeauna o anumită schemă de încărcare pentru care momentul elastic produs în această secțiune de încărcările nominale are valoarea absolută cea mai mare. Acest moment încovoietor notat cu M_{ni} este, prin definiție, *momentul nominal* al secțiunii i.

Pe de altă parte, secțiunea i este capabilă să suporte un anumit moment încovoietor maxim. Dacă structura este formată dintr-un material elasto-plastic, momentul maxim pe care îl poate suporta secțiunea i corespunde plastificării ei complete. Datorită acestui fapt, el poartă numele de *moment plastic*.

La proiectarea structurilor, mărimea momentului plastic al secțiunii i este funcție de situația în care se determină solicitările produse de încărcările de calcul. Această mărime se notează cu M_{ci} cînd calculul solicitărilor produse de încărcările de calcul se face pentru o comportare perfect elastică a structurilor și, respectiv, cu M_{pi} cînd calculul solicitărilor se face în ipoteza comportării perfect plastice a structurilor sub acțiunea încărcărilor de calcul.

În general, între momentele plastice M_{ei} şi M_{pi}, exprimate în funcţie de încărcările de calcul, există inegalitatea

$$M_{ei} > M_{pi}, \tag{1}$$

care decurge din faptul că prin efectuarea calculului plastic se valorifică rezerva suplimentară de rezistenţă a structurii ca urmare a fenomenului de adaptare plastică.

Secţiunea i prezintă, aşadar, *două stadii* de solicitare caracteristice: *stadiul de exploatare*, în care secţiunea este solicitată de momentul ei nominal, şi *stadiul de cedare* (de atingere sau de epuizare a capacităţii de rezistenţă a secţiunii), în care secţiunea este solicitată de momentul ei plastic.

Întrucît în orice secţiune a structurii acţiunea momentului nominal reprezintă o situaţie normală în decursul existenţei structurii, rezultă că pentru toate secţiunile ei, deci şi pentru cele critice (în dreptul cărora se formează articulaţii plastice în procesul de creştere a încărcărilor), stadiul de exploatare poate fi considerat ca *stadiu de referinţă*. În aceste condiţii, pentru fiecare secţiune, raportul dintre momentul plastic şi momentul nominal constituie o expresie a capacităţii secţiunii respective de a suporta un moment încovoietor mai mare decît cel produs de încărcările nominale.

Pentru secţiunea i, acest raport are expresiile

$$\delta_{ei} = \frac{M_{ei}}{M_{ni}} \tag{2}$$

sau

$$\delta_{pi} = \frac{M_{pi}}{M_{ni}}, \tag{3}$$

după cum determinarea solicitărilor produse de încărcările de calcul se face în domeniul elastic sau în cel plastic.

În general, între coeficienţii δ_{ei} şi δ_{pi} există inegalitatea

$$\delta_{ei} > \delta_{pi}, \tag{4}$$

care este o consecinţă logică a inegalităţii (1).

Semnificaţia fizică a coeficienţilor δ_{ei} şi δ_{pi}, daţi de relaţiile (2) şi (3), poate fi pusă în evidenţă prin următoarea exemplificare. Se consideră un material compact şi foarte compresibil (de tipul cauciucului), avînd densitatea d_1 în stare liberă. Fie d_2 densitatea pe care o capătă materialul după comprimarea lui.

Raportul

$$\rho = \frac{d_2}{d_1} \tag{5}$$

exprimă creşterea densităţii materialului ca urmare a comprimării lui.

Asemănarea relațiilor (2) și (3) cu relația (5) în ceea ce privește structura lor este evidentă. Ca urmare, în relațiile (2) și (3) momentul nominal M_{ni} caracterizează *densitatea inițială a solicitării* (la care este supusă secțiunea i în stadiul de exploatare), iar momentele plastice M_{ei} sau M_{pi} caracterizează *densitatea maximă a solicitării* (la care este supusă secțiunea i în stadiul ei de cedare).

Coeficienții δ_{ei} și δ_{pi} exprimă, așadar, creșterea maximă pe care o poate suferi densitatea solicitării din secțiunea i. Întrucît momentul nominal și momentul plastic sînt mărimi mecanice, se convine ca rapoartele δ_{ei} și δ_{pi} să poarte denumirea de *densități mecanice* ale secțiunii i în raport cu stadiul de referință, prin analogie cu raportul ρ, care reprezintă creșterea unei densități fizice în raport cu o altă densitate dată (de referință).

Coeficientul δ_{ei} este *densitatea mecanică elastică*, iar coeficientul δ_{pi} este *densitatea mecanică plastică* ale secțiunii i ca urmare a faptului că momentul plastic M_{ei} se obține din calculul elastic, iar momentul plastic M_{pi} din calculul plastic al structurii.

Relațiile (2) și (3) arată că densitatea mecanică elastică și densitatea mecanică plastică ale unei secțiuni exprimă gradul de siguranță pe care îl are secțiunea respectivă în stadiul de exploatare (cînd este solicitată de momentul ei nominal) în raport cu stadiul ei de cedare (cînd este solicitată de momentul ei plastic).

2.3. FORMA EXPLICITĂ A DENSITĂȚILOR MECANICE δ_{ei} ȘI δ_{pi}

Pentru explicitarea densității mecanice elastice și a densității mecanice plastice corespunzătoare unei secțiuni critice i, se consideră, de exemplu, o structură solicitată de un grup de încărcări permanente, caracterizat prin încărcarea de referință G, și de un grup de încărcări temporare, caracterizat prin încărcarea de referință P.

Cînd determinarea solicitărilor produse de încărcările de calcul se face în ipoteza comportării perfect elastice a structurii, momentul nominal și momentul plastic în secțiunea critică i pot fi exprimate după cum urmează:

$$M_{ni} = (a_i G_n + b_i P_n)\ l \tag{6}$$

și

$$M_{ei} = (a_i G_n \lambda_c + b_i P_n \mu_c)\ l, \tag{7}$$

unde

a_i este coeficientul de influență al momentului elastic produs de încărcările permanente în secțiunea critică i,

b_i — coeficientul de influență al momentului elastic *maxim* din secțiunea critică i produs de încărcările temporare formînd schema de încărcare cea mai defavorabilă pentru această secțiune,

G_n — valoarea nominală a încărcării permanente de referință G,

P_n — valoarea nominală a încărcării temporare de referință P,

l — lungimea deschiderii de referință în funcție de care se exprimă toate celelalte deschideri ale structurii,
λ_c — coeficientul de supraîncărcare de calcul al încărcărilor permanente,
μ_c — coeficientul de supraîncărcare de calcul al încărcărilor temporare.

Considerînd expresiile (6) și (7), relația (2) devine

$$\delta_{ei} = \frac{a_i G_n \lambda_c + b_i P_n \mu_c}{a_i G_n + b_i P_n}, \tag{8}$$

relație care arată că densitatea mecanică elastică a unei secțiuni critice apare ca o medie ponderată a coeficienților de supraîncărcare de calcul, factorii de ponderare fiind încărcările nominale de referință și coeficienții de influență ai momentelor elastice produse în secțiunea critică respectivă de încărcările permanente și temporare.

În cazul particular

$$\lambda_c = \mu_c, \tag{9}$$

relația (8) devine

$$\delta_{ei} = \lambda_c = \mu_c, \tag{10}$$

respectiv densitatea mecanică elastică a secțiunilor critice ale structurii devine egală cu valoarea comună a coeficienților de supraîncărcare de calcul ai încărcărilor permanente și temporare.

Cînd determinarea solicitărilor produse de încărcările de calcul se face în ipoteza comportării perfect elastice a structurii, momentul nominal într-o secțiune critică i este dat tot de relația (6), iar momentul plastic are expresia

$$M_{pi} = (a_i G_n \lambda_i + b_i G_n \mu_i)\, l, \tag{11}$$

în care λ_i și μ_i sînt coeficienții de supraîncărcare ai încărcărilor permanente și temporare, corespunzători formării primei articulații plastice în secțiunea critică i. Valorile acestor coeficienți rezultă din calculul plastic al structurii, în funcție de legea de variație a încărcărilor permanente și temporare de la valorile nominale la valorile lor de calcul ($\lambda_i \leqslant \lambda_c$ și $\mu_i \leqslant \mu_c$).

Considerînd relațiile (6) și (11), expresia (3) devine

$$\delta_{pi} = \frac{a_i G_n \lambda_i + b_i P_n \mu_i}{a_i G_n + b_i P_n}. \tag{12}$$

Ca și în cazul precedent, densitatea mecanică plastică a unei secțiuni critice în dreptul căreia se formează prima articulație plastică apare ca o medie ponderată a coeficienților de supraîncărcare λ_i și μ_i, factorii de ponderare fiind încărcările nominale de referință și coeficienții de influență ai momentelor elastice produse în secțiunea critică respectivă de încărcările permanente și temporare.

În practică, admiterea densităților mecanice elastice δ_{ei} ca bază a dimensionării secțiunilor critice ale structurilor este, în general, neeconomică, întrucît ea provine din calculul structurilor efectuat în ipoteza comportării lor elastice sub acțiunea încărcărilor de calcul, care, așa cum s-a arătat anterior, neglijează rezerva suplimentară de rezistență ce rezultă din adaptarea plastică a structurilor. Pe de altă parte însă, dimensionarea secțiunilor critice pe baza densităților mecanice plastice δ_{pi} poate fi nesatisfăcătoare în unele cazuri, datorită fie imposibilității materialului de a dezvolta, sub acțiunea încărcărilor de calcul, deformațiile plastice necesare pentru transformarea structurilor în mecanisme, fie neîndeplinirii condițiilor de exploatare de structurile rezultate dintr-o astfel de dimensionare.

Ca urmare, în aplicațiile practice se recomandă efectuarea unei dimensionări inițiale a structurilor pe baza densităților mecanice plastice, care să fie urmată apoi de o corectare a rezultatelor obținute, astfel încît să se ajungă la îndeplinirea efectivă a condițiilor de exploatare, iar deformațiile materialului produse de încărcările de calcul să nu depășească valorile-limită ale lor. O astfel de tehnică de calcul conduce, în final, la densități mecanice δ_i ale secțiunilor critice care satisfac condițiile

$$\delta_{ei} \geqslant \delta_i \geqslant \delta_{pi}. \tag{13}$$

Inegalitățile (13) arată că sub acțiunea încărcărilor de calcul structurile se găsesc, în general, într-o fază elasto-plastică în care stadiul elastic este depășit, dar numărul articulațiilor plastice formate este mai mic decît cel necesar pentru transformarea structurilor în mecanisme.

2.4. EXEMPLU

Pentru a preciza însemnătatea pe care conceptul densității mecanice o are în calculul structurilor se consideră o grindă de oțel de secțiune constantă încastrată perfect la extremități și solicitată de încărcări permanente și temporare uniform distribuite pe toată lungimea ei. Schema generală a grinzii este dată în figura 1*a* ,unde s-a notat cu *1* secțiunile critice de pe reazeme și cu *2* secțiunea critică din mijlocul deschiderii (acestea fiind secțiunile cele mai solicitate, în dreptul cărora se formează articulațiile plastice care conduc la transformarea grinzii în mecanism).

Diagrama momentelor produse de încărcările nominale este trasată în figura 1*b*. Din această diagramă rezultă că momentele nominale ale secțiunilor critice sînt

$$M_{n1} = \frac{(g_n + p_n)l^2}{12} \tag{14}$$

și

$$M_{n2} = \frac{(g_n + p_n)l^2}{24}, \tag{15}$$

unde g_n și p_n sînt valorile nominale ale încărcărilor permanente și temporare pe unitatea de lungime, iar l este lungimea deschiderii grinzii.

La calculul grinzii în ipoteza comportării ei perfect elastice sub acțiunea încărcărilor de calcul, numai secțiunile notate cu *1* sînt critice, deoarece numai în aceste secțiuni se atinge momentul plastic. Valoarea acestui moment este dată de relația

$$M_{e1} = \frac{(g_c + p_c)l^2}{12}, \tag{16}$$

în care g_c şi p_c sînt valorile de calcul ale încărcărilor permanente şi temporare pe unitatea de lungime.

Densitatea mecanică elastică a secţiunilor critice *1* este deci

$$\delta_{e1} = \frac{M_{e1}}{M_{n1}} = \frac{g_c + p_c}{g_n + p_n} > 1. \tag{17}$$

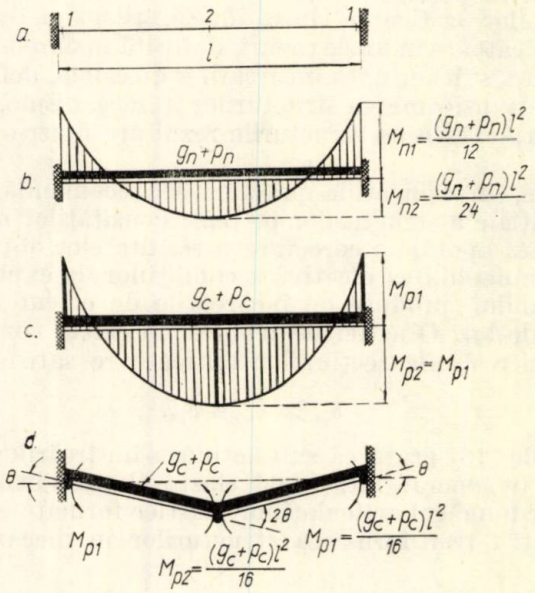


Fig. 1

Grinda fiind de secţiune constantă, rezultă că monentul plastic al secţiunii *2* este

$$M_{e2} = M_{e1}. \tag{18}$$

În această situaţie, densitatea mecanică elastică a secţiunii *2* este

$$\delta_{e2} = \frac{M_{e2}}{M_{n2}} = \frac{2(g_c + p_c)}{g_n + p_n}. \tag{19}$$

Aşa cum se arată la punctul 3.3 al acestei lucrări, condiţia comportării elastice a întregului material în stadiul de exploatare cere ca la structurile de oţel densitatea mecanică a fiecărei secţiuni să fie cel puţin egală cu 1,20.

Ţinînd seama de coeficienţii de supraîncărcare de calcul daţi în tabela 1, expresiile (17) şi (19) arată că pentru

$$\frac{p_n}{g_n} \geqslant 0{,}5 \tag{20}$$

densităţile mecanice elastice δ_{e1} şi δ_{e2} sînt întotdeauna mai mari decît 1,20, ele asigurînd deci comportarea elastică a întregului material în stadiul de exploatare.

Cînd calculul grinzii se face în ipoteza comportării ei perfect plastice sub acţiunea încărcărilor de calcul, momentele plastice din secţiunile critice *1* şi *2* au valoarea comună (fig. 1*c*)

$$M_{p1} = M_{p2} = \frac{(g_c + p_c)l^2}{16}. \tag{21}$$

Considerînd relaţiile (14), (15) şi (21), pentru densităţile mecanice plastice ale secţiunilor critice *1* şi *2* se obţin expresiile

$$\delta_{p1} = \frac{M_{p1}}{M_{n1}} = \frac{3(g_c + p_c)}{4(g_n + p_n)} \tag{22}$$

şi, respectiv,

$$\delta_{p2} = \frac{M_{p2}}{M_{n2}} = \frac{3(g_c + p_c)}{2(g_n + p_n)}. \tag{23}$$

Densitatea mecanică δ_{p2} este mai mare decît $\frac{3}{2}$, întrucît raportul $\frac{g_c + p_c}{g_n + p_n}$ este întotdeauna supraunitar. Spre deosebire de aceasta, densitatea mecanică δ_{p1} este supraunitară pentru $\frac{g_c + p_c}{g_n + p_n} > \frac{4}{3}$, este egală cu unitatea pentru $\frac{g_c + p_c}{g_n + p_n} = \frac{4}{3}$ şi este subunitară pentru $\frac{g_c + p_c}{g_n + p_n} < \frac{4}{3}$.

Din precizările de mai sus rezultă că densitatea mecanică plastică δ_{p2} este întotdeauna mai mare decît 1,20 (valoare care asigură comportarea elastică a întregului material al grinzii în stadiul de exploatare). Spre deosebire de aceasta, densitatea mecanică plastică δ_{p1} este mai mare decît 1,20 numai dacă încărcările satisfac inegalitatea

$$\frac{3(g_c + p_c)}{4(g_n + p_n)} > 1{,}20, \tag{24}$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\frac{g_c + p_c}{g_n + p_n} > 1{,}6. \tag{25}$$

Cînd raportul $\frac{g_c + p_c}{g_n + p_n}$ este mai mic decît 1,6, densitatea mecanică plastică a secţiunilor critice *1* se ia cu valoarea 1,20.

În acest caz, momentul plastic al secţiunilor critice ale grinzii trebuie să aibă valoarea

$$M_{p1} = M_{p2} = 1{,}20\ M_{n1} = \frac{(g_n + p_n)l^2}{10}. \tag{26}$$

Acest exemplu, în cadrul căruia s-a aplicat procedeul de calcul indicat la sfîrşitul punctului 2.3, pune în evidenţă însemnătatea densităţii mecanice ca factor de bază în realizarea unei proiectări raţionale a structurilor, care să confere acestora capacitatea de a rezista la acţiunea încărcărilor de calcul, precum şi posibilitatea unei comportări normale în stadiul de exploatare.

2.5. GRADUL DE SIGURANŢĂ AL UNEI STRUCTURI

Conceptul densităţii mecanice are un caracter complet general, el referindu-se nu numai la secţiunile critice luate separat, ci şi la structurile static nedeterminate în ansamblu. Astfel, analog secţiunilor critice, fiecare structură prezintă în calculul ei de rezistenţă două stadii de solicitare, şi anume *stadiul de exploatare* şi *stadiul de cedare*. Stadiul de exploatare este caracterizat de acţiunea încărcărilor nominale asupra structurilor. Stadiului de cedare îi corespund acele valori ale încărcărilor sub acţiunea cărora structura atinge, din punctul de vedere al criteriului de cedare adoptat, capacitatea ei de rezistenţă. La proiectarea structurilor, atingerea stadiului de cedare are loc întotdeauna sub acţiunea încărcărilor luate cu valorile lor de calcul.

Admiţînd stadiul de exploatare ca stadiu de referinţă, rezultă că pentru fiecare schemă defavorabilă de încărcare raportul

$$\Delta = \frac{S_c}{S_n} \tag{27}$$

dintre suma încărcărilor de cedare de referinţă, S_c, şi suma încărcărilor nominale de referinţă, S_n, exprimă însăşi capacitatea structurii de a suporta încărcări cu valori mai mari decît cele nominale.

Pentru fiecare schemă defavorabilă de încărcare, încărcările de cedare pot fi calculate într-una din cele două situaţii prezentate la punctul 1 al acestei lucrări, prima situaţie corespunzînd comportării perfect elastice, iar a doua comportării perfect plastice a structurii sub acţiunea acestor încărcări.

Fie S_{ce} suma încărcărilor de cedare de referinţă stabilite în ipoteza comportării perfect elastice şi S_{cp} suma încărcărilor de cedare de referinţă deduse în ipoteza comportării perfect plastice a structurii. Ca urmare, raportul (27) se prezintă sub următoarele două forme:

$$\Delta_e = \frac{S_{ce}}{S_n} \tag{28}$$

şi

$$\Delta_p = \frac{S_{cp}}{S_n}. \tag{29}$$

Ca şi în cazul relaţiilor (2) şi (3), asemănarea relaţiilor (28) şi (29) cu relaţia (5) este evidentă. În consecinţă, în relaţiile (28) şi (29) suma încărcărilor nominale de referinţă, S_n, caracterizează densitatea iniţială a încărcărilor (la care este supusă structura în stadiul de exploatare), iar suma încărcărilor de cedare de referinţă, S_{ce} sau S_{cp}, caracterizează densitatea maximă a încărcărilor pe care le poate suporta structura.

Coeficienţii Δ_e şi Δ_p exprimă, aşadar, creşterea maximă pe care o poate suferi densitatea încărcărilor care solicită structura. Întrucît încărcările nominale şi încărcările de cedare sînt mărimi mecanice, se convine ca rapoartele Δ_e şi Δ_p să poarte denumirea de *densităţi mecanice ale structurii* considerate.

Coeficientul Δ_e este *densitatea mecanică elastică*, iar coeficientul Δ_p *densitatea mecanică plastică* ale structurii, ca urmare a faptului că sumele S_{ce} şi S_{cp} se obţin în ipoteza comportării perfect elastice şi, respectiv, în ipoteza comportării perfect plastice a structurii în stadiul ei de cedare.

Relaţiile (28) şi (29) arată că densitatea mecanică elastică sau densitatea mecanică plastică ale unei structuri exprimă gradul de siguranţă pe care îl prezintă structura în stadiul de exploatare (cînd este solicitată de încărcările nominale) în raport cu stadiul ei de cedare.

2.6. FORMA EXPLICITĂ A DENSITĂȚILOR MECANICE Δ_e ȘI Δ_p

Se consideră o structură solicitată de un grup de încărcări permanente, caracterizat prin încărcarea de referință G, și de un grup de încărcări temporare, caracterizat prin încărcarea de referință P.

Densitatea mecanică elastică și densitatea mecanică plastică ale structurii pot fi exprimate în acest caz sub următoarele forme:

$$\Delta_e = \frac{G_n \lambda_e + P_n \mu_e}{G_n + P_n} \tag{30}$$

și

$$\Delta_p = \frac{G_n \lambda_p + P_n \mu_p}{G_n + P_n}, \tag{31}$$

unde

G_n, P_n sînt valorile nominale ale încărcărilor permanente și temporare de referință,

λ_e,μ_e — coeficienții de supraîncărcare ai încărcărilor permanente și temporare de cedare, deduși în ipoteza comportării perfect elastice a structurii sub acțiunea acestor încărcări,

λ_p, μ_p — coeficienții de supraîncărcare ai încărcărilor permanente și temporare de cedare, deduși în ipoteza comportării perfect plastice a structurii sub acțiunea acestor încărcări.

Valorile coeficienților de supraîncărcare din relațiile (30) și (31) se obțin în funcție de legea de variație a încărcărilor permanente și temporare de la valorile nominale la valorile lor corespunzătoare cedării structurii.

Relațiile (30) și (31) arată că densitatea mecanică a unei structuri apare ca o medie ponderată a coeficienților de supraîncărcare corespunzători cedării, factorii de ponderare fiind încărcările permanente și temporare de referință, luate cu valorile lor nominale.

Densitățile mecanice Δ_e și Δ_p reprezintă factori de bază în procesul de verificare a capacității de rezistență a structurilor, întrucît ele dau o indicație cantitativă precisă asupra posibilității pe care o au structurile de a suporta încărcări mai mari decît cele nominale.

Valoarea minimă admisă a densității mecanice a unei structuri se obține atunci cînd încărcările de cedare sînt egale cu încărcările de calcul, adică

$$\Delta^{\min} = \frac{G_n \lambda_c + P_n \mu_c}{G_n + P_n}, \tag{32}$$

unde λ_c și μ_c sînt coeficienții de supraîncărcare de calcul ai încărcărilor permanente și temporare, luați din prescripțiile oficiale de calcul.

În cazul particular cînd coeficienții λ_c și μ_c sînt egali între ei, relația (32) devine

$$\Delta^{\min} = \lambda_c = \mu_c, \tag{33}$$

respectiv densitatea mecanică minimă admisă a structurii devine egală cu valoarea comună a coeficienților de supraîncărcare de calcul ai încărcărilor permanente și temporare.

2.7. IMPORTANŢA CONCEPTULUI DENSITĂŢII MECANICE

Conceptul densităţii mecanice sub cele două forme concrete prezentate în acest capitol este generatorul unei teorii noi a calculului structurilor static nedeterminate alcătuite din materiale capabile de a dezvolta deformaţii plastice mari. Principalul avantaj al conceptului densităţii mecanice constă în efectuarea calculului structurilor prin intermediul unor factori sintetici (densităţi mecanice ale secţiunilor critice şi densităţi mecanice ale structurilor), care au proprietatea de a exprima cantitativ capacitatea de rezistenţă a secţiunilor critice şi a structurilor în ansamblu şi de a reflecta modul de comportare a acestora în stadiul de exploatare. Importanţa abordării în acest mod a problemei determinării solicitărilor în raport cu care se face proiectarea structurilor constă, printre altele, în posibilitatea stabilirii în prealabil pentru fiecare tip de structură a soluţiei densităţilor mecanice corespunzătoare secţiunilor ei critice. În acest fel, proiectarea structurilor se poate face direct, prin utilizarea densităţilor mecanice deja calculate, fără a mai fi necesară efectuarea calculului elastic sau a calculului plastic pentru fiecare structură în parte.

Pe această linie, în capitolele care urmează se prezintă principalele aspecte pe care noua teorie a calculului structurilor bazat pe conceptul densităţii mecanice le prezintă în cazul structurilor static nedeterminate de oţel şi de beton armat.

3. CALCULUL PLASTIC AL STRUCTURILOR DE OŢEL

3.1. DETERMINAREA MOMENTELOR PLASTICE PRIN TEORIA FLASTICĂ SIMPLĂ

În procesul de proiectare a structurilor static nedeterminate de oţel, solicitate în principal la încovoiere, calculul static este precedat întotdeauna de predimensionarea elementelor componente. Cînd determinarea solicitărilor produse de încărcările de calcul se face în ipoteza comportării perfect plastice a structurilor, predimensionarea constă în exprimarea momentelor plastice ale secţiunilor critice în funcţie de un *moment plastic de referinţă* (iniţial de valoare necunoscută) prin intermediul unor coeficienţi numerici, sub forma

$$M_{pi} = \alpha_i M_{pk}, \tag{34}$$

unde

M_{pi} este momentul plastic al secţiunii critice i, $(i = 1, 2, \ldots, k, \ldots)$,
M_{pk} — momentul plastic de referinţă, care se ia, de regulă, egal cu momentul plastic al unei secţiuni critice oarecare k,
α_i — coeficientul de influenţă al momentului plastic M_{pi}.

Valorile coeficientului α_i se stabilesc în funcţie de geometria structurii, de caracteristicile ei statice şi de tipul şi mărimea încărcărilor pe baza experienţei de calcul deja acumulate.

Pentru exemplificare se consideră cadrul portal din figura 2*a*, format din bare de secţiune constantă. Solicitarea lui este produsă de încărcarea verticală P, aplicată în mijlocul deschiderii riglei, şi de o încărcare orizontală $0{,}5P$, aplicată la nivelul riglei.

În general, secțiunile critice ale barelor pe care nu se aplică încărcări sînt situate la capetele lor, iar secțiunile critice ale barelor pe care se aplică încărcări pot fi situate atît la capetele, cît și în cuprinsul lor.

La cadrul portal din figura 2*a*, secțiunile critice, notate de la *1* la *5*, se găsesc la capetele barelor și în dreptul punctului de aplicație a încărcării

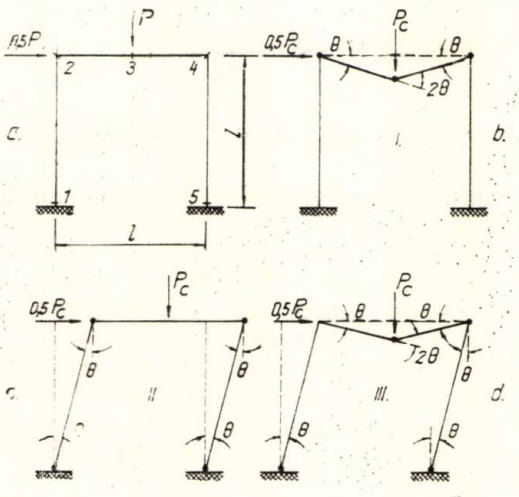


Fig. 2

verticale. Secțiunile critice *2* și *4* sînt situate pe stîlpi dacă momentul plastic al secțiunilor lor este mai mic decît momentul plastic al secțiunilor riglei sau pe riglă dacă momentul plastic al secțiunilor acesteia este mai mic decît momentul plastic al secțiunilor stîlpilor.

Pentru cadrul portal considerat, una dintre predimensionările posibile este aceea în care toate secțiunile critice au același moment plastic [8]. În această situație, dacă M_{p1} este momentul plastic de referință, rezultă

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1 \tag{35}$$

și

$$M_{p2} = M_{p3} = M_{p4} = M_{p5} = M_{p1}. \tag{36}$$

Conform reciprocei *teoremei cinematice* din teoria plastică simplă a structurilor, *valorile momentelor plastice din secțiunile critice ale unei structuri se obțin din condiția de maximum a momentului plastic de referință, exprimată în ipoteza transformării structurii în mecanism sub acțiunea încărcărilor de calcul* [8], [9]. Valoarea maximă a momentului plastic de referință corespunde, la rîndul ei, mecanismului real de cedare al structurii.

Un caz simplu de aplicare a reciprocei teoremei cinematice este cel al grinzii din figura 1. Această grindă admite un singur mecanism plastic, ale cărui caracteristici sînt date în figura 1*d*.

Ecuaţia de lucru mecanic virtual corespunzătoare acestui mecanism este

$$4M_p\theta = \frac{1}{2}(g_c + p_c)\frac{l^2}{2}\theta, \tag{37}$$

din care se deduce

$$M_p = \frac{(g_c + p_c)\,l^2}{16}, \tag{38}$$

adică acelaşi moment plastic ca şi cel dat de relaţia (21), obţinut pe considerente pur statice.

Una dintre metodele de determinare a mecanismului real de cedare al unei structuri este *metoda combinării mecanismelor* [8], [9]. Conform acestei metode, se trasează toate mecanismele elementare posibile ale structurii şi toate mecanismele rezultate din combinarea mecanismelor elementare. Pentru fiecare dintre aceste mecanisme se determină apoi valoarea momentului plastic de referinţă, folosind în acest scop ecuaţia de echilibru plastic a mecanismului respectiv. Această ecuaţie exprimă egalitatea dintre lucrul mecanic efectuat de încărcările de calcul şi lucrul mecanic efectuat de momentele plastice care acţionează în articulaţiile plastice ale mecanismului respectiv pentru o deplasare virtuală arbitrară dată mecanismului.

Expresia generală a ecuaţiei de echilibru plastic al unui mecanism de cedare este

$$\Sigma M_{pi}\theta_i = L_c \tag{39}$$

sau, ţinînd seama de relaţia (34),

$$M_{pk}\Sigma\alpha_i\theta_i = L_c, \tag{40}$$

din care se deduce

$$M_{pk} = \frac{L_c}{\Sigma\,\alpha_i\theta_i}. \tag{41}$$

În relaţiile (39)—(41), L_c este lucrul mecanic virtual efectuat de încărcările de calcul, iar θ_i este rotirea virtuală din articulaţia plastică formată în dreptul secţiunii critice i.

Dintre momentele plastice de referinţă astfel obţinute se reţine valoarea cea mai mare, care corespunde mecanismului real de cedare al structurii.

Cadrul portal din figura 2*a* admite două mecanisme elementare, notate cu I şi II, care sînt trasate în figura 2*b*, *c*, şi un mecanism rezultat din combinarea celor două mecanisme elementare, notat cu III, care este reprezentat în figura 2*d*.

Pentru o rotire virtuală θ a porţiunii de riglă cuprinse între secţiunile critice *2* şi *3* în cazul mecanismului I (fig. 2*b*) şi respectiv pentru o rotire

virtuală θ a stîlpului din stînga al mecanismelor II și III (fig. 2*c*, *d*), ecuațiile de echilibru plastic sînt următoarele :

$$4M_{p1}\theta = P_c \frac{l}{2}\theta \tag{42}$$

pentru mecanismul I,

$$4M_{p1}\theta = 0{,}5\,P_c l\theta \tag{43}$$

pentru mecanismul II și, respectiv,

$$6M_{p1}\theta = P_c \frac{l}{2}\theta + 0{,}5\,P_c l\theta \tag{44}$$

pentru mecanismul III. În ecuațiile (42)—(44), P_c este valoarea de calcul a încărcării P.

Din ecuațiile de echilibru plastic de mai sus se deduc următoarele valori ale momentului plastic de referință :

$$M_{p1} = \frac{P_c l}{8} \tag{45}$$

pentru mecanismele I și II și, respectiv,

$$M_{p1} = \frac{P_c l}{6} \tag{46}$$

pentru mecanismul III.

Dintre valorile de mai sus se reține valoarea cea mai mare, dată de relația (46), mecanismul III fiind, prin urmare, mecanismul real de cedare al cadrului considerat.

Ținînd seama de relațiile (36), momentele plastice din secțiunile critice ale cadrului, obținute din aplicarea teoriei plastice simple, sînt deci

$$M_{p1} = M_{p2} = M_{p3} = M_{p4} = M_{p5} = \frac{P_c l}{6}. \tag{47}$$

Dimensionarea barelor cadrului se face cu relația generală

$$M_{pi} = W_{pi}\sigma_c', \tag{48}$$

în care W_{pi} este modulul de rezistență plastic al secțiunii critice i, iar σ_c este limita de curgere a oțelului.

Considerînd relațiile (47) și (48), pentru modulii plastici ai secțiunilor critice ale cadrului se obține valoarea comună

$$W_{p1} = W_{p2} = W_{p3} = W_{p4} = W_{p5} = \frac{P_c l}{6\sigma_c}. \tag{49}$$

Secțiunile barelor cadrelor se iau din tabele sau se alcătuiesc din elemente solidarizate prin sudură sau nituire, astfel încît modulii lor plastici să fie cel puțin egali cu valoarea dată de relațiile (49).

3.2. CONDIȚIILE CALCULULUI PLASTIC AL STRUCTURILOR DE OȚEL

Structurile de oțel calculate în domeniul plastic trebuie să satisfacă două categorii de condiții, și anume *condițiile de cedare* și *condițiile de exploatare*.

Condițiile de cedare se referă la stabilitatea echilibrului sub acțiunea încărcărilor de calcul și la mărimea deformațiilor produse de aceste încărcări. La rîndul lor, condițiile de exploatare se referă la comportarea elastică a materialului sub acțiunea încărcărilor nominale și la mărimea deformațiilor produse de aceste încărcări.

Verificarea stabilității generale și locale a elementelor și structurilor și prevenirea fenomenelor de instabilitate a echilibrului sub acțiunea încărcărilor de calcul se fac prin mijloacele indicate în literatura de specialitate, în care se încadrează și lucrările fundamentale referitoare la calculul plastic al structurilor de oțel [8], [9], [12].

Deformațiile produse de încărcările de calcul nu trebuie să conducă din punct de vedere static la modificarea schemelor geometrice ale structurilor. În prezent se consideră că mărimea săgeților produse de încărcările de calcul nu trebuie să depășească 2% din lungimea elementului de construcție respectiv [8].

Comportarea elastică a materialului sub acțiunea încărcărilor nominale este asigurată atunci cînd efortul unitar din punctul cel mai solicitat al fiecărei secțiuni critice, produs de momentul nominal al acesteia, este cel mult egal cu limita de curgere a oțelului.

În sfîrșit, deformațiile produse de încărcările nominale nu trebuie să depășească limitele admise prin prescripțiile oficiale de calcul. De exemplu, standardul 763—66 [10] prevede pentru grinzi și cadre solicitate static săgeți admisibile cuprinse între 2,5 și 4‰ din lungimea elementului respectiv.

3.3. DENSITATEA MECANICĂ MINIMĂ ADMISĂ

Pentru fiecare structură de oțel, dimensionată inițial pe baza solicitărilor date de teoria plastică simplă, pot fi stabilite densitățile mecanice ale secțiunilor ei critice. Pe de altă parte, îndeplinirea condițiilor de cedare și de exploatare conduce la valori minime admise ale densităților mecanice ale secțiunilor critice care, în general, diferă de cele obținute pe baza teoriei plastice simple. În această situație, dimensionarea definitivă a structurilor se face reținînd pentru fiecare secțiune critică cea mai mare dintre valorile densității mecanice rezultate din aplicarea teoriei plastice simple (bazate pe ipoteza comportării perfect plastice a structurii sub acțiunea încărcărilor de calcul) și a densității mecanice minime admise, pe care o impun condițiile de cedare și de exploatare.

În cazul structurilor de oțel, la care fenomenele de instabilitate a echilibrului sub acțiunea încărcărilor de calcul pot fi preîntîmpinate prin

măsuri constructive obișnuite, s-a arătat că, de regulă, îndeplinirea condiției privind comportarea elastică a materialului sub acțiunea încărcărilor nominale face ca cele două condiții de cedare și de exploatare referitoare la mărimea deformațiilor să fie satisfăcute implicit [13]. Această concluzie a fost stabilită pentru metoda de dimensionare bazată pe un coeficient de siguranță unic [13] și a fost verificată ulterior pentru metoda de calcul bazată pe coeficienți de siguranță diferențiați [14].

Pentru îndeplinirea condiției privind comportarea elastică a materialului sub acțiunea încărcărilor nominale, este necesar și suficient ca momentul nominal al fiecărei secțiuni critice să conducă la eforturi unitare pe toată suprafața secțiunii critice respective mai mici decît limita de curgere a oțelului. La limită, valoarea maximă admisă a momentului nominal se obține în cazul cînd sub acțiunea lui este atinsă limita de curgere a oțelului doar în punctul cel mai solicitat al secțiunii critice respective. Pentru această situație-limită, diagrama eforturilor unitare pe înălțimea unei secțiuni critice solicitate de momentul nominal maxim admis este reprezentată în figura 3. Variația liniară a acestor eforturi unitare arată că secțiunea este solicitată, în ansamblu, în domeniul elastic, excepție făcînd punctele ei cele mai solicitate în care s-a atins (dar nu s-a depășit) limita de curgere.

Considerînd diagrama de eforturi unitare reprezentată în figura 3, pentru valoarea maximă admisă a momentului nominal din secțiunea critică i, $M_{ni}^{\max}$, se obține expresia

$$M_{ni}^{\max} = W_{ei}\sigma_c, \tag{50}$$

în care W_{ei} este modulul de rezistență elastic al secțiunii critice i, iar σ_c este limita de curgere a oțelului.

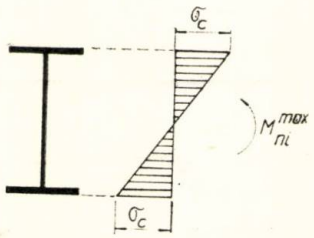


Fig. 3

Făcînd apel la relația (3), rezultă că atunci cînd momentul nominal atinge valoarea lui maximă admisă, dedusă din condiția comportării elastice a materialului sub acțiunea încărcărilor nominale, densitatea mecanică atinge valoarea ei minimă admisă. În consecință, valoarea minimă admisă a densității mecanice a secțiunii critice i este

$$\delta_{pi}^{\min} = \frac{M_{pi}}{M_{ni}^{\max}} \tag{51}$$

sau, ţinînd seama de egalităţile (48) şi (50),

$$\delta_{pi}^{\min} = \frac{W_{pi}}{W_{ei}} = f_i, \tag{52}$$

unde f_i este, prin definiţie, *coeficientul de formă* al secţiunii critice i.

Pentru profilele I şi U laminate în România, valoarea cea mai mare (deci acoperitoare din punctul de vedere al valorii minime admise pentru densităţile mecanice ale secţiunilor critice) a coeficientului de formă este 1,20 [15]. Această valoare este superioară, de asemenea, tuturor coeficienţilor de formă ai secţiunilor elementelor compuse, cu inimă plină.

Făcînd substituţia $f_i = 1{,}20$ în relaţia (52), se obţine

$$\delta_{pi}^{\min} = 1{,}20. \tag{53}$$

În concluzie, dimensionarea secţiunilor critice ale structurilor de oţel calculate în domeniul plastic trebuie să se facă astfel încît densităţile lor mecanice să fie cel puţin egale cu densitatea minimă admisă dată de relaţia (53).

3.4. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră o grindă continuă de oţel cu secţiunea constantă simplu rezemată la extremităţi, avînd cinci deschideri egale. Încărcarea permanentă este uniform distribuită pe toată lungimea grinzii. Încărcarea temporară este, de asemenea, uniform distribuită, dar ea se poate aplica pe lungimea uneia sau a mai multor deschideri ale grinzii, formînd astfel, împreună cu încărcarea permanentă, toate schemele posibile de încărcare. Secţiunile critice ale grinzii, numerotate de la *1* la *5*, sînt situate în fiecare cîmp şi pe reazemele intermediare.

Schema generală a grinzii este redată în figura 4 *a*.

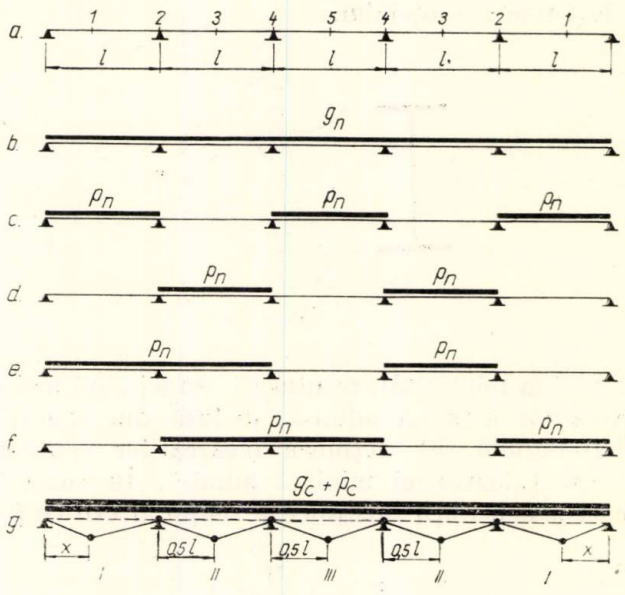


Fig. 4

Conform normativului condiționat P. 11—62 [16] și a normelor sovietice pentru calculul construcțiilor de oțel la stări-limită [17], pentru coeficienții de supraîncărcare de calcul se adoptă valorile

$$\lambda_c = \frac{g_c}{g_n} = 1{,}1 \tag{54}$$

și

$$\mu_c = \frac{p_c}{p_n} = 1{,}4, \tag{55}$$

în care g_n și p_n sînt valorile nominale, iar g_c și p_c valorile de calcul ale încărcărilor permanente și temporare pe unitatea de lungime.

Raportul dintre încărcările p_n și g_n se ia cu valoarea

$$h_n = \frac{p_n}{g_n} = 1{,}5. \tag{56}$$

Expresia generală a momentelor nominale corespunzătoare secțiunilor critice ale grinzii este

$$M_{ni} = (a_i g_n + b_i p_n)\, l^2 = (a_i + b_i h_n)\, g_n\, l^2, \tag{57}$$

în care

a_i este valoarea absolută a coeficientului de influență al momentului elastic produs de încărcarea permanentă în secțiunea critică i,

b_i — valoarea absolută a coeficientului de influență al momentului elastic maxim din secțiunea critică i, produs de încărcarea temporară formînd cea mai defavorabilă schemă de încărcare pentru această secțiune critică,

l — lungimea fiecărei deschideri a grinzii.

Pentru grinda considerată, valorile coeficienților a_i și b_i, luate din lucrarea [18], sînt date în tabela 2. Coeficienții a_i corespund schemei de încărcare din figura 4*b*, iar coeficienții b_i schemelor de încărcare din figura 4 *c*, *d*, *e*, *f*.

Tabela 2

Secțiunea critică i	a_i	b_i
1	0,078	0,100
2	0,105	0,120
3	0,033	0,079
4	0,079	0,111
5	0,046	0,086

Ținînd seama de mărimile coeficienților a_i, b_i și h_n, pentru momentele nominale ale secțiunilor critice ale grinzii se obțin valorile

$$\begin{aligned} M_{n1} &= 0{,}228\ g_n l^2, \\ M_{n2} &= 0{,}285\ g_n l^2, \\ M_{n3} &= 0{,}152\ g_n l^2, \\ M_{n4} &= 0{,}246\ g_n l^2, \\ M_{n5} &= 0{,}175\ g_n l^2. \end{aligned} \tag{58}$$

Deoarece grinda este de secțiune constantă, rezultă că toate secțiunile ei critice au același moment plastic, adică

$$M_{p1} = M_{p2} = M_{p3} = M_{p4} = M_{p5}. \tag{59}$$

Pentru simplificarea exprimării, fie M_p valoarea comună a acestor momente plastice. Densitățile mecanice ale secțiunilor critice ale grinzii, calculate cu relația (3), au valorile

$$\begin{aligned}
\delta_{p1} &= 4{,}38\,\frac{M_p}{g_n l^2},\\
\delta_{p2} &= 3{,}51\,\frac{M_p}{g_n l^2},\\
\delta_{p3} &= 6{,}58\,\frac{M_p}{g_n l^2},\\
\delta_{p4} &= 4{,}07\,\frac{M_p}{g_n l^2},\\
\delta_{p5} &= 5{,}72\,\frac{M_p}{g_n l^2}.
\end{aligned} \tag{60}$$

În relațiile (60), momentul plastic M_p se introduce cu valoarea lui maximă. Pentru determinarea acesteia se trasează cele două mecanisme posibile de cedare ale grinzii. Primul, notat cu I, corespunde deschiderilor marginale, iar al doilea, notat cu II, este specific deschiderilor intermediare ale grinzii (fig. 4*g*).

Pentru o deplasare virtuală egală cu unitatea a secțiunii critice *1*, ecuația de echilibru plastic corespunzătoare mecanismului I este (fig. 4*g*)

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{l-x}\right) M_p = \frac{(g_c + p_c)l}{2}, \tag{61}$$

unde x este distanța dintre reazemul marginal și secțiunea critică *1*.

Din ecuația (61) se deduce

$$M_p = \frac{x(l-x)}{2(l+x)}\,(g_c + p_c)l. \tag{62}$$

Condiția de maximum a momentului plastic M_p este

$$\frac{\mathrm{d}M_p}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{63}$$

adică

$$x^2 + 2lx - l^2 = 0. \tag{64}$$

Rădăcina ecuației (64) este

$$x = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414. \tag{65}$$

Considerînd relațiile (54)—(56) și (65), expresia (62) devine

$$M_p = 0{,}275\, g_n l^2. \tag{66}$$

În mod asemănător, pentru o deplasare virtuală egală cu unitatea a articulației plastice din secțiunea critică 3 (sau 5), ecuația de echilibru plastic a mecanismului II este (fig. 4*g*)

$$\frac{8\,M_p}{l} = \frac{(g_c + p_c)l}{2}, \tag{67}$$

din care se deduce

$$M_p = \frac{(g_c + p_c)l^2}{16}. \tag{68}$$

Considerînd relațiile (54)—(56), expresia (68) devine

$$M_p = 0{,}200\, g_n l^2. \tag{69}$$

Conform reciprocei teoremei cinematice din teoria plastică simplă a structurilor, dintre cele două valori ale momentului plastic M_p determinate mai sus se reține valoarea dată de relația (66), care este cea mai mare.

Pentru această valoare a momentului M_p, expresiile (60) devin

$$\begin{aligned} &\delta_{p1} = 1{,}205\,; \qquad \delta_{p2} = 0{,}965, \\ &\delta_{p3} = 1{,}810\,; \qquad \delta_{p4} = 1{,}119, \\ &\delta_{p5} = 1{,}573. \end{aligned} \tag{70}$$

Pe de altă parte, valoarea minimă admisă a densității mecanice, care asigură îndeplinirea condițiilor de cedare și de exploatare, este cea dată de egalitatea (53). Așa cum rezultă din relațiile (70), densitățile mecanice ale secțiunilor critice *2* și *4*, furnizate de teoria plastică simplă, sînt inferioare valorii minime admise. În consecință, momentul plastic M_p trebuie modificat, astfel încît densitățile mecanice ale tuturor secțiunilor critice să fie mai mari sau cel puțin egale cu 1,20. În cazul grinzii din figura 4, noua valoare a momentului plastic, care îndeplinește această condiție, este

$$M_p = \delta_{pi}^{\min} M_n^{\max}, \tag{71}$$

unde $M_n^{\max}$ este valoarea cea mai mare a momentelor nominale corespunzătoare tuturor secțiunilor critice ale grinzii.

Pentru $\delta_{pi}^{\min} = 1{,}20$ și $M_n^{\max} = M_{n2} = 0{,}285\, g_n l^2$, expresia (71) devine

$$M_p = 0{,}342\, g_n l^2, \tag{72}$$

iar noile densități mecanice ale secțiunilor critice ale grinzii,calculate cu relațiile (60), sînt

$$\begin{aligned} &\delta_{p1} = 1{,}498\,; \ \delta_{p2} = 1{,}200, \\ &\delta_{p3} = 2{,}250\,; \ \delta_{p4} = 1{,}392, \\ &\delta_{p5} = 1{,}956. \end{aligned} \tag{73}$$

Grinda continuă tratată mai sus constituie un exemplu concludent al insuficienței pe care o prezintă în unele cazuri teoria plastică simplă (bazată pe comportarea perfect plastică a structurilor sub acțiunea încărcărilor de calcul) în ce privește obținerea unor soluții care să asigure comportarea elastică a structurilor în stadiul de exploatare. Ea ilustrează însă în același timp eficiența conceptului densității mecanice ca mijloc adecvat de soluționare a problemelor legate de rezistența și de comportarea normală a structurilor în diferitele stadii de solicitare.

Procedeul de calcul plastic prezentat în cadrul acestui exemplu ilustrativ este complet general, el putînd fi aplicat oricărui tip de structură de oțel solicitată în principal la încovoiere. Dimensionarea secțiunilor

critice pe baza momentelor plastice obţinute prin aplicarea acestui procedeu asigură structurilor atît rezistenţa sub acţiunea încărcărilor de calcul, cît şi îndeplinirea condiţiilor de cedare şi de exploatare. Această concluzie sugerează *ideea stabilirii şi prezentării în tabele, cel puţin pentru structurile de oţel de tip curent, a valorilor momentelor plastice din secţiunile lor critice, astfel încît densităţile mecanice ale acestor secţiuni să fie cel puţin egale cu densitatea mecanică minimă admisă, dar nu mai mici decît densităţile mecanice rezultate din aplicarea teoriei plastice simple.* Utilizarea în proiectarea curentă a unor astfel de tabele ar elimina complet operaţiile de calcul static în domeniile elastic şi plastic, ceea ce ar prezenta o eficienţă deosebită din punctul de vedere al economiei de timp.

Primită la redacţie la 17 ianuarie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. * * * STAS 504—65. *Construcţii civile şi industriale. Sarcini în construcţii. Sarcini permanente.*
2. * * * STAS 506—59. *Construcţii civile şi industriale. Sarcini în construcţii. Sarcini utile.*
3. * * * STAS 8000—67. *Calculul elementelor de beton, beton armat şi beton precomprimat. Metoda la stări-limită.*
4. * * * СНиП II — B. 1 — 62. *Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования.*
5. * * * ACI Standard 318—63. *Building code requirements for reinforced concrete.*
6. * * * IS 456—1964. *Indian standard code of practice for plain and reinforced concrete.* Second revision, September 1967.
7. * * * *Recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton armé.* Rédaction provisoirè. Comité Européen du Béton, Paris, 1969.
8. CH. MASSONNET, M. SAVE, *Calcul plastique des constructions*, vol. I, *Ossatures planes*, Centre Belgo-Luxembourgeois d'Information de l'Acier, Bruxelles, 1961.
9. J. F. BAKER, M. R. HORNE, J. HEYMAN, *The steel skeleton* vol. II, *Plastic behaviour and design*, Cambridge University Press, 1956.
10. * * * STAS 763—66. *Construcţii civile, industriale şi agricole. Prescripţii pentru proiectarea construcţiilor metalice.*
11. * * * *Commentary on plastic design in steel. Basic concepts*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings ASCE, **85**, *EM 3*, 1 — 25 (1959).
12. * * * *Commentary on plastic design in steel. Compression members*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings ASCE, **86**, *EM 1*, 117—150 (1960).
13. H. A. SAWYER, JR., *An elastic criterion for plastic design*, Journal of the Structural Division, Proceedings ASCE, **84**, *ST 2* (1958).
14. V. PETCU, *Calculul plastic al structurilor de oţel pe baza concepţiei stărilor limită*, St. cerc. mec. apl., **23**, *5*, 1257—1282 (1966).
15. V. PETCU, *Caracteristicile profilelor laminate I şi U, necesare în calculul plastic al structurilor de oţel*, Standardizarea, **15**, *5*, 252—254 (1963).
16. * * * P. 11—62. *Normativ condiţionat pentru calculul construcţiilor la stări limită*, Partea IV; *Proiectarea construcţiilor metalice civile şi industriale*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.
17. * * * СНиП II—B. 3—62. *Стальные конструкции. Нормы проектирования.*
18. C. N. AVRAM, *Grinzi continue*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965.

CONTRIBUȚII PRIVIND ASPECTELE PROBABILISTE ALE ÎNCĂRCĂRILOR CLIMATICE ȘI SIGURANȚA CONSTRUCȚIILOR

de Al. NEGOIȚĂ și V. IANCĂU
Institutul politehnic Cluj

Pe baza lucrărilor precedente se analizează aplicarea teoriilor statistice ale valorilor extreme și rare (Fischer-Tippett, Gumbel, Poisson, Pearson), în cazul încărcărilor climatice date de zăpadă și vînt, pentru țara noastră. În continuare se fac considerații asupra perioadelor de apariție ale valorilor extreme pe baza înregistrărilor meteorologice. În încheiere, se fac propuneri originale pentru aprecierea coeficientului de supraîncărcare aplicat în cazul încărcărilor temporare, ținînd seama de siguranța construcțiilor cu durate diferite de exploatare.

Evaluarea corectă a încărcărilor climatice are o mare importanță la proiectarea lucrărilor de construcții, pe motivul că, prin perfecționarea metodelor de calcul și a procedeelor de execuție, raportul dintre greutatea proprie a acoperișurilor și încărcările climatice a scăzut considerabil.

Numeroși cercetători din diferite țări studiază diferitele aspecte legate de determinarea încărcărilor climatice. Astfel amintim unele nume mai cunoscute, cum sînt Demarre [3]—[5], Esquillan [6], [7], Guérin [8] și Pris [17] din Franța, Pyschykov [18], Kostin, Pokrovskaia [10] din Uniunea Sovietică, Thom [20] din Statele Unite, Ishizaki, Siotani, Nakagawa, Fujino, Arita, Shima din Japonia, Edwards, Hogg, Devenport din Canada și mulți alții.

În țara noastră au fost de asemenea întreprinse cercetări fructuoase de către Popescu [16] pentru determinarea sarcinii de la zăpadă și de către Sandi [19] asupra siguranței construcțiilor supuse încărcărilor temporare. Cele mai prețioase cercetări sînt însă efectuate de către Cristea Mateescu, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România [11], care aduce importante contribuții la studiul aglomerării cu zăpadă pe construcții sub acțiunea vîntului, prin încărcările efectuate în tunel aerodinamic cu materiale pulverente și prin stabilirea criteriului similitudinii mecanice.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 29, NR. 4, P. 919—945 1970

În unele lucrări anterioare, autorii au avut preocupări pentru determinarea încărcărilor climatice din țara noastră [12]—[15], în special a celor din zăpadă și din vînt.

România, după cum se știe, are un climat temperat-continental. Caracterul temperat al climei este datorit în primul rînd așezării pe glob (între paralelele 43°38′ și 48°14′ nord); de aici decurge o medie anuală a temperaturii de circa 10°C. Caracterul continental este imprimat de amplitudinea anuală a temperaturilor (care depășește 20°C), de amplitudinile diurne mari în special vara, de regimul pluviometric etc. [12].

Elementele climatice acționează asupra construcțiilor prin următoarele încărcări: din zăpadă, din vînt și din variațiile de temperatură. Aceste elemente sînt variabile aleatoare. După cum se știe, încărcarea din vînt depinde de viteza vîntului, iar cea din zăpadă de grosimea stratului de zăpadă și de densitatea zăpezii [21], [22], [24], [25].

Pentru prevederea evenimentelor viitoare, pe baza observațiilor evenimentelor prezente și trecute se folosește statistica matematică, cu condiția ca fenomenele studiate să fie omogene și stabile în timp. Stabilirea fenomenelor se deduce prin urmărirea în timp a mărimilor observate care au caracter ciclic, valorile observate repetîndu-se după perioade mai

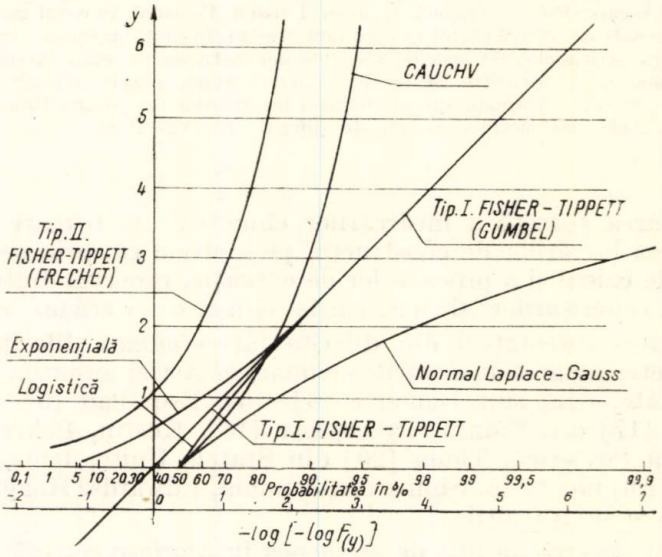


Fig. 1.— Curbe de distribuție reprezentate la scara y, $-\log[-\log, F(y)]$.

mari sau mai mici. În cazul de față se urmăresc valorile observațiilor meteorologice înregistrate [21], [22].

Funcțiile de distribuție teoretice, cele mai apropiate de distribuțiile empirice ale încărcărilor climatice sînt funcțiile: Fischer-Tippett tip I (Gumbel), funcția logistică, funcția exponențială (fig. 1), legea lui Poisson și legea lui Pearson.

Fischer-Tippett au rezolvat ecuația funcțională

$$F^N(x) = F(a_N x + b_N), \tag{1}$$

găsind trei clase de soluții, corespunzătoare următoarelor tipuri:

I $a_N = 1$; $F^N(x) = F(x + b_N)$,

II $a_N \neq 1$; $F(0) = 0$; $F^N(x) = F(a_N x)$; $a_N = N^l$; $l < 0$,

III $a_N \neq 1$; $F(0) = 1$; $F^N(x) = F(a_N x)$; $a_N = N^l$; $l > 0$.

Tipul I de distribuție, denumit și al lui Gumbel, se exprimă prin relația

$$G(x) = \exp(-e^{-y}), \tag{2}$$

în care x este variabila aleatoare, iar y, numită și variabilă redusă, este o funcție liniară de x. Funcția de distribuție și funcția de densitate de probabilitate sînt reprezentate în figurile 2 și 3.

Funcția de repartiție logistică poate fi exprimată astfel:

$$F(y) = \frac{e^y}{1 + e^y}, \tag{3}$$

iar funcția de repartiție a distribuției exponențiale sub forma:

$$F(y) = 1 - e^{-y}. \tag{4}$$

În tabela 1 se dau date comparative între probabilitatea distribuției de tip I și distribuția exponențială.

Tabela 1

Date comparative între probabilitatea distribuției de tip I și distribuția exponențială

Variabila redusă	Probabilitatea distribuției *I*	Probabilitatea distribuției exponențiale	$-\log(-\log P)$
0,0	0,3678	0	—
0,1	0,4046	0,09517	−0,85
0,2	0,4410	0,18127	−0,53
0,5	0,5452	0,39347	0,06
1,0	0,6922	0,63212	0,78
2,0	0,8734	0,86467	1,92
3,0	0,9514	0,95022	3,00
4,0	0,9818	0,98170	4,00

Din figura 1 rezultă că cele trei curbe reprezentînd funcțiile de distribuție arătate mai sus sînt confundate de la $y = 3$, adică pentru valorile mari ale variabilei aleatoare, care de altfel ne interesează.

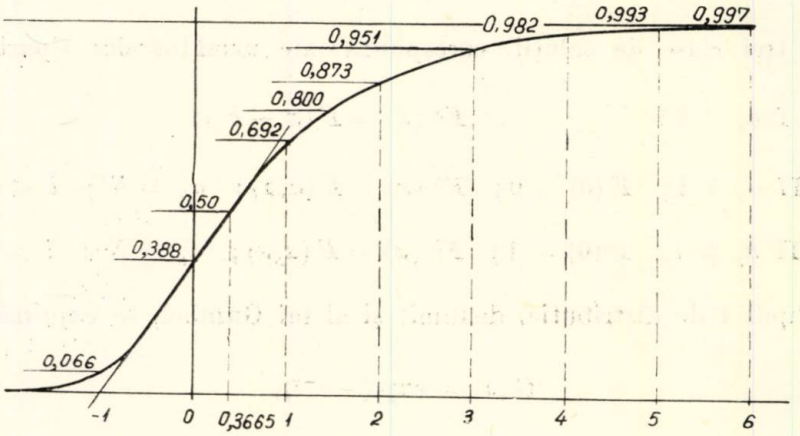


Fig. 2. — Funcția de distribuție a lui Gumbel $F(y) = \exp\,[e^{-y}]$.

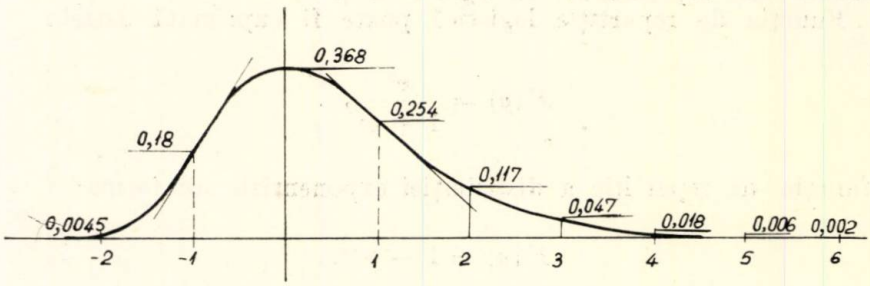


Fig. 3. — Funcția de densitate a probabilității $f(y) = \dfrac{F(y)}{e^{y}}$.

Funcția de repartiție pentru distribuția Gumbel este

$$F(y) = \exp(-e^{-y}),$$

a cărei probabilitate pentru ca variabila să fie cuprinsă într-un interval dat se găsește diferențiind:

$$f(y)\,dy = e^{-e^{-y}} \cdot d(-e^{-y}) = e^{-e^{-y}} \cdot e^{-y}\,dy. \tag{5}$$

Derivata secundă

$$f'(y) = \frac{F(y)(1 - e^{y})}{e^{2y}} \tag{6}$$

se anulează pentru $y = 0$, în care funcția de distribuție are un punct de inflexiune (fig. 2), iar funcția de densitate a probabilității o tangentă orizontală (fig. 3).

Luînd de două ori logaritmul lui $f(y)$, obținem

$$y = -\ln[-\ln F(y)]. \tag{7}$$

Probabilitatea pentru care $y \geqslant Y$ este $1 - F(y)$, iar inversa acesteia

$$\frac{1}{1 - F(y)} = T(y) \tag{8}$$

exprimă tocmai numărul de observații pe care trebuie să le facem, în medie, pentru ca variabila să egaleze valoarea y. Cum, în cazul unor fenomene, se iau în considerare valorile maxime anuale, $T(y)$ exprimă chiar perioada de timp în ani.

Legea de distribuție a lui Poisson este cea mai simplă distribuție nesimetrică, conținînd un singur parametru și are expresia

$$P(x) = e^{-a} \cdot \frac{a^x}{x!} \text{ (cu } a > 0; \quad x = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{9}$$

Valoarea medie și dispersia au ambele valoarea m. Asimetria curbei se micșorează pe măsura creșterii valorii lui m. Curba are numai abscise pozitive, iar ordonata pentru $x = 0$ nu este nulă (fig. 4). Abscisa ordonatei maxime se depărtează de axa ordonatelor pe măsura creșterii lui m, iar pentru valori mai mari a lui m se apropie de distribuția normală. Curba lui Poisson corespunde fenomenelor în care este mică posibilitatea apariției

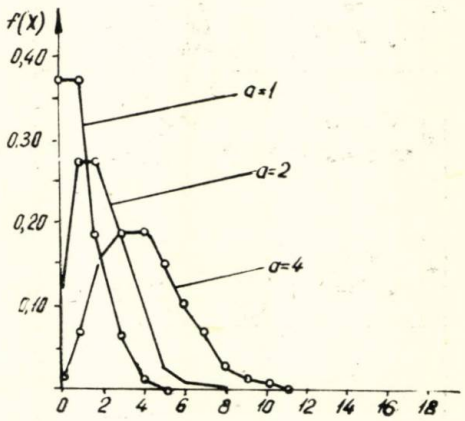


Fig. 4. — Distribuția teoretică a lui Poisson.

fenomenelor rare, cu abateri mari față de fenomenul curent cu frecvență maximă.

Legea de distribuție a lui Pearson corespunde celui mai simplu caz de variație a condițiilor de experimentare, și anume ipotezei că fenomenele mai mari sau mai mici decît fenomenul de frecvență maximă au o posibilitate diferită de apariție. Curba lui Pearson se adaptează ușor la diferite distribuții empirice asimetrice întîlnite în construcții, cum sînt încărcările climatice.

Ecuația curbei lui Pearson [11] este

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x(p-a) + p_a \cdot p_b (n+1)},$$

care este un caz particular al ecuației diferențiale generale, avînd ca soluții curbele 1—12 de distribuție indicate de Pearson.

Notînd cu

$$d = \delta - p_a,$$
$$c = p_a \cdot p_b (n+1),$$
$$a = \frac{c}{d},$$

pentru $d \neq 0$, integrarea ecuației diferențiale conduce la

$$y = y_0 \cdot e^{-\frac{x}{d}} \left(1 + \frac{x}{d}\right)^{\frac{a}{d}}, \tag{10}$$

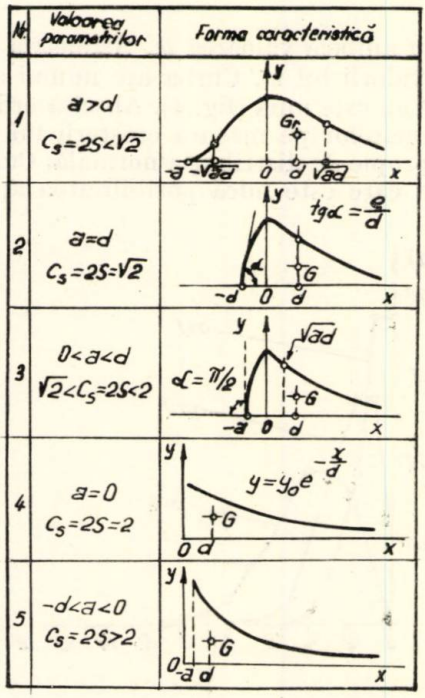


Fig. 5. — Curba de distribuție tip Pearson.

care reprezintă curba de distribuție a probabilităților Pearson de tip III, cu domeniul de valabilitate cuprins între $x = -a$ și $x = +\infty$. Diferitele forme caracteristice ale curbelor asimetrice Pearson sînt date în figura 5 în funcție de valoarea parametrilor a și d, în care

$$S = \sqrt{\frac{d}{a+d}},$$
$$C_s = 2S.$$

Folosirea în practică a coeficienților a și d fiind greoaie, aceștia au fost înlocuiți prin coeficientul de variație C_v și prin coeficientul de asimetrie C_s, legătura dintre cele două grupe de parametri și valorile termenilor șirului statistic făcîndu-se cu ajutorul momentelor următoare:

$$c_v = \sqrt{M_2} = \sqrt{d\,(a-d)} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (K-1)^2}{n}},$$

$$C_s = 2S = \frac{M_3}{\sqrt{M_2^3}} = 2\sqrt{\frac{d}{a+d}} = \frac{\sum_1^n (K-1)^3}{nC_v^3}, \qquad (11)$$

$$K = \frac{x_i}{\bar{x}},$$

$$d = \frac{C_v \cdot C_s}{2},$$

$$a + d = \frac{2C_v}{C_s}.$$

Pentru încărcarea dată de zăpadă la Cluj [13], [15], verificarea corespondenței dintre distribuția empirică și distribuția teoretică cu

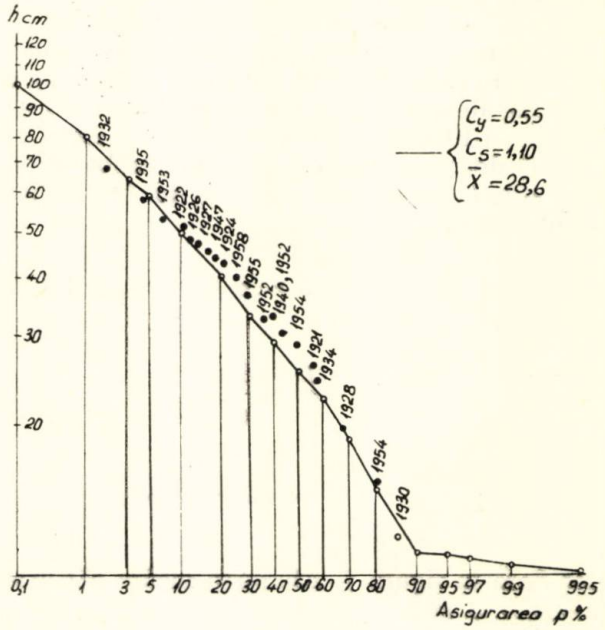


Fig. 6. — Diagrama curbei de asigurare pentru grosimea zăpezii la Cluj (Pearson).

ajutorul criteriului lui Kolmogorov a arătat că aceasta nu respectă distribuția Poisson. Construind curba de asigurare Pearson cu ajutorul tabelelor Foster-Rîbkin [11], au rezultat datele din figura 6 (pentru o perioadă de 35 de ani).

Trecerea de la asigurarea exprimată în procente la asigurarea exprimată în ani se face cu formulele

$$T = \frac{100}{p} \text{ pentru } \quad p < 50\%,$$

$$T = \frac{100}{100 - p} \text{ pentru } \quad p > 50\%. \tag{12}$$

Prin aplicarea legii lui Gumbel au rezultat valori mai mari ale grosimii stratului de zăpadă la Cluj, și anume :

	După Pearson	După Gumbel
la 20 de ani	59 cm	62 cm
la 50 de ani	67 cm	75 cm
la 100 de ani	76 cm	85 cm
la 200 de ani	86 cm	95 cm

Din datele comparative de mai sus rezultă o mai bună asigurare cu ajutorul metodei Gumbel, dar și cu legea lui Pearson. Față de încărcarea dată de zăpadă de 75 kgf/m² prevăzută în normativul nostru pentru Cluj, rezultă că aceasta poate fi depășită o dată la 4 ani, încărcarea de 100 kgf/m² o dată la 12 ani, cea de 130 kgf/m² o dată la 20 de ani, cea de 140 kgf/m² o dată la 33 de ani, iar cea de 175 kgf/m² o dată la 100 de ani, densitatea luată în considerare fiind de 200 kgf/m³.

Pentru a se putea analiza în condiții mai bune încărcările din zăpadă și din vînt, am ales o localitate care dispune de un șir mai lung de observații (48 de ani) cum este orașul București, și anume stația meteorologică București-Filaret, la care am aplicat legea lui Gumbel.

Ordonarea datelor, calculul probabilității p și a variabilei reduse $y = -\ln(-\ln p)$ sînt cuprinse în tabela 2. Trasarea dreptei Gumbel, avînd formula

$$x = u + \frac{y}{\alpha} = 33{,}6 + 25{,}2y, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{S_x}{\sigma_N},$$

$$u = \overline{x} - \frac{\overline{y}_N}{\alpha},$$

este dată în figura 7. Abaterea medie pătratică este calculată cu ajutorul tabelelor 3 și 4.

Încărcarea dată de zăpadă pentru București, conform normativului nostru [24], fiind de 100 kgf/m², cu densitatea zăpezii de 200 kgf/m³, rezultă că aceasta poate fi depășită o dată la 3 ani.

La stabilirea încărcării din vînt cu ajutorul legii lui Gumbel pentru aceeași localitate, am dispus de un număr de observații pe 65 de ani.

Tabela 2

Grosimea maximă anuală a stratului de zăpadă la București-Filaret

Nr. crt.	h ordonat	Anul	Probabilitatea p	Valoarea variabilei reduse $y = -\ln(-\ln p)$
1	10	1960	0,020	— 1,22
2	11	1959	0,041	— 1,16
3	16	1964	0,061	— 1,02
4	19	1967	0,082	— 0,92
5	20	1951	0,104	— 0,82
6	20	1948	0,124	— 0,74
7	21	1968	0,143	— 0,66
8	23	1966	0,163	— 0,60
9	23	1961	0,183	0,53
10	24	1965	0,204	— 0,46
11	25	1955	0,224	— 0,40
12	25	1946	0,245	— 0.34
13	27	1930	0,265	— 0,28
14	28	1924	0,286	— 0,22
15	29	1962	0,306	— 0,17
16	30	1939	0,326	— 0,11
17	33	1950	0,347	— 0,06
18	34	1936	0,368	± 0,00
19	34	1928	0,388	0,06
20	35	1944	0,408	0,11
21	35	1931	0,429	0,17
22	38	1953	0,450	0,22
23	38	1926	0,470	0,28
24	39	1957	0,490	0,34
25	41	1934	0,511	0,40
26	42	1935	0,531	0,46
27	45	1952	0,551	0,52

Tabelul 2 (continuare)

Nr. crt.	h ordonat	Anul	Probabilitatea p	Valoarea variabilei reduse $y = -\ln(-\ln p)$
28	45	1941	0,572	0,58
29	46	1937	0,592	0,64
30	52	1963	0,612	0,71
31	53	1940	0,632	0,78
32	53	1929	0,653	0,85
33	54	1932	0,674	0,93
34	54	1945	0,694	1,01
35	60	1938	0,715	1,09
36	60	1927	0,735	1,18
37	64	1922	0,755	1,27
38	65	1969	0,776	1,37
39	66	1933	0,796	1,47
40	66	1956	0,817	1,59
41	69	1923	0,837	1,72
42	69	1949	0,858	1,87
43	71	1958	0,878	2,04
44	74	1925	0,898	2,22
45	97	1947	0,919	2,47
46	99	1943	0,939	2,77
47	148	1954	0,959	3,18
48	150	1942	0,980	3,90
	$x = 47,5$ cm.			$y = 0,552$.

Tabela 3

Calculul abaterii S_x pentru grosimea zăpezii la București-Filaret

Intervalul	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	n_i	$(x_i - \overline{x})^2 n_i$
10— 24	17	— 30 5	930	10	9300
25— 39	32	— 15,5	240	14	3360
40— 54	47	— 0,5	0,25	10	2,5
55— 69	62	14,5	210	8	1680
70— 84	77	29,5	870	2	1740
85— 99	92	44,5	1980	2	3960
100—114	107	59,5	3550	0	—
115—129	122	74,5	5550	0	—
130—144	137	89,5	8000	0	—
145—159	152	104,5	10460	2	20920
			Total	48	40962,5

$$S_x = \sqrt{\frac{40962,5}{48}} = \sqrt{852} = 29,21.$$

Tabela 4

Calculul abaterii σ_N pentru grosimea zăpezii la București-Filaret

Intervalul	y_i	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	n_i	$(y_i - \overline{y})^2 n_i$
—1,50—1,00	—1,25	—1,802	3,25	3	9,75
—1,00—0,50	—0,75	—1,302	1,68	6	10,08
—0,50—0,00	—0,25	—0,802	0,64	9	5,76
0 —0,50	—0,25	—0,302	0,09	8	0,72
0,50—1,00	0,75	0,198	0,04	7	0,28
1,00—1,50	1,25	0,689	0,49	6	2,94
1,50—2,00	1,75	1,198	1,43	3	4,29
2,00—2,50	2,25	1,698	2,88	3	8,64
2,50—3,00	2,75	2,198	4,82	1	4,82
3,00—3,50	3,25	2,698	7,25	1	7,25
3,50—4,00	3,75	3,198	10,20	1	10,20
			Total	48	64,73

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{64,73}{48}} = \sqrt{1,35} = 1,16.$$

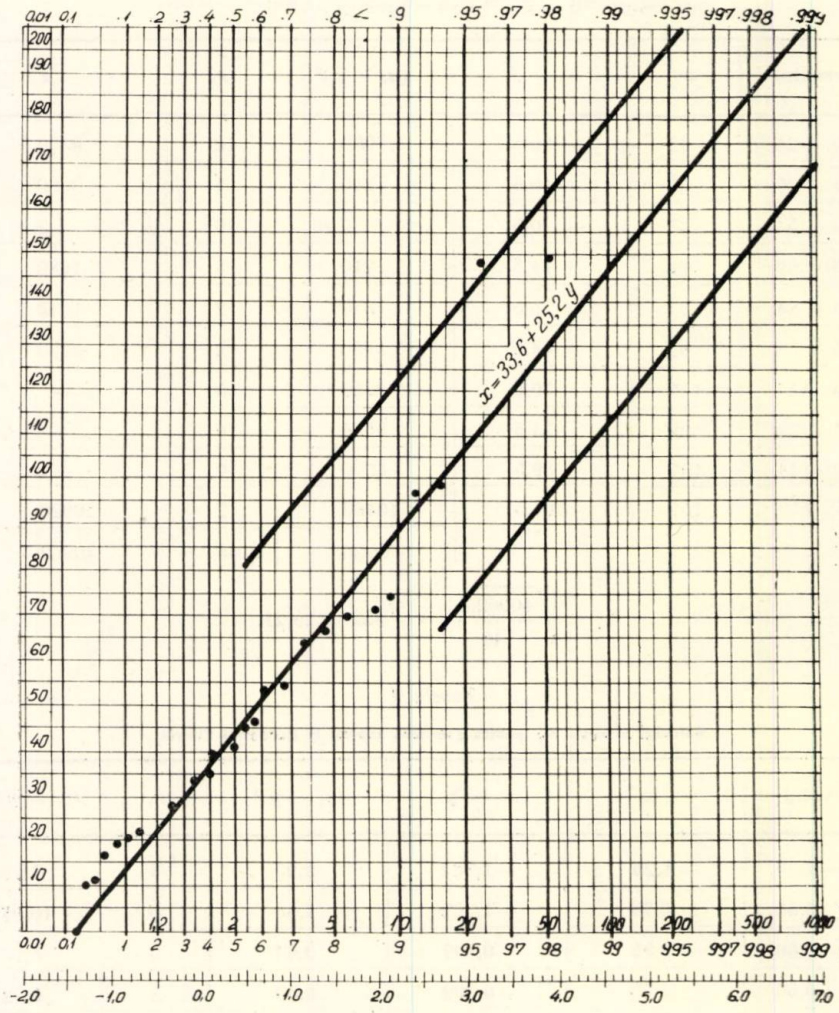


Fig. 7. — Dreapta Gumbel pentru grosimea zăpezii la București-Filaret

În tabela 5 se cuprinde ordonarea datelor, calculul probabilității și a variabilei reduse. Ultima coloană, $y = -\ln(-\ln p)$, s-a calculat cu tabelele de logaritmi în baza 10, trecerea făcîndu-se cu relația

$$-\ln(-\ln p) = \ln 10\ [\log(\log e) + y_1], \tag{14}$$

$$y_1 = -\log(-\log p).$$

Tabela 5

Valorile variabilei reduse pentru viteza vîntului la București-Filaret (pe 65 de ani)

Nr. crt.	V_{max} ordonat	Anul	Probabilitatea p	Variabila redusă $y = -\ln(-\ln p)$
1	2,5	1951	0,01515	−1,43
2	3,6	1930	0,03030	−1,24
3	3,7	1916	0,04545	−1,12
4	4,6	1923	0,06060	−1,03
5	4,6	1927	0,07575	−0,95
6	4,8	1922	0,09090	−0,87
7	4,8	1928	0,10605	−0,81
8	4,9	1926	0,12120	−0,75
9	5,1	1921	0,13625	−0,69
10	5,5	1924	0,15150	−0,64
11	6,0	1949	0,16665	−0,58
12	7,0	1950	0,18180	−0,53
13	7,0	1961	0,19695	−0,48
14	7,0	1962	0,21210	−0,44
15	7,0	1963	0,22725	−0,39
16	7,0	1964	0,24240	−0,35
17	7,0	1965	0,25755	−0,30
18	9,0	1911	0,27270	−0,26
19	9,6	1934	0,28785	−0,22
20	9,9	1932	0,30300	−0,18
21	9,9	1929	0,31815	−0,13
22	10,0	1910	0,33330	−0,09
23	10,0	1936	0,34845	−0,05
24	10,0	1966	0,36360	−0,01
25	10,0	1967	0,37875	0,30
26	10,2	1942	0,39390	0,07
27	11,0	1933	0,40905	0,11
28	11,2	1935	0,42420	0,15
29	11,3	1938	0,43935	0,19
30	11,4	1937	0,45450	0,24
31	11,6	1943	0,46965	0,28
32	12,5	1940	0,48480	0,32

Tabela 5 (continuare)

Nr. crt.	V_{max} ordonat	Anul	Probabilitatea p	Variabila redusă $y = -\ln(-\ln p)$
33	12,9	1925	0,49995	0,37
34	13,1	1931	0,51510	0,41
35	13,5	1896	0,53025	0,46
36	13,5	1944	0,54530	0,50
37	14,0	1941	0,56045	0,55
38	14,0	1968	0,57560	0,62
39	14,9	1939	0,59075	0,64
40	15,0	1906	0,60590	0,69
41	15,0	1914	0 62105	0,74
42	15,2	1907	0,63620	0,79
43	16,0	1905	0,65135	0,85
44	16,3	1945	0,66650	0,90
45	16,7	1946	0,68165	0,96
46	17,0	1893	0,69670	1,02
47	18,0	1908	0,71185	1,08
48	18,0	1909	0,72700	1,13
49	18,0	1912	0,74215	1,21
50	18,0	1915	0,75730	1,28
51	19,0	1895	0,77245	1,37
52	19,0	1897	0,78760	1,43
53	19,0	1901	0,80275	1,51
54	19,0	1904	0,81790	1,60
55	19,0	1913	0,83305	1,70
56	19,6	1894	0,84820	1,80
57	19,6	1900	0,86335	1,92
58	20,0	1953	0,87850	2,04
59	21,0	1899	0,89365	2,18
60	22,0	1903	0,90880	2,34
61	26,0	1902	0,92395	2,53
62	27,7	1947	0,93910	2,75
63	35,0	1954	0,95425	3,05
64	36,6	1947	0,96940	3,46
65	41,9	1952	0,98455	4,15

$\overline{v} = 13{,}74$ m/s. $\overline{y} = 0{,}55$.

Dreapta Gumbel pentru viteza vîntului la Bucureşti-Filaret este arătată în figura 8, construită cu ajutorul tabelelor 6 şi 7. Din figura 8 rezultă că încărcarea din vînt g_v de 70 kgf/m² prevăzută în normativul nostru poate fi depăşită o dată la 30 de ani.

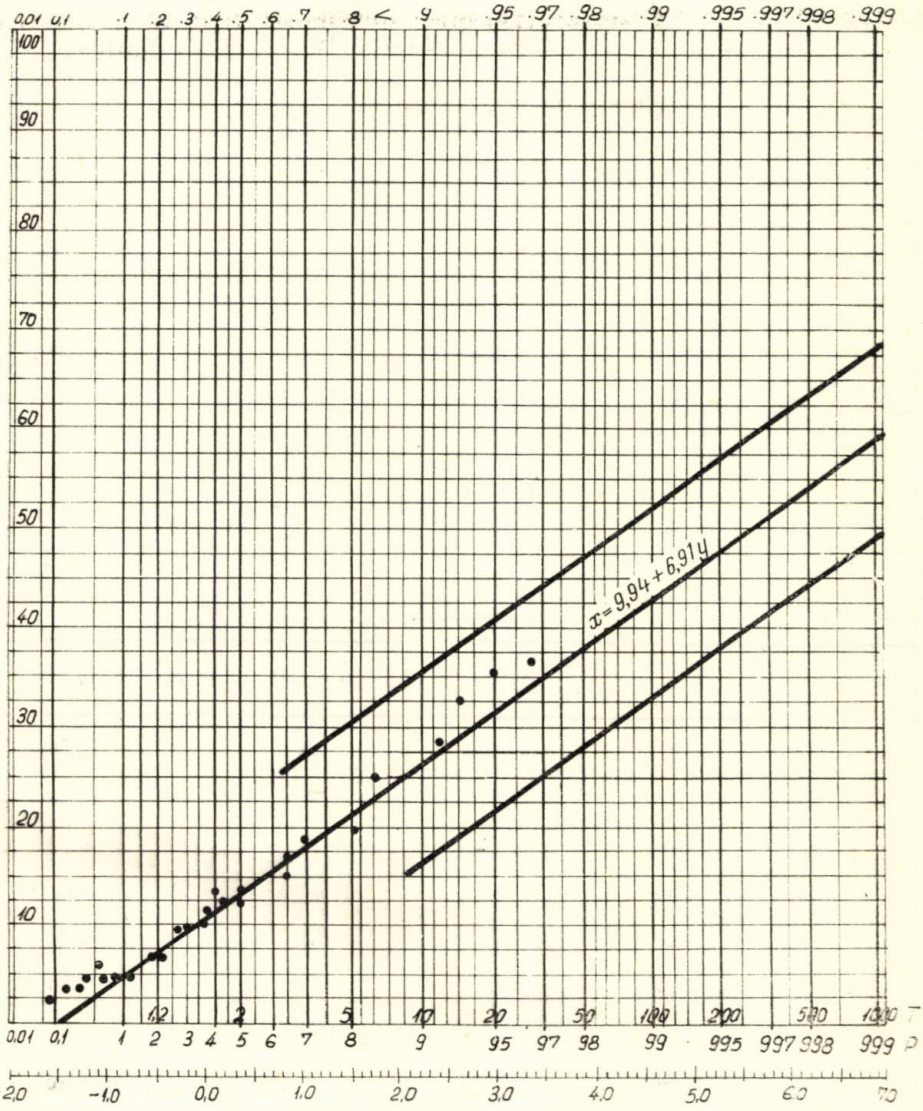


Fig. 8. — Dreapta Gumbel pentru viteza maximă a vîntului la Bucureşti-Filaret.

Pe baza înregistrărilor meteorologice s-a observat că în ţara noastră iernile excepţionale se produc după un ciclu de 11 ani (1916—1917, 1928—1929, 1941—1942, 1953—1954), cînd grosimile stratului de zăpadă sînt maxime. În special iarna din luna februarie 1954 a fost de o intensitate

Tabela 6

Calculul abaterii S_x pe viteza vîntului la București-Filaret

Intervalul	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	n_i	$(x_i - \overline{x})^2 n_i$
1 — 5	2,5	—11,24	127,00	8	1016
5—10	7,5	— 6,24	39,10	17	665
10—15	12,5	— 1,24	1,54	16	24,6
15—20	17,5	3,76	14,20	17	241
20—25	22,5	8,76	77,50	2	155
25—30	27,5	13,76	189	2	378
30—35	32,5	18,76	351	1	351
35—40	37,5	23,76	566	1	566
40—45	42,5	28,76	817	1	817
			Total	65	4213,6

$$S_x = \sqrt{\frac{4213,6}{65}} = \sqrt{65} = 8,1.$$

Tabela 7

Calculul abaterii σ_N

Intervalul	y_i	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	n_i	$(y - \overline{y})^2 n_i$
—1,5—1,0	—1,30	—1,85	3,43	4	13,70
—1,0—0,4	—0,7	—1,25	1,57	10	15,70
—0,4—0,2	—0,10	—0,65	0,42	15	6,30
0,2—0,8	0,50	—0,05	0,0025	13	0,03
0,8—1,4	1,10	0,55	0,30	9	2,70
1,4—2,0	1,70	1,15	1,33	6	7,98
2,0—2,6	2,30	1,75	3,15	4	12,60
2,6—3,2	2,90	2,35	5,55	2	11,10
3,2—3,8	3,50	2,95	8,75	1	8,75
3,8—4,4	4,10	3,55	12,60	1	12,60
			Total	65	91,46

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{91,46}{65}} \sqrt{1,40} = 1,18.$$

şi durată nemaiîntîlnită în ultimul secol în ţara noastră din punctul de vedere al cantităţii de zăpadă căzută, mai ales în jumătatea de sud a ţării. Grosimea zăpezii a depăşit în multe locuri 1 m, la Călăraşi ajungînd la 1,73 m iar în locurile troienite la cîţiva metri. Viscolul din Bărăgan a atins viteze de 25—35 m/s, iar temperatura a scăzut pînă la —33°C [12].

Care sînt cauzele apariţiei acestor cicluri?

Recentele cercetări ale observatoarelor astronomice (Boulder-Colorado, S.U.A.), ca şi concluziile unor cercetători (Rubaşcev, U.R.S.S., în *Problem solnecinoi aktivnosti*, dr. Emilia Ţifrea din ţara noastră etc.), pun în legătură apariţia perioadelor ciclice cu activitatea solară.

După cum se ştie, prin activitatea solară înţelegem toate fenomenele care au loc la suprafaţa şi în atmosfera Soarelui, cum sînt : petele din fotosferă, erupţiile din stratul superior (cromosfera), perturbaţiile din atmosfera lui înaltă (coroana). Petele solare sînt regiuni întunecate (cu temperaturi mai scăzute) pe suprafaţa Soarelui. Numărul şi mărimea petelor solare nu sînt fixe, ci variază în perioade aproximativ 11 ani. De altfel întreaga activitate solară se înscrie în trei ritmuri periodice : un ciclu de 11 ani (cunoscut de multă vreme) şi alte două, de 80 şi respectiv de 400 de ani, a căror existenţă a fost recent stabilită.

Observaţiile meteorologice de la staţiile noastre nu cuprind încă o perioadă continuă atît de lungă, însă legea lui Gumbel ne permite extrapolări convenabile pentru stabilirea mărimii diferitelor elemente climatice (fig. 7 şi 8).

Stabilirea perioadelor de mai sus are importanţă şi în ce priveşte proiectarea construcţiilor. Se ştie că diferitele clădiri pot avea durabilitate de 100 de ani, de 50 de ani sau de 20 de ani. Cunoscînd ciclurile climatice, dimensionarea elementelor se poate face diferit, în funcţie de încărcările climatice probabile din perioada respectivă.

În ultimul timp staţiile noastre meteorologice au început măsurători ale densităţii zăpezii, care pentru Bucureşti-Filaret este dată în tabela 8. Media densităţii pe anii 1961—1969 este de 255 kgf/m^3, maxima ajungînd la 740 kgf/m^3 (februarie 1968).

Evaluarea încărcărilor climatice diferenţiat pe diferite perioade de timp pentru diferite construcţii interesează şi din punctul de vedere al riscului de avariere [1], [19].

Notînd cu $f_1(R)$ şi $f_2(Q)$ funcţiile de frecvenţă ale rezistenţei R şi ale încărcării Q şi cu $F_1(E)$ şi $F_2(Q)$ funcţiile de probabilitate ale lui R şi Q, rezultă [1]

$$F_1(R) = \int f_1(R)\,\mathrm{d}R,$$

$$F_2(Q) = \int f_2(Q)\,\mathrm{d}Q.$$

Probabilitatea de a avea simultan două valori oarecare date R şi Q este

$$P_{RQ} = f_1(R) f_2(Q).$$

Tabela 8

Densitatea zăpezii (maxime pentadală) la Bucureşti-Filaret (1961–1969)

Nr. crt.	Anul	Luna	Densitatea maximă
1.	1961	I	0,35
2.		XII	0,35
3.	1962	I	0,39
4.		II	0,22
5.		III	0,23
6.		XII	0,18
7.	1963	I	0,27
8.		II	0,35
9.		XII	0,10
10.	1964	I	0,10
11.		XII	0,25
12.	1965	XI	0,12
13.	1966	I	0,29
14.		II	0,28
15.		XII	0,25
16.	1967	I	0,50
17.		II	0,20
18.		XII	0,06
19.	1968	I	0,19
20.		II	0,74
21		III	0,10
22.		XII	0,30
23.	1969	I	0,35
		Total	5,90
		Medie	0,255

Riscul de avariere pentru o valoare Q_c a încărcării înseamnă probabilitatea de a avea simultan încărcarea Q_c și o rezistență inferioară a lui Q_c:

$$P_{R<Q} = \int_{R=-\infty}^{R=Q_c} f_1(R) f_2(Q_c)\,\mathrm{d}R = \\ = f_2(Q_c) \int_{-\infty}^{Q_c} f_1(R)\,\mathrm{d}R = f_2(Q_c) F_1(Q_c). \tag{15}$$

În cazul încărcărilor variabile, riscul de avariere înseamnă probabilitatea de a avea pentru fiecare valoare a încărcării valori de rezistențe inferioare:

$$P_{R<Q} = R_{av} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(Q) F_1(Q)\,\mathrm{d}Q. \tag{16}$$

Distribuțiile statistice care pot fi luate în considerare în calculul probabilistic fie pentru rezistență, fie pentru încărcări sînt distribuția normală sau Gauss-Laplace, distribuția logaritmică normală și distribuția valorilor extreme.

Funcția de frecvență a distribuției normale este dată de relația

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}. \tag{17}$$

Distribuția este simetrică în raport cu punctul central, care este totodată media, mediana și modulul funcției (fig. 9).

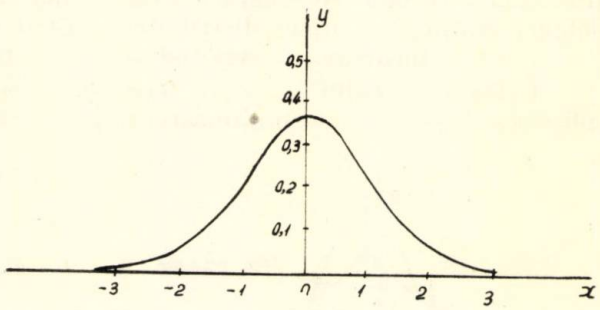


Fig. 9. — Distribuția normală sau Gauss-Laplace:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

Formula care ne dă distribuția logaritmică normală este

$$f(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\log y)^2}, \tag{18}$$

care permite o bună reprezentare a disimetriilor, fiind foarte alungită înspre

valorile pozitive (fig. 10). Distribuția este variabilă cînd y este produsul unui mare număr de variabile independente, în care caz logaritmul variabilei are o distribuție normală de probabilitate.

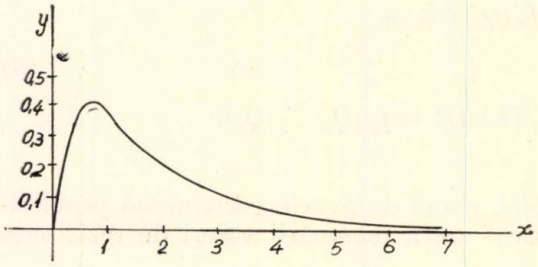


Fig. 10. — Distribuția logaritmică normală :

$$f(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\log y)^2}.$$

În cazul distribuțiilor valorilor extreme întîlnim relațiile

$$f(z) = e^{-z-e^{-z}} \text{ pentru valori maxime și}$$
$$f(z) = e^{+z-e^{-z}} \text{ pentru valorile minime (fig. 11),} \qquad (19)$$

în care

$$z = \alpha(y - u),$$

$$\alpha = \frac{2}{e'}\sqrt{6},$$

e' = abaterea medie pătratică.

În general, rezistența materialelor urmează să fie legea de distribuție normală, fie cea a valorilor minime. Pentru viteza vîntului sau încărcarea din zăpadă trebuie considerate valorile maxime anuale raportate la un ciclu meteorologic complet, distribuția lor fiind a valorilor extreme fig. (11).

Pentru încărcări, incertitudinile sînt mult mai mari.

Calculul riscului se poate face pentru un singur tip de încărcare aplicată sau pentru mai multe sarcini. În cazul dintîi, distribuția efortului

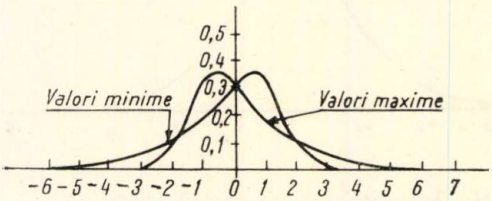


Fig. 11. — Distribuția valorilor extreme : *a*) maxime $f(z) = e^{-z-e^{-z}}$ *b*) minime $f(z) = e^{+z-e^{-z}}$.

și a unei singure încărcări fiind asemănătoare între ele, este suficient a multiplica încărcările cu un coeficient de ponderație.

Pentru diferite rapoarte $\overline{R}/\overline{Q}$, riscul de avariere este dat în figura 12. În cazul mai multor încărcări problema este mai complicată, în sensul că pentru a avea același risc în diferite elemente sau părți de construcție

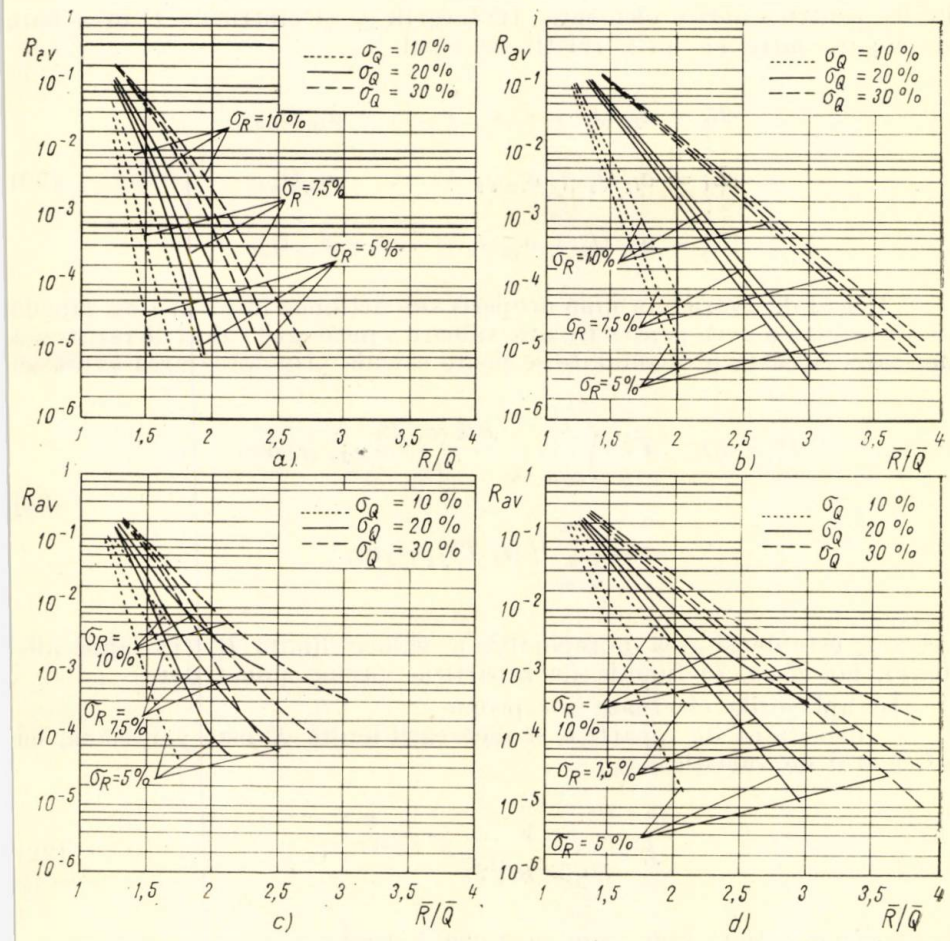


Fig.12. — Riscul de avariere în funcţie de raportul $\bar{R}/\bar{Q}$ dintre valorile centrale ale rezistenţei şi încărcării :

a — distribuţia încărcărilor = legea normală, abaterea medie pătratică : 10 % ; 20 % ; 30 % a valorii centrale $\bar{Q}$;
distribuţia rezistenţei = legea normală, abaterea medie pătratică : 5 % ; 7,5 % ; 10 % a valorii centrale $\bar{R}$;

b — distribuţia încărcărilor = legea valorilor extreme (maxime), abaterea medie pătratică : 10 % ; 20 % ; 30 % a valorii centrale $\bar{Q}$;
distribuţia rezistenţei = legea normală, abaterea medie pătratică : 5 % ; 7,5 % ; 10 % a valorii centrale $\bar{R}$;

c — distribuţia încărcărilor = legea normală, abaterea medie pătratică : 10 % ; 20 % ; 30 % a valorii centrale $\bar{Q}$;
distribuţia rezistenţei = legea valorilor extreme (minimale) abaterea medie pătratică : 5 % ; 7,5 % ; 10 % a valorii centrale $\bar{R}$;

d = distribuţia încărcărilor = legea valorilor extreme (maxime), abaterea medie pătratică : 10 % ; 20 % ; 30 % a valorii centrale $\bar{Q}$;
distribuţia rezistenţei = legea valorilor extreme (minime), abatere medie pătratică : 5 % ; 7,5 % ; 10 % a valorii centrale $\bar{R}$.

nu putem lua coeficienți de ponderație, deoarece sînt necesari coeficienți diferiți pentru diferite elemente. Încărcările Q și efotrurile E în n bare sînt legate între ele prin relații de tipul

$$\begin{aligned} E_1 &= a_{11} Q_1 + a_{12} a_2 + \ldots + a_{1m} Q_m, \\ &\vdots \\ E_i &= a_{i1} Q_1 + a_{i2} Q_2 + \ldots + a_{im} Q_m, \\ &\vdots \\ E_n &= a_{n1} Q_1 + a_{n2} Q_2 + \ldots + a_{nm} Q_m. \end{aligned} \tag{20}$$

Riscul de avariere a unui acoperiș sub acțiunea încărcării cu zăpadă [19] înseamnă a avea pentru fiecare valoare a încărcării valori de rezistență inferioare. Această probabilitate se poate calcula prin integrarea expresiei

$$\begin{aligned} P(\sigma < R_K, T) &= \int_{\sigma - R_u < 0} \frac{\partial H(\sigma, T)}{\partial \sigma} f_K(r)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}r = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(r, T) f_K(r)\, \mathrm{d}r, \end{aligned} \tag{21}$$

în care f_K este densitatea de repartiție a valorii limită R_K (variabila aleatoare), iar $H(\sigma, T)$ funcția de repartiție într-un punct dat.

În aplicațiile efectuate s-a propus:

— densitatea de repartiție a încărcării-limită K este gaussiană, cu coeficientul de variație 5%:

$$f_r = \frac{1}{0{,}05\, R^n \sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(r - R^n)^2}{2(0{,}05\, R^n)^2}}, \tag{22}$$

cu $R^n = 200$; 400; 600; 800 și 1 000 kgf/m²;

— greutatea proprie a acoperișului P^n s-a considerat ca avînd valorile 50; 100; 200; 300 și 500 kgf/m²;

— încărcarea maximă din zăpadă s-a considerat că este după Poisson.

Funcția de repartiție $G_0(z, \infty, T)$ a încărcării maxime în T ani și densitatea de repartiție corespunzătoare $\frac{\partial G_0(z, \infty, T)}{\partial z}$ sînt date în figura 13. Valoarea normală a încărcării cu zăpadă s-a propus că este $Z^n = 75$ kgf/m², adică media maximelor anuale. Astfel relația (21) devine

$$P_{(-)} = P(p + z) \geqslant R = \int_{p+z-r>0} g(p + z) \cdot f(r)\, \mathrm{d}(p + z)\, \mathrm{d}r =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(p + z) \cdot F(p + z) \mathrm{d}(p + z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G_0(\xi - p^n, \infty, T)}{\partial \xi} F(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{23}$$

Cu ajutorul ultimei relații se pot calcula diferite integrale de probabilitate pentru durate ale construcțiilor de 10, 20, 50, 100 de ani și pentru diferite rapoarte $\frac{z^n}{P^n}$ și coeficienți de siguranță $\frac{R^n}{p^n + z^n}$. Reprezentarea gra-

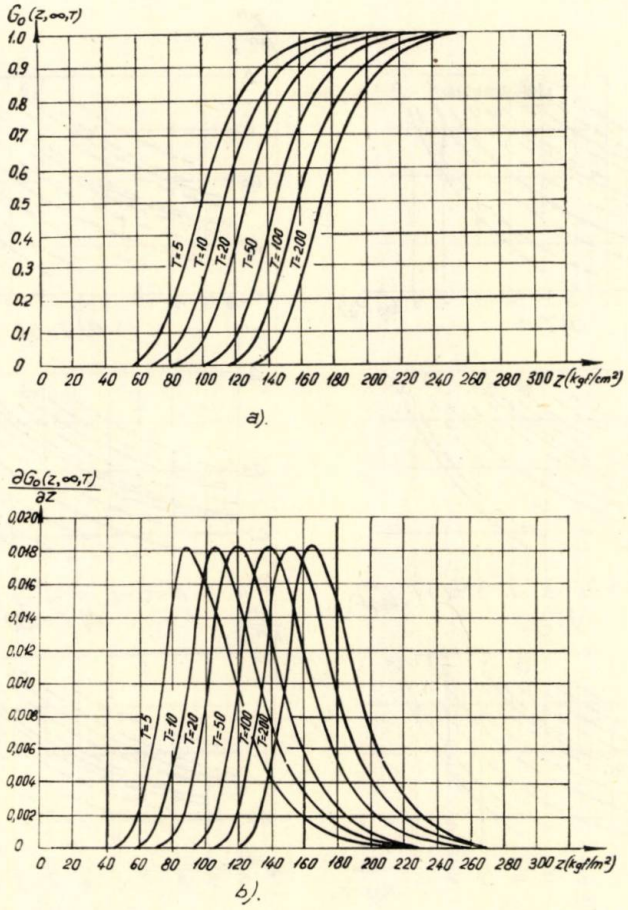


Fig 13. — Funcția de repartiție $G_0\ (z,\ \infty,\ T)$ a încărcării maxime în T ani și densitatea de repartiție corespunzătoare $\frac{\partial G_0\ (z,\ \infty,\ T)}{\partial z}$:

a — funcția de repartiție $G_0\ (z,\ \infty,\ T)$;

b — densitatea de repartiție $\frac{\partial G_0\ (z,\ \infty,\ T)}{\partial z}$.

fică a acestor rezultate ne dau curbe de egal coeficient de siguranță în planul de coordonate:

$$\log P\,(-1)\,;\ \log \frac{z^n}{p^n}$$

pentru diferite durate de exploatare a construcțiilor (fig. 14). După graficele care dau pentru fiecare probabilitate de avariere

$$P(-) = 10^{-3},\ 10^{-4},\ 10^{-5},\ 10^{-6},$$

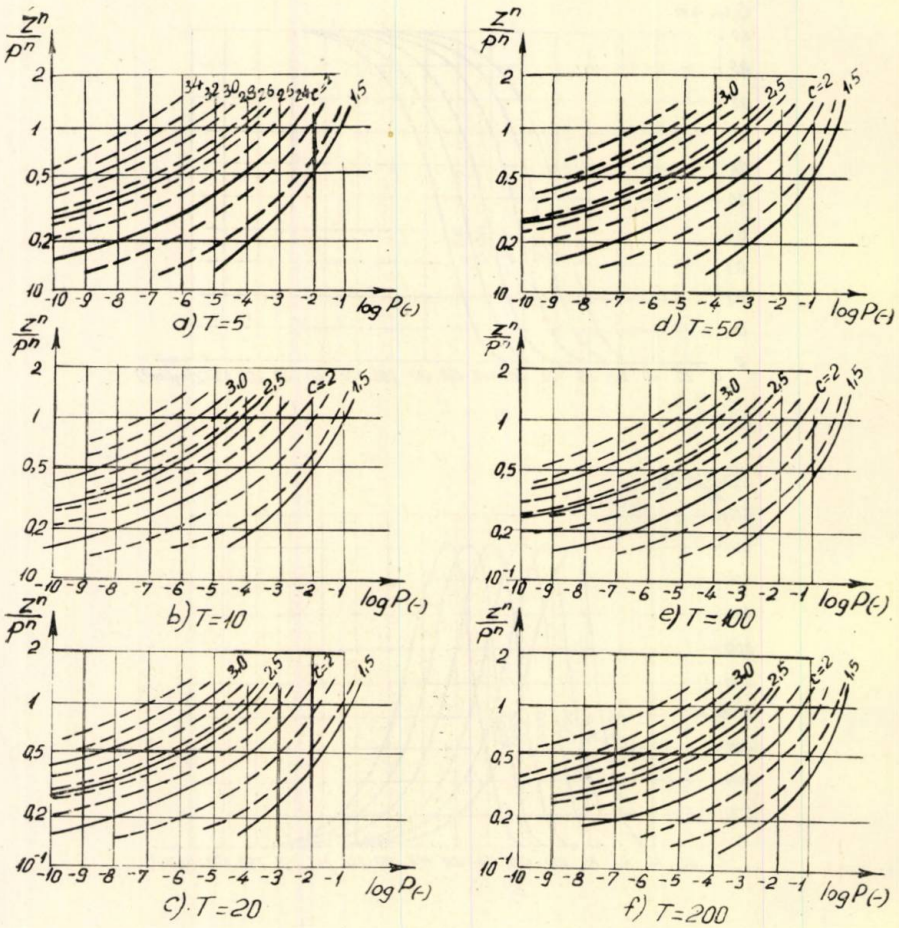


Fig. 14. — Curbe de egal coeficient de siguranță.

se construiesc curbe de egal raport $\frac{z^n}{P^n}$ în planul de coordonate (log T, c), ca în figura 15. Coeficientul de siguranță se poate considera că depinde de trei parametri $\left(T,\ P(-1) \text{ și } \frac{z^n}{P^n}\right)$ și că este o funcție liniară de fiecare parametru : log T ; log $\frac{z^n}{P^n}$; log $P(-1)$. Astfel, coeficientul de siguranță poate fi determinat în funcție de următorii parametri :

T = durata de exploatare a construcţiei;
P = probabilitatea de avariere;
$\frac{z^n}{P^n}$ = raportul dintre greutatea zăpezii şi greutatea proprie a acoperişului.

Normativul nostru pentru calculul construcţiilor la stările-limită [24] prevede două feluri de încărcări: normate şi de calcul. Încărcările normate sînt stabilite pe baza unei anumite probabilităţi de depăşire a lor de către încărcările reale, iar încărcările de calcul sînt valori obţinute

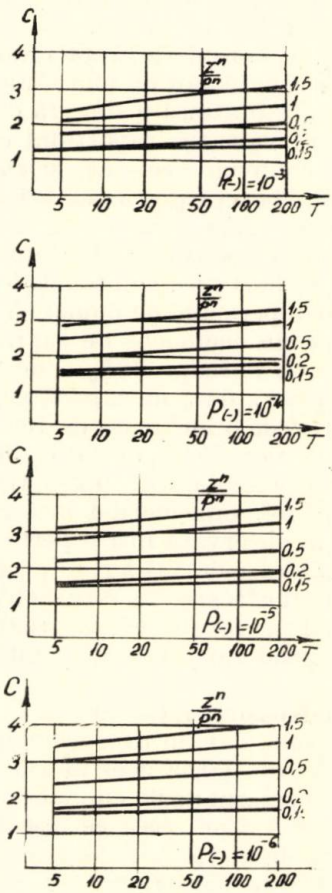


Fig. 15. — Curbe de egal raport $\frac{z^n}{P^n}$.

din încărcările normate prin multiplicarea cu un coeficient de supraîncărcare n. Coeficientul de supraîncărcare caracterizează abaterile posibile ale încărcărilor reale faţă de încărcările normate în sens defavorabil, ca urmare a variabilităţii încărcărilor şi a abaterilor întîmplătoare de la condiţiile

de exploatare normală date. În cazul încărcării datorită vîntului, presiunea normată se determină cu formula

$$p_v^n = \beta \cdot c \cdot g_v \text{ [kgf/m}^2\text{]},$$

în care β este coeficientul dinamic, c coeficientul aerodinamic, iar

$$g_v = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{v^2}{16} \tag{24}$$

presiunea dinamică de bază a vîntului kgf/m^2.
Coeficientul de supraîncărcare n se ia cu valorile : 1,2 pentru construcții obișnuite și 1,3 pentru construcții zvelte.

Normele franceze [25] consideră drept încărcare normală încărcarea care poate fi înregistrată o dată sau de mai multe ori într-un an, în timp ce încărcarea extremă poate fi atinsă o singură dată pe toată durata construcției (în cazul vîntului, valoarea raportului dintre sarcina extremă și cea normală este 1,75 conform aceloraşi norme).

Din relația (24) rezultă pentru presiunea de bază a vîntului la București $g_v = 70$ kgf/m^2, o viteză corespunzătoare a vîntului de 33,4 m/s. Pentru construcții obișnuite, considerînd coeficientul de supraîncărcare $n = 1{,}2$, rezultă o viteză de 36,4 m/s. Din tabela 5 observăm însă că această viteză a fost depășită într-o perioadă de numai 65 de ani și că acestei viteze înregistrate îi corespunde un coeficient de supraîncărcare $n = 1{,}57$, ceea ce reprezintă o depășire cu aproape 32% a acestuia.

În ce privește încărcarea dată de zăpadă pentru zona orașului București, normativul [24] prevede o încărcare de 100 kgf/m^2. Media grosimilor maxime anuale ale straturilor de zăpadă este de 47,5 cm (tabela 2), iar media densității maxime pentadale de 0,255 tf/m^3, ceea ce corespunde unei greutăți de 1,21 kgf/m^2. Considerînd însă grosimea maximă a stratului de zăpadă de 1,50 m observată într-o perioadă de 48 de ani și densitatea medie, rezultă o încărcare de 327 kgf/m^2, ceea ce înseamnă o depășire a coeficientului de supraîncărcare cu circa 65%.

Din cele arătate mai sus rezultă că și în cazul încărcărilor din zăpadă este necesar să se ia în considerare coeficienți diferiți, în funcție de durata construcțiilor.

Uneori se ajunge la depășirea încărcării de calcul din zăpadă la grosimi ale stratului de zăpadă mari, dar nu excepționale, dar cu densitate mare. Astfel a fost cazul zăpezii din iarna acestui an, cînd la București-Filaret s-a înregistrat o grosime a zăpezii de 65 cm, iar cu o densitate de 0,35 tf/m^3 rezultă o încărcare de 228 kgf/m^2, ceea ce înseamnă o creștere a coeficientului de supraîncărcare de la 1,4 la 2,28. De altfel în această perioadă au avut loc avarii la diferite construcții din capitală.

Subliniem în concluzie că la evaluarea încărcărilor climatice este necesar să țină seama de durabilitatea construcției și de apariția ciclurilor de 11 ; 80 și 400 de ani. De asemenea va trebui ca pe viitor coeficientul de supraîncărcare n să fie apreciat diferit, în funcție tot de durata construcției.

Apreciem că deteriorarea unor construcții în cazul depășirii coeficientului de supraîncărcare este în funcție și de capacitatea sistemului constructiv.

Primită la redacție la 1 aprilie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. CARPENA, A., *Calcul probabiliste des structures méthalliques*, Construction metallique Paris, *1* (1967).
2. CONSTANTINESCU, M., Goldstein M., Haram, V., Solomon, S., *Hidrologie*, București, Edit. tehnică 1956, p. 15—36.
3. DEMARRE, G., *La loi de Gumbel et son application à la determination des surcharges climatiques extrêmes*, Paris, 1966.
4. — *La sécurité aux charges climatiques*, Paris, Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, 1964.
5. — *Les théories statistiques des valeurs extrêmes et leur application à la determination des surcharges climatiques extrêmes*, Travaux, Paris, *397*, 327—333 (1968).
6. ESQUILLAN, N., *Les effets de la neige et du vent sur les constructions et les Règles N. V. 65*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, Paris, *250*, 1485 — 1520 (1968).
7. — *Les règles françaises 1963 definissant les effets du vent sur les constructions. Wind Effects on Buildings and structures*, Londra, Her Majesty' Stationery Office, 1965, p. 309—331.
8. GUÈRIN, P., *Mesure de l'effet du vent sur les bâtiments de grand envergure*, Paris, 1962.
9. GUMBEL, E. J., *Statistical theory of extreme valeurs and some practical application*, National Bureau of standars, Applied Mathematics, *33* (1954).
10. KOSTIN, S. I., Pokrovskaia, T. V., *Climatologie*, București, Edit. științifică 1964.
11. MATEESCU, C., *Contribuții la studiul aglomerării cu zăpadă pe construcții sub acțiunea vîntului*, St. cerc. mec. apl. **18**, *3*, (1963).
12. NEGOIȚĂ, A., DROGEANU, N., *Clădiri civile*, București, Edit. de stat didactică și pedagogică, 1964.
13. NEGOIȚĂ, A., IANCĂU, V., *Considerații asupra încărcării dată de zăpadă*, communicare la sesiunea științifică a cadrelor didactice de la Institutul politehnic Iași, 1967.
14. — *Aspecte statistice ale încărcării dată de vînt*, comunicare la sesiunea științifică a cadrelor didactice de la Institutul politehnic Cluj, 1968.
15. — *Études statistiques concernant la surcharges de neige à Cluj, République Socialiste, Roumanie*, 1968.
16. POPESCU, H., *Sarcini de la zăpadă la construcțiile din R. P. R.*, Rev. constr. și mat. constr. februarie 1961, p. 88—95.
17. PRIS, R., *Determination de l'action d'un vent turbulent sur les bâtiments et constructions, Wind Effects on Buildings and structures*. Londra, Her Majesty's stationery office, 1965.
18. PYSCHYKOV, V. G., *Metods for consideration of Variation and Probability of combination of Wind, Snow and vertical Crane Loads*, Kiew, 1967.
19. SANDI H., *Asupra siguranței construcțiilor supuse încărcărilor temporare*, St. cerc. mec. apl., **23**, *5*, 1203—1221 (1966).
20. THOM, H. C.S., *Distributions of Extreme Winds in the United States*, Journal of the Structural Division, *86* 11—24 (1960).
21. x x x *Buletinele observațiilor meteorologice din România*, București, 1893—1960.
22. x x x *Monografia geografică a R.P.R.*, București, Edit. Academiei, 1960.
23. x x x *National Bureau of Standards. Probability tables for the analisis of extreme volue date, N.B.S. App. Math.*, series 22, U. S. Forverment Printing Office, Washington, 25 D. C.
24. x x x *Normativ conditional pentru calculul construcțiilor la stările-limită*, București, Edit. tehnică, 1963.
25. x x x *Règles deffinisant les effets de la neige et du vent sur les constructions*, édité par la Société de diffusion des tehniques du bâtiment et de travaux publics, Paris, 1965.

NOI CERCETĂRI ASUPRA ARIPILOR DE ALUNGIRE MICĂ CU JETURI LATERALE

de E. CARAFOLI și N. CĂMĂRĂȘESCU
I.M.F.C.A.

Lucrarea se referă la hipersustentația aripilor de mică alungire prin jeturi fluide laterale, lansate în planul aripii în direcția anvergurii.
După unele considerații teoretice, se prezintă sub formă de grafice rezultatele experimentale obținute în sufleria aerodinamică pe o serie de aripi de diferite alungiri.

Hipersustentația datorită jeturilor fluide longitudinale, adică cele lansate de la bordul de fugă al unei aripi în direcția curentului de la infinit (*jet-flap*), pierde considerabil din eficacitatea sa cînd alungirea aripii scade. Lansarea în mod concomitent și a unor jeturi fluide laterale în direcția anvergurii, pe lîngă faptul că mărește eficacitatea jeturilor longitudinale, mai are și un efect direct, independent de jeturile longitudinale. În lucrările noastre anterioare [1], [3], am abordat studiul jeturilor laterale atît combinate cu jeturile longitudinale, cît și complet independente, studiind efectul favorabil al acestora din urmă asupra unei aripi dreptunghiulare de alungire 2. Am constatat însă că efectul acesta favorabil este foarte mare la aripile de alungire mică. De aceea am extins studiul jeturilor laterale într-un mod sistematic și independent de cele longitudinale, scoțînd în evidență eficacitatea jeturilor laterale la aripile de alungire mică. În cadrul aceleiași analize se cuprind și jeturile laterale înclinate cu un unghi oarecare față de planul aripii. Efectul jetului înclinat în jos este acela de a recupera în parte reacțiunea acestuia în avantajul portanței.

Studiul de față se referă însă exclusiv la jeturile laterale lansate în planul aripii (în direcția anvergurii), pentru care am elaborat și un „model teoretic" pentru a explica din punctul de vedere științific acest fenomen interesant.

1. CONSIDERAȚII TEORETICE

Fie o aripă dreptunghiulară de anvergură b și coardă c; la capetele aripii în direcția anvergurii considerăm un jet de aceeași profunzime ca și coarda, avînd la ieșire aceeași incidență cu aripa (fig. 1).

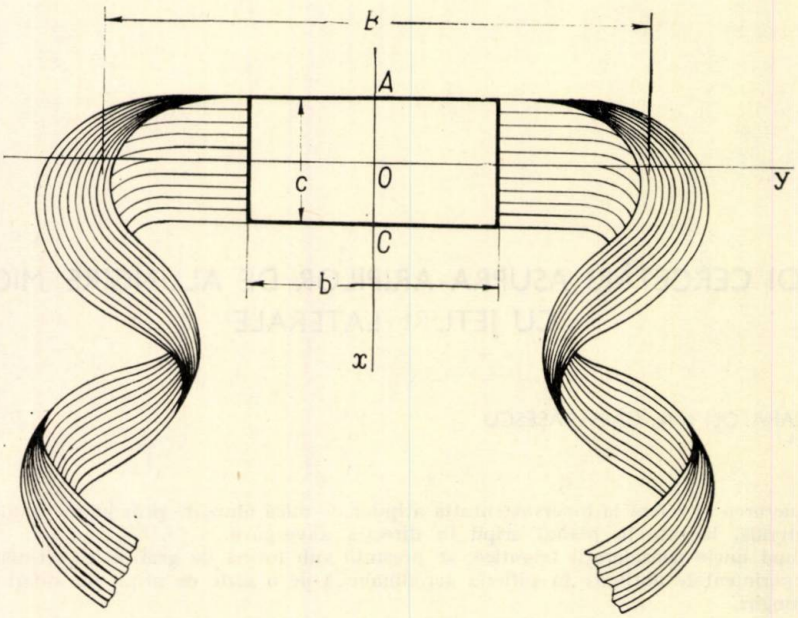


Fig. 1

Jetul se comportă la început ca o placă situată într-un curent uniform, pe feţele căreia există o distribuţie de presiuni care dau pe ambele feţe într-un punct oarecare x rezultanta C_{lx}, care reprezintă coeficientul local de portanţă şi face ca placa să se torsioneze, modificîndu-şi incidenţa.

Într-adevăr, să considerăm jetul format din şuviţe înguste dx (fig. 2); fiecare şuviţă va avea un coeficient de portanţă locală în funcţie de x, corespunzător poziţiei sale pe coardă, şi care se poate pune sub forma

$$C_{lx} = f(x)\, C_{ly}, \tag{1}$$

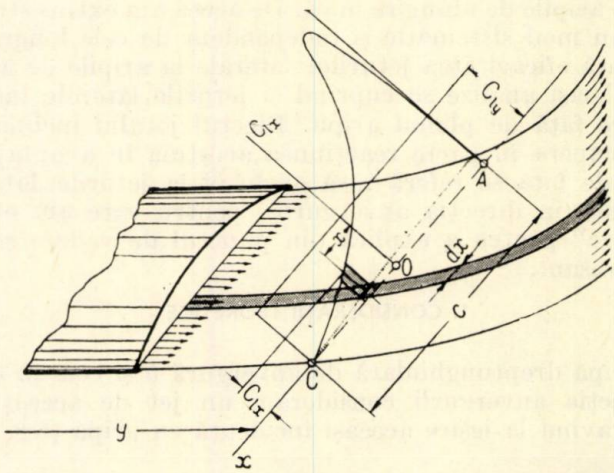


Fig. 2

unde C_{ly} este valoarea medie a coeficientului de portanţă într-o secţiune oarecare y a anvergurii; dacă notăm cu Γ circulaţia din jurul acelei secţiuni, aceasta va fi dedusă din ecuaţia

$$\rho U_\infty \Gamma = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 c C_{ly}. \tag{2}$$

Portanţa elementară dP pe un element de arc ds al şuviţei dx va fi

$$dP = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 C_{lx} dx\, ds = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 C_{lx} dx\, R d\theta, \tag{3}$$

unde R este raza de curbură pe care o capătă şuviţa într-un punct oarecare x pe coarda pînzei de jet din secţiunea y de pe anvergură.

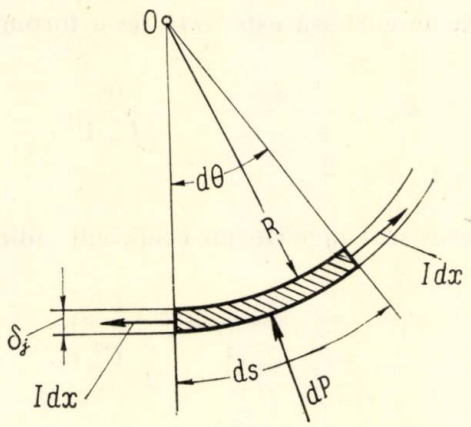


Fig. 3

Să notăm mai departe cu

$$I = \rho_j \delta_j U_j^2 \tag{4}$$

valoarea impulsului pe unitatea de lungime a jetului, unde ρ_j este densitatea, δ_j grosimea, iar U_j viteza jetului fluid. În conformitate cu teorema impulsului, raza de curbură a acestei şuviţe va fi dată de relaţia

$$2I\, dx \frac{d\theta}{2} = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 C_{lx} dx\, R d\theta, \tag{5}$$

de unde obţinem

$$R = \frac{I}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 C_{lx}} = \frac{I}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 f(x) C_{ly}}. \tag{6}$$

Rezultă că fiecare fîșie fluidă din jet se va curba în mod diferit de-a lungul corzii și deci vom avea denivelări diferite, ceea ce duce la o deformare a jetului în fiecare secțiune și deci la un profil diferit, cu incidențe variabile de-a lungul corzii.

Pe pînza de jet vom defini o „linie medie" reprezentînd locul geometric al punctelor de aplicație a rezultantei presiunilor în fiecare secțiune y de pe pînza de jet. Vom nota raza de curbură a acestei linii medii cu R_m.

Remarcăm mai departe că portanța globală pe pînza de jet într-o secțiune y oarecare este legată de această rază de curbură printr-o relație similară cu (5):

$$2Ic\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = \frac{\rho}{2}\,U_\infty^2\,C_{ly}\,c\,R_a\,\mathrm{d}\theta = \rho U_\infty \Gamma R_m\,\mathrm{d}\theta. \tag{7}$$

Acest lucru este ilustrat în figura 4, care reprezintă fotografia pînzei de jet. Această rază de curbură este dată de o formulă analogă cu (6):

$$R_m = \frac{I}{\frac{\rho}{2}\,U_\infty^2\,C_{ly}} = \frac{Ic}{\rho U_\infty \Gamma}. \tag{7'}$$

Dacă introducem mai departe un coeficient adimensional de jet:

$$C_j = \frac{Ic}{\frac{\rho}{2}\,U_\infty^2\,c^2} = \frac{I}{\frac{\rho}{2}\,U_\infty^2\,c}, \tag{8}$$

formulele (6) și (7) de mai sus devin respectiv

$$R = \frac{cC_j}{f(x)\,C_{ly}}, \tag{9}$$

$$R_m = \frac{cC_j}{C_{ly}} = \frac{U_\infty c^2 C_j}{2\Gamma}. \tag{9'}$$

Din ecuația (9) vom observa că profilul transversal al pînzei de jet capătă o formă geometrică complicată, se torsionează și, prin aceasta, introduce o incidență suplimentară, care variază de-a lungul anvergurii după o lege oarecare. Această incidență suplimentară se va adăuga incidenței inițiale α_0 a aripii reale, astfel încît, notînd cu α incidența totală, avem pe aripa fluidă

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon. \tag{10}$$

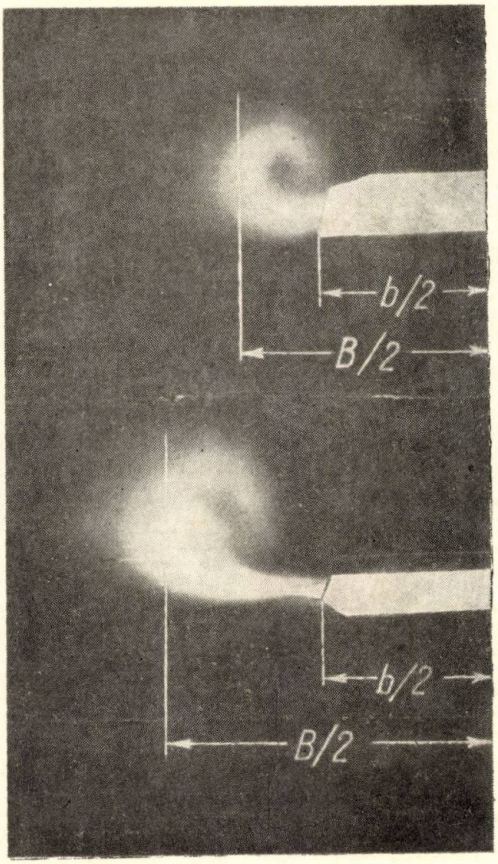


Fig. 4

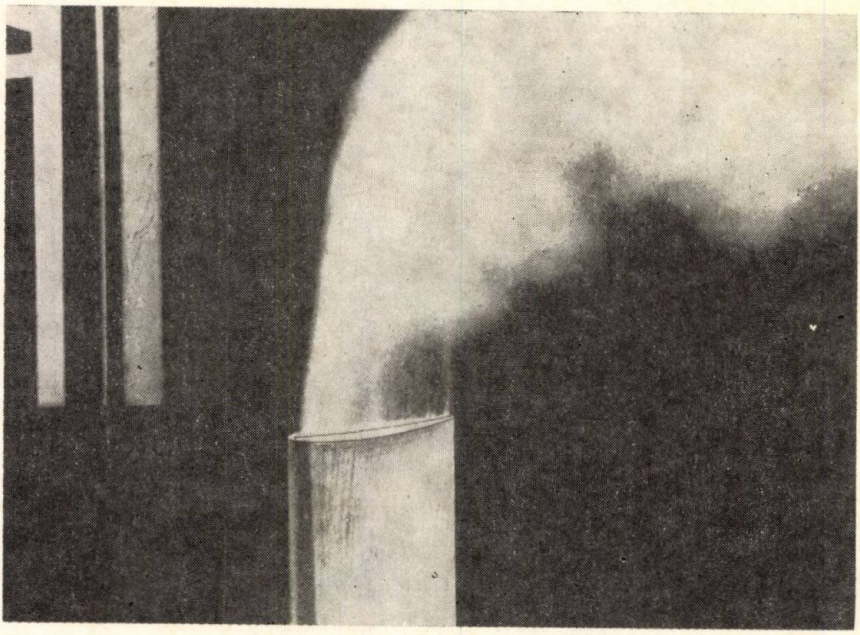


Fig. 5

În realitate, fenomenul este foarte complex și complicat, pe de o parte din cauza interacțiunii jetului de la infinit și a alterării condițiilor de scurgere la suprafața jetului datorită viscozității iar pe de altă parte datorită torsiunii excesive a pînzei de jet, care oferă o suprafață frontală destul de mare spre a fi răsturnată de curent și azvîrlită spre aval după legi foarte greu de determinat. Vom observa, totuși, că la extremitatea aripii fluide pînza de jet face o buclă aproximativ circulară.

Schema fizică de mai sus arată cum creșterea torsiunii jetului aduce o nouă creștere a incidenței și deci o nouă creștere a circulației pe aripă. Cînd însă deformarea pînzei de jet este exagerată, legile aerodinamice în jurul jetului devin complicate, iar noțiunea de „incidență" nu mai are sens.

Îngroșarea jetului datorită viscozității face ca unele particule din jet să fie antrenate de curent, complicînd astfel mișcarea și transformînd-o într-o mișcare haotică.

În ceea ce privește succiunea provocată de jet pe extradosul aripii, aceasta întîrzie fenomenul de desprindere a curentului de aer pe profil, făcînd ca portanța să-și urmeze legea de creștere și pentru incidențe foarte mari.

Schema aceasta a aripii solide și fluide se poate încadra în teoria aripilor de anvergură finită a lui Prandtl și constă din asimilarea aripii reale prelungite prin pînza de jet fluidă cu o aripă solidă fictivă. Această analogie este însă valabilă numai pînă la un anumit punct al anvergurii, după care torsiunea este excesivă, iar mișcarea devine complicată, fără ca prin aceasta circulația să se micșoreze. Ea se menține mai departe ca un efect al intensității jetului fluid, iar aceasta se torsionează și se înfășoară în formă elicoidală, fiind azvîrlit în aval.

Ținînd seama de considerațiile de mai sus, care caută să lămurească fenomenele complexe ce intervin în această problemă, se poate elabora un model teoretic care să permită calculul coeficientului de portanță și de rezistență al aripii solide.

Vom reveni asupra acestei probleme în alte lucrări. În lucrarea de față vom expune rezultatele experimentale pe care le-am obținut și care sînt într-adevăr remarcabile.

2. REZULTATE EXPERIMENTALE

Experiențele întreprinse în sufleria Institutului de mecanică a fluidelor în 1968 sînt o urmare a experiențelor executate cu mulți ani în urmă [1], [2] în aceeași suflerie pe o aripă de alungire $\lambda = 2$. Aceste noi experiențe au fost efectuate pe aripi de alungiri mici, și anume

$$\lambda = \frac{b}{c} = 2\,;\ 1{,}5\,;\ 1\,;\ 0{,}6$$

care au arătat într-adevăr că efectul jeturilor laterale pe aripi de mică alungire este de-a dreptul spectacular.

Profilul aripilor încercate este biconvex simetric.

La capătul aripii, o fantă îngustă de lungimea corzii (fig. 5), avînd direcția axei profilului, este legată printr-o conductă la un compresor care asigură alimentarea cu aer a pînzei de jet.

Aceasta este lansată în planul aripii, în direcția anvergurii, pe toată lungimea corzii. În vederea obținerii unei distribuții uniforme de viteze în pînza de jet au fost prevăzute o serie de deflectoare în interiorul aripii pe circuitul de alimentare cu aer de la compresor. Prin variația debitului de aer provenit din compresor s-a obținut o variație a intensității jetului și implicit a coeficientului de impuls.

Macheta a fost montată în poziția verticală pe un disc fixat pe o balanță aerodinamică, avînd posibilitatea de a se roti în jurul unui ax paralel cu anvergura în vederea schimbării incidenței față de curentul de aer din suflerie.

Pentru a se evita o legătură rigidă între aripa montată pe balanță și conducta de alimentare cu aer de la compresor, s-a construit un racord flexibil prevăzut cu o cuvă cu mercur, pentru a se asigura o etanșeitate

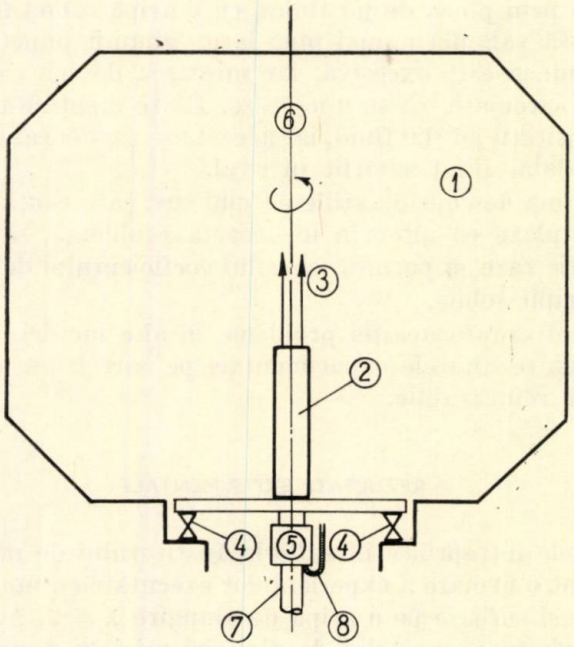


Fig. 6. — Montajul experimental:

1 — camera de experiență; *2* — aripă; *3* — jet; *4* — balanță tensometrică; *5* — cuplaj elastic; *6* — ax de rotație; *7* — conductă de alimentare cu aer de la compresor; *8* — manometru cu mercur.

bună şi a nu introduce forţe exterioare pe machetă. Un tub de sticlă aşezat vertical, comunicînd cu acestă cuvă cu mercur, foloseşte ca manometru pentru determinarea presiunii aerului în conducta de aducţie de la compresor.

Determinarea forţelor aerodinamice pe machetă s-a făcut prin metode tensometrice, măsurîndu-se deformaţiile care apar într-un element elastic montat astfel încît să fie solicitat la o singură componentă a forţe aerodinamice.

Traducătoarele electrice sensibile la deformaţii au fost solidarizate cu elementul elastic şi conectate într-un circuit de măsură. O etalonare prealabilă a stabilit proporţionalitatea între forţă şi deformaţie.

Macheta, construită din metal, este prevăzută în interior cu conducte de alimentare cu aer a jetului. Avîndu-se în vedere numărul mare de parametri de care trebuie să se ţină seama în cursul experimentărilor, s-a procedat după cum urmează: s-a menţinut incidenţa aripii constantă, variindu-se coeficientul de jet de la zero la o valoare maximă, limitată de caracteristicile funcţionale ale instalaţiei utilizate. S-a obţinut astfel variaţia coeficientului de portanţă în funcţie de coeficientul de jet C_j pentru o anumită valoare a incidenţei. Aceste experienţe s-au repetat pentru diverse valori ale incidenţei aripii, obţinîndu-se astfel cîte o diagramă pentru fiecare incidenţă în parte. Aceste diagrame sînt reprezentate în figurile 7—10 pentru aripile de alungire $\lambda = 2$; 1,5; 1 şi 0,6.

Cu ajutorul acestor diagrame am prelevat valorile coeficientului de portanţă al aripii, fie C_l pentru o anumită valoare a coeficientului de jet C_j în funcţie de incidenţa α_0, ceea ce a permis trasarea curbelor C_l în funcţie de incidenţa α_0 a aripii.

În figurile 11 — 14 sînt trasate aceste curbe pentru aceleaşi valori ale alungirii şi pentru valori ale coeficientului de jet $C_j = 0{,}25$; 0,50; 0,75 şi 1. Din examinarea acestor diagrame se poate trage concluzia că pentru alungiri mici creşterea coeficientului de portanţă prin jeturi laterale este considerabilă.

Pentru a se pune în evidenţă acest lucru, am determinat raportul dintre coeficientul de portanţă al aripii cu jet lateral, pe care l-am notat cu C_{l_j} şi coeficientul de portanţă al aripii fără jet, pe care l-am notat cu C_{l_0}, adică

$$\frac{C_{l_j}}{C_{l_0}}.$$

Diagramele din figurile 15 — 18 reprezintă acest raport în funcţie de incidenţa α_0 pentru fiecare dintre cele patru alungiri şi pentru aceiaşi coeficienţi de jet.

Din aceste diagrame se poate urmări efectul considerabil al jeturilor fluide la aripile de mică alungire.

Primită la redacţie la 16 octombrie 1969

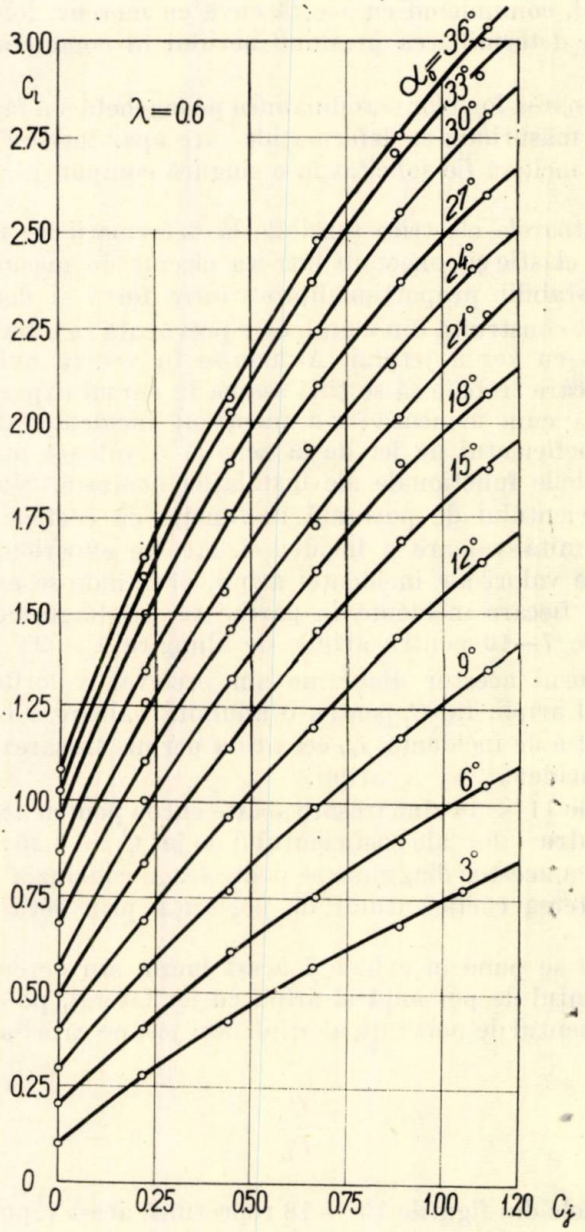

3.00
C_t
2.75
2.50
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0
$\lambda = 0.6$
α_s
36°
33°
30°
27°
24°
21°
18°
15°
12°
9°
6°
3°
0
0.25
0.50
0.75
1.00
1.20
C_j

Fig. 7

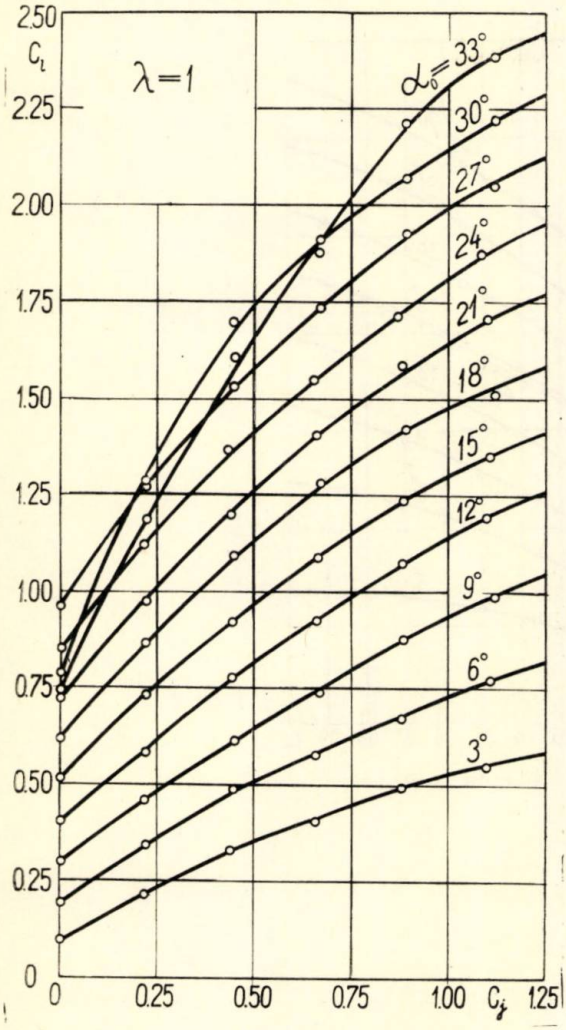

2.50
C_L
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0
$\lambda=1$
$\alpha_0=$ 33°
30°
27°
24°
21°
18°
15°
12°
9°
6°
3°
0
0.25
0.50
0.75
1.00
C_j
1.25

Fig. 8

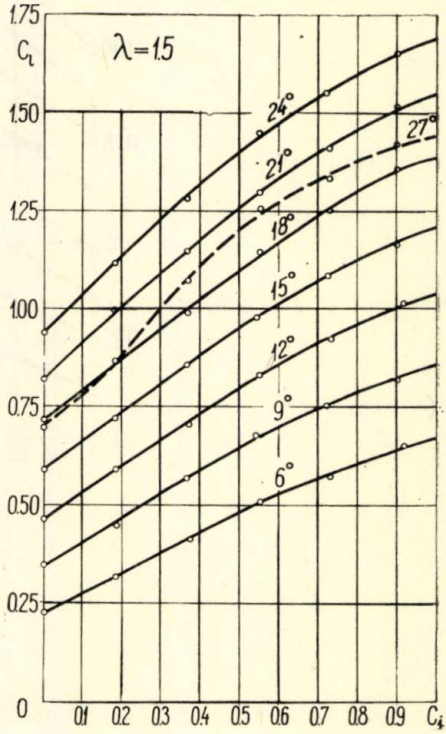

1.75
C_L
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0
$\lambda=1.5$
24°
27°
21°
18°
15°
12°
9°
6°
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
C_j

Fig. 9

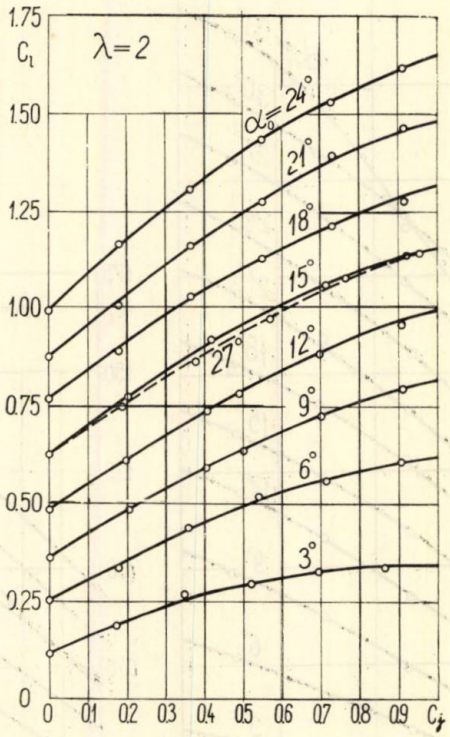

1.75
C_l
$\lambda = 2$
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 C_f
$\alpha_0' = 24°$
21°
18°
15°
27°
12°
9°
6°
3°

Fig. 10

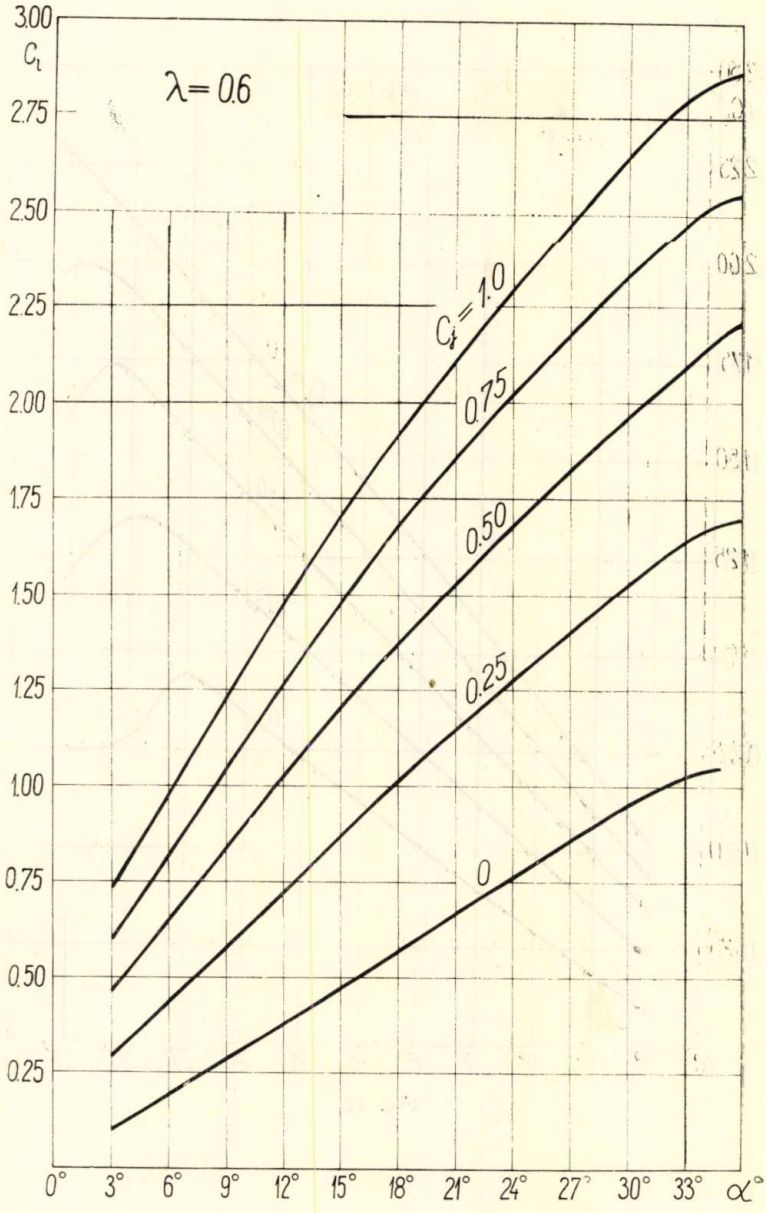

3.00
C_L
2.75
2.50
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
$\lambda = 0.6$
$C_t = 1.0$
0.75
0.50
0.25
0
0°
3°
6°
9°
12°
15°
18°
21°
24°
27°
30°
33°
$\alpha°$

Fig. 11

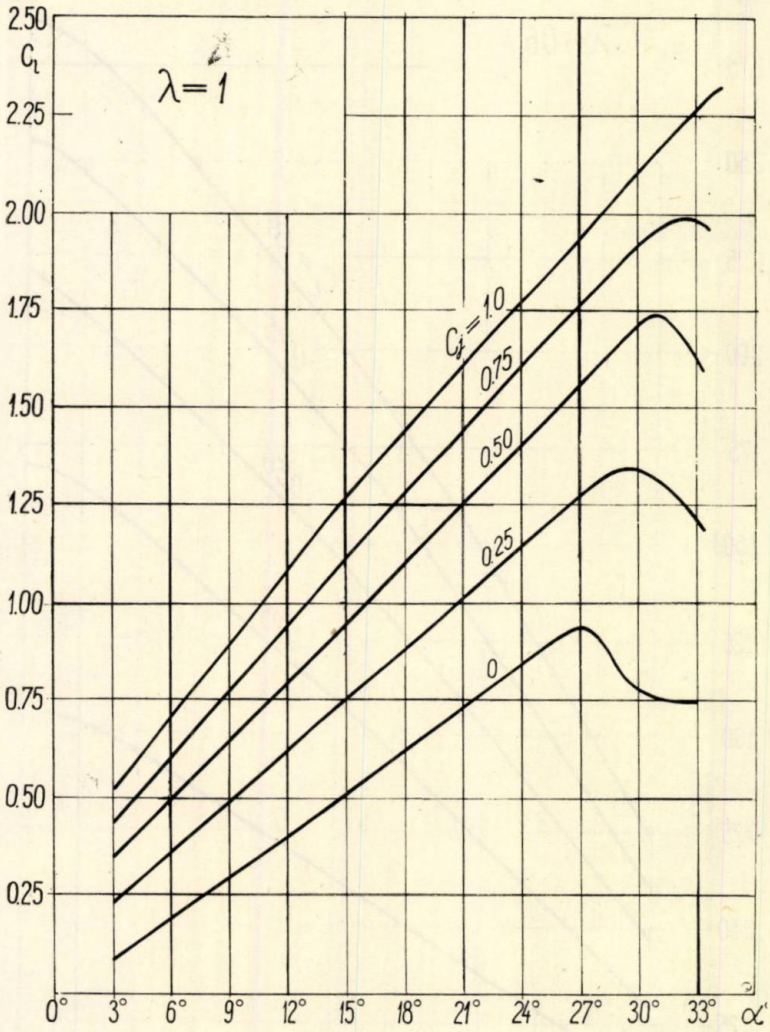

2.50
C_L
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
$\lambda = 1$
$C_f = 1.0$
0.75
0.50
0.25
0
0°
3°
6°
9°
12°
15°
18°
21°
24°
27°
30°
33°
α

Fig. 12

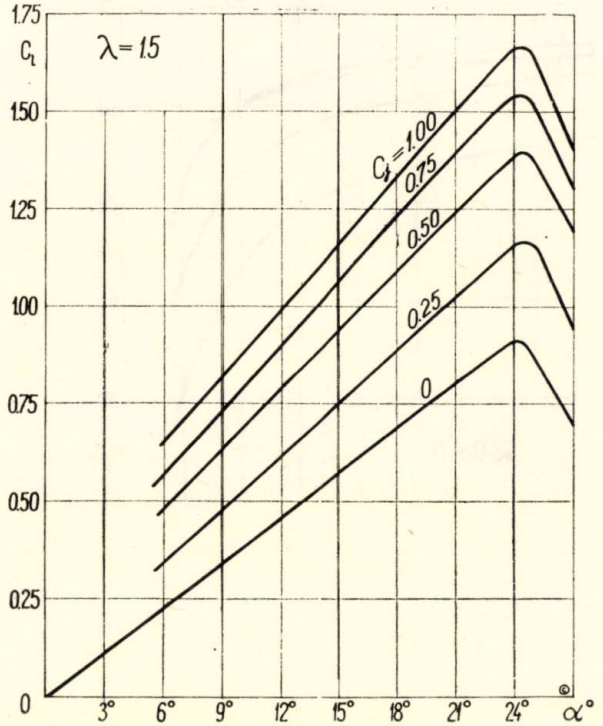

1.75
C_L
$\lambda = 1.5$
$C_i = 1.00$
0.75
0.50
0.25
0
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0
3°
6°
9°
12°
15°
18°
21°
24°
$\alpha°$

Fig. 13

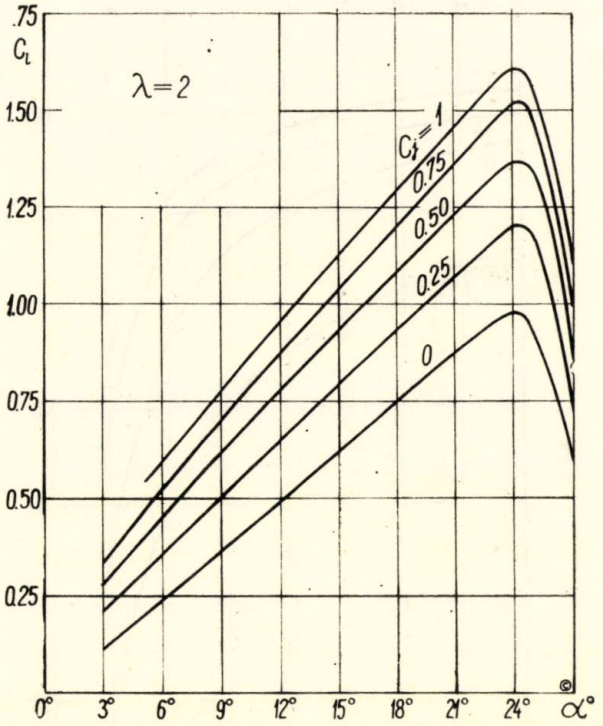

.75
C_L
$\lambda = 2$
$C_i = 1$
0.75
0.50
0.25
0
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0°
3°
6°
9°
12°
15°
18°
21°
24°
$\alpha°$

Fig. 14

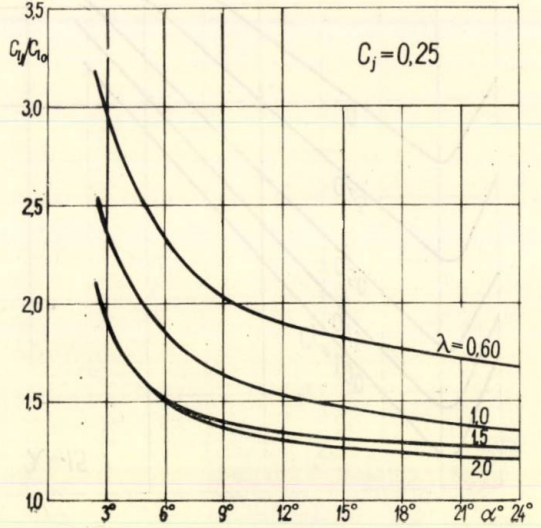

3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
$C_j = 0,25$
$\lambda = 0,60$
1,0
1,5
2,0
3°
6°
9°
12°
15°
18°
21°
α° 24°

Fig. 15

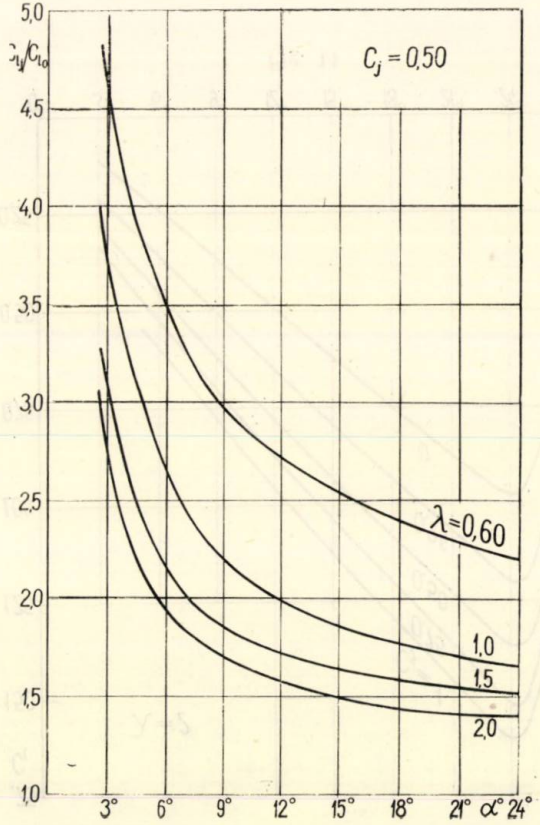

5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
$C_j = 0,50$
$\lambda = 0,60$
1,0
1,5
2,0
3°
6°
9°
12°
15°
18°
21°
α° 24°

Fig. 16

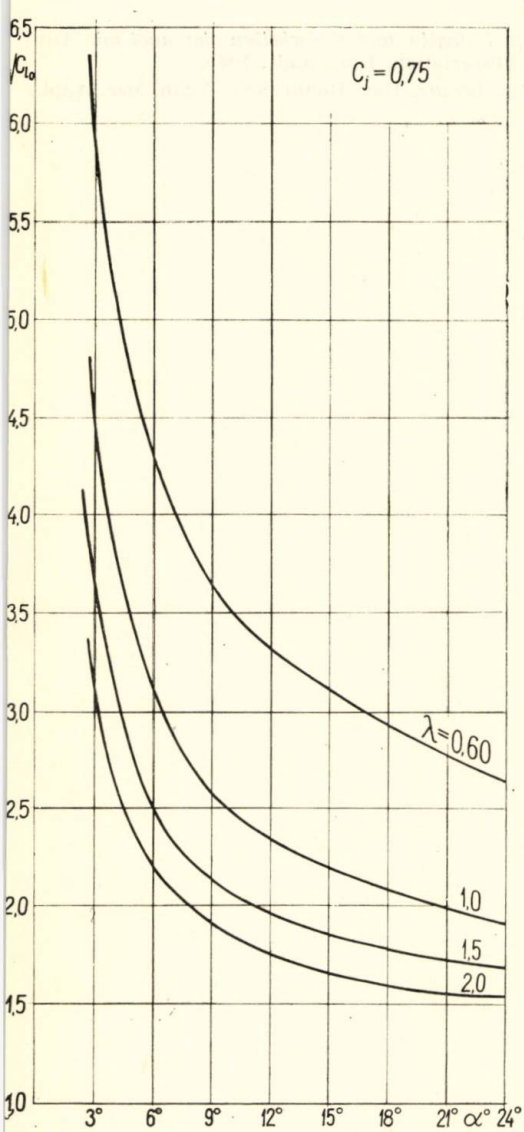

$C_j = 0{,}75$
$\lambda = 0{,}60$
1,0
1,5
2,0
3°
6°
9°
12°
15°
18°
21°
α°
24°

Fig. 17

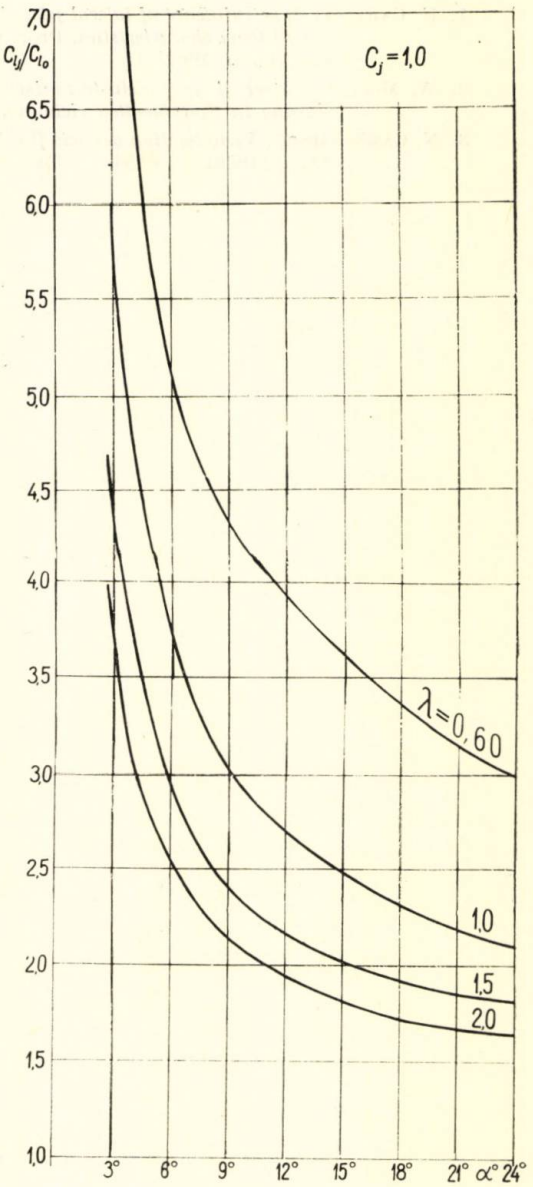

C_{l_j}/C_{l_o}
$C_j = 1{,}0$
$\lambda = 0{,}60$
1,0
1,5
2,0
3°
6°
9°
12°
15°
18°
21°
α°
24°

Fig. 18

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *The influence of lateral jets, simple or combined with longitudinal jets, upon the wing lifting characteristics.* Proc. third Internat. Congr. Aeronautical Sci. (ICAS), Stockholm, 1962.
2. W. Mörchen, *Über di Spaltverluste zweischau Flüngeln und Endscheiben ohne und mit Ausblasung in Spannweiteu richtung*, Dissertation, Darmstadt, 1965.
3. N. Cămărăşescu, *Visualisation des jets fluides latéraux*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., **11**, *2* (1966).

CARACTERISTICILE AERODINAMICE ÎN REGIM SUPERSONIC ALE ARIPILOR DREPTUNGHIULARE ŞI TRAPEZOIDALE CU PROFIL VARIABIL ÎN ANVERGURĂ

de DAN MATEESCU
Institutul de mecanică a fluidelor

În prezenta lucrare sînt determinaţi coeficienţii aerodinamici de portanţă, rezistenţă de undă şi momente pentru aripile de anvergură infinită, dreptunghiulare şi trapezoidale, avînd profilul variabil în lungul anvergurii. În acest sens se utilizează vitezele axiale de perturbaţie determinate printr-o metodă elaborată de autor într-o lucrare precedentă.

NOTAŢII

U_∞ — viteza curentului neperturbat;
a_∞ — viteza sunetului în condiţiile curentului neperturbat;
$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach, $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$;
$\mu = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{B}$ — unghiul Mach;
$Ox_1x_2x_3$ — sistem triortogonal de coordonate avînd axa Ox_1 paralelă cu direcţia curentului neperturbat;
$Z^{(j)}$ — cota suprafeţei extradosului ($j = 1$) sau intradosului ($j = 2$) aripii;
u, v, w — vitezele axială, laterală şi verticală de perturbaţie;
$C_p = -2\dfrac{u}{U_\infty}$ — coeficientul de presiune în primă aproximaţie.

1. CONSIDERAŢII ASUPRA ARIPII DE ANVERGURĂ INFINITĂ AVÎND PROFILUL VARIABIL ÎN ANVERGURĂ

Într-o lucrare precedentă [1] am stabilit, printr-o extindere a teoriei lui Ackeret, o expresie simplă pentru viteza axială de perturbaţie în cazul cînd profilul aripii este variabil în lungul anvergurii.

Să considerăm în acest sens o astfel de aripă de anvergură infinită (fig. 1) la care suprafețele extradosului și intradosului sînt definite de ecuația generală

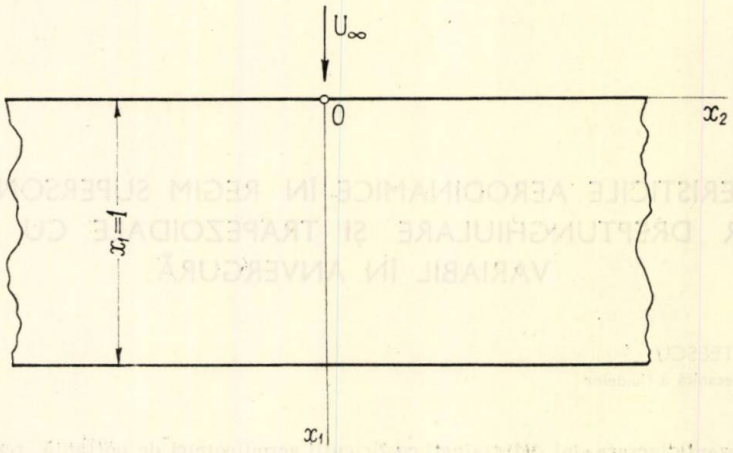


Fig. 1

$$Z = Z^{(j)} = Z_0^{(j)}(x_1) \cdot f(x_2), \tag{1}$$

unde $j = 1$ corespunde extradosului, iar $j = 2$ intradosului aripii și în care $Z_0^{(j)}(x_1)$ reprezintă ecuația profilului de bază din secțiunea mediană $x_2 = 0$ a aripii, iar $f(x_2)$ funcția după care variază grosimea profilului în anvergură.

Atît $Z_0^{(j)}(x_2)$, cît și $f(x_2)$ pot fi funcții oarecare, însă vom presupune, așa cum am arătat și în [1], că aceste funcții nu prezintă discontinuități, astfel încît expresia (1) să poată fi exprimată cu o bună aproximație sub forma

$$Z = Z^{(j)} = \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=0}^{r} a_{k,q}^{(j)} x_1^q x_2^k. \tag{2}$$

Observînd că viteza verticală pe cele două fețe ale aripii definite prin ecuația (1) este

$$w = w^{(j)} = U_\infty \frac{\partial Z^{(j)}}{\partial x_1} = U_\infty \frac{\mathrm{d}Z_0^{(j)}}{\mathrm{d}x_1} f(x_2), \tag{3}$$

viteza axială de perturbație va fi dată, aplicînd cele stabilite în [1], de expresia

$$u = (-1)^j \frac{1}{B} w^{(j)} = (-1)^j \frac{U_\infty}{B} \frac{\mathrm{d}Z_0^{(j)}}{\mathrm{d}x_1} f(x_2). \tag{4}$$

Pornind de la această expresie putem determina caracteristicile aerodinamice ale unei porțiuni dreptunghiulare de lățime $2b$ din aripa de anvergură infinită considerată.

Vom obține astfel pentru coeficienții de portanță și de rezistență de undă corespunzători acestei porțiuni de aripă expresiile

$$C_l = \frac{1}{2b}\int_0^1\int_{-b}^{b} (C_p^{(2)} - C_p^{(1)})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2b}\,C_{l0}F_a, \tag{5a}$$

$$C_a = \frac{1}{2b}\int_0^1\int_{-b}^{b}\left(C_p^{(1)}\frac{\partial Z^{(1)}}{\partial x_1} - C_p^{(2)}\frac{\partial Z^{(2)}}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2b}\,C_{a0}\cdot F_1, \tag{5b}$$

iar pentru coeficienții momentelor de ruliu și de tangaj expresiile

$$\mu_1 = \frac{1}{2b}\int_0^1\int_{-b}^{b} (C_p^{(2)} - C_p^{(1)})\,x_2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2b}\,C_{l0}\cdot F_2, \tag{6a}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2b}\int_0^1\int_{-b}^{b} (C_p^{(1)} - C_p^{(2)})\,x_1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2b}\,\mu_{20}F_0, \tag{6b}$$

unde F_0, F_1 și F_2 sînt date de relațiile

$$F_0 = \int_{-b}^{b} f(x_2)\,\mathrm{d}x_2, \qquad F_2 = \int_{-b}^{b} x_2 f(x_2)\,\mathrm{d}x_2, \tag{7a}$$

$$F_1 = \int_{-b}^{b} [f(x_2)]^2\,\mathrm{d}x_2 \tag{7b}$$

și unde C_{l0}, C_{a0} și μ_{20} sînt coeficienții de portanță, de rezistență de undă și de moment de tangaj ai profilului din secțiunea mediană $x_2 = 0$, care sînt date de relațiile

$$C_{l0} = -\frac{4\alpha}{B}, \tag{8a}$$

$$C_{a0} = \frac{2}{B}\left[2\alpha^2 + \int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}Z_0^{*(1)}}{\mathrm{d}x_1^*}\right)^2\mathrm{d}x_1^* + \int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}Z^{*(2)}}{\mathrm{d}x_1^*}\right)^2\mathrm{d}x_1^*\right], \tag{8b}$$

$$\mu_{20} = -\frac{2}{B}(\alpha + S_1 - S_2), \tag{8c}$$

unde α este unghiul de incidență format de coarda profilului cu axa Ox_1 (fig. 2 *a*), S_1 și S_2 reprezintă suprafețele părții de deasupra corzii OC și, respectiv, de sub aceasta ale secțiunii profilului, iar $Z_0^{*(1)}$ și $Z_0^{*(2)}$ cotele extradosului și, respectiv, intradosului profilului față de coarda OC, definite prin transformările

$$x_1 \approx x_1^*, \quad Z_0^{(1)} = Z_0^{(*1)} - \alpha x_1^*, \quad -Z_0^{(2)} = Z_0^{*(2)} + \alpha x_1^*. \tag{9}$$

Astfel, de exemplu, în cazul profilelor subțiri liniar și frînt (fig. 2*b*, *c*) și al profilului rombic simetric (fig. 2*d*), coeficienții rezistenței de undă și momentul de tangaj au, respectiv, expresiile

$$C_{d0} = \frac{4\alpha^2}{B}, \qquad \mu_{20} = -\frac{2\alpha}{B}, \tag{10a}$$

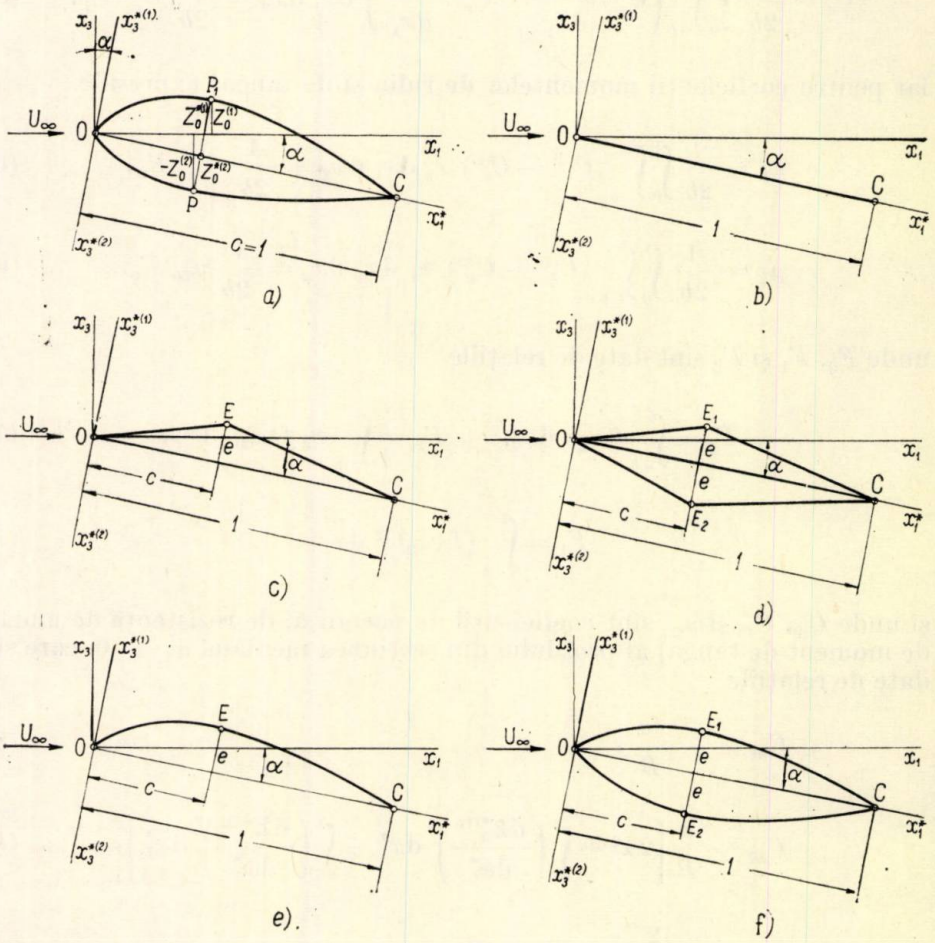


Fig. 2

$$C_{d0} = \frac{4}{B}\left(\alpha^2 + \frac{e^2}{c(1-c)}\right), \qquad \mu_{20} = -\frac{2}{B}(\alpha + e), \tag{10b}$$

$$C_{d0} = \frac{4}{B}\left(\alpha^2 + \frac{e^2}{c(1-c)}\right), \qquad \mu_{20} = -\frac{2\alpha}{B}, \tag{10c}$$

iar în cazul profilului subțire parabolic (fig. 2*e*) și al profilului parabolic biconvex simetric (fig. 2*f*), definite prin ecuațiile

$$Z_0^{*(j)} = 2e\frac{x_1^*}{c}\left(1-\frac{x_1^*}{2c}\right), \tag{11a}$$

$$Z_0^{*(j)} = (-1)^{j+1}\,2e\frac{x_1^*}{c}\left(1-\frac{x_1^*}{2c}\right), \tag{11b}$$

coeficienții respectivi au expresiile

$$C_{a0} = \frac{4}{B}\left[\alpha^2 + 4\frac{e^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{c}+\frac{1}{3c^2}\right)\right],\quad \mu_{20} = -\frac{2}{B}\left[\alpha + 2\frac{e}{c}\left(1-\frac{1}{3c}\right)\right], \tag{12a}$$

$$C_{a0} = \frac{4}{B}\left[\alpha^2 + 4\frac{e^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{c}+\frac{1}{3c^2}\right)\right],\quad \mu_{20} = -\frac{2\alpha}{B}. \tag{12b}$$

În ceea ce privește factorii F_0, F_1 și F_2 care includ influența profilului variabil, considerînd o variație parabolică a profilului în lungul anvergurii sub forma

$$f(x_2) = 1 - h_1 x_2 - h_2 x_2^2, \tag{13}$$

vor rezulta pentru factorii menționați expresiile

$$F_0 = 2b\left(1-\frac{1}{3}h_2 b^2\right),\quad F_2 = -\frac{2}{3}h_1 b^3, \tag{14a}$$

$$F_1 = 2b\left[1+\frac{1}{3}(h_1^2 - 2h_2)\,b^2 + \frac{1}{5}h_2^2 b^4\right]. \tag{14b}$$

2. CAZUL CÎND VARIAȚIA PROFILULUI ARIPII PREZINTĂ O DISCONTINUITATE

Să considerăm acum o aripă de anvergură infinită la care suprafețele extradosului ($j = 1$) și intradosului ($j = 2$) sînt definite prin ecuația

$$Z = Z^{(j)} = \pm\sum_{k=0}^{n} a_{n-k,k}^{(j)}\, x_1^{n-k}\, x_2^k \quad (j = 1,2), \tag{15}$$

căreia îi corespunde o viteză verticală dată de relația

$$w = \pm\sum_{k=0}^{n-1} w_{n-1-k,k}^{(j)}\, x_1^{n-1-k}\, x_2^k \qquad (w_{n-1-k,k}^{(j)} = (n-k)\,a_{n-k,k}^{(j)}), \tag{16}$$

unde semnul plus se referă la $x_2 > 0$, iar semnul minus la $x_2 < 0$.

După cum a fost stabilit în lucrarea menționată [1], pentru această aripă, care prezintă de-a lungul liniei Oo (fig. 3) o discontinuitate a variației

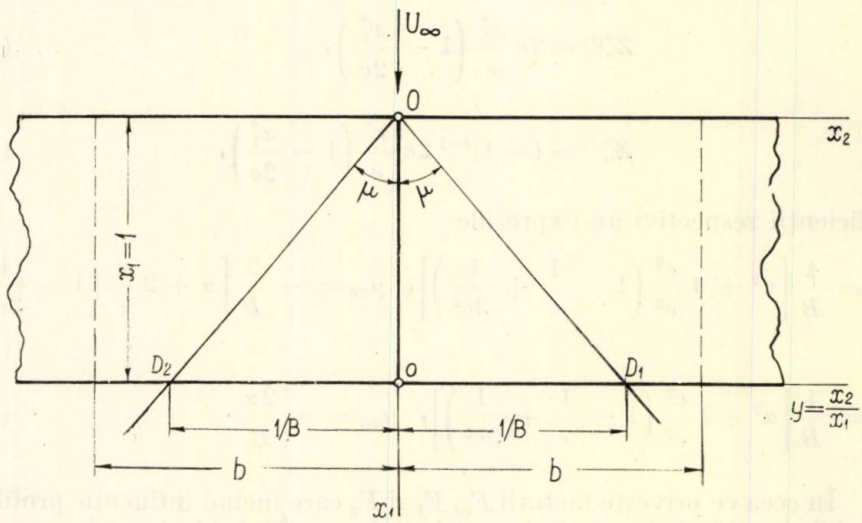


Fig. 3

profilului și vitezei verticale, viteza axială de perturbație este dată de expresia

$$u = x_1^{n-1}\,\mathrm{Re}\,\mathcal{U}_{n-1}, \tag{17a}$$

$$\mathcal{U}_{n-1} = (-1)^j\left\{\frac{2}{\pi B}\sum_{q=0}^{n-1} w_{n-1-q,q}^{(j)}\,x^q\left[\arccos\sqrt{\frac{1-Bx}{2}} - \arccos\sqrt{\frac{1+Bx}{2}}\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=1}^{n-1} Q_{n,q}^{(j)}\,x^q\,\mathrm{arg\,ch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_{n,q}^{(j)}\,x^q\sqrt{1-B^2x^2}\right\}, \tag{17b}$$

în care am utilizat variabila complexă $x = \mathfrak{y} + i\mathfrak{z}$, definită prin transformarea

$$x = \mathfrak{y} + i\mathfrak{z}\,; \qquad \mathfrak{y} = \frac{y}{1-B^2z^2}, \qquad \mathfrak{z} = \frac{z\sqrt{1-B^2(y^2+z^2)}}{1-B^2z^2}, \tag{18a}$$

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \qquad z = \frac{x_3}{x_1}. \tag{18b}$$

În ceea ce privește constantele $Q_{n,q}$ și $D_{n,q}$ care intervin în expresia (18), acestea se determină în modul indicat în [1] prin utilizarea condițiilor

$$2(-1)^j\frac{(n-1)!}{C_{n-1}^k}\,w_{n-1-k,k}^{(j)} = -\,\mathrm{Im}\oint_{\sigma_0}(-x)^{n-2-k}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^n\mathcal{U}_{n-1}}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{d}x, \tag{19a}$$

$$\left[\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^p\mathcal{U}_{n-1}}{\mathrm{d}x^p}\right]_{x=\pm\frac{1}{B}}=0 \qquad (p=1,2,\ldots,n-1), \tag{19 b}$$

unde σ_0 este un semicerc de rază foarte mică în jurul originii ($x=0$).

Considerînd din nou o porţiune dreptunghiulară de lăţime $2b$ în jurul liniei Oo de discontinuitate, vom putea determina caracteristicile aerodinamice ale acestei porţiuni.

Observînd că în exteriorul conului Mach cu vîrful în O viteza axială de perturbaţie este dată de expresia

$$u=\pm(-1)^j\frac{1}{B}\sum_{q=0}^{n-1}w^{(j)}_{n-1-q,q}\,x_1^{n-1-q}\,x_2^q, \tag{20}$$

vom putea deduce pentru coeficienţii de portanţă, de rezistenţă de undă şi de momente expresiile

$$C_l=\frac{1}{bU_\infty}\int_0^1\int_{-b}^{b}(u^{(1)}-u^{(2)})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2=$$

$$=-\frac{1}{BbU_\infty}\sum_{q=0}^{n-1}(w^{(1)}_{n-1-q,q}+w^{(2)}_{n-1-q,q})\left\{\frac{1}{n-q}(1-(-1)^{q+1})\left[\frac{1}{q+1}b^{q+1}+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{q+1}\right)\frac{1}{B^{q+1}}\left.\right]+\frac{1}{2(n+1)(q+1)}\left[(1+(-1)^{q+1})\frac{1}{B^{q+1}}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{\pi}BI_{q+1}\right]\right\}-\frac{1}{4(n+1)bU_\infty}\sum_{q=1}^{n-1}\frac{1}{q+1}(Q^{(1)}_{n,q}+Q^{(2)}_{n,q})\,I_q-$$

$$-\frac{B^2}{2(n+1)bU_\infty}\sum_{q=0}^{n-2}\frac{1}{q+1}(D^{(1)}_{n,q}+D^{(2)}_{n,q})\,I_{q+2}, \tag{21 a}$$

$$C_d=\frac{1}{bU_\infty^2}\int_0^1\int_{-b}^{b}(u^{(2)}w^{(2)}-u^{(1)}w^{(1)})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2=$$

$$=\frac{1}{BbU_\infty^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1}(w^{(1)}_{n-1-k,k}\,w^{(1)}_{n-1-q,q}+w^{(2)}_{n-1-k,k}\,w^{(2)}_{n-1-q,q})\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2n-1-k-q}(1-(-1)^{k+q+1})\left[\frac{1}{k+q+1}b^{k+q+1}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{k+q+1}\right)\frac{1}{B^{k+q+1}}\right]+\frac{1}{4n(k+q+1)}\left[(1+(-1)^{k+q+1})\frac{1}{B^{k+q+1}}-\right.$$

$$-\frac{2}{\pi} BI_{k+q+1}\Big]\Big\} + \frac{1}{8n\,bU_\infty^2} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1} \frac{1}{k+q+1} (w^{(1)}_{n-1-k,k} Q^{(1)}_{n,q} +$$

$$+ w^{(2)}_{n-1-k,k} Q^{(2)}_{n,q}) I_{k+q+1} + \frac{B^2}{4n\,bU_\infty^2} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-2} \frac{1}{k+q+1} (w^{(1)}_{n-1-k,k} D^{(1)}_{n,q} +$$

$$+ w^{(2)}_{n-1-k,k} D^{(2)}_{n,q}) I_{k+q+2}, \tag{21b}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{bU_\infty} \int_0^1\int_{-b}^{b} (u^{(1)} - u^{(2)})\, x_2\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 =$$

$$= -\frac{1}{BbU_\infty} \sum_{q=0}^{n-1} (w^{(1)}_{n-1-q,q} + w^{(2)}_{n-1-q,q}) \Big\{ \frac{1}{n-q} \Big(1 - (-1)^{q+2}\Big) \Big[\frac{1}{q+2} b^{q+2} +$$

$$+ \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{q+2}\Big) \frac{1}{B^{q+2}} \Big] + \frac{1}{2(n+1)(q+2)} \Big[(1 + (-1)^{q+2}) \frac{1}{B^{q+2}} -$$

$$- \frac{2}{\pi} BI_{q+2} \Big] \Big\} - \frac{1}{4(n+1)\,bU_\infty} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{1}{q+2} (Q^{(1)}_{n,q} + Q^{(2)}_{n,q})\, I_{q+1} -$$

$$- \frac{B^2}{2(n+1)\,bU_\infty} \sum_{q=0}^{n-2} \frac{1}{q+2} (D^{(1)}_{n,q} + D^{(2)}_{n,q})\, I_{q+3}, \tag{21c}$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{bU_\infty} \int_0^1\int_{-b}^{b} (u^{(1)} - u^{(2)})\, x_1\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 =$$

$$= \frac{1}{BbU_\infty} \sum_{q=0}^{n-1} (w^{(1)}_{n-1-q,q} + w^{(2)}_{n-1-q,q}) \Big\{ \frac{1}{n-q+1} (1 - (-1)^{q+1}) \Big[\frac{1}{q+1} b^{q+1} +$$

$$+ \Big(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{q+1}\Big) \frac{1}{B^{q+1}} \Big] + \frac{1}{2(n+2)(q+1)} \Big[(1 + (-1)^{q+1}) \frac{1}{B^{q+1}} -$$

$$- \frac{2}{\pi} BI_{q+1} \Big] \Big\} + \frac{1}{4(n+2)\,bU_\infty} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{1}{q+1} (Q^{(1)}_{n,q} + Q^{(2)}_{n,q})\, I_q +$$

$$+ \frac{B^2}{2(n+2)\,bU_\infty} \sum_{q=0}^{n-2} \frac{1}{q+1} (D^{(1)}_{n,q} + D^{(2)}_{n,q})\, I_{q+2}. \tag{21d}$$

Expresiile I_t care intervin în relațiile de mai sus sînt date în anexa de calcul.

3. ARIPI DREPTUNGHIULARE CU PROFIL VARIABIL ÎN ANVERGURĂ

Să considerăm o aripă dreptunghiulară (fig. 4) pe extradosul căreia viteza verticală este definită sub forma

$$w = \sum_{q=0}^{n-1} (\pm 1)^{k+p} w_{n-1-k,\,k}\, x_1^{n-1-k} x_2^k \qquad (p = 0, 1), \tag{22}$$

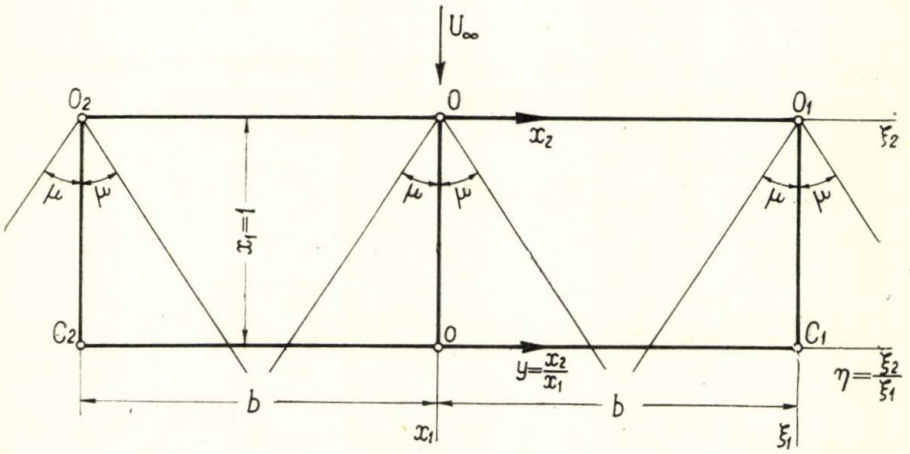


Fig. 4

unde semnul plus se referă $x_2 > 0$, iar semnul minus la $x_2 < 0$ și unde $p = 0$ corespunde cazului distribuției simetrice a vitezei verticale pe aripă, în timp ce $p = 1$ corespunde cazului distribuției antisimetrice a acesteia. În ceea ce privește distribuția vitezei verticale pe intradosul aripii, aceasta va fi dată, în cazul aripii dreptunghiulare subțiri, de aceeași expresie (22) ca cea de pe intrados , iar în cazul dreptunghiulare aripii de grosime simetrică va prezenta valorile egale și de semne contrare cu cele date de expresia (21).

După cum am arătat în lucrarea menționată [1], viteza axială de perturbație pentru aripa dreptunghiulară este dată de relația

$$u = u^0 + u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}}, \tag{23}$$

unde u^0 reprezintă viteza axială de perturbație din mișcarea în jurul unei aripi de anvergură infinită, definită prin relația (21), și care are expresia

$$u^0 = -\, x_1^{n-1} \frac{1}{B} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} w_{n-1-2\varkappa,\,2\varkappa}\, y^{2\varkappa} -$$

$$- x_1^{n-1} \operatorname{Re}\left\{\frac{2}{\pi B} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} w_{n-2-2\varkappa,\,2\varkappa+1}\, x^{2\varkappa+1}\left[\arccos\sqrt{\frac{1-Bx}{2}} - \right.\right.$$

$$\left. - \arccos\sqrt{\frac{1+Bx}{2}}\right] + \sum_{\varkappa=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} Q_{n,\,2\varkappa}\, x^{2\varkappa} \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} +$$

$$\left. + \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,\,2\varkappa}\, x^{2\varkappa}\sqrt{1-B^2x^2}\right\} \tag{24}$$

în cazul aripii dreptunghiulare subţiri sau de grosime simetrică avînd o distribuţie simetrică a vitezei verticale ($p = 0$) şi expresia

$$u^0 = - x_1^{n-1}\frac{1}{B} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} w_{n-2-2\varkappa,\,2\varkappa+1}\, y^{2\varkappa+1} -$$

$$- x_1^{n-1} \operatorname{Re}\left\{\frac{2}{\pi B} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} w_{n-1-2\varkappa,\,2\varkappa}\, x^{2\varkappa}\left[\arccos\sqrt{\frac{1-Bx}{2}} - \right.\right.$$

$$\left. - \arccos\sqrt{\frac{1+Bx}{2}}\right] + \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} Q_{n,\,2\varkappa+1}\, x^{2\varkappa+1} \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} +$$

$$\left. + \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-3}{2}\right)} D_{n,\,2\varkappa+1}\, x^{2\varkappa+1}\sqrt{1-B^2x^2}\right\} \tag{25}$$

în cazul aripii subţiri avînd o distribuţie antisimetrică a vitezei verticale, unde $E(t)$ reprezintă cel mai mare întreg cuprins în t şi unde constantele care apar se determină din condiţii analoge cu condiţiile (19).

În ceea ce priveşte viteza axială de perturbaţie u^{I} (viteza axială u^{II} fiind simetrică pentru $p = 0$ şi antisimetrică pentru $p = 1$ faţă de u^{I} în raport cu axa Ox_1) corespunzătoare mişcării din interiorul conului Moch cu vîrful în O_1 (fig. 4), aceasta va fi dată, aşa cum a fost stabilit în [1], de expresiile

$$u^{\mathrm{I}} = \sum_{m=1}^{n} \xi_1^{m-1} \operatorname{Re} \mathcal{U}^{\mathrm{I}}_{m-1}, \tag{26 a}$$

$$\mathcal{U}^{\mathrm{I}}_{m-1} = \frac{2}{\pi B} \sum_{q=0}^{m-1} \beta_{m-1-q,\,q}\, \xi^q \arccos\sqrt{-B\xi} -$$

$$- \sqrt{-B\xi(1+B\xi)} \sum_{q=0}^{m-2} A_{m,\,q}\, \xi^q \tag{26 b}$$

în cazul aripii dreptunghiulare subțiri și

$$u^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2B} \sum_{m=1}^{n} \sum_{q=0}^{m-1} \beta_{m-1-q,q}\, \xi_1^{m-1-q}\, \xi_2^{q} + \sum_{m=1}^{n} \xi_1^{m-1}\, \mathrm{Re}\, \mathcal{U}_{m-1}^{\mathrm{I}}, \tag{27 a}$$

$$\mathcal{U}_{m-1}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\pi B} \sum_{q=0}^{m-1} \beta_{m-1-q,q}\, \xi^{q} \left[\arccos \sqrt{\frac{1-B\xi}{2}} - \arccos \sqrt{\frac{1+B\xi}{2}} \right] +$$

$$+ \sum_{q=1}^{m-1} Q_{m,q}^{\mathrm{I}}\, \xi^{q}\, \mathrm{arg\,ch} \sqrt{\frac{1+B\xi}{2B\xi}} + \sum_{q=0}^{m-2} D_{m,q}^{\mathrm{I}}\, \xi^{q} \sqrt{1-B^2\xi^2} \tag{27 b}$$

în cazul aripii dreptunghiulare de grosime simetrică, unde coeficienții $\beta_{m-1-q,q}$ sînt dați de relațiile

$$\beta_{m-1-q,q} = C_{n-m-q}^{q}\, b^{n-m}\, w_{m-1-q,\,n-m-q} \tag{28}$$

și unde am introdus variabila complexă $\xi = \eta^* + i\zeta^*$, definită prin transformarea

$$\xi = \eta^* + i\zeta^*; \qquad \eta^* = \frac{\eta}{1-B^2z^2}, \qquad \zeta^* = \frac{z\sqrt{1-B^2(y^2+z^2)}}{1-B^2z^2}, \tag{29 a}$$

$$\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{x_2 - b}{x_1}, \qquad z = \frac{x_3}{\xi_1} = \frac{x_3}{x_1}. \tag{29 b}$$

În ceea ce privește constantele $Q_{n,q}$, $D_{n,q}$ $A_{m,q}$ $Q_{m,q}^{\mathrm{I}}$, $D_{m,q}^{\mathrm{I}}$ care apar în expresiile (23), (24), (25), și (26) acestea se determină în modul indicat în [1].

Ținînd seama de relațiile (21) și (22), coeficienții de portanță, rezistență de undă și moment de tangaj vor putea fi exprimați în cazul aripilor dreptunghiulare cu simetrie a vitezei verticale ($p = 0$) sub forma

$$C_l = C_l^0 + C_l^{\mathrm{I}} + C_l^{\mathrm{II}} = C_l^0 + 2C_l^{\mathrm{I}}, \tag{30a}$$

$$C_d = C_d^0 + C_d^{\mathrm{I}} + C_d^{\mathrm{II}} = C_d^0 + 2C_d^{\mathrm{I}}, \tag{30b}$$

$$\mu_2 = \mu_2^0 + \mu_2^{\mathrm{I}} + \mu_2^{\mathrm{II}} = \mu_2^0 + 2\mu_2^{\mathrm{I}}, \tag{30c}$$

unde coeficienții aerodinamici parțiali cu indicele O corespund vitezei axiale u^0, iar cei cu indicele I corespund vitezei axiale u^{I}, și unde am ținut seama de faptul că, datorită simetriei aripii, coeficienții corespunzători vitezei axiale u^{II} sînt egali cu cei corespunzători vitezei u^{I}.

Pentru acești coeficienți aerodinamici parțiali se obțin în cazul aripii dreptunghiulare subțiri, după efectuarea tuturor calculelor, expresiile

$$C_l^0 = -\frac{2}{BbU_\infty}\sum_{q=0}^{n-1} w_{n-1-q,q}\left\{\frac{2}{n-q}\left[\frac{1}{q+1}b^{q+1} + \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{q+1}\right)\frac{1}{B^{q+1}}\right] + \frac{1}{(n+1)(q+1)}\frac{1}{B^{q+1}}\right\} +$$

$$+\frac{2}{(n+1)\,bU_\infty}\sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)}\frac{1}{\pi(2\varkappa+2)}w_{n-2-2\varkappa,2\varkappa+1}I_{2\varkappa+2} -$$

$$-\frac{1}{2(n+1)\,bU_\infty}\sum_{\varkappa=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2\varkappa+1}Q_{n,2\varkappa}I_{2\varkappa} -$$

$$-\frac{B^2}{(n+1)\,bU_\infty}\sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)}\frac{1}{2\varkappa+1}D_{n,2\varkappa}I_{2\varkappa+2}, \tag{31a}$$

$$C_d^0 = \frac{2}{Bb\,U_\infty^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} w_{n-1-k,k}\,w_{n-1-q,q}\left\{\frac{2}{2n-1-k-q}\left[\frac{1}{k+q+1}b^{k+q+1} + \left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{k+q+1}\right)\frac{1}{B^{k+q+1}}\right] + \frac{1}{2n(k+q+1)}\frac{1}{B^{k+q+1}}\right\} -$$

$$-\frac{1}{nbU_\infty^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)}\frac{1}{\pi(k+q+1)}w_{n-1-k,k}\,w_{n-2-2\varkappa,2\varkappa+1}I_{k+2\varkappa+2} +$$

$$+\frac{1}{4n\,bU_\infty^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\varkappa=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{k+2\varkappa+2}w_{n-1-k,k}\,Q_{n,2\varkappa}I_{k+2\varkappa+2} +$$

$$+\frac{B^2}{2n\,bU_\infty^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)}\frac{1}{k+2\varkappa+2}w_{n-1-k,k}\,D_{n,2\varkappa}I_{k+2\varkappa+2}, \tag{31b}$$

$$\mu_2^0 = \frac{2}{Bb\,U_\infty}\sum_{q=0}^{n-1} w_{n-1-q,q}\left\{\frac{2}{n-q+1}\left[\frac{1}{q+1}b^{q+1} + \left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{q+1}\right)\frac{1}{B^{q+1}}\right] + \frac{1}{(n+2)(q+1)}\frac{1}{B^{q+1}}\right\} -$$

$$- \frac{2}{(n+2)\,bU_\infty} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{1}\right)} \frac{1}{\pi(2\varkappa+2)} w_{n-2-2\varkappa,2\varkappa+1}\, I_{2\varkappa+2} +$$

$$+ \frac{1}{2(n+2)\,bU_\infty} \sum_{\varkappa=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{2\varkappa+1} Q_{n,2\varkappa}\, I_{2\varkappa} +$$

$$+ \frac{B^2}{(n+2)\,bU_\infty} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} \frac{1}{2\varkappa+2} I_{2\varkappa+3}, \tag{31c}$$

$$C_l^{\mathrm{I}} = \sum_{m=1}^{n} C_l^{m(\mathrm{I})} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(m+1)\,bU_\infty} \left[-\frac{1}{\pi B} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{q+1} \beta_{m-1-q,q}\, J_{q+1}^{\mathrm{I}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{m-2} \frac{1}{2(q+2)} A_{m,q}\, J_{q+1}^{\mathrm{I}} \right], \tag{32a}$$

$$C_d^{\mathrm{I}} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2m\,bU_\infty^2} \beta_{m-1-k,k} \left[-\frac{1}{\pi B} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{k+q+1} \beta_{m-1-q,q}\, J_{k+q+1}^{\mathrm{I}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{m-2} \frac{1}{2(k+q+2)} A_{m,q}\, J_{k+q+1}^{\mathrm{I}} \right], \tag{32b}$$

$$\mu_2^{\mathrm{I}} = \sum_{m=1}^{n} \frac{m+1}{m+2} C_l^{(m)\mathrm{I}}, \tag{32c}$$

unde valorile expresiilor notate prin I_t și J_t^{I} sînt date în anexa de calcul.

Coeficientul rezistenței de undă corespunzător aripii dreptunghiulare de grosime simetrică va fi dat de aceiași relație (30 b), în care C_d^0 are aceeași expresie (31b) însă C_d^{I} este dat de relația

$$C_d^{\mathrm{I}} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2m\,bU_\infty} \beta_{m-1-k,k} \left\{ \sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{k+q+1} \beta_{m-1-q,q} \left[\frac{(-1)^{k+q+1}}{B^{k+q+2}} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} I_{k+q+1}^{\mathrm{I}} \right] + \sum_{q=1}^{m-1} \frac{1}{2(k+q+1)} Q_{m,q}^{\mathrm{I}}\, I_{k+q+1}^{\mathrm{I}} +$$

$$\left. + B^2 \sum_{q=0}^{m-2} \frac{1}{k+q+1} \mathrm{D}_{m,q}^{\mathrm{I}}\, I_{k+q+2}^{1} \right\}, \tag{33}$$

unde valorile expresiilor I_t^{I} sînt date în anexa de calcul.

În ceea ce privește cazul aripilor dreptunghiulare subțiri având incidența distribuită antisimetric ($p = 1$), coeficientul momentului de ruliu, care interesează în mod deosebit în acest caz, va fi dat de relația

$$\mu_1 = \mu_1^0 + \mu_1^{\mathrm{I}} + \mu_1^{\mathrm{II}} = \mu_1^0 + 2\,\mu_1^{\mathrm{I}}, \tag{34}$$

în care

$$\mu_1^0 = -\frac{2}{Bb\,U_\infty}\sum_{q=0}^{n-1} w_{n-1-q,q}\left\{\frac{2}{n-q}\left[\frac{1}{q+2}\,b^{q+2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{q+2}\right)\frac{1}{B^{q+2}}\right] + \frac{1}{(n+1)(q+2)}\,\frac{1}{B^{q+2}}\right\} +$$

$$+ \frac{2}{(n+1)\,bU_\infty}\sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\pi(2\varkappa+2)}\, w_{n-1-2\varkappa,2\varkappa}\; I_{2\varkappa+2} -$$

$$- \frac{1}{2(n+1)\,bU_\infty}\sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} \frac{1}{2\varkappa+3}\, Q_{n,2\varkappa+1}\, I_{2\varkappa+2} -$$

$$- \frac{B^2}{(n+2)\,bU_\infty}\sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-3}{2}\right)} \frac{1}{2\varkappa+3}\, D_{n,2\varkappa+1}\, I_{2\varkappa+4}, \tag{35a}$$

$$\mu_1^{\mathrm{I}} = bC_i^{\mathrm{I}} + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(m+1)\,bU_\infty}\left[-\frac{1}{\pi B}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{1}{q+2}\,\beta_{m-1-q,q}\,J_{q+2}^{\mathrm{I}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{m-2}\frac{1}{2(q+3)}\,A_{m,q}\,J_{q+2}^{\mathrm{I}}\right], \tag{35b}$$

unde de asemenea valorile expresiilor I_i și J_i^{I} sînt date în anexa de calcul.

4. ARIPI TRAPEZOIDALE CU PROFIL VARIABIL ÎN ANVERGURĂ

Să considerăm acum o aripă trapezoidală (fig. 5) pe extradosul căreia viteza verticală este definită de aceeași expresie (22) ca și în cazul aripii dreptunghiulare din capitolul precedent.

După cum a fost stabilit în lucrarea [1], viteza axială de perturbație va fi dată și în acest caz de relația

$$u = u^0 + u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}}, \tag{36}$$

în care u^0 şi u^I sînt date de aceleaşi expresii (24) sau (25) şi respectiv (26 a) în aceasta din urmă însă $\mathcal{U}^I_{m-1}$ avînd expresiile

$$\mathcal{U}^I_{m-1} = \frac{2}{\pi B} \sum_{q=0}^{m-1} \beta_{m-1-q,q}\, \xi^q \arccos \sqrt{\frac{B(l_1 - \xi)}{1 + Bl_1}} - \sum_{q=0}^{m-1} A^*_{m,q}\, \xi^q \sqrt{\frac{1 + B\xi}{B(l_1 - \xi)}} \tag{37}$$

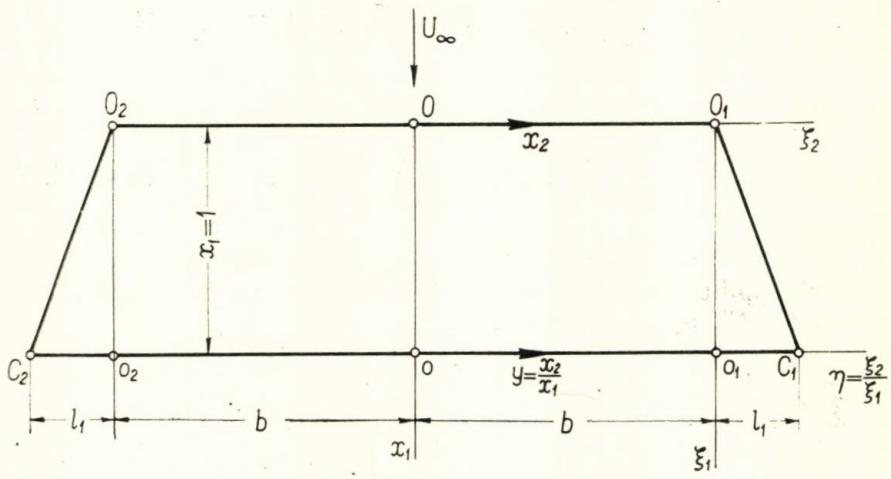


Fig. 5

în cazul aripii trapezoidale subţiri avînd bordurile laterale $O_j\ C_j$ subsonice $\left(l_1 < \frac{1}{B}\right)$ şi

$$\mathcal{U}^I_{m-1} = \frac{2}{\pi B} \sum_{q=0}^{m-1} \xi^q \left[\beta_{m-1-q,q} \arccos \sqrt{\frac{1 - B\xi}{2}} - \right.$$

$$\left. - K^*_{m,q}\, \xi^q \arccos \sqrt{\frac{(1 - B\xi)(1 + Bl_1)}{2B(l_1 - \xi)}} + \sum_{q=0}^{m-2} D^*_{m,q}\, \xi^q \sqrt{1 - B^2 \xi^2} \right. \tag{38}$$

în cazul aripii trapezoidale subţiri avînd bordurile laterale $O_j\ C_j$ supersonice $\left(l_1 > \frac{1}{B}\right)$, unde variabila complexă $\xi = \eta^* + i\zeta^*$ este definită prin aceeaşi transformatoare (29) şi unde constantele $A^*_{m,q}$, $K^*_{m,q}$, $D^*_{m,q}$ se determină în modul indicat în [1], iar coeficienţii $\beta_{m-1-q,q}$ sînt daţi de aceleaşi relaţii (28).

În ceea ce priveşte coeficienţii aerodinamici în cazul aripii trapezoidale subţiri avînd simetrie de incidenţă ($p = 0$), coeficienţii de portanţă,

rezistență de undă și moment de tangaj sînt dați de aceleași relații (30), în care coeficienții aerodinamici parțiali C_l^0, C_d^0, μ_2^0 au acum expresiile

$$C_l^0 = \frac{2b}{2b + l_1} C_{l_{dr}}^0 - \sum_{m=1}^{n} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{2}{(m+1)\, B(2b + l_1)\, U_\infty} \frac{1}{q+1} \beta_{m-1-q,q}\, l_1^{q+1}, \tag{39 a}$$

$$C_d^0 = \frac{2b}{2b + l_1} C_{d_{dr}}^0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{mB(2b + l_1)\, U_\infty^2} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{k+q+1} \times$$

$$\times\, \beta_{m-1-k,k}\, \beta_{m-1-q,q}\, l^{k+q+1} \tag{39 b}$$

$$\mu_2^0 = \frac{2b}{2b + l_1} \mu_{2_{dr}}^0 + \sum_{m=1}^{n} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{2}{(m+2)\, B(2b + l_1)\, U_\infty} \frac{1}{q+1} \beta_{m-1-q}\, l_1^{q+2},$$

unde am folosit indicele *dr* pentru a nota coeficienții aerodinamici corespunzători aripii dreptunghiulare dați de relațiile (31), iar coeficienții aerodinamici C_l^I, C_d^I, μ_2^I au expresiile

$$C_l^I = \sum_{m=1}^{n} C_l^{(m)I} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{2}{(m+1)\, B\, (2b + l_1)\, U_\infty} \left[\frac{2}{q+1} \beta_{m-1-q,q} \left(l_1^{q+1} - \frac{1}{\pi} J_{q+1}^* \right) - \right.$$

$$\left. - A_{m,q}^* (J_q^* + B J_{q+1}^*) \right], \tag{40 a}$$

$$C_d^I = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{mB\,(2b + l_1)\, U_\infty^2} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} \beta_{m-1-k,k} \left[\frac{2}{k+q+1} \beta_{m-1-q,q} \left(l_1^{k+q+1} - \right. \right. \tag{40 b}$$

$$\left. \left. - \frac{1}{\pi} J_{k+q+1}^* \right) - A_{m,q}^* (J_{k+q}^* + B J_{k+q+1}^*) \right],$$

$$\mu_2^I = \sum_{m=1}^{n} \frac{m+1}{m+2} C_l^{(m)I} \tag{40 c}$$

în cazul bordurilor laterale subsonice $\left(l_1 < \frac{1}{B} \right)$ și

$$C_l^I = \sum_{m=1}^{n} C_l^{(m)I} = \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{(m+1)\,(2b + l_1) U_\infty} \left\{ \sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{(q+1)B} \left[\beta_{m-1-q,q} \left(l_1^{q+1} - \right. \right. \right.$$

$$-\frac{1}{\pi}BI^*_{q+1}\Big)-\frac{1}{\pi}K^*_{m,q}\sqrt{B^2l_1^2-1}\sum_{r=0}^{q+1}l_1^{q+1-r}I^*_r\Big]+\sum_{q=0}^{m-2}D^*_{m,q}(I^*_q-B^2I^*_{q+2})\Big\}, \tag{41 a}$$

$$C_d^{\mathrm{I}}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{m(2b+l_1)U_\infty^2}\beta_{m-1-k,k}\Big\{\sum_{q=0}^{m-1}\frac{1}{(k+q+1)B}\Big[\beta_{m-1-q,q}\Big(l^{k+q+1}-$$

$$-\frac{1}{\pi}BI^*_{k+q+1}\Big)-\frac{1}{\pi}K^*_{m,q}\sqrt{B^2l_1^2-1}\sum_{r=0}^{k+q+1}l_1^{k+q+1-r}I^*_r\Big]+$$

$$+\sum_{q=0}^{m-2}D^*_{m,q}(I^*_{k+q}-B^2I^*_{k+q+2})\Big)\Big\}, \tag{41 b}$$

$$\mu_2^{\mathrm{I}}=\sum_{m=1}^{n}\frac{m+1}{m+2}C_l^{(m)\mathrm{I}} \tag{41 c}$$

în cazul bordurilor laterale supersonice $\left(l_1>\frac{1}{B}\right)$. Valorile expresiilor J_t^* și I_t^* care intervin în relațiile de mai sus sînt date în anexa de calcul.

În mod asemănător pentru cazul aripii trapezoidale subțiri prezentînd antisimetrie de incidență ($p=1$), coeficientul de moment de ruliu, care interesează în general, este dat de aceeași relație (34), în care însă coeficienții parțiali μ_1^0 și μ_1^{I} au expresiile

$$\mu_1^0=\frac{2b}{2b+l_1}\mu^0_{1_{dr}}-\sum_{m=1}^{n}\frac{2}{(m+1)B(2b+l_1)U_\infty}\sum_{q=0}^{m-1}\frac{1}{q+2}\beta_{m-1-q,q}l_1^{q+2} \tag{42}$$

și, respectiv

$$\mu_1^{\mathrm{I}}=bC_l^{\mathrm{I}}+\sum_{m=1}^{n}\sum_{q=0}^{m-1}\frac{2}{(m+1)B(2b+l_1)U_\infty}\Big[\frac{2}{q+2}\beta_{m-1-q,q}\Big(l_1^{q+2}-\frac{1}{\pi}J^*_{q+2}\Big)-$$

$$-A^*_{m,q}(J^*_{q+1}+BJ^*_{q+2})\Big] \tag{43}$$

în cazul bordurilor laterale subsonice $\left(l_1<\frac{1}{B}\right)$, și

$$\mu_1^{\mathrm{I}}=\sum_{m=1}^{n}\frac{2}{(m+1)(2b+l_1)U_\infty}\Big\{\sum_{q=0}^{m-1}\frac{1}{(q+2)B}\Big[\beta_{m-1-q,q}\Big(l_1^{q+2}-\frac{1}{\pi}BI^*_{q+2}\Big)-$$

$$-\frac{1}{\pi}K^*_{m,q}\sqrt{B^2l_1^2-1}\sum_{r=0}^{q+2}l_1^{q+2-r}I^*_r\Big]+\sum_{q=0}^{m-2}D^*_{m,q}(I^*_{q+1}-B^2I^*_{q+3})\Big\} \tag{44}$$

în cazul bordurilor laterale supersonice $\left(l_1>\frac{1}{B}\right)$, în care expresiile J_t^* și I_t^* sînt date de asemenea în anexa de calcul.

Primită la redacție la 5 februarie 1970

ANEXĂ DE CALCUL

Expresiile I_t care intervin în relaţiile (21), (31), (35a) :

$$I_{2r} = \pi \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2 B^{2r+1}} \quad (t=2r), \quad I_{2r+1} = 0 \quad (t=2r+1). \tag{45}$$

Expresiile J_t^I care intervin în relaţiile (32), (35b) :

$$J_t^I = -\frac{2t-1}{2t}\frac{1}{B} J_{t-1}^I, \quad J_0^I = \pi. \tag{46}$$

Expresiile I_t^I care intervin în relaţiile (33) :

$$I_{2r}^I = \frac{\pi}{2}\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2 B^{2r+1}} \quad (t=2r), \tag{47}$$

$$I_{2r+1}^I = -\frac{2^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!\, B^{2r+2}} \quad (t=2r+1). \tag{47 b}$$

Expresiile J_t^* care intervin în relaţiile (40), (43).

$$J_t^* = \frac{1}{2tB}[-(2t-1)(1-Bl_1) J_{t-1}^* - 2(t-1) l_1 J_{t-2}^*], \tag{48 a}$$

$$J_0^* = \pi, \quad J_1^* = -(1-Bl_1)\frac{\pi}{2B}. \tag{48 b}$$

Expresiile I_t^* care intervin în relaţiile (41), (44) :

$$I_{2r}^* = \pi \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2 B^{2r+1}} (t=2r), \; I_{2r+1}^* = 0, \quad (t=2r+1) \tag{49}$$

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mateescu, *An extension of Ackeret's theory for the study of infinite aspect ratio wings and of rectangular and trapezoidal wings.* Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., *2* (1970).
2. E. Carafoli, D. Mateescu, A. Năstase, *Wing Theory in Supersonic Flow*, Pergamon Press, 1969.
3. E. Carafoli, *High Speed Aerodynamics*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956.
4. D. Mateescu, *Supersonic flow aroung polygonal wings. Thin of symmetrical thickness*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., *3* (1966).
5. — *Aerodynamic characteristics of polygonal wings of symmetrical thickness in supersonic flow*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., *4* (1966).
6. — *Polygonal wings with diamond shaped profile in supersonic flow*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl. *2* (1967).

ASUPRA STRATULUI-LIMITĂ COMPRESIBIL NESTAȚIONAR PE UN DISC ÎN ROTAȚIE

de I. POP
Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj

În lucrare se studiază formarea stratului-limită compresibil pe un disc în rotație impulsivă, presupunînd că și fluidul însuși se rotește uniform. Rotația discului se caracterizează printr-un parametru a, care influențează fluxul și refluxul fluidului din jurul discului.

1. INTRODUCERE

Problema formării stratului-limită pe un disc în rotație a constituit în ultimul timp obiectul a numeroase cercetări, dintre care amintim pe ale lui Wadhwa [1], Benton [2] și Pop [3] — [6]. Aceste studii se referă la stratul incompresibil, cel compresibil fiind mai puțin cercetat. Abia recent N. Riley [7] a atacat problema stratului-limită compresibil axial-simetric într-un fluid în rotație rigidă cu viteza unghiulară Ω.

Scopul prezentei note este de a studia mișcarea în stratul-limită compresibil din jurul unui disc care începe brusc să se rotească din starea de repaus. Atenția noastră se va îndrepta asupra fluidelor cu viscozitate mică și vom considera o dependență liniară a viscozității de temperatură. De asemenea, dacă T_∞ este temperatura fluidului la mare distanță de disc și T_w temperatura discului, atunci presupunem că $|T_w - T_\infty| \gg \mathcal{R}^2\Omega^2/C_p$ și $\mathcal{R}^2\Omega^2/C_p \ll 1$, unde $\mathcal{R}$ este raza discului, iar C_p căldura specifică a fluidului. În aceste ipoteze vom putea neglija efectele disipative din ecuația energiei.

2. ECUAȚIILE STRATULUI-LIMITĂ

Să considerăm un disc de rază infinită care începe brusc (impulsiv) să se rotească în planul său ($z = 0$), în jurul unei axe perpendiculare pe el ($r = 0$), într-un fluid vîscos și compresibil. Presupunem în același timp că

la mare distanță de disc fluidul însuși se rotește uniform cu viteza unghiulară Ω. Ținînd seama de caracterul axial-simetric al problemei, $(\partial/\partial\theta = 0)$, ecuațiile mișcării în stratul-limită compresibil nestaționar, scrise în coordonatele cilindrice (r, θ, z), sînt [7]

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial r} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial z}\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho r u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r w) = 0, \tag{5}$$

$$p = \rho R T, \tag{6}$$

pe care le vom integra cu următoarele condiții la limită :

$$\begin{aligned} &u = w = 0, \quad v = a\Omega r, \quad T = T_w(\text{const}) \quad \text{pentru } z = 0, \\ &u = v = 0, \quad\quad\quad\quad T = T_\infty(\text{const}) \quad \text{pentru } z = \infty. \end{aligned} \tag{7}$$

În aceste ecuații u, v și w sînt componentele vitezei în direcția radială, transversală și axială, t coordonată temporală, T temperatura fluidului, ρ densitatea, μ viscozitatea, p presiunea, R constanta gazelor perfecte, iar a este o constantă. Notăm că în ecuația energiei (4) s-a neglijat lucrul mecanic al forțelor de presiune și disipativ.

Presupunem că densitatea ρ și viscozitatea μ sînt funcții de temperatura T, astfel că $\mu \sim T$, fapt care permite simplificarea ecuațiilor (1) — (6) după cum urmează. În primul rînd să observăm că, dacă fluidul, la mare distanță de disc, se rotește uniform cu viteza unghiulară Ω, atunci, în virtutea lui (3), putem scrie $\partial p/\partial r = \rho_\infty r\Omega^2$, unde simbolul ∞ notează condiția pe suprafața exterioară a stratului-limită. Dacă introducem coordonata Z și funcția de curent ψ, definite astfel :

$$Z = \int_0^z \frac{\rho}{\rho_\infty}\,\mathrm{d}z, \tag{8}$$

$$u = \frac{1}{r}\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial Z}, \qquad w = -\frac{1}{r}\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{9}$$

atunci din ecuația continuității (5) rezultă

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} w = -\left\{\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)_{z,t}\right\}. \tag{10}$$

Prin urmare, ținînd seama de (8), (9) și (10), împreună cu $\rho\mu = \rho_\infty \mu_\infty$ (const), ecuațiile (1) — (4) devin

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\right) - \frac{v^2}{r} =$$

$$= \frac{T}{T_\infty} r\Omega^2 + \nu_\infty \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\right), \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial Z} v = \nu_\infty \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{\nu_\infty}{\sigma}\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}, \tag{13}$$

în care σ este numărul lui Prandtl și pe care în continuare îl considerăm egal cu unitatea.

3. SOLUȚIA PROBLEMEI

Pentru integrarea sistemului de ecuații (11) — (13) vom aplica metoda soluțiilor „similare", care, după cum se știe, constă în reducerea ecuațiilor cu derivate parțiale la ecuații diferențiale ordinare. În acest scop, pentru valori mici ale lui τ, alegem soluția ecuațiilor (11) — (13) sub forma

$$\begin{aligned} \psi &= 2\tau^{3/2} r^2 \Omega (\nu_\infty/\Omega)^{1/2} f(\eta), \\ v &= r\Omega\, g(\eta), \qquad T = T_\infty[1 + S\theta(\eta)], \end{aligned} \tag{14}$$

unde

$$\tau = \Omega t, \qquad \eta = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}(\Omega/\nu_\infty)^{1/2} Z, \qquad S = (T_w - T_\infty)/T_\infty.$$

Substituind relațiile (14) în (11) — (13), rezultă ecuațiile diferențiale ordinare

$$f''' + 2\eta f'' - 4f' = 4(1 + S\theta) - 4g^2, \tag{15}$$

$$g'' + 2\eta g' = 0, \; \theta'' + 2\eta\theta' = 0, \tag{16}$$

care trebuie integrate cu următoarele condiții la limită :

$$\begin{aligned} f' = f = 0, \quad g = a, \quad \theta = 1 \quad &\text{pentru } \eta = 0, \\ f' = 0, \quad g = 1, \quad \theta = 0, \quad &\text{pentru } \eta = \infty, \end{aligned} \tag{17}$$

unde accentul notează derivarea în raport cu η.

Ecuațiile (16) cu condițiile (17) se integrează imediat și au soluțiile

$$g(\eta) = 1 + (a - 1)\operatorname{erfc}\eta, \qquad \theta(\eta) = \operatorname{erfc}\eta, \tag{18}$$

unde

$$\operatorname{erfc}\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

În continuare ne propunem să integrăm ecuația (15), care împreună cu (18) se transcrie

$$f''' + 2\eta f'' - 4f' = -4(a-1)^2 \operatorname{erfc}^2\eta + 4[S - 2(a-1)]\operatorname{erfc}\eta. \tag{19}$$

Două soluții particulare ale ecuației omogene (19) sînt

$$\begin{aligned} f_h'(\eta) &= 1 + 2\eta^2, \\ f_h'(\eta) &= (1 + 2\eta^2)\operatorname{erfc}\eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

iar o soluție particulară a ecuației neomogene (19) o căutăm sub forma

$$f_p'(\eta) = L(\eta)\operatorname{erfc}^2\eta + M(\eta)\operatorname{ercf}\eta + N(\eta), \tag{21}$$

unde funcțiile L, M și N se determină din sistemul

$$\begin{aligned} L'' + 2\eta L' - 4L &= -4(a-1)^2, \\ M'' + 2\eta M' - 4M &= \frac{8}{\sqrt{\pi}} L' \cdot e^{-\eta^2} + 4[S - 2(a-1)], \\ N'' + 2\eta N' - 4N &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} M' \cdot e^{-\eta^2} - \frac{8}{\sqrt{\pi}} L \cdot e^{-2\eta^2}, \end{aligned} \tag{22}$$

și au expresiile

$$\begin{aligned} L(\eta) &= -2(a-1)^2\eta^2, \\ M(\eta) &= \frac{4(a-1)^2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} + 2(a-1) - S, \\ N(\eta) &= -\frac{2(a-1)^2}{\pi} e^{-2\eta^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

În acest fel, soluția generală a ecuației (19) se scrie

$$f'(\eta) = C_1(1 + 2\eta^2) + C_2\left[(1 + 2\eta^2)\operatorname{erfc}\eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}\right] -$$

$$2(a-1)^2\eta^2\operatorname{erfc}^2\eta + \left[\frac{4(a-1)^2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} + 2(a-1) - S\right]\operatorname{erfc}\eta -$$

$$\frac{2(a-1)^2}{\pi}e^{-2\eta^2},$$

în care, dacă se introduc condițiile la limită (17), obținem pentru constantele C_1 și C_2 următoarele valori:

$$C_1 = 0,\ C_2 = S + 2(1-a) + \frac{2(a-1)^2}{\pi}.$$

4. NATURA MIȘCĂRII

Profilele temperaturii și vitezei radiale și transversale adimensionale pentru diferite valori ale parametrului a și pentru $S = 1$ sînt reprezentate pe figurile 1, 2 și 3. Remarcăm de aici că parametrul a, fie că este pozitiv

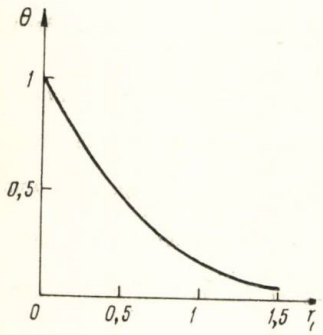


Fig. 1. — Profilul temperaturii adimensionale.

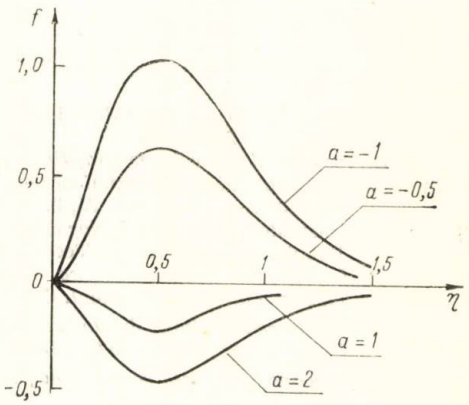


Fig. 2. — Profilul vitezei radiale adimensionale.

sau negativ, fie că este mai mic sau mai mare decît unu, influențează fluxul și refluxul fluidului din jurul discului. Din figura 2 mai observăm în plus că în cazul rotației rigide ($a = 1$) de fluid compresibil, spre deosebire de cazul

fluidului incompresibil [6], se dezvoltă o scurgere radială de fluid, care se datorește schimbului de temperatură de la disc la fluid, deoarece variația

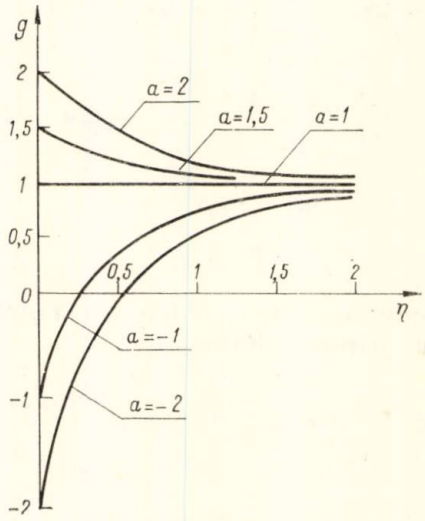


Fig. 3. — Profilul vitezei transversale adimensionale.

în temperatură este însoțită de o schimbare în densitate care va modifica gradientul radial de presiune.

Primită la redacție la 22 iulie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Y. D. Wadhwa, *Unsteady stagnation flow towards a rotating lamina*, J. Sci. Engin. Resh., **7**, *2*, 259—266 (1963).
2. E. R. Benton, *On the flow due to a rotating disk*, J. Fluid Mech., **24**, *4*, 781—800 (1966).
3. I. Pop, *Asupra stratului-limită nestaționar din apropierea unui disc care se rotește în jurul unei axe*, St. cerc. mec. apl., **25**, 3, 689—695 (1967).
4. — *Unsteady hydromagnetic stagnation flow towards a rotating lamina*, Bull. de l'Acad. Pol. des Sci., sér. des Sci. Techn., **16**, *2*, 219—222 (1969).
5. — *Le mouvement instationnaire à succion d'un fluide visqueux incompressible sous l'action d'un disque tournant*, Comptes Rendus, *268*, 228—230 (1968).
6. — *Sur la couche limite dynamique nonstationnaire sur un disque tournant*, Comptes Rendus, *268*, 1571—1573 (1969).
7. N. Riley, *Thermally induced boundary-layer flows in a rotating environment*, J. Fluid Mech., **29**, *2*, 241—257 (1967).

RECENZII

MIHÁLY MAKHULT, *Schwingungstechnische Bemessung von Maschinenlagerungen*, Budapesta, Akadémiai Kiadó, 1970

Lucrarea cu titlul de mai sus apare acum în limba germană, după ce ediția maghiară a fost publicată în 1962.

Monografia se încadrează în grupa publicațiilor care tratează izolarea antivibratorie, activă sau pasivă a mașinilor. Autorul pornește de la observația că în timpurile noastre tot mai multe mașini pot fi așezate prin intermediul unor elemente elastice, direct pe pardoselile atelierelor, fără a fi necesare blocuri de fundație. Ca atare, monografia are ca obiect tratarea diferitelor aspecte ale acestei probleme. Aplicațiile de acest fel iau azi o mare răspîndire, în special în domeniul mașinilor-unelte, ceea ce face subiectul deosebit de actual.

În primul capitol se face o privire generală asupra diferitelor moduri de rezemare a mașinilor cu sau fără blocuri de fundație.

Al doilea capitol redă noțiunile din teoria vibrațiilor pentru sisteme cu număr finit de grade de libertate sau sisteme continue, necesare tratării problemei. Se dau indicații referitoare la coeficienții de amortizare și la transmisibilități.

Capitolul al treilea, intitulat „Calcule auxiliare", se ocupă de modul de calcul al momentelor de inerție, al constantelor elastice, al forțelor perturbatoare.

În capitolul al patrulea se arată modul de calcul al izolării active și pasive, cu indicații asupra valorilor admisibile ale vibrațiilor.

În capitolul al cincilea sînt expuse zece nomograme în culori, deosebit de utile pentru calculele proiectanților.

Ultimul capitol dă o serie de exemple de calcul, indicînd modul de folosire a nomogramelor.

Volumul, redactat în mod concis și clar, este deosebit de util pentru proiectarea izolărilor antivibratoare ale mașinilor care nu necesită blocuri de fundație.

Lucrarea este o contribuție valoroasă în literatura de specialitate.

Gh. Buzdugan

LADISLAV FISCHER, *Theorie und Praxis der Schalenkonstruktionen* (Teoria și practica structurilor din plăci curbe subțiri), Berlin — München, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1968, 541 p., 434 fig., 129 de tabele și 28 de exemple de calcul

Plecînd de la constatarea că teoria plăcilor curbe subțiri este foarte complicată și de aceea greu accesibilă inginerului practician care posedă o formație obișnuită, autorul și-a propus ca scop principal al cărții de față să înlăture în măsura posibilului aceste dificultăți și să lărgească prin aceasta cercul inginerilor care se ocupă cu construcția structurilor din plăci curbe subțiri.

Pentru a atinge acest scop, autorul reduce acțiunea unei plăci curbe subțiri la trei tipuri de bază, și anume placa, arcul și hiparul (paraboloidul hiperbolic). Aceste trei elemente pot fi calculate cu ajutorul metodelor staticii construcțiilor și prin mijloace matematice simple. În concepția autorului, „această separare în elemente fundamentale duce la noi metode de calcul simple și reprezentative, care pot sta la baza unor noi dezvoltări".

Înainte de a face aprecieri critice vom trece în revistă conținutul cărții. Din cele 14 capitole, primele nouă tratează teoria de membrană, iar celelalte cinci teoria încovoierii.

Într-un capitol de *introducere* sînt definite tipurile de plăci curbe subțiri utilizate în practică, fără a se da o clasificare a lor sau elemente de geometrie diferențială a suprafețelor. Urmează comportarea de membrană la încărcări verticale și la sarcini oarecare, condițiile marginale și o sumară discuție a perturbării stării de membrană.

Capitolul al doilea tratează *probleme simple ale plăcilor subțiri de translație.* Ca forme de suprafețe sînt studiate : paraboloidul eliptic și de rotație și suprafața cu două directoare circulare. Rezolvarea completă a problemei este făcută pentru paraboloidul eliptic pleoștit, alegînd ca necunoscută de bază efortul longitudinal n_x și aplicînd diferențele finite după metoda parabolei. Ca forme de contururi sînt studiate dreptunghiul și triunghiul dreptunghic și isoscel. Este surprinzător faptul că nu sînt amintite aici soluții analitice duse pînă în faza de tabele sau de formule explicite pentru eforturi.

Capitolul al treilea tratează *probleme simple ale paraboloidului hiperbolic.* Aici se deduc formulele elementare pentru hiparul drept, oblic și în șa sub încărcare constantă și greutate proprie.

În mod similar, capitolul al patrulea tratează *probleme simple ale plăcilor subțiri cilindrice.* Acest capitol are o dezvoltare mare, trecînd în revistă soluții sub formă finită pentru cîteva curbe directoare și apoi soluții cu ajutorul seriilor trigonometrice.

Capitolul al cincilea tratează *probleme simple ale plăcilor subțiri de rotație* și abordează doar problema încărcărilor simetrice pentru cupola sferică, conică și parabolică.

Conoizii formează obiectul capitolului al șaselea. Curba directoare este aleasă parabolă, arc de cerc, elipsă, cosinusoidă. Pe cazuri simple se arată că ecuațiile de echilibru pot fi deduse din echilibrul unui element de boltă și al unui element de paraboloid hiperbolic.

Soluții analitice sînt date prin polinoame, respectiv serii de puteri pentru conoidul parabolic și cel circular. Încărcările luate în considerare sînt cea uniformă și greutatea proprie.

Teoria generală a membranelor este studiată în capitolul al șaptelea. După deducerea din nou a ecuațiilor de echilibru, este introdusă funcția de eforturi (de tip Airy). Cu ajutorul acestei funcții sînt căutate soluții analitice pentru paraboloidul de rotație pe contur triunghiular echilateral și pentru paraboloidul eliptic pe contur dreptunghiular. Pentru a doua formă de contur, soluțiile sînt căutate cu ajutorul seriilor trigonometrice pentru mai multe tipuri de încărcări (uniformă, variabilă, parțială și concentrată).

În încheierea capitolului sînt tratate transformările afine.

Problemele speciale ale membranelor sînt grupate în capitolul al optulea încărcările nesimetrice ale plăcilor curbe subțiri de rotație, cupolele în apsidă și cilindrii intersectați.

Deformațiile plăcilor curbe subțiri în starea de membrană sînt studiate în capitolul 9, care încheie prima parte. Aici sînt tratate cazurile paraboloidului de rotație, cilindrului circular și plăcilor de rotație.

Partea a doua începe cu capitolul al zecelea, de proporții reduse, în care se deduc cele două ecuații de bază din metoda mixtă în *teoria încovoierii plăcilor subțiri pleoștite.*

În capitolul următor (11) este tratată *teoria încovoierii plăcilor subțiri de translație.* Pentru paraboloidul de rotație simplu rezemat pe contur, soluția particulară este analogă celei corespunzătoare grinzii pe mediu elastic (funcții exponențiale amortizate), iar pentru obținerea soluției omogene se sugerează aplicarea diferențelor finite.

În continuare se dă o soluție aproximativă pentru suprafața în formă de peliculă de săpun (unii cercetători au denumit-o suprafață velaroidală), caracterizată printr-o ecuație de forma $z = l\ z_1(x)\ .\ z_2(y)$.

Autorul pare să piardă din vedere că la această suprafață curba totală este pozitivă în zona centrală și negativă în vecinătate conturului, ceea ce denotă o propagare adîncă a perturbațiilor marginale în interiorul plăcii.

Tot cu ajutorul funcțiilor exponențiale amortizate sînt studiate alte cazuri de încărcare și de rezemare pentru paraboloidul eliptic și de rotație.

Urmează un amplu capitol (12) despre *teoria încovoierii plăcilor subțiri cilindrice*. Ecuațiile de bază sînt deduse prin particularizare din ecuațiile plăcilor subțiri pleoștite, ceea ce corespunde aproximației cunoscute în literatură sub numele D.K.J.

În mod formal, cele două ecuații pot caracteriza comportarea a două plăci plane, încărcată prima cu efortul de membrană N_y/R, iar a doua cu sarcina $-\frac{D}{R}\frac{w^2}{x^2}$.

Prin aproximații succesive, soluțiile pot fi obținute sub formă polinomială (cu o corecție sinusoidală).

Lucrarea se încheie cu două capitole (13 și 14) tratînd despre *teoria încovoierii cilindrului circular încărcat simetric*, respectiv *teoria încovoierii simetrice a plăcilor subțiri de rotație*.

Bibliografia cuprinde doar 18 titluri, din care 13 publicate pînă în 1955.

Lucrarea în ansamblu, poate fi apreciată în mod diferit după poziția pe care ne situăm. Ceea ce conferă un interes indiscutabil cărții sînt numeroasele exemple de calcul, finalizate pînă la schița de armare a plăcii de beton armat.

Însă chiar și în această situație, cînd o considerăm destinată unui cerc foarte larg de ingineri, lucrarea prezintă numeroase lungimi și repetări în ascendența de la cazul particular la cel general.

Datorită faptului că autorul pleacă de la ideea celor trei elemente componente care pot servi doar la studierea unor forme simple de suprafețe, un cititor mai puțin familiarizat cu acest domeniu nu va fi tentat să plece de la ecuațiile generale și să studieze cazuri mai complexe.

Aceeași idee a autorului face ca soluții exacte și aproximative cunoscute din literatura de specialitate și care dau soluția directă să nu figureze în volumul de față.

Privită ca o sinteză a studiilor personale ale autorului, care ne apare ca o personalitate originală, cartea prezintă un interes indiscutabil și va putea fi studiată cu folos de un cerc larg de cititori.

Mircea Soare

RIPIANU ANDREI, *Mișcările vibratorii ale arborilor drepți și cotiți*, București, Edit. Academiei, 1969, 483 p.

Activitatea de cercetare în domeniul dinamicii arborilor drepți și cotiți, pe care Andrei Ripianu o desfășoară de 14 ani, l-a consacrat ca pe un specialist în acest domeniu. Rezultatele pe care le-a obținut atît în această direcție, cît și în domeniul flambajului și al vibrajului corzilor au fost publicate în reviste de înalt nivel științific, dintre care citățm : „Acta technica" (Praga), „Journal of Technology Bulletin of the Research Council of Israel" (Jerusalem), „Izvestia Akademii Nauk SSSR" (Moscova), „Journal of the Maharaja Sayajirao University of Baroda (Baroda) etc.

Aceste rezultate au fost sintetizate în volumul de față, unde se studiază mișcările tranzitorii ale arborilor drepți cu secțiune circulară și cu secțiune necirculară, avînd un centru de sime-

trie, şi se determină valorile pulsaţiilor proprii ale vibraţiilor de torsiune a arborilor cotiţi de la motoarele omogene în linie şi stabilirea unor noi formule pentru calculul valorilor aproximative a coeficienţilor seriei Fourier ai unei funcţii periodice.

Problematica abordată de autor este actuală, ţinînd seama de creşterea turaţiilor de serviciu a maşinilor rotative şi de evidenţierea unor fenomene periculoase specifice domeniului turaţiilor mari. Analiza fenomenelor dinamice în mişcările tranzitorii corespunde unei necesităţi teoretice şi practice, întrucît tocmai în acest stadiu al mişcării apar procese de nestabilitate şi de distrugere prin rezonanţă.

Lucrarea se compune din trei părţi distincte prin conţinutul lor.

În cadrul primului capitol se efectuează studiul mişcărilor tranzitorii în cazul unui arbore drept cu secţiune circulară, care se roteşte cu viteză unghiulară constantă plasată în vecinătatea punctului critic Laval, fără a se lua în considerare forţele rezistente exterioare. Apoi se efectuează (capitol II) studiul mişcărilor tranzitorii în cazul unui arbore drept cu secţiune necirculară care se roteşte cu viteză unghiulară constantă plasată în exteriorul sau interiorul frontierelor domeniul critic Laval lărgit, fără a se lua în considerare forţele rezistente exterioare.

Capitolul al treilea tratează determinarea mişcărilor tranzitorii în cazul arborelui cu secţiune circulară încărcat cu un singur rotor la mijloc, luînd în considerare forţele rezistente. Studiul mişcărilor se efectuează, luînd în considerare următoarele simplificări :

— planul rotorului rămîne fix în spaţiu, fără efecte giroscopice ;

— masa arborelui este neglijabilă faţă de masa rotorului ;

— se neglijează efectul de histerezis elastic al materialului arborelui ;

— se presupune că arborele este plasat vertical.

Se admite implicit şi simplificarea că toate forţele rezistente pot fi înlocuite printr-o forţă unică, acţionînd în centrul de greutate al secţiunii arborelui.

În capitolul al patrulea este reluată determinarea mişcărilor tranzitorii, cu luarea în considerare a forţelor pentru un arbore cu secţiune necirculară. Se consideră că rotorul porneşte din repaus cu viteză unghiulară nulă, executînd o mişcare uniform accelerată. Studiul mişcărilor este realizat admiţînd-se următoarele cinci cazuri :

— arborele se roteşte cu viteză unghiulară sub domeniul critic Laval lărgit ;

— arborele se roteşte cu viteză unghiulară critică plasată la frontiera inferioară a domeniului critic Laval lărgit ;

— arborele se roteşte cu viteză unghiulară constantă plasată în interiorul domeniului critic Laval lărgit ;

— arborele se roteşte cu viteză unghiulară critică plasată pe frontiera superioară a domeniului critic lărgit ;

— arborele se roteşte cu viteză unghiulară constantă plasată deasupra domeniului critic Laval lărgit.

În cele ce urmează (cap. V) se determină ecuaţiile parametrice ale centroidelor cîmpului vitezelor şi ale cîmpului acceleraţiilor de ordinul întîi corespunzătoare mişcării plan paralele a rotorului fixat pe un arbore cu secţiune circulară în perioada de demaraj în două cazuri distincte :

— nu se iau în considerare forţele rezistente ;

— se iau în considerare forţele rezistente.

În primul caz se stabilesc ecuaţiile parametrice ale centroidelor cîmpului vitezelor şi ale cîmpului acceleraţiilor de ordinul întîi, cu neglijarea forţelor rezistente. Deoarece integralele care intervin în expresiile coordonatelor nu pot fi efectuate cu ajutorul funcţiilor elementare, ele se simplifică prin introducerea valorilor aproximative.

Al doilea caz cuprinde o extindere a studiului din prima parte prin luarea în considerare a forţelor rezistente, care se înlocuiesc printr-o forţă rezistentă unică, avînd acelaşi suport, dar în sens contrar cu viteza centrului de greutate al arborelui. Pentru a putea efectua integrările care intervin în aceste expresii cu ajutorul funcţiilor elementare, se folosesc valori aproximative

Studiul mişcărilor tranzitorii ale arborelui cu secţiune circulară care se roteşte cu viteză unghiulară constantă plasată în vecinătatea punctului critic Laval, luîndu-se în considerare vibraţiile fundaţiei pe care este fixat arborele, se efectuează în cadrul capitolului VI. Arborele este considerat plasat în poziţie orizontală, fiind susţinut de extremităţi pe două lagăre fixate pe o fundaţie, avînd o mişcare vibratorie în lungul axului vertical de simetrie sub acţiunea componentei verticale a forţei de inerţie datorită mişcării de rotaţie a masei rotorului. Funcţia $f_1(l) = \frac{\omega_f}{\omega_{cr}}$ (raportul dintre viteza ungiulară a planului de flexiune al arborelui şi viteza unghiulară critică) se calculează luîndu-se în considerare constanta elastică, constanta de amortizare a fundaţiei şi masa totală a sistemului compus din arbore-rotor-lagăre-fundaţie. Din ecuaţia fundamentală a mişcării relative a centrului de greutate a rotorului se obţine prin proiectarea relaţiei vectoriale sistemul de ecuaţii diferenţiale cu ajutorul cărora se stabileşte mişcarea centrului de greutate al rotorului. Pentru simplificarea calculelor se aproximează că diferenţa dintre unghiul de rotaţie a rotorului format de excentricitatea de fixare a sa pe arbore şi axa fixă şi unghiul de rotaţie al planului de flexiune cu planul cartezian fix are o valoare unică, centrul de greutate rămînînd în vecinătatea planului de flexiune al arborelui şi deplasîndu-se pe o traiectorie relativ circulară.

Capitolul VII este destinat studiului traiectoriei relative a centrului de simetrie a secţiunii necirculare a arborelui încărcat cu un rotor la mijloc şi studiului echilibrului relativ al sistemului arbore-rotor.

În prima parte, a capitolului VII se stabileşte pentru sistemul de referinţă mobil ales traiectoria relativă a centrului de simetrie şi de greutate a arborelui. A doua parte cuprinde echilibrul relativ al sistemului arbore-rotor. În cazul arborelui de secţiune circulară, din condiţia de echilibru relativ faţă de sistemul de referinţă mobil (a forţei elastice restabilizatoare şi a forţei inerţiale de transport) rezultă expresia săgeţii maxime, care la rotor este studiată pentru diferite valori ale vitezei unghiulare constante de rotaţie. În mod analog este tratat în continuare cazul arborelui cu secţiune necirculară.

Prima parte a capitolului opt cuprinde calculul numeric al mişcărilor tranzitorii ale arborilor drepţi încărcaţi cu un singur rotor la mijloc şi al centroidelor cîmpului vitezelor şi al acceleraţiilor de ordinul întîi corespunzătoare mişcării plan paralele a rotorului.

A doua parte a capitolului VIII o constituie descrierea experimentelor efectuate asupra unui arbore cu secţiune circulară şi a unuia cu secţiune dreptunghiulară (necirculară) încărcat cu un disc la mijloc pentru a pune în evidenţă mişcările tranzitorii. Experimentele au fost efectuate cu o machetă compusă dintr-un arbore rezemat pe două lagăre cu rulmenţi, antrenat cu un motor electric monofazat cu turaţia variabilă prin varierea tensiunii de alimentare. Oscilaţiile planului de flexiune au fost determinate prin fotografierea poziţiei discului de pe arbore faţă de un disc coaxial găurit fixat pe placa machetei. Din studierea poziţiei perpendicularei pe mijlocul coardei comune discului mobil şi discului fix a rezultat o concordanţă deplină între rezultatele calculelor şi cercetările experimentale. Existenţa oscilaţiilor de încovoiere şi a mişcărilor tranzitorii pronunţate a fost pusă în evidenţă şi prin consumul de putere mărit al electromotorului pentru regimurile caracterizate prin amplitudini de oscilaţie mari.

Calculele şi cercetările experimentale au scos în evidenţă şi existenţa turaţiei critice ovale a arborelui cu secţiune necirculară plasat în poziţie orizontală.

Determinarea pulsaţiilor proprii de torsiune ale arborilor cotiţi de la motoarele omogene în linie este tratată în capitolul IX, unde se generalizează metoda grafică Otto Kraemer, care permite obţinerea directă, fără tatonări, a pulsaţiilor proprii corespunzătoare vibraţiilor de torsiune a arborilor cotiţi, la motoarele omogene în linie cînd numărul pieselor plasate la extremităţile arborelui cotit al motorului nu este mai mare ca patru, de o parte a motorului putîndu-se găsi una sau două piese. Generalizarea constă în transformarea într-o metodă grafoanalitică, care poate fi aplicată oricare ar fi numărul de piese cu care este încărcat la extremităţi arborele

cotit al motorului omogen în linie. Metodele de calcul elaborate au avantajul că se elimină complet tatonările pe care le comportă metoda Holzer-Tolle, foarte laborioasă în cazul unui număr mare de mase diferite.

Partea a treia, respectiv capitolul X, are ca obiect deducerea unor relații de calcul al coeficienților seriei Fourier a unei funcții periodice în cazul împărțirii perioadei în p^n s părți egale, în funcție de valorile coeficienților seriei Fourier ale aceleiași funcții periodice, avînd perioada împărțită în s părți egale. În scopul exemplificării metodei au fost recalculate valorile coeficienților seriei Fourier pentru armonicile forței tangențiale a unui motor diesel în patru timpi cu șase cilindri de 220 CP. Calculele au confirmat exactitatea relațiilor deduse pentru toate cazurile recalculate, comparîndu-se valorile coeficienților recalculați cu acelea stabilite în prealabil cu alte metode de calcul.

Rezultatele obținute de autor sînt deosebit de utile pentru cercetările vibrațiilor arborilor turbinelor cu abur și gaze, mai ales pentru rotorii cu turații foarte ridicate de la agregatele cu destinație specială (turboreactoare, rachete, agregate de supraalimentare etc).

Relațiile noi de calcul stabilite pentru determinarea pulsațiilor oscilațiilor de torsiune ale arborilor cotiți și relațiile de calcul pentru coeficienții seriei Fourier au o aplicație largă în studierea fenomenelor periodice și în proiectarea arborilor cotiți.

Nivelul științific al lucrării este foarte ridicat, atît în ceea ce privește tratarea teoretică, cît și prin metoda experimentală folosită. Prezentarea rezultatelor cercetărilor este ilustrată prin numeroase diagrame, interpretate la un înalt nivel. Autorul a folosit pe scară largă calculatoarele electronice pentru integrarea numerică a funcțiilor.

E. Marineanu

GORUN MANOLESCU

STUDIUL CONCENTRĂRII EFORTURILOR UNITARE ÎN JURUL GĂURILOR DE SONDĂ

În lucrare se determină relația de calcul a greutății specifice minime a noroiului de foraj cu care trebuie traversat un masiv de roci omogene și izotrope, în așa fel încît să fie asigurată stabilitatea pereților găurii.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 749—776
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. S. PÂRVULESCU

DESPRE ECUAȚIILE DE COMPATIBILITATE ÎN DOMENIUL SUPERELASTIC

După ce se arată expresiile deformației permanente în două ipoteze, autorul trece la teoria superelasticității, oricare ar fi ipoteza acceptată.
Cu anumite premize simplificatoare se arată alungirile, deformațiile în jurul unui punct, ecuațiile de compatibilitate și se particularizează teoria în cazul axial simetric, pentru care se stabilește și funcția de tensiune φ^* și condiția respectivă de compatibilitate.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 777—786
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

GH. SILAȘ și H. J. KLEPP

STUDIUL SPECTRULUI DE FRECVENȚE AL AUTOVIBRAȚIILOR TRANSVERSALE ALE UNEI BARE PRODUSE DE FRECAREA USCATĂ

O bară în consolă este în contact la capătul liber cu un corp în mișcare uniformă cu viteza V_i^e. Forța de frecare care acționează asupra bare este o funcție neliniară a vitezei relative a punctelor în contact. Această forță va exercita autovibrații ale barei. Se cercetează teoretic și experimental spectrul de frecvențe al vibrațiilor barei, considerînd componentele ca mișcări cvasiarmonice. Pentru aceasta se consideră bara ca un mediu continuu și se determină ecuația diferențială cu metoda lui Lagrange. Pentru integrarea acestei ecuații diferențiale autonomă neliniară se folosește metoda lui Krîlov-Bogoliubov. Se studiază stări staționare și stabilitatea lor. Se determină de asemenea influența vitezei V și a forței de apăsare normală asupra intensității componentelor spectrului de frecvențe. Rezultatele teoretice sînt în concordanță cu cele obținute cu un dispozitiv experimental.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 787—795
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

CRISTIAN STĂNESCU, VIOREL VISARION

PLĂCI PLANE NESUBȚIRI

În cadrul formulării ecuațiilor teoriei elasticității, este elaborat un model de calcul bazat pe descompunerea în stări de tensiune pentru plăci nesubțiri plane elastice.
În acest scop este folosit principiul lui de Saint Venant aplicat distribuțiilor pe grosime de tensiuni precum și seriile Légendre.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 797—816
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

N. D. POPESCU

STABILITATEA DINAMICĂ A PLĂCILOR CIRCULARE, SOLICITATE DE SARCINI VARIABILE PERIODIC

Aplicînd o nouă variantă a metodei energetice, se stabileşte ecuaţia diferenţială a mişcării de variaţie pentru suprafaţa mediană a plăcilor circulare, avînd diferite condiţii de rezemare pe contur şi solicitate — în planul suprafeţei mediane — de forţe radiale, ce variază periodic. Se constată că, indiferent de condiţiile de rezemare pe contur, ecuaţia diferenţială este de tip Mathieu, dacă solicitarea este provocată de o mişcare oscilatorie armonică, sau de tip Whittaker, în cazul unei solicitări sub formă de impulsuri dreptunghiulare. Ambele tipuri de ecuaţii au permis efectuarea unei analize complete a fenomenului de stabilitate şi instabilitate dinamică a plăcilor circulare, iar prin particularizare, au condus la determinarea sarcinilor critice de flambaj — iar pentru cazul solicitărilor statice — precum şi a pulsaţiilor oscilaţiilor proprii de încovoiere. Se constată că fenomenul descris de ecuaţiile de tip Whittaker, este mult mai complex decît cel descris de ecuaţiile de tip Mathieu.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 817—846
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

ŞT. S. MIHĂIESCU

CONSIDERAŢII DE MECANICĂ ASUPRA SAPELOR CU CONURI PENTRU FORAJ. I.

În lucrare se tratează, din punct de vedere mecanic funcţionalitatea apei cu conuri pentru foraj.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 847—866
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

CHR. PELECUDI, T. V. HUNCHER

DIAGRAME, NOMOGRAME ŞI TABELE PENTRU MECANISMELE PLANE

Lucrarea urmăreşte stabilirea de tabele numerice, diagrame şi nomograme pentru determinarea parametrilor cinematici ai punctelor din planul unei biele.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 867—895
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

ŞTEFAN BĂLAN, VALERIU PETCU

UN CONCEPT NOU DE EXPRIMARE A GRADULUI DE SIGURANŢĂ ÎN CALCULUL STRUCTURILOR ELASTO-PLASTICE. I.

Se prezintă un concept nou de exprimare a gradului de siguranţă pe care secţiunile critice ale structurilor static nedeterminate, precum şi structurile în ansamblu, alcătuite din materiale elasto-plastice, îl prezintă în raport cu stadiul lor de cedare. Forma concretă pe care o îmbracă noul concept este cea a *densităţii mecanice*. În prima parte a lucrării se dezvoltă o metodă de calcul a structurilor de oţel în domeniul plastic, bazată pe conceptul densităţii mecanice, a cărei aplicare practică este demonstrată printr-un exemplu de calcul.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 897—918
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

AL. NEGOIȚĂ, V. IANCĂU

CONTRIBUȚII PRIVIND ASPECTELE PROBABILISTE ALE ÎNCĂRCĂRILOR CLIMATICE ȘI SIGURANȚA CONSTRUCȚIILOR

Pe baza lucrărilor precedente se analizează aplicarea teoriilor statistice ale valorilor extreme și rare (Fischer-Tippett Gumbel, Poisson, Pearson), în cazul încărcărilor climatice date de zăpadă și vînt, pentru țara noastră.
În continuare se fac considerații asupra perioadelor de apariție ale valorilor extreme pe baza înregistrărilor meteorologice.
În încheiere se fac propuneri originale pentru aprecierea coeficientului de supraîncărcare aplicat în cazul încărcărilor temporare, ținînd seama de siguranța construcțiilor cu durate diferite de exploatare.

St. cerc. mec. apl., tom. 29. nr. 4, 1970, p. 919—945
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

E. CARAFOLI, N. CĂMĂRĂȘESCU

NOI CERCETĂRI ASUPRA ARIPILOR DE ALUNGIRE MICĂ CU JETURI LATERALE

Lucrarea se referă la hipersustentația aripilor de mică alungire prin jeturi fluide laterale, lansate în planul aripii în direcția anvergurii. După unele considerații teoretice se prezintă, sub formă de grafice, rezultatele experimentale obținute în sufleria aerodinamică pe o serie de aripi de diferite alungiri.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 947—962
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

DAN MATEESCU

CARACTERISTICILE AERODINAMICE ÎN REGIM SUPERSONIC ALE ARIPILOR DREPTUNGHIULARE ȘI TRAPEZOIDALE CU PROFIL VARIABIL ÎN ANVERGURĂ

În prezenta lucrare sînt determinați coeficienții aerodinamici de portanță, rezistență de undă și momente pentru aripile de anvergură infinită, dreptunghiulare și trapezoidale, avînd profilul variabil în lungul anvergurii. În acest sens se utilizează vitezele axiale de perturbație determinate printr-o metodă elaborată de autor într-o lucrare precedentă.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 963—980
Redacția: București, str. Const. Mille 15

I. POP

ASUPRA STRATULUI-LIMITĂ COMPRESIBIL NESTAȚIONAR PE UN DISC ÎN ROTAȚIE

În lucrare se studiază formarea stratului limită compresibil pe un disc în rotație impulsivă, presupunînd că și fluidul însuși se rotește uniform. Rotația discului se caracterizează printr-un parametru a, care influențează fluxul și refluxul fluidului din jurul discului.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 4, 1970, p. 981—986
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

• Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

• Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

• Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme sublinindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

• Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

• Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite,optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

• Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

• Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

• Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue.

• Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).

• Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

• Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

• Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

• Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

T. HACKER, Stabilitate şi comandă în teoria zborului, 1968, 322 p., 21,50 lei.

ŞT. N. SĂVULESCU, Tranziţia de la scurgerea laminară la cea turbulentă, 1968, 312 p., 15 lei.

DAN TEODORESCU, Servomotorul amplificator şi aplicaţiile lui în automatizări, 1968, 260 p., 12,50 lei.

A. MILLION şi C. MILLION, Hidrogenul în oţeluri şi în îmbinări sudate, 1968, 354 p., 27 lei.

GH. BUZDUGAN, Dinamica fundaţiilor de maşini, 1968, 368 p., 24 lei.

PAUL DIMO, Analiza nodală a sistemelor electroenergetice, 1968, 628 p., 44 lei.

I. S. GHEORGHIU şi AL. FRANSUA, Tratat de maşini electrice, vol. I. Maşini de curent continuu, 1968, 412 p., 27 lei.

R. C. BOGDAN şi DAN LARIONESCU, Analiza armonică complexă şi mecanoelectrică a mecanismelor plane, 1968, 432 p., 29 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, Aplicaţii industriale ale lagărelor cu aer, 1968, 282, 16,50 lei.

MIRCEA SOARE, Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri, 1968, 622 p., 33 lei.

L. LIBRESCU, Statica şi dinamica structurilor elastice anizotrope şi eterogene, 1969, 320 p., 18,50 lei.

LUCIAN Z. D MITRESCU, Cercetări în tuburile de şoc, 1969, 306 p., 21 lei.

F. DINCĂ şi C. TEODOSIU, Vibraţii neliniare şi aleatoare, 1969, 462 p., 24 lei.

V. VISARION şi C. STĂNESCU, Calculul stărilor de tensiune în teoria plăcilor curbe, 1969, 714 p., 32 lei.

C. ŞORA, Introducere în studiul generatorului Hall, 1969, 310 p., 18,50 lei.

AG. V. VASILIEV, Torsiunea structurilor elastice cu pereţi subţiri, 1970, 240 p., 11,50 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ŞI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 4, P. 745–992, BUCUREŞTI, 1970

I.P. „Informaţia" — c. 5416

43832

Lei 40. —

F257
R
F257
6

5
TOMUL 29
1970

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EGYETEM * BUDAPEST * MŰSZAKI KÖNYVTÁRA KÖZPONTI 1848
1970 DEC 19

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI**, *redactor responsabil*,
Acad. **D. DUMITRESCU**, *redactor responsabil adjunct*,
Prof. **I. ANTON**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ȘTEFAN BĂLAN**,
Prof. **GH. MANEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CR. MATEESCU**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU C. BOGDAN**,
Conf. **DAN PAVELESCU**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacție*.

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Intreprinderea de comerț exterior LIBRI, Căsuța poștală 134 — 135 (Calea Victoriei 126), București, România.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

EA

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția: București,

Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ

Bucureşti, 23—27 iunie, 1969

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 29, nr. 5 1970

S U M A R

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ
Bucureşti, 23 — 27 iunie 1969

ELASTICITATE, PLASTICITATE, REOLOGIE

Pag.

GORUN MANOLESCU, Studiul concentrării eforturilor unitare în jurul găurilor de sonde II. 997

TEORIA VIBRAŢIILOR

A. HEGEDÜS, Studiul mişcărilor periodice ale unui vibropercutor electromagnetic ... 1015
GH. SILAŞ, L. BRÎNDEU, A. HEGEDÜS, Studiul mişcărilor vibropercutante ale unei mase libere cu excitaţie periodică 1027

TEORIA MECANISMELOR ŞI DINAMICA MAŞINILOR

V. HANDRA-LUCA, Sinteza mecanismelor plane cu $\nu > 1$, pe baza funcţiilor de transmitere 1037
CHR. PELECUDI, Cuple multiaxe în mecanismele mono- şi biconture tridimensionale 1053
I. SZÉKELY, T. MUREŞAN, Clasificarea mecanismelor logice cu elemente mecanice 1093
ŞTEFAN S. MIHĂIESCU, Consideraţiuni de mecanică asupra sapelor cu conuri pentru foraj. II. 1105

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

ŞTEFAN BĂLAN, VALERIU PETCU, Un concept nou de exprimare a gradului de siguranţă în calculul structurilor elasto-plastice. II. 1125
DAN COŞA, Stabilitatea arcului simplu rezemat cu tirant suspendat fără momente iniţiale 1153
N. POSEA, I. RUIU, M. IONESCU-BUJOR, Calculul seismic al cadrelor plane 1177

FLUIDE INCOMPRESIBILE

V. TOMA, ŞT. SĂVULESCU, Cercetări teoretice şi experimentale asupra uniformizării repartiţiei de viteze în secţiunea de cataliză a machetelor unui reactor chimic 1195

HIDRAULICĂ, MAŞINI HIDRAULICE ŞI MEDII POROASE

VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA, Dezlocuirea necapilară a fluidelor în medii poroase omogene 1209
T. OROVEANU, Cîteva probleme de scurgere a fluidelor incompresibile prin medii poroase neomogene 1223
CONSTANTIN GH. POPA, Generalizarea teoriei lui Buckley şi Leverett asupra dezlocuirii amestecului a două fluide imiscibile oarecare de către un al treilea imiscibil cu ele 1235
RECENZII 1245

STUDIUL CONCENTRĂRII EFORTURILOR UNITARE ÎN JURUL GĂURILOR DE SONDE. II

PARTE EXPERIMENTALĂ

de GORUN MANOLESCU
I.P.G.G.

Scopul principal al experienţelor descrise în această lucrare este de a verifica ipoteza din paragraful 3, partea I.

1. DESCRIEREA INSTALAŢIEI

Partea principală a instalaţiei o constituie celula de presiune, a cărei schiţă este prezentată în figura 1. Această celulă de presiune este introdusă între platanele unei maşini de încercat rezistenţa materialelor cu ajutorul căreia se realizează sarcina de compresiune P pe suprafaţa superioară a pistonului *1* şi pe faţa înferioară a capacului *2*. Proba de rocă *4*, de formă cilindrică, este introdusă în interiorul celulei *3* (executată din oţel superior) în care culisează pistonul *1*. Prin canalul *5* al pistonului *1*, care corespunde axial cu cavitate interioară *7* a probei, se poate crea o presiune interioară cu ajutorul unei pompe manuale. Proba *4* este învelită la exterior cu hîrtie de calc unsă pentru a micşora frecările între probă şi pereţii interiori ai celulei, iar în cavitatea *7* se introduce o manta de cauciuc *6*. Fotografia de ansamblu a instalaţiei este prezentată în figura 2, iar fotografia celulei de presiune, a pistonului şi a probei de rocă este prezentată în figura 3.

2. PRINCIPIUL METODEI

Plecînd de la ipoteza adoptată în paragraful 3, partea I, în care se presupune că în cazul rocilor particulele se pot deplasa numai după direcţia verticalei, în plan orizontal deplasarea fiind împiedicată, s-a cău-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 5, P. 997-1014, 1970

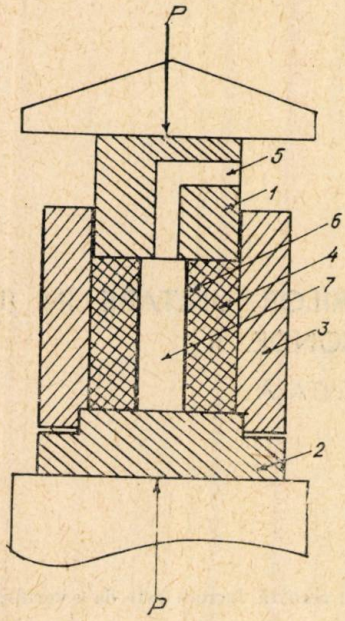


Fig. 1

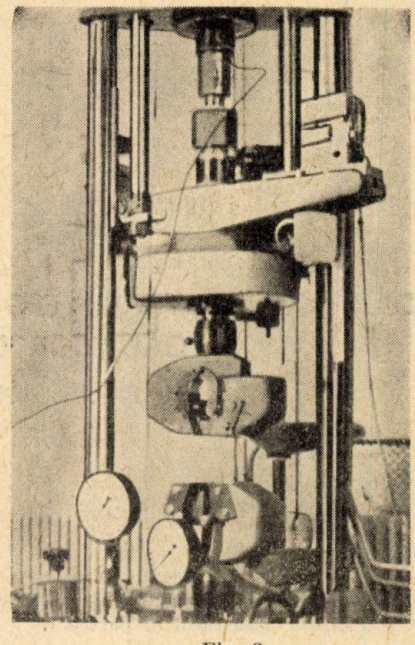


Fig. 2

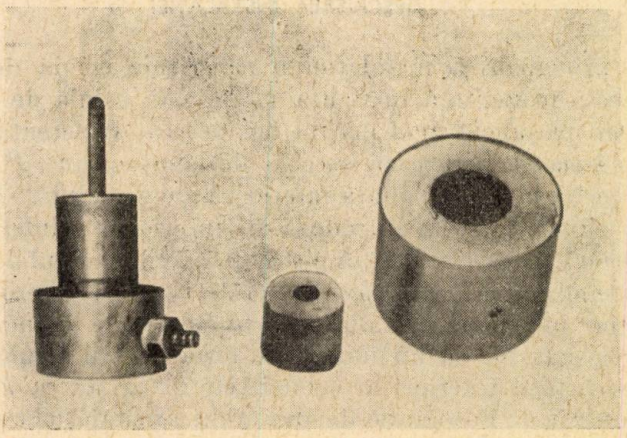


Fig. 3

tat să se reproducă aceste condiţii în instalaţia descrisă anterior. Astfel sarcina de compresiune P, dată de maşina de încercat, creează o presiune similară presiunii litostatice, iar presiunile care apar între peretele interior, rigid, al celulei şi peretele exterior al probei, pe de o parte, şi între peretele interior al probei şi lichidul din cavitatea acestei probe, pe de altă parte (ultimele două presiuni, aşa cum se va vedea mai departe, fiind egale), reprezintă presiunile din planul orizontal, induse în material prin exercitarea forţei P pe cele două suprafeţe plane ale probei.

Deoarece celula de presiune este executată din oțel și grosimea pereților este mare, deci ea este practic rigidă la presiunile la care se fac determinările, iar fluidul (ulei) introdus în cavitatea interioară a probei este incompresibil, se asigură condiția impusă ca deplasarea radială a particulelor rocii să fie împiedicată. În același timp, pistonul putînd culisa în interiorul celulei de presiune și roca fiind învelită în hîrtie de calc unsă, se asigură posibilitatea deplasării particulelor de rocă pe direcția verticalei.

3. MODUL DE LUCRU

Pentru experiențe s-au folosit probe de roci simulate, executate din humă de Teișani fin măcinată, căreia i s-a dat prin adăugare de apă diverse umidități. Probele s-au pregătit în felul următor: huma de Teișani, amestecată cu apă în cantitatea dorită, a fost introdusă în celula de presiune și supusă la o compresiune de circa 1 200 at un timp suficient ca deplasarea pistonului să nu se mai producă și deci proba să se compactizeze (timpul a variat de la 30 la 60 min în funcție de umiditate). Probei astfel pregătite i s-a practicat cu ajutorul unei bormașini o cavitate interioară cilindrică, în care s-a introdus o manta de cauciuc pentru a împiedica contactul dintre rocă și fluidul care se introduce ulterior în cavitate.

Determinările se fac în felul următor (fig. 1): se introduce uleiul în cavitatea *7* a probei *4*, care se găsește în celula *3*, iar apoi se montează pistonul *1*, al cărui canal *5* se umple de asemenea cu ulei pentru a elimina aerul. Se montează celula în poziția de lucru și apoi se pune canalul *5* în legătură cu împingerea pompei manuale care asigură crearea presiunii interioare [1]) (pompa manuală folosită a fost de tip „Automatica" pentru încercarea manometrelor pînă la 800 at). Pistonul pompei manuale se fixează în poziția în care conducta de legătură dintre celulă și pompă, canalul *5* și cavitatea interioară *7* sînt pline cu ulei, deci aerul a fost eliminat cît mai complet posibil. Se pune în funcție mașina de încercat, care face să apară forța de compresiune P pe suprafețele orizontale ale probei. În momentul în care se pornește mașina de încercat, încep citirile simultane ale forței de compresiune P și ale presiunii interioare, care se transmite la manometrul pompei manuale prin intermediul uleiului cu care este plină cavitatea *7*. Presiunea pe suprafețele orizontale ale probei va reprezenta efortul unitar principal maxim σ_1, iar presiunea interioară va reprezenta efortul unitar principal minim σ_3. Avînd în vedere că la contactul dintre suprafața exterioară a probei și suprafața interioară a celulei apar frecări, va trebui să facem corecția necesară la calculul lui σ_1. Astfel forța reală care apare pe suprafețele orizontale ale probei va fi:

$$P_1 = P - F_f, \tag{1}$$

în care P reprezintă forța de compresiune dată de mașina de încercat și F_f forța de frecare care apare pe suprafața laterală exterioară a probei.

[1]) De fapt pompa manuală nu este neapărat necesară, în locul ei putîndu-se monta la capul de ieșire al canalului *5* un ventil de înaltă presiune și un manometru. S-a folosit, totuși, pompa deoarece cu aceeași instalație s-au făcut și alte determinări în care această pompă era absolut necesară.

Forţa de frecare va fi dată de relaţia

$$F_f = \mu \sigma_3 \pi dl, \tag{2}$$

în care

μ reprezintă coeficientul de frecare, care se ia egal cu 0,07, avînd în vedere că proba este învelită în hîrtie de calc unsă;

σ_3 — presiunea interioară, citită la manometrul pompei manuale şi care este egală cu presiunea ce apare la contactul dintre suprafaţa laterală exterioară a probei şi suprafaţa interioară a celulei, deoarece atît la exteriorul probei, cît şi la pereţii cavităţii interioare deplasarea particulelor de rocă este împiedicată în plan orizontal;

d — diametrul exterior al probei;

l — înălţimea probei.

Cu ajutorul lui P_1 se poate determina presiunea efectivă care se exercită pe suprafeţele orizontale ale probei:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{s}, \tag{3}$$

în care s reprezintă suprafaţa orizontală a probei.

4. FACTORUL DE DIMENSIUNE

Pentru a se vedea dacă dimensiunile probelor de roci influenţează asupra rezultatului experienţelor s-au folosit următoarele seturi de diametre interioare ale celulelor de presiune, care, implicit, au dus la aceeaşi gamă a diametrelor exterioare ale probelor: 40, 50 şi 60 mm. Diametrul cavităţii a fost menţinut constant şi egal cu 15 mm. Înălţimea probelor, corespunzătoare diametrelor exterioare variabile, a fost de asemenea de 40, 50 şi 60 mm.

O altă serie de determinări a fost făcută menţinînd diametrul exterior şi înălţimea constante şi egale cu 60 mm şi variind diametrul cavităţii interioare, căruia i s-a dat succesiv valorile 15, 20 şi 25 mm. În ambele serii de determinări pentru unul şi acelaşi material şi aplicînd corecţia pentru forţele de frecare, rezultatele obţinute au fost extrem de apropiate.

Cele de mai sus ne-au îndîtruit să tragem concluzia că infuenţa factorului de dimensiune este neglijabilă.

Pentru încercările propriu-zise s-au utilizat probe cu următoarele dimensiuni: înălţimea probei, egală cu diametrul exterior, s-a ales de 60 mm, iar diametrul interior de 20 mm.

5. REZULTATE OBŢINUTE

Folosind metoda descrisă, s-au trasat nişte curbe asemănătoare cu cele intrinseci, rocile simulate fiind alcătuite din humă de Teişani cu umidităţi medii de 8, 13, 18 şi 23%. Curbele rezultate sînt prezentate în figurile 4, 5, 6 şi 7, în ordinea crescătoare a umidităţii.

De asemenea, folosind metoda clasică de ridicare a curbei caracteristice a unui material la compresiune simplă cu ajutorul unei mașini de încercat rezistența materialelor și al unui micrometru (ceas comparator), s-au obținut curbele caracteristice efort unitar – deformație relativă pentru epruvete de rocă cu diametru exterior egal cu înălțimea și ambele egale cu 60 mm, preparate după tehnologia descrisă, fără însă a li se mai practica cavitatea interioară. Curbele caracteristice sînt prezentate în figurile 8, 9, 10, 11 și corespund umidităților de 8, 13, 18 și 23%.

6. DISCUTAREA REZULTATELOR

Privind figurile 4, 5, 6, 7, se observă următoarele :

— toate aceste curbe prezintă cîte o porțiune inițială care poate fi asimilată cu o linie dreaptă. Astfel, pe figura 4 porțiunea cuprinsă între $\sigma = 0$, $\tau = 0$ și $\sigma = 56$, $\tau = 39$, pe figura 5 porțiunea cuprinsă între $\sigma = 0$, $\tau = 0$ și $\sigma = 44$, $\tau = 22$, pe figura 6 porțiunea cuprinsă între $\sigma = 0$, $\tau = 0$ și $\sigma = 35$, $\tau = 11$, pe figura 7 porțiunea cuprinsă între $\sigma = 0$, $\tau = 0$ și $\sigma = 19$, $\tau = 3$ pot fi aproximate cu niște drepte. În continuare, în toate cazurile, apar niște linii curbe ;

— cu cît procentul de umiditate este mai mare, cu atît curbele obținute tind să se aplatiseze mai rapid și să ia forma unor paralele la axa σ.

Care este explicația acestor rezultate ? Inițial, pe porțiunile drepte ale curbelor $\tau = f(\sigma)$, materialul, conform ipotezei adoptate în paragraful 3, partea I, și ale cărui condiții le-am reprodus experimental, se găsește în stare elastică de deformare și din acest motiv raportul $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ este constant și egal cu $m - 1$ (vezi relația (4.1), partea I). Începînd însă de la o anumită valoare a intensității stării de eforturi triaxiale, caracterizată prin σ_1 și σ_3, începe să se depășească starea elastică a materialului, acesta intrînd în stare de echilibru-limită. Observăm că în acest caz raportul $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ nu mai este o constantă, el micșorîndu-se continuu și tinzînd la limită către o nouă valoare constantă, egală cu unitatea, care corespunde de data asta situației în care curba $\tau = f(\sigma)$ este o paralelă cu axa σ.

Porțiunile din curbele de pe figurile 4, 5, 6, 7 diferite de linii drepte nu reprezintă totuși curbele intrinseci ale materialului, deoarece curbele intrinseci se determină pentru valorile corespunzătoare ale lui σ_1 și σ_3 la care materialul se rupe [1], [2], [3], în timp ce în cadrul experiențelor noastre, pentru porțiunile de curbe diferite de linii drepte, σ_1 și σ_3 determinate corespund cazului în care s-a depășit starea elastică a materialului, însă nu s-a atins încă limita lui de rupere. Totuși, curbele obținute în figurile 4, 5, 6, 7 pentru valori mari ale lui σ_1 și σ_3 tind să se confunde cu curbele intrinseci și iată de ce : pe baza curbelor ridicate de diverși cercetători [1], [2], [3] în condiții de compresiune triaxială, noi am ajuns la concluzia că cu cît starea de eforturi unitare de compresiune triaxială este mai intensă, cu atît și punctele de pe curbele caracteris-

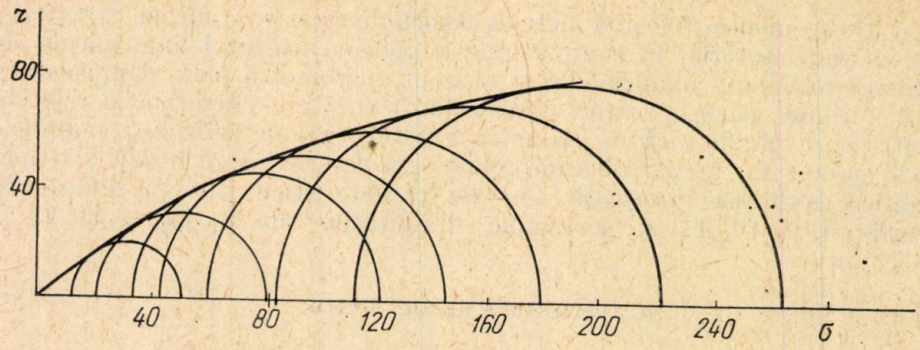


Fig. 4

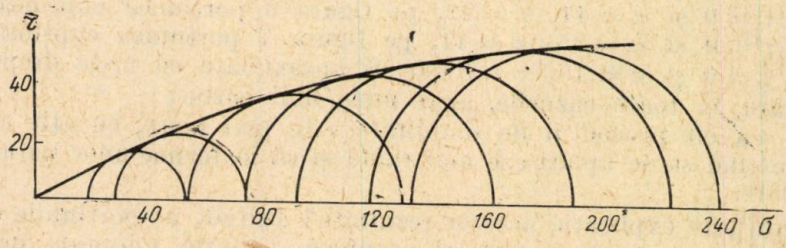


Fig. 5

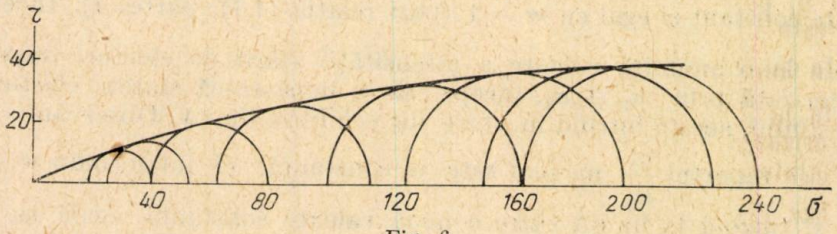


Fig. 6

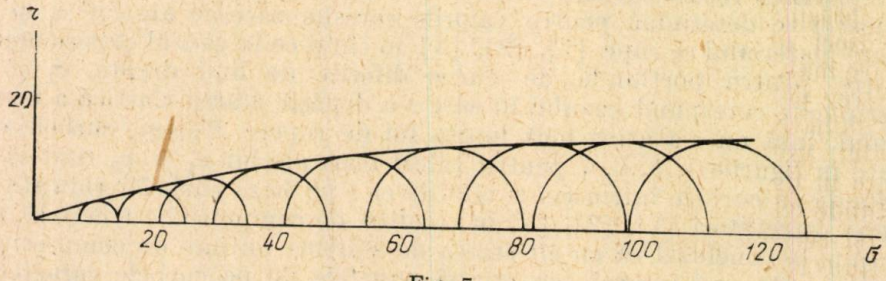


Fig. 7

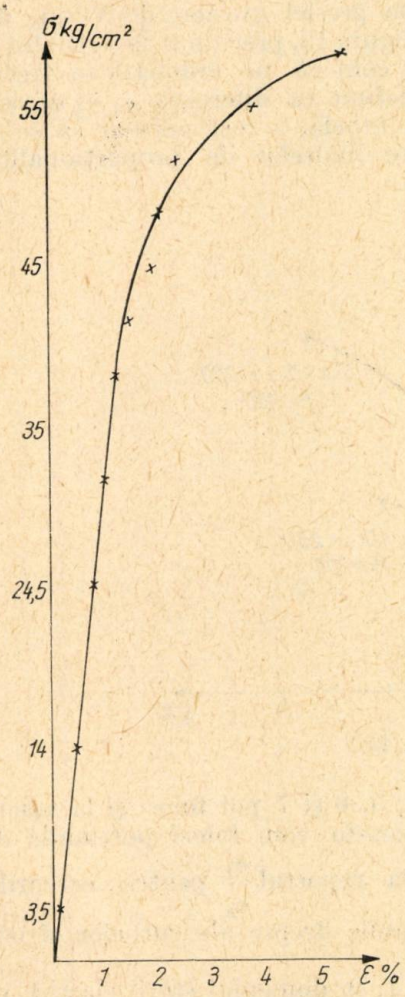


Fig. 8

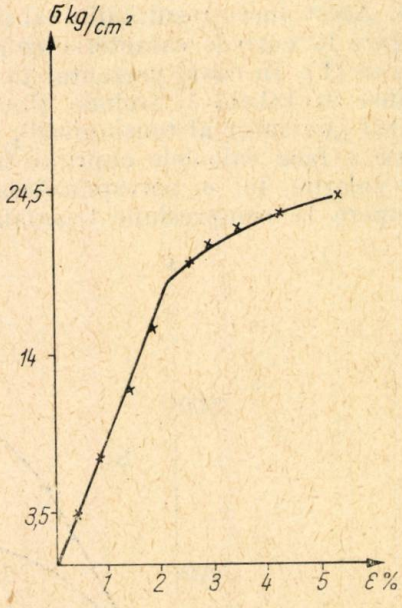


Fig. 9

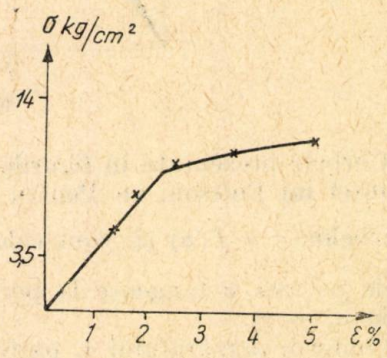


Fig. 10

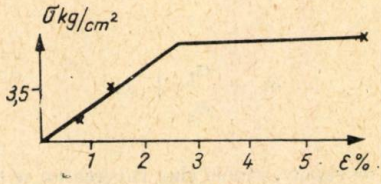


Fig. 11

tice — efort unitar principal maxim în funcţie de deformaţia relativă pentru unul şi acelaşi material, corespunzătoare efortului unitar limită de proporţionalitate şi efortului unitar limită de rupere[2]) sînt mai apropiate. Acest lucru rezultă din tabela 1 ; pentru exemplificare, se prezintă în figura 12 curbele caracteristice ale gresiei grosiere de Vosgi, date în lucrarea [1]. În cazul prezentat în figura 12, precum şi în celelalte cazuri cuprinse în tabela 1, trebuie ţinut cont că pe ordonată se trece aşanumitul „deviator al tensiunilor", definit ca diferenţa $\sigma_1 - \sigma_3$, şi deci, pentru a face calculele cuprinse în tabelă, a fost necesar să se determine valorile lui σ_1 corespunzătoare limitelor de proporţionalitate şi de rupere la compresiune triaxială.

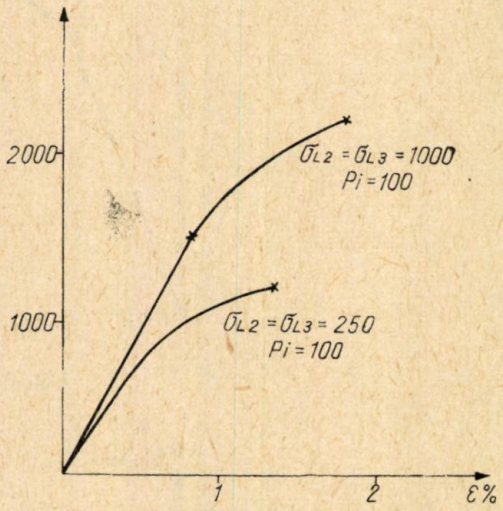


Fig. 12

Curbele prezentate în figurile 4, 5, 6 şi 7 pot folosi şi la calcularea constantei lui Poisson, m. Pentru aceasta vom folosi porţiunile drepte ale curbelor $\tau = f(\sigma)$ şi vom calcula raportul $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ pentru cercurile cu centrele pe axa σ tangente la porţiunile drepte ale curbelor şi cu diametrele $\sigma_1 - \sigma_3$.

Conform paragrafului 4, partea I, în domeniul stării elastice există relaţia

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = m - 1, \tag{4}$$

de unde rezultă

$$m = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} + 1. \tag{5}$$

[2]) Eforul unitar limită de rupere, atunci cînd ruperea nu se produce, se ia egal cu efortul unitar pentru care deformaţia relativă atinge valoarea de 5%.

Tabela 1

Materialul	$\sigma_{L_2} = \sigma_{L_3}$	σ_{L_1P} proporţionalitate	σ_{L_1r} rupere	$\frac{\sigma_{L_1P}}{\sigma_{L_1r}}$	Lucrarea
	kg/cm²	kg/cm²	kg/cm²	%	
Gresie de Hassi-Messaoud	300 1 000	2 400 5 300	2 960 6 000	0,81 0,883	[1]
Gresie grosieră de Vosgi	250 1 000	980 2 633	1 450 3 200	0,675 0,82	[1]
Grosie fină de Vosgi	250 1 000	850 2 133	1 083 2 600	0,785 0,82	[1]
Gips de Tirrel	490 980	862 1 960	1 470 2 107	0,6 0,93	[2]
Marmură	4 000 8 000	4 800 9 500	5 200 9 900	0,923 0,959	[3], după D. T. Griggs
Marmură de Carrara	235 850	1 535 3 250	2 385 4 150	0,643 0,759	[3], după Th. V. Karman

Cu ajutorul relaţiei (5) şi al curbelor din figurile 4, 5 , 6 şi 7 (porţiunile drepte), s-a determinat constanta lui Poisson, m, rezultatele fiind trecute în tabela 2.

Folosindu-se de aceleaşi curbe, se poate determina modulul de elasticitate transversal, G. Mai întîi însă va fi necesar să se determine modulul lui Young , E, din curbele caracteristice prezentate în figurile 8, 9, 10 şi 11, iar apoi, cu ajutorul relaţiei cunoscute din teoria elasticităţii,

$$G = \frac{mE}{2\,(m+1)}, \tag{6}$$

se va putea determina şi valoarea modulului de elasticitate transversal G. Rezultatele sînt prezentate în tabela 3.

Tabela 2

Umiditatea %	$\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$	m
8	3,7	4,7
13	2,6	3,6
18	2,1	3,1
23	1,7	2,7

Tabela 3

Umiditatea %	m	E kg/cm²	G kg/cm²
8	4,7	2 800	1153,6
13	3,6	875	324,1
18	3,1	437,5	218,7
23	2,7	250	51,6

7. CONCLUZII

1. Scopul principal al experienţelor descrise a fost verificarea ipotezei admise în paragraful 3, partea I. Din rezultatele obţinute a reieşit că această ipoteză se verifică.

2. Cu ajutorul metodei folosite s-au ridicat curbele $\tau = f(\sigma)$. Aceste curbe, pentru intensităţi mari ale stării de eforturi unitare triaxiale, tind să se confunde cu curbele intrinseci, deci metoda folosită în prezenta lucrare poate fi utilizată şi la ridicarea curbelor intrinseci ale rocilor. Într-o viitoare lucrare se va insista mai mult asupra acestui aspect.

3. Din curbele $\tau = f(\sigma)$, corelate cu curbele caracteristice ale materialelor, se pot determina caracteristicile m, E şi G. De asemenea această metodică de determinare a caracteristicilor sus-amintite va trebui verificată ulterior, deci ea trebuie privită încă sub rezervă, ca şi metodica propusă la punctul 2 pentru ridicarea curbei intrinseci.

ANEXĂ

Distribuţia eforturilor unitare în zona de existenţă a stării-limită din jurul găurilor verticale executate în roci cu coeziune cu $\nu = 1$.

Notaţii :

σ_0 — efortul unitar normal mediu ;
ε_0 — deformaţia volumică medie ;
ε_v — deformaţia volumică totală ;
σ_r, σ_θ, σ_z — eforturile unitare normale în direcţiile razei, tangentei şi verticalei ;
ε_r, ε_θ, ε_z — componentele deformaţiei în direcţiile razei, tangentei şi verticalei ;
σ_c — rezistenţa limită de curgere la compresiune simplă, egală cu rezistenţa limită la tracţiune simplă ;
ε_c — scurtarea liniară specifică corespunzătoare rezistenţei-limită de curgere la compresiune simplă ;
u — componenta deplasării în direcţia razei ;
A, B — constante de integrare ;
sing. A — semnul constantei de integrare A ;
ε_i — intensitatea deformaţiei ;

σ_i — intensitatea eforturilor unitare;

ζ_i — raportul dintre intensitatea deformației la raza curentă r și scurtarea liniară specifică corespunzătoare limitei de curgere din cazul compresiunii simple: ε_c;

ζ_{i1} — raportul dintre intensitatea deformației la $r = a$ și ε_c;

ζ_{i2} — raportul dintre intensitatea deformației la $r=\infty$ și ε_c.

r — raza curentă;

a — raza sondei;

b — raza zonei de cedare;

r_∞ — raza la care influența concentrării eforturilor din jurul găurii de sondă nu se mai simte în interiorul masivului;

α — rapotul $\frac{r_\infty}{a}$;

β — raportul $\frac{b}{a}$;

ξ — raportul $\frac{r}{a}$;

m — constanta lui Poisson;

P — efortul unitar normal în direcția axei Z din cazul masivului neatacat: $P = H\gamma_r$;

H — adîncimea de la punctul considerat la suprafață;

γ_r — greutatea specifică medie a rocilor;

γ_n — greutatea specifică medie a fluidului de foraj;

P_b — efortul unitar radial la $r = b$;

H_{cr} — adîncimea la care începe apariția zonei de stare-limită;

e — baza logaritmilor naturali;

C — efortul unitar tangențial limită corespunzător încărcării mixte: tracțiune și compresiune.

La materialele coezive cu $\nu = 1$, înfășurătoarea cercurilor lui Mohr este o linie dreaptă, paralelă cu axa σ. La aceste materiale, unghiul de frecare interioară este zero. În această categorie se pot încadra masivele de sare și rocile argiloase cu conținut anormal de apă.

În acest caz, pentru determinarea distribuției eforturilor unitare în zona de stare-limită care apare în jurul găurii de sondă cînd intensitatea eforturilor unitare depășește o anumită limită dictată de caracteristicile mecanice ale materialului, se poate folosi ipoteza energiei specifice de variație a formei [4].

Vom scrie grupurile de ecuații necesare pentru rezolvarea problemei:

— ecuații de echilibru:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \qquad (1)$$

— condiţii geometrice ([4], vol. II, cap. V):

$$\varepsilon_\theta = -\frac{u}{r}, \tag{2}$$

$$\varepsilon_r = -\frac{du}{dr}; \tag{3}$$

prin ipoteză, deoarece masivul are grosime infinită, se ia

$$\varepsilon_z = 0; \tag{4}$$

— ecuaţii fizice ([4], vol. II, cap. X):

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \sigma_r - \sigma_0 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_r, \\ &\text{b)}\ \sigma_\theta - \sigma_0 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_\theta, \\ &\text{c)}\ \sigma_z - \sigma_0 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

unde σ_i şi ε_i au expresiile ([4], vol. II, cap. VIII)

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}, \tag{6}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}; \tag{7}$$

în cazul nostru,

$$\sigma_1 = \sigma_\theta;\ \sigma_2 = \sigma_z;\ \sigma_3 = \sigma_r;\ \varepsilon_1 = \varepsilon_\theta;\ \varepsilon_2 = \varepsilon_z = 0;\ \varepsilon_3 = \varepsilon_r;$$

— ipoteză a teoriei plasticităţii ([4] vol. II, cap. VIII):

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_v}{3} = 0, \tag{8}$$

unde

$$\varepsilon_v = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z;$$

— consecință a relațiilor (4), (8):

$$\varepsilon_v = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0; \tag{9}$$

— criteriu de apariție a stării-limită ([4] vol. II, cap. VIII):

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \varepsilon_c, \\ \sigma_i &= \sigma_c; \end{aligned} \tag{10}$$

— condiții pe contur:

$$\begin{aligned} r &= a, \quad \sigma_r = P_{ra}, \\ r &= r_\infty, \quad \sigma_r = \frac{P}{m-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Înlocuind (2) și (3) în (9), se obține următoarea ecuație diferențială:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0, \tag{12}$$

care, prin integrare, dă expresia deplasării în direcția razei:

$$u = \frac{A}{r}. \tag{13}$$

Înlocuind expresia lui u din (13), în (2) și (3), rezultă

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= -\frac{A}{r^2}, \\ \varepsilon_r &= \frac{A}{r^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Ținînd seama de (13) și de faptul că $\varepsilon_1 = \varepsilon_\theta$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_z = 0$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_r$, expresia lui ε_i, după înlocuirile necesare în (7), devine

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{A^2}{r^4}}, \tag{15}$$

de unde rezultă

$$\frac{A}{r^2} = \frac{\text{sing.}\, A}{2} \sqrt{3}\, \varepsilon_i. \tag{16}$$

Se foloseşte simbolul sing. A, care reprezintă semnul lui A, deoarece, cînd se extrage radicalul dintr-un număr real ridicat la pătrat, rezultatul poate fi cu plus sau cu minus în funcţie de semnul pe care l-a avut iniţial numărul înainte de ridicarea la pătrat.

Făcînd o serie de transformări în relaţia (15) şi ridicînd-o la pătrat obţinem

$$\frac{4}{3}\frac{A^2}{\xi^4} = \varepsilon_i^2 . a^4. \tag{17}$$

Din (16) rezultă prin împărţirea cu ε_e

$$\frac{4}{3}\frac{A^2}{a^2\varepsilon_e^2} = \zeta_i^2\xi^4 = \zeta_{i1}^2 = \zeta_{i2}^2\alpha^4 = \beta^4. \tag{18}$$

În relaţia (18) trebuie ţinut seama că la $r = b$, adică pe conturul exterior al zonei de cedare $\varepsilon_i = \varepsilon_e$ şi deci $\zeta_{ib} = 1$ şi de asemenea, la $r = a$, $\xi = \frac{a}{a} = 1$.

Din (18) rezultă

$$\zeta_{i1} = \beta^2;\ \zeta_{i2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2};\ \zeta_i = \frac{\beta^2}{\xi^2}. \tag{19}$$

Din (5), prin scăderea relaţiei a din b şi prin scăderea relaţiei a din c, rezultă

$$\begin{aligned} \sigma_\vartheta - \sigma_r &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r), \\ \sigma_z - \sigma_r &= -\frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_r. \end{aligned} \tag{20}$$

Înlocuind pe (16) în (14), rezultă

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= -\frac{\text{sing. } A}{2}\sqrt{3}\varepsilon_i, \\ \varepsilon_r &= \frac{\text{sing. } A}{2}\sqrt{3}\varepsilon_i. \end{aligned} \tag{21}$$

Înlocuind expresiile lui ε_r şi ε_θ din (21) în (20), obţinem

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r &= -\frac{2\ \text{sing. } A}{\sqrt{3}}\sigma_i, \\ \sigma_z - \sigma_r &= -\frac{\text{sing. } A}{\sqrt{3}}\sigma_i. \end{aligned} \tag{22}$$

Din condiția de echilibru (1) rezultă

$$\sigma_r = B + \int \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \, dr. \tag{23}$$

Pentru a determina expresia lui $\frac{dr}{r}$ se pleacă de la relația (16) pe care o diferențiem :

$$-\frac{2A}{r^3} \, dr = \frac{\text{sing.}\, A}{2} \sqrt{3} \, d\varepsilon_i. \tag{24}$$

Înlocuind în (24) pe $\frac{A}{r^2}$ cu expresia sa din (16) și după anumite transformări, rezultă

$$\frac{dr}{r} = -\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i}. \tag{25}$$

Înlocuind pe $\frac{dr}{r}$ cu expresia sa din (25) și pe $\sigma_\theta - \sigma_r$ cu expresia sa din (22) în (23), se obține

$$\sigma_r = B + \frac{\text{sing.}\, A}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_{i1}}^{\varepsilon_i} \sigma_i \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i}. \tag{26}$$

În (26) punem condițiile pe contur (11) :

$$P_{ra} = B + \frac{\text{sing.}\, A}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_{i1}}^{\varepsilon_{i1}} \sigma_i \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i} = B, \tag{27}$$

$$\frac{P}{m-1} = B + \frac{\text{sing.}\, A}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_{i1}}^{\varepsilon_{i2}} \sigma_i \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i}. \tag{27'}$$

Prin înlocuirea lui B în (26) cu expresia sa din (27), se obține

$$\sigma_r = P_{ra} - \frac{\text{sing.}\, A}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i1}} \sigma_i \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i}. \tag{28}$$

În (28) termenul din partea dreaptă și-a schimbat semnul, deoarece s-au inversat limitele de integrare.

Scăzînd pe (27') din (27), rezultă

$$-\frac{P}{m-1} + P_{ra} = \frac{\text{sing.}\, A}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_{i2}}^{\varepsilon_{i1}} \sigma_i \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i}. \tag{29}$$

De asemenea, în partea din dreapta a ecuației (29) s-a schimbat semnul, deoarece s-au schimbat limitele de integrare. Din (29) rezultă că semnul lui A va fi de semnul diferenței $P_{ra} - \frac{P}{m-1}$, deoarece $\int_{\varepsilon_{i2}}^{\varepsilon_{i1}} \sigma_i \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i} > 0$, adică

$$\text{sing. } A = \text{sing.} \left(P_{ra} - \frac{P}{m-1} \right). \tag{30}$$

Pentru a determina distribuția eforturilor unitare în interiorul zonei în care s-a stabilizat starea-limită, trebuie să ținem seama că $\sigma_i = \sigma_c = 2C$. În acest caz, (28) devine

$$\sigma_r = P_{ra} - \frac{\text{sing. } A}{\sqrt{3}} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i1}} 2C \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_i}, \tag{31}$$

care, prin integrare și ținînd seama că $\zeta_{i1} = \frac{\varepsilon_{i1}}{\varepsilon_e}$ și $\zeta_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c}$, dă

$$\sigma_r = P_{ra} - \frac{\text{sing. } A}{\sqrt{3}} 2C \ln \frac{\zeta_{i1}}{\zeta_i}. \tag{32}$$

Din (18) rezultă

$$\frac{\zeta_{i1}}{\zeta_i} = \xi^2. \tag{33}$$

Înlocuind expresia lui $\frac{\zeta_{i1}}{\zeta_i}$ din (33) în (32) și ținînd seama că sing. A este minus, deoarece în mod normal $P_{ra} < \frac{P}{m-1}$, se obține relația de distribuție a lui σ_r în interiorul zonei de cedare în care s-a stabilizat starea-limită:

$$\sigma_r = P_{ra} + \frac{2C}{\sqrt{3}} \ln \xi^2, \tag{34}$$

adică

$$\sigma_r = P_{ra} + \frac{4C}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{a}. \tag{35}$$

Din (22), prin înlocuirea lui σ_r cu expresia sa din (35), se pot determina σ_θ și σ_z în interiorul zonei de cedare în care s-a stabilizat starea-limită:

$$\sigma_\theta = P_{ra} + \frac{4C}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right), \tag{36}$$

$$\sigma_z = P_{ra} + \frac{4C}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \right). \tag{37}$$

Procedînd similar ca în paragraful 7, partea I, în zona elastică distribuţia eforturilor unitare va fi

$$\sigma_r = \frac{P}{m-1} + \left(p_0 - \frac{P}{m-1}\right)\left(\frac{b}{r}\right)^2, \tag{38}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{m-1} - \left(p_0 - \frac{P}{m-1}\right)\left(\frac{b}{r}\right)^2, \tag{39}$$

$$\sigma_z = \frac{2P}{m\,(m-1)}. \tag{40}$$

Determinînd pe p_0 din condiţia $\sigma_{re} = \sigma_{rc}$ la $r = b$ rezultă

$$P_b = P_{ra} + \frac{4C}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}. \tag{41}$$

Înlocuind expresia lui P_b din (41) în (38) şi (39), se obţine

$$\sigma_r = \frac{P}{m-1} + \left(P_{ra} + \frac{4C}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a} - \frac{P}{m-1}\right)\left(\frac{b}{r}\right)^2, \tag{42}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{m-1} - \left(P_{ra} + \frac{4C}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a} - \frac{P}{m-1}\right)\left(\frac{b}{r}\right)^2, \tag{43}$$

$$\sigma_z = \frac{2P}{m\,(m-1)}. \tag{40'}$$

Mai departe, din condiţia la $r = b$:

$$\sigma_{re} + \sigma_{\theta e} = \sigma_{rc} + \sigma_{\theta c}, \tag{44}$$

se poate determina raza zonei de cedare:

$$\ln \frac{b}{a} = \left(\frac{P}{m-1} - P_{ra}\right)\frac{\sqrt{3}}{4C} - \frac{1}{2} = \eta, \tag{45}$$

de unde rezultă

$$b = a\, e^{\eta}. \tag{46}$$

În fine, în relaţia (46), punînd condiţia $b = a$, se poate determina adîncimea la care începe apariţia zonei de cedare, aproximînd pe m cu 2, aşa cum face Terzaghi:

$$\eta = 0 = (H_{cr}\,\gamma_r - H_{cr}\,\gamma_n)\frac{\sqrt{3}}{4C} - \frac{1}{2}. \tag{47}$$

Din (47) rezultă

$$H_{cr} = \frac{4C}{\sqrt{3}(\gamma_r - \gamma_n)}. \tag{48}$$

Dacă în relaţia (48) se pune condiţia $H_{cr} < 0$, rezultă

$$\gamma_n > \gamma_r, \tag{49}$$

deoarece $4C > 0$.

Primită la redacţie la 13 decembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. G. Baron, Y. Casetl, P. Habib, *Deformations des roches sous contraines. Influence de la pression interstitielle sur les caractéristiques mécaniques des roches en condition de fond.*, Revue de l'Institute Français du Pétrole, hors Série (1963).
2. G. Baron, P. Habib, P. Molier, *Deformations des roches sous contraines. Phénomenès phisyco-mecaniques apparissant dans les roches entres dans le domaine ductile*, Revue de l'Institute Français du Pétrole, hors Serie (1963).
3. V. V. Belousov, *Noi probleme de geotehnică*, Moscova, 1964.
4. S.D. Ponomariov şi colab., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, ed. 2, vol. II, Edit tehnică, Bucureşti, 1963, trad. din limba rusă.

STUDIUL MIŞCĂRILOR PERIODICE ALE UNUI VIBROPERCUTOR ELECTROMAGNETIC

de A. HEGEDÜS
Institutul politehnic Timişoara

Se consideră sistemul vibropercutor electromagnetic din figura 1, electromagnetul fiind alimentat cu tensiunea alternativă $U = U_0 \sin \omega t$ peste un redresor ideal. Armătura mobilă de masă m vibrează şi se ciocneşte de limitatorul fix A. Cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange se deduc ecuaţiile diferenţiale care descriu comportarea sistemului. Prin eliminarea curentului electric i se obţine ecuaţia diferenţială a mişcării armăturii (6), care se pune sub formă adimensională (8). Se determină legea mişcării între două ciocniri (9) şi condiţiile de existenţă a mişcărilor periodice (11) prin metoda transformărilor punctuale. Se studiază de asemenea stabilitatea mişcărilor periodice (17) şi se determină domeniile de stabilitate şi de instabilitate.

1. Deşi vibratoarele şi vibropercutoarele electromagnetice se folosesc de mult în practică [1], ele nu sînt studiate în suficientă măsură din punct de vedere teoretic. Cele mai multe studii asupra vibratoarelor electromagnetice [2] — [7] sînt destul de recente. Pe cînd sistemele vibropercutante mecanice sînt mult studiate [8], [9], în legătură cu sistemele electromecanice şi în particular asupra vibropercutorului electromagnetic sînt puţine studii. În lucrarea [10] s-a studiat mişcarea vibropercutorului electromagnetic alimentat cu curent alternativ lucrînd la rezonanţă, în ipoteza că forţa dezvoltată de electromagnet nu depinde de variaţia întrefierului.

În prezenta lucrare ne propunem să studiem mişcările periodice ale sistemului din figura 1 în ipoteza că electromagnetul este alimentat cu tensiunea alternativă $U = U_0 \sin \omega t$ peste un redresor ideal şi ţinînd seama şi de dependenţa forţei electromagnetului de variaţia întrefierului. Vom presupune că ciocnirea dintre armătura mobilă de masă m şi limitatorul fix A este instantanee, coeficientul de restituire fiind R. Vom presupune că arcul care susţine armătura mobilă este liniar, avînd constanta elastică k. Vom neglija forţele de amortizare şi rezistenţa ohmică a bobinei electromagnetului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 5, P. 1015 – 1025, 1970

2. Deplasarea x a masei percutante m în decursul mişcării o vom măsura din poziţia în care are loc ciocnirea cu limitatorul fix, sensul pozitiv fiind în sus. Fie x_0 deformaţia arcului în momentul ciocnirii.

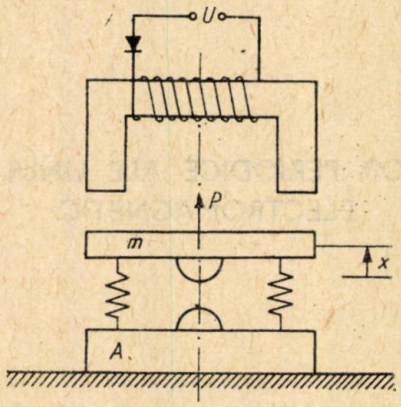


Fig. 1

Vom avea $x_0 > 0$, $x_0 < 0$, $x_0 = 0$, după cum în acest moment arcul este întins, comprimat sau nedeformat.

Vom nota cu q sarcina electrică la un moment dat, a cărei derivată reprezintă intensitatea curentului electric, $\frac{dq}{dt} = i$.

Pentru a stabili ecuaţiile diferenţiale care descriu comportarea acestui sistem electromecanic, vom folosi ecuaţiile lui Lagrange sub forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial p_s}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial p_s} = Q_s \qquad (s = 1, 2), \tag{1}$$

unde p_s reprezintă coordonatele generalizate (în cazul nostru $p_1 = x, p_2 = q$), Q_s forţele generalizate şi E_c energia cinetică totală a sistemului, care se compune din energia cinetică mecanică $\frac{1}{2} m\dot{x}^2$ şi energia magnetică $\frac{1}{2} L(x)\, \dot{q}^2$:

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} L\dot{q}^2.$$

Din electrotehnică se ştie că

$$L = \mu_0 \frac{n^2}{\frac{l_{Fe}}{A_{Fe}\mu_{Fe}} + \frac{2\delta}{A\delta}},$$

unde μ_0 este permeabilitatea magnetică a vidului, n numărul de spire, l_{Fe} lungimea liniilor de forță în fier, A_{Fe} aria secțiunii transversale a fierului, μ_{Fe} permeabilitatea magnetică a fierului, δ lungimea întrefierului și A_δ secțiunea întrefierului. Dacă notăm cu d valoarea întrefierului în momentul ciocnirii, avem $\delta = d - x$. Primul termen de la numitor fiind mic în raport cu al doilea, practic îl putem neglija. Astfel

$$L \approx \frac{\mu_0 n^2 A_\delta}{2\delta} = \frac{\mu_0 n^2 A_\delta}{2(d-x)}. \tag{2}$$

Forțele generalizate fiind $Q_1 = -k(x_0 + x) - mg$, $Q_2 = U_0 \sin \omega t$, ecuațiile lui Lagrange devin

$$m\ddot{x} + k(x_0 + x) = -mg + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x} i^2, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_i) = U_0 \sin \omega t. \tag{4}$$

Se observă că ultimul termen din prima ecuație reprezintă forța de atracție a electromagnetului, $P = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x} i^2$, astfel că ecuația (3) exprimă legea lui Newton aplicată armăturii mobile. Tot așa ecuația (4) reprezintă legea a doua a lui Kirchhoff aplicată circuitului electric.

Ținînd seama de expresia lui L din (2), ecuațiile (3) și (4) devin

$$m\ddot{x} + k(x_0 + x) = -mg + \frac{1}{4}\mu_0 n^2 A_\delta \left(\frac{i}{\delta}\right)^2, \tag{3'}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{i}{\delta}\right) = \frac{2U_0}{\mu_0 n^2 A_\delta} \sin \omega t. \tag{4'}$$

Din ecuația (4'), prin integrare, se obține

$$\frac{i}{\delta} = \frac{2U_0}{\mu_0 A_\delta n^2 \omega}(-\cos \omega t + C).$$

Curentul prin bobină este redresat. Vom lua ca origine a timpului $t = 0$, începutul unei semipericade în care tensiunea începe să crească. În acest moment, curentul electric i în bobină este nul. Astfel, pentru constanta de integrare obținem valoarea $C = 1$. Prin urmare, vom avea

$$\frac{i}{\delta} = \frac{2U_0}{\mu_0 A_\delta n^2 \omega}(1 - \cos \omega t),$$

iar expresia forței P devine

$$P = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x} i^2 = \frac{1}{4}\mu_0 n^2 A_\delta \left(\frac{i}{\delta}\right)^2 = P_0(3 - 4\cos\omega t + \cos 2\omega t), \qquad (5)$$

unde $P_0 = \dfrac{U_0}{2\mu_0 n^2 A_\delta \omega^2}$.

Introducem forța P din (5) în ecuația diferențială (3) și obținem

$$m\ddot{x} + kx = -kx_0 - mg + P_0(3 - 4\cos\omega t + \cos 2\omega t). \qquad (6)$$

Introducem următoarele mărimi adimensionale:

$$\tau = \omega t; \qquad z = \frac{m}{P_0}\omega^2 x; \quad p = 3 - \frac{(kx_0 + mg)}{P_0};$$

$$\eta = \frac{\omega_n}{\omega}; \quad \left(\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\right). \qquad (7)$$

Ecuația diferențială (6) devine

$$z'' + \eta^2 z = p - 4\cos\tau + \cos 2\tau. \qquad (8)$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$z = C_1 \cos\eta\tau + C_2 \sin\eta\tau + \frac{p}{\eta^2} + \frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau + \frac{1}{\eta^2 - 4}\cos 2\tau.$$

Notăm cu $-u_i$ ($u_i > 0$) viteza adimensională a masei percutante la începutul ciocnirii de ordinul i. După ciocnire, viteza ei va fi Ru_i. Astfel, condițiile inițiale pentru determinarea constantelor de integrare C_1 și C_2 sînt

$$\tau = \tau_i, \quad z = 0, \quad z' = Ru_i.$$

Obținem pentru constantele de integrare valorile

$$C_1 = -\left(\frac{p}{\eta^2} + \frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i + \frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right)\cos\eta\tau_i -$$

$$-\left(Ru_i + \frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_i + \frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right)\frac{1}{\eta}\sin\eta\tau_i,$$

$$C_2 = \left(Ru_i + \frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_i + \frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right)\frac{1}{\eta}\cos\eta\tau_i -$$

$$-\left(\frac{p}{\eta^2} + \frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i + \frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right)\sin\eta\tau_i.$$

Legile mişcării şi vitezei devin

$$z = -\left\{\left(\frac{p}{\eta^2}+\frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i+\frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right)\cos\eta\tau_i+\right.$$
$$+\left.\left(Ru_i+\frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_i+\frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right)\frac{1}{\eta}\sin\eta\tau_i\right\}\cos\eta\tau+$$
$$+\left\{\left(Ru_i+\frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_i+\frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right)\frac{1}{\eta}\cos\eta\tau_i-\right.$$
$$-\left.\left(\frac{p}{\eta^2}+\frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i+\frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right)\sin\eta\tau_i\right\}\sin\eta\tau+$$
$$+\frac{p}{\eta^2}+\frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau+\frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau, \qquad (9)$$

$$u = z' = \left\{\left(\frac{p}{\eta^2}+\frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i+\frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right)\cos\eta\tau_i+\right.$$
$$+\left.\left(Ru_i+\frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_i+\frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right)\frac{1}{\eta}\sin\eta\tau_i\right\}\eta\sin\eta\tau+$$
$$+\left\{\left(Ru_i+\frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_i+\frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right)\frac{1}{\eta}\cos\eta\tau_i-\right.$$
$$-\left.\left(\frac{p}{\eta^2}+\frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i+\frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right)\sin\eta\tau_i\right\}\eta\cos\eta\tau-$$
$$-\frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau-\frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau.$$

Fie τ_{i+1} valoarea lui τ la începutul ciocnirii de ordinul $i+1$ şi $-u_{i+1}$ viteza în acest moment. Cum ciocnirea se face în poziţia $z = 0$, din ecuaţiile (9) obţinem

$$-\left\{\left(\frac{p}{\eta^2}+\frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i+\frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right)\cos\eta\tau_i+\right.$$
$$+\left.\left(Ru_i+\frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_i+\frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right)\frac{1}{\eta}\sin\eta\tau_i\right\}\cos\eta\tau_{i+1}+$$
$$+\left\{\left(Ru_i+\frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_i+\frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right)\frac{1}{\eta}\cos\eta\tau_i-\right.$$
$$-\left.\left(\frac{p}{\eta^2}+\frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i+\frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right)\sin\eta\tau_i\right\}\sin\eta\tau_{i+1}+$$
$$+\frac{p}{\eta^2}+\frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_{i+1}+\frac{2}{\eta^2-4}+\cos 2\tau_{i+1}=0, \qquad (10)$$

$$u_{i+1} + \left\{\left(\frac{p}{\eta^2} + \frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i + \frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right)\cos\eta\tau_i + \right.$$

$$\left. + \left(Ru_i + \frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_i + \frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right)\frac{1}{\eta}\sin\eta\tau_i\right\}\eta\sin\eta\tau_{i+1} +$$

$$+ \left\{\left(Ru_i + \frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_i + \frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right)\frac{1}{\eta}\cos\eta\tau_i - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{p}{\eta^2} + \frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i + \frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right)\sin\eta\tau_i\right\}\eta\cos\eta\tau_{i+1} -$$

$$- \frac{4}{1-\eta^2}\sin\tau_{i+1} - \frac{2}{\eta^2-4}\sin 2\tau_{i+1} = 0.$$

Pentru studiul condiţiilor de periodicitate a mişcării, vom folosi metoda transformării punctuale [12]. Ciocnirea de ordinul i o vom reprezenta într-un plan prin punctul M_i de coordonate polare τ_i şi u_i (fig. 2). Ciocnirii de ordinul $i+1$ îi corespunde punctul M_{i+1} de coordonate τ_{i+1}, u_{i+1}. Pentru ca mişcarea masei percutante să fie periodică, trebuie ca punctele M_i şi M_{i+1} să se confunde, adică M_i să se transforme în el însuşi, constituind astfel punctul fix al transformării. Pentru aceasta va trebui să avem $u_{i+1} = u_i$ şi $\tau_{i+1} = \tau_i + 2\pi n$. Ultima condiţie înseamnă că perioada mişcării masei percutante trebuie să fie un multiplu al perioadei 2π a forţei perturbatoare. Înlocuind condiţiile de mai sus în ecuaţiile (10) şi rezolvînd sistemul de ecuaţii astfel obţinut, rezultă

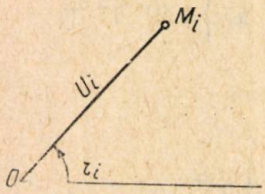


Fig. 2

$$\frac{2}{1-\eta^2}\sin\tau_i + \frac{1}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i =$$

$$= -\frac{\eta}{2}\,\frac{1-R}{1+R}\,\mathrm{tg}\,\pi n\eta\left(\frac{p}{\eta^2} + \frac{4}{1-\eta^2}\cos\tau_i + \frac{1}{\eta^2-4}\cos 2\tau_i\right), \qquad (11)$$

$$u_i = \frac{4}{1-R}\left(\frac{2}{1-\eta^2}\sin\tau_i + \frac{1}{\eta^2-4}\sin 2\tau_i\right).$$

Ecuaţiile (11) determină momentul τ_i şi viteza u_i a ciocnirii în mişcarea periodică. Această mişcare se realizează numai dacă prima ecuaţie admite o rădăcină reală în τ_i şi dacă din a doua rezultă pentru u_i valoare pozitivă.

3. Pentru mişcarea periodică determinată la paragraful 2 vom studia condiţiile de stabilitate, folosind tot metoda transformărilor punctuale

[12]. Pentru aceasta vom ţine seama că ecuaţiile (10) sînt verificate de valorile (11), corespunzătoare punctului fix al transformării. Pentru simplificare, ecuaţiile (10) le vom scrie sub forma

$$\varphi_j(\tau_{i+1}, \tau_i, u_{i+1}, u_i) = 0 \qquad (j = 1, 2). \tag{12}$$

Să presupunem acum că din cauza unei perturbaţii punctul reprezentativ al ciocnirii de ordinul i nu este punctul fix M_i, determinat mai sus, ci punctul $M_i(\tau_i + \xi_i, u_i + \varepsilon_i)$, unde ξ_i şi ε_i sînt perturbaţii mici. Din cauza aceasta, nici punctul reprezentativ al ciocnirii de ordinul $i + 1$ nu va coincide cu punctul fix, ci va fi punctul $M_{i+1}(\tau_{i+1} + \xi_{i+1}, u_{i+1} + \varepsilon_{i+1})$, unde la fel ξ_{i+1} şi ε_{i+1} le presupunem perturbaţii mici. Mişcarea masei percutante între ciocnirile de ordinul i şi $i + 1$ este reprezentată punctual prin trecerea de la punctul M_i la punctul M_{i+1}. Legea transformării punctuale (12) va deveni

$$\varphi_j(\tau_{i+1} + \xi_{i+1}, \tau_i + \xi_i, u_{i+1} + \varepsilon_{i+1}, u_i + \varepsilon_i) = 0 \qquad (j = 1, 2). \tag{13}$$

Din (12) şi (13) obţinem

$$\varphi_j(\tau_{i+1} + \xi_{i+1}, \tau_i + \xi_i, u_{i+1} + \varepsilon_{i+1}, u_i + \varepsilon_i) -$$

$$- \varphi_j(\tau_{i+1}, \tau_i, u_{i+1}, u_i) = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

Prin dezvoltare în serie după puterile perturbaţiilor ξ_{i+1}, ε_{i+1}, ξ_i, ε_i se obţine

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \tau_{i+1}} \xi_{i+1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_{i+1}} \varepsilon_{i+1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \tau_i} \xi_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i} \varepsilon_i = 0 \qquad (j = 1, 2). \tag{14}$$

Pentru acest sistem se caută soluţii de forma $\xi_{i+1} = \lambda \xi_i$, $\varepsilon_{i+1} = \lambda \varepsilon_i$.

Înlocuind în ecuaţiile (14), se obţine un sistem omogen în ξ_i şi ε_i. Pentru ca sistemul să admită soluţii diferite de zero, determinantul trebuie să fie egal cu zero. Rezultă astfel ecuaţia caracteristică pentru λ sub forma

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_{i+1}} \lambda + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_i} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_{i+1}} \lambda + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_i} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_{i+1}} \lambda + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_i} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_{i+1}} \lambda + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_i} \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Pentru ca punctul fix să fie stabil, adică mişcarea periodică să fie stabilă, este necesar ca rădăcinile ecuaţiei caracteristice să fie în modul subunitare.

În cazul de faţă, după efectuarea calculelor, ecuaţia (15) devine

$$\lambda^2 + \left[2R\cos 2\pi n\eta + \frac{1+R}{\eta u_i}(p - 4\cos\tau_i + \cos 2\tau_i)\sin 2\pi n\eta\right]\lambda + R^2 = 0. \tag{16}$$

Această ecuaţie are rădăcinile în modul subunitare dacă $R < 1$ şi valorile lui τ_i calculate cu ecuaţiile (11) satisfac următoarele inegalităţi:

$$-1 < \frac{2R\cos 2\pi n\eta + \frac{1+R}{\eta u_i}(p - 4\cos\tau_i + \cos 2\tau_i)\sin 2\pi n\eta}{1+R^2} < 1. \tag{17}$$

Pentru o valoare dată a parametrului p (respectiv η, R şi n), ecuaţiile (11) determină valoarea lui τ_i şi u_i corespunzătoare mişcării periodice. Pentru ca această mişcare să fie stabilă, trebuie să fie verificate şi inegalităţile (17).

Rezultatele unor calcule efectuate cu ajutorul calculatorului electronic MECIPT—1 sînt date în diagramele din figurile 3—7. Prima ecuaţie (11) reprezintă o curbă $p = p(\tau_i)$ η, R şi n fiind parametri. În figura 3 această curbă este reprezentată pentru $\eta = 0{,}8$, $R = 0{,}6$, $n = 1$. Inegalităţile (17) la limită, luînd egalităţi în loc de inegalităţi,

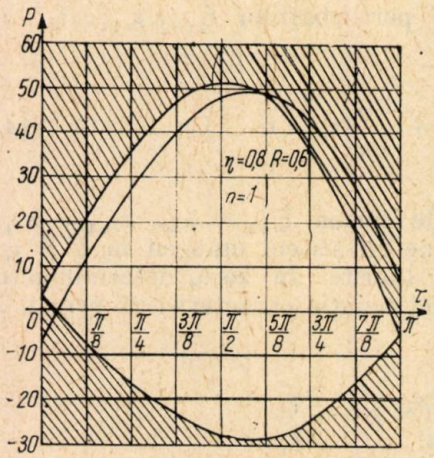


Fig. 3

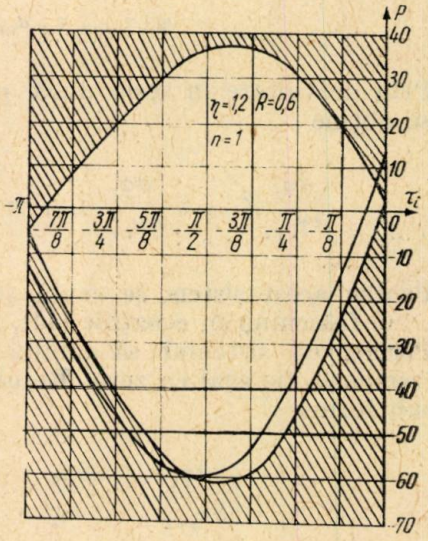


Fig. 4

reprezintă alte două curbe care intersectează prima şi separă astfel domeniul de stabilitate. În figurile 3—6, domeniile de instabilitate sînt haşurate. În figura 7 sînt reprezentate numai curbele $p = p(\tau_i)$ pentru $n = 1$, $R = 0$; 0,6 şi $n = 2$, $R = 0$, raportul η fiind 0,8, respectiv 1, 2. Porţiunile corespunzătoare mişcărilor stabile s-au trasat cu linie plină,

restul cu linie întreruptă. Din aceste diagrame rezultă că pentru o construcţie dată numai pentru anumite valori ale parametrului p pot să apară mişcări periodice stabile. Astfel, în cazul $\eta = 0{,}8$, $R = 0{,}6$, $n = 1$,

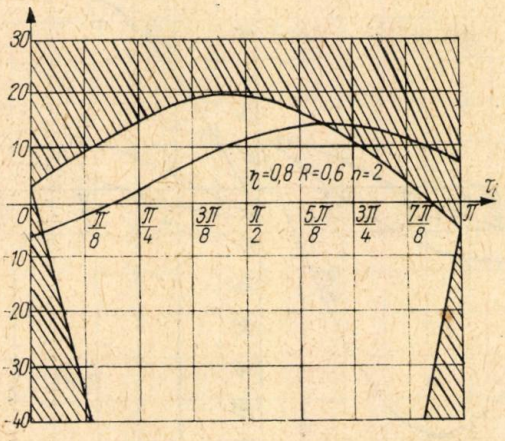


Fig. 5

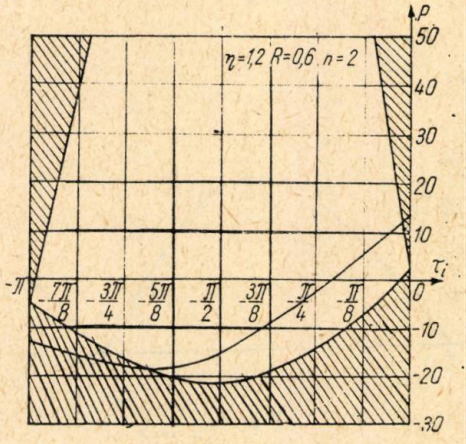


Fig. 6

trebuie să avem $0 < p < 50$, iar în cazul $\eta = 0{,}8$, $R = 0{,}6$, $n = 2$, $-5 < p < 14$. Pentru anumite valori ale lui p pot exista teoretic mişcări periodice şi stabile şi instabile.

În figura 8 s-a trasat diagrama mişcării pentru o perioadă în cazul $\eta = 0{,}8$, $R = 0{,}6$, $n = 1$ şi $p = 10{,}43$.

Pentru a verifica teoria s-au efectuat încercări experimentale cu un vibropercutor de laborator avînd $m = 0{,}584$ kg, $k = 41{,}2$ kN/m, deci frecvenţa proprie $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 42$ Hz.

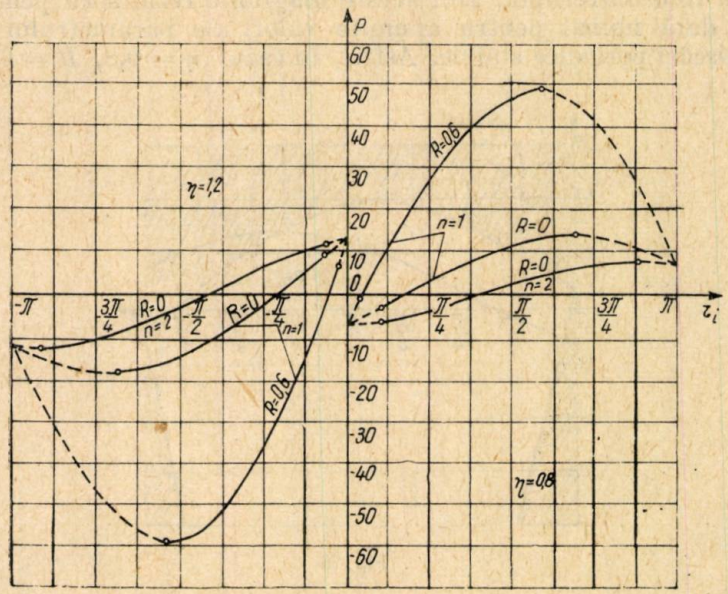


Fig. 7

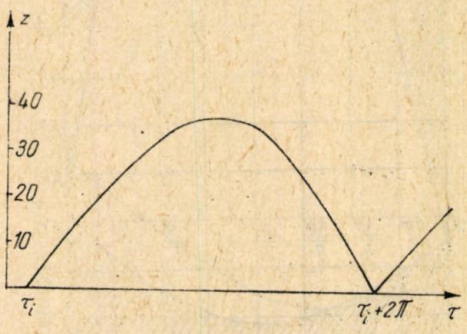


Fig. 8

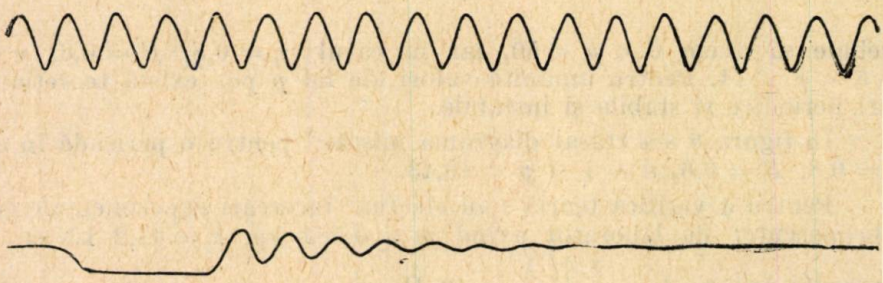


Fig. 9

În figura 9 este redată vibrograma înregistrată cu vibrograful Geiger în cazul alimentării electromagnetului de la reţea, frecvenţa tensiunii fiind $f = 50$ Hz; astfel $\eta = \frac{\omega_n}{\omega} = \frac{f_n}{f} = 0{,}84$. În partea inferioară a figurii se vede marcajul de timp. Mişcarea are perioada egală cu cea a tensiunii, diagrama mişcării avînd forma curbei teoretice din figura 8.

Primită la redacţie la 5 martie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. А. И. Москвитин, *Электрические машины возвратно-поступательного движения*, Издательство Академии Наук СССР, Москва-Ленинград, 1950.
2. Л. Г. Эткин, *О возбуждении колебаний упругих систем электромагитными возбуждениями*, Приборостроение, *2* (1960).
3. O. Taniguchi, M. Sakata, M. Suzuki, *On the steady state motion of electro-magnetic vibrator*, Bulletin of JSME, **3**, *9*, 87—95 (1960).
4. А. Е. Чесноков, *К теории и расчету электромагнитного вибратора*, Электричество, *12* (1961).
5. Б. И. Крюков, *Динамика вибрационных машин резонансного типа*, „Наукова Думка", Киев, 1967.
6. Ludvig Győző; *Mágneskapcsolók dinamikai vizsgálata elektronikus analóg számológéppel*, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Nagymaros, 1968.
7. Ryba Dušan, *Výpočet elektromagnetického oudčce kmitů napájeneho střídavým proudem přes usmeřňovač*, Strojnicky Časopis, *3*, 261—269 (1965).
8. В. А. Остапенко, *Механические виброударные системы*, „Наукова Думка", Киев, 1966.
9. В. Л. Рагульскене, *Виброударные системы; Самосинкронизация механических систем 1*, Изд. „Минтис", 1965.
10. Gh. Silaş, A. Hegedüs, *Studiul mişcărilor periodice ale unui mecanism vibropercutant cu un grad de libertate*, Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului politehnic Timişoara, **11** (**25**), *2* (1966).
11. Т. В. Санакоев, *Динамика виброударной площадки с электромагнитным приводом*, Машиноведение, *6* (1965).
12. Ю. И. Неймарк, *Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний*, Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика, **1**, *1—2* (1958).

STUDIUL MIŞCĂRILOR VIBROPERCUTANTE ALE UNEI MASE LIBERE CU EXCITAŢIE PERIODICĂ

de GH. SILAŞ, L. BRÎNDEU, A. HEGEDÜS
Institutul politehnic Timişoara

Se consideră un sistem vibropercutant format din masa m care se mişcă liber pe verticală şi se ciocneşte de un reper avînd mişcare periodică nearmonică. Se determină condiţiile în care există mişcări periodice (9). Se face apoi studiul stabilităţii mişcărilor periodice prin metoda perturbaţiilor. Stabilitatea se realizează dacă $R < 1$ şi valorile lui t_i din ecuaţia (9) satisfac inegalităţile (14). În continuare se consideră cazul cînd reperul mobil este acţionat de un mecanism bielă-manivelă avînd raportul $\frac{r}{l}$mic. În acest caz se construiesc şi diagramele de stabilitate ale mişcărilor periodice.

1. Studiul sistemelor vibropercutante se face de obicei presupunînd că excitaţia se exprimă prin funcţii armonice [1]—[5]. În acest fel este posibil să se studieze mai simplu mişcările sistemelor vibropercutante, dar simplificarea constituie numai o primă aproximare a realităţii. Aşa este, de exemplu, cazul excitaţiei prin mecanismul bielă-manivelă.

În această lucrare ne propunem să considerăm cazul mai general al excitaţiei exprimate printr-o funcţie periodică nearmonică.

Vom studia cazul unei mase libere ce se ciocneşte cu o altă masă în mişcare periodică nearmonică, ciocnirea fiind instantanee cu coeficientul de restituire $R\,(0 < R < 1)$.

2. Fie m masa liberă. Mişcarea masei de care se ciocneşte o vom considera de perioadă $\frac{2\pi}{\omega}$ (fig. 1). Vom presupune că această masă este suficient de mare, astfel că mişcarea ei nu este influenţată de ciocnirile dintre cele două mase. Coordonata mişcării faţă de un reper fix o vom nota cu y, semnul pozitiv fiind în sus. Poziţia masei m este determinată prin distanţa relativă x dintre cele două mase. Ecuaţia diferenţială a mişcării relative a masei m între două ciocniri succesive este

$$\ddot{x} = -g - \ddot{y}. \tag{1}$$

Se observă că mișcarea relativă a masei este aceeași cu o mișcare absolută cînd asupra ei ar acționa o forță perturbatoare egală cu $-m\ddot{y}$ (fig. 2).

Integrala ecuației (1) este

$$x = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 - y(t). \tag{2}$$

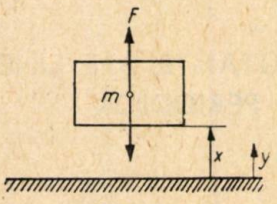


Fig. 1

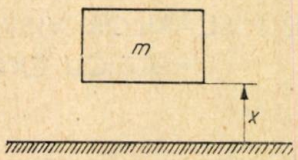


Fig. 2

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale ale mișcării. Fie t_i momentul cînd are loc ciocnirea de ordinul i. Dacă se notează cu $-v_i$ ($v_i > 0$) viteza relativă la începutul acestei ciocniri, atunci viteza relativă la sfîrșitul ciocnirii va fi Rv_i. Astfel condițiile inițiale ale mișcării relative dintre ciocnirile de ordinul i și $i+1$ sînt

$$t = t_i, \quad x = 0, \quad \dot{x} = Rv_i. \tag{3}$$

Cu aceste condiții inițiale se obține

$$C_1 = Rv_i + gt_i + \dot{y}(t_i); \qquad C_2 = \frac{gt_i^2}{2} - t_i[Rv_i + gt_i + \dot{y}(t_i)]. \tag{4}$$

Legea (2) a mișcării și viteza se vor scrie

$$\begin{aligned} x &= -\frac{g}{2}(t - t_i)^2 + [Rv_i + \dot{y}(t_i)](t - t_i) - [y(t) - y(t_i)], \\ \dot{x} &= -g(t - t_i) + Rv_i - [\dot{y}(t) - \dot{y}(t_i)]. \end{aligned} \tag{5}$$

La sfîrșitul intervalului considerat, deci la începutul ciocnirii de ordinul $i+1$, vom avea

$$t = t_{i+1}, \quad x = 0, \quad \dot{x} = -v_{i+1}. \tag{6}$$

Din ecuațiile (5) se obține

$$\begin{aligned} -\frac{g}{2}(t_{i+1} - t_i)^2 + [Rv_i + \dot{y}(t_i)](t_{i+1} - t_i) - [y(t_{i+1}) - y(t_i)] &= 0, \\ v_{i+1} - g(t_{i+1} - t_i) + Rv_i - [\dot{y}(t_{i+1}) - \dot{y}(t_i)] &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Aceste ecuații generale determină modul cum se face trecerea de la o ciocnire la următoarea. Cu ajutorul lor se pot studia atît mișcările tranzitorii, cît și cele periodice ale masei m.

3. Ne vom ocupa în continuare de studiul mişcărilor periodice ale sistemului vibropercutant. În ipoteza realizării lor este necesar ca perioada să fie un multiplu întreg al perioadei $\frac{2\pi}{\omega}$ a mişcării $y(t)$, iar viteza relativă la începutul fiecărei ciocniri să fie aceeaşi, deci trebuie să avem

$$t_{i+1} - t_i = \frac{2\pi}{\omega} n; \quad v_{i+1} = v_i = v \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \dots \\ i = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}. \tag{8}$$

În aceste condiţii, ecuaţiile (7) devin

$$-\frac{g}{2}\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right)^2 + [Rv + \dot{y}(t_i)]\frac{2\pi n}{\omega} = 0,$$

$$v - g\frac{2\pi n}{\omega} + Rv = 0.$$

Prin urmare, pentru a avea mişcări periodice, trebuie să avem

$$v = \frac{2\pi n g}{\omega(1+R)}, \quad \dot{y}(t_i) = \frac{\pi n g}{\omega}\frac{1-R}{1+R}. \tag{9}$$

În aceste condiţii, legea mişcării şi viteza se exprimă astfel:

$$x = -\frac{g}{2}(t - t_i)^2 + \frac{\pi n g}{\omega}(t - t_i) - [y(t) - y(t_i)],$$

$$\dot{x} = -g(t - t_i) + \frac{\pi n g}{\omega} - \dot{y}(t).$$

Se observă că v este întotdeauna pozitiv, avînd aceeaşi valoare indiferent de forma funcţiei $y(t)$. Pentru ca cea de-a doua condiţie să se realizeze, trebuie ca ecuaţia în t_i să admită rădăcini reale.

4. Pentru mişcările periodice determinate anterior vom studia stabilitatea. Studiul stabilităţii îl vom face folosind metoda perturbaţiilor. Vom admite că pentru ciocnirea de ordinul i avem perturbaţiile Δt_i, Δv_i ($i = 0, 1, 2, \dots$). Între ciocnirile de ordinul i şi $i+1$ sînt valabile ecuaţiile (7), astfel că vom obţine

$$-\frac{g}{2}\left(\frac{2\pi n}{\omega} + \Delta t_{i+1} - \Delta t_i\right)^2 + [R(v + \Delta v_i) + \dot{y}(t_i + \Delta t_i)]\left(\frac{2\pi n}{\omega} + \right.$$

$$\left. + \Delta t_{i+1} - \Delta t_i\right) - \left[y\left(t_i + \frac{2\pi n}{\omega} + \Delta t_{i+1}\right) - y(t_i + \Delta t_i)\right] = 0,$$

$$v + \Delta v_{i+1} - g\left(\frac{2\pi n}{\omega} + \Delta t_{i+1} - \Delta t_i\right) + R(v + \Delta v_i) -$$

$$-\left[\dot{y}\left(t_i + \frac{2\pi n}{\omega} + \Delta t_{i+1}\right) - \dot{y}(t_i + \Delta t_i)\right] = 0.$$

Presupunînd perturbaţii mici, vom folosi metoda liniarizării. Ţinînd seama de relaţii anterioare, rezultă următorul sistem liniar şi omogen în perturbaţii :

$$\begin{aligned} R\Delta v_i - \frac{g}{1+R}(\Delta t_{i+1} - \Delta t_i) + \dot{y}(t_i)\,\Delta t_i = 0, \\ \Delta v_{i+1} + R\Delta v_i - [g + \dot{y}(t_i)]\,(\Delta t_{i+1} - \Delta t_i) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem vom căuta soluţii de forma $\Delta t_i = \tau\beta^i$, $\Delta v_i = u\beta^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Se obţine un sistem liniar şi omogen în u şi τ de forma

$$\begin{aligned} Ru + \left[\dot{y}(t_i) - \frac{g}{1+R}(\beta - 1)\right]\tau = 0, \\ (\beta + R)\,u - [g + \dot{y}(t_i)]\,(\beta - 1)\,\tau = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Pentru ca sistemul să admită soluţii nenule este necesar ca determinantul sistemului să fie egal cu zero. Astfel se obţine ecuaţia caracteristică în β :

$$\begin{vmatrix} R & \dot{y}(t_i) - \dfrac{g}{1+R}(\beta - 1) \\ \beta + R & -[g + \dot{y}(t_i)]\,(\beta - 1) \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

sau

$$\beta^2 - \left[1 + R^2 + \frac{(1+R)^2}{g}\dot{y}(t_i)\right]\beta + R^2 = 0. \tag{13}$$

Pentru ca mişcarea să fie stabilă, este necesar şi suficient ca toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice (13) să fie cu modulul subunitar. Aceasta se realizează dacă $R < 1$ şi valorile lui t_i, calculate cu ecuaţia (9), satisfac inegalităţile

$$-\frac{2g(1+R^2)}{(1+R)^2} < \dot{y}(t_i) < 0. \tag{14}$$

5. În particular, dacă $y(t) = A_1 \cos \omega t$, atunci ecuaţia a doua din (9) devine

$$\sin \omega t_i = -\frac{\pi n g}{\omega^2 A_1}\,\frac{1-R}{1+R}, \tag{15}$$

iar condiţia de stabilitate (14) se scrie

$$0 < \cos \omega t_i < \frac{2g}{\omega^2 A_1}\,\frac{1+R^2}{(1+R)^2}. \tag{16}$$

Mişcarea este periodică dacă membrul drept al ecuaţiei (15) este cu modulul subunitar. În cazul mişcării periodice stabile, ecuaţiile (15) şi (16) arată că ωt_i este situat în cadranul patru. Aceste condiţii se pot scrie

$$\frac{\pi n g(1-R)}{\omega^2(1+R)} \leqslant A_1 < \frac{g\sqrt{4(1+R^2)^2+\pi^2n^2(1-R^2)^2}}{\omega^2(1+R)^2}. \tag{17}$$

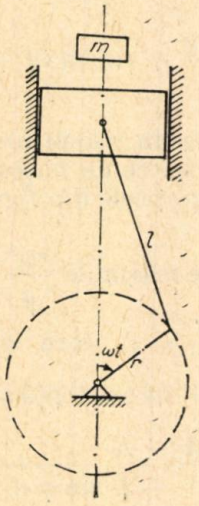


Fig. 3

Condiţiile stabilite sînt identice cu cele date în lucrările [1], [3] şi [6].

6. Pentru aplicarea celor arătate vom considera că mişcarea de excitaţie este realizată printr-un mecanism bielă-manivelă ca în figura 3. În acest caz, ţinînd seama că raportul $\frac{r}{l}$ este mic, deplasarea y se poate aproxima astfel:

$$y(t) = -\frac{r^2}{4l} + r\cos\omega t + \frac{r^2}{4l}\cos 2\omega t. \tag{18}$$

Ecuaţia care determină pe t_i va fi

$$\sin\omega t_i + \frac{r}{2l}\sin 2\omega t_i = -\frac{\pi n g}{\omega^2 r}\,\frac{1-R}{1+R}, \tag{19}$$

iar condiţiile de stabilitate (14) devin

$$0 < \cos\omega t_i + \frac{r}{l}\cos 2\omega t_i < \frac{2g}{r\omega^2}\,\frac{1+R^2}{(1+R)^2}. \tag{20}$$

În acest caz, ţinînd seama de (19), legea mişcării şi vitezei (5) se exprimă cu ecuaţiile

$$x = -\frac{g}{2}(t-t_i)^2 + \frac{\pi n g}{\omega}(t-t_i) - [r(\cos\omega t - \cos\omega t_i) + \\ + \frac{r^2}{4l}(\cos 2\omega t - \cos 2\omega t_i)], \tag{21}$$

$$\dot{x} = -g(t-t_i) + \frac{\pi n g}{\omega} + r\omega\sin\omega t + \frac{r^2}{2l}\omega\sin 2\omega t.$$

Influenţa excitării printr-un sistem bielă-manivelă asupra existenţei şi stabilităţii regimurilor periodice de mişcare ale sistemului vibropercutant dat se poate urmări în graficele din figurile 4—6, construite pe baza condiţiilor (19) şi (20).

Se consideră ca variabile mărimile $\frac{r\omega^2}{g} = \xi$ şi $\omega t_0 = \varphi(-\pi < \omega t_0 < \pi)$, iar ca parametri raportul $\frac{r}{l} = \varepsilon$, care are în general valori mici, precum şi R şi n. Condiţia (19) de existenţă a regimurilor periodice se scrie

$$\xi = -\pi n\frac{1-R}{1+R}\frac{1}{\sin\varphi + 0{,}5\varepsilon\sin 2\varphi} \tag{22}$$

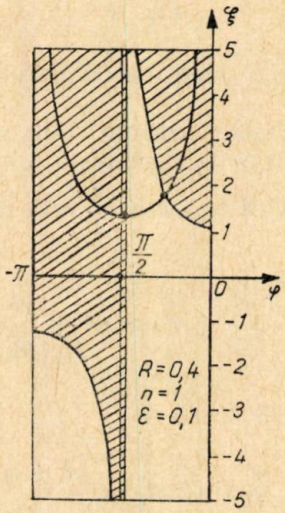


Fig. 4

şi se reprezintă printr-o curbă (fig. 4), avînd ca asimptote dreptele $\varphi = -\pi$ şi $\varphi = 0$. În intervalul $0 < \varphi < \pi$ rezultă $\xi < 0$. Cum $\xi = \frac{r\omega^2}{g} > 0$, s-a suprimat ramura de curbă corespunzătoare. Această

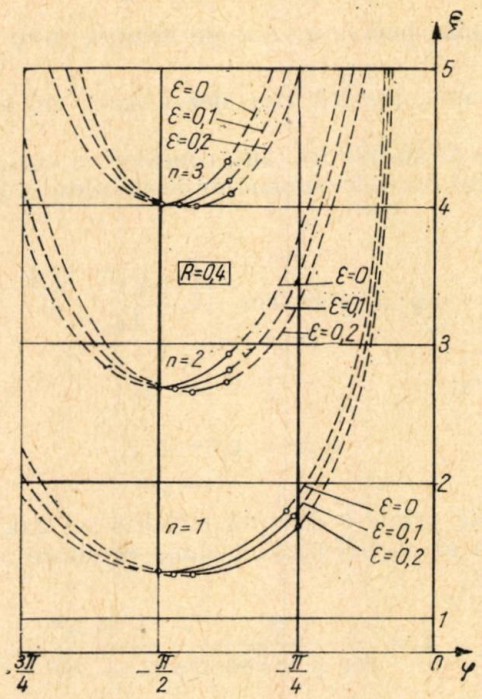

ξ
5
4
3
2
1
ε=0
ε=0,1
ε=0,2
n=3
R=0,4
ε=0
ε=0,1
ε=0,2
n=2
n=1
ε=0
ε=0,1
ε=0,2
3π/4
π/2
π/4
0
φ

Fig. 5

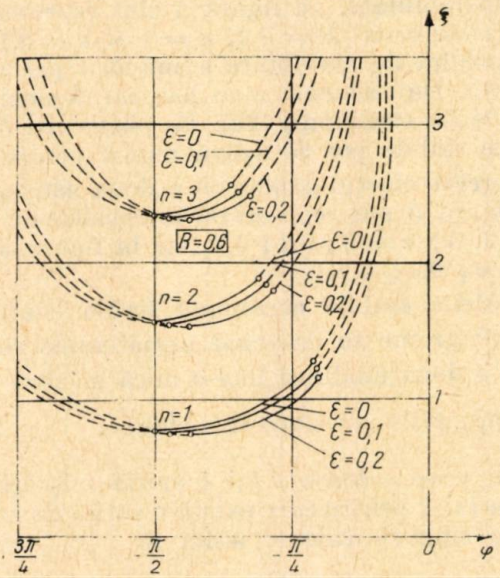

ξ
3
2
1
ε=0
ε=0,1
n=3
ε=0,2
R=0,6
ε=0
ε=0,1
ε=0,2
n=2
n=1
ε=0
ε=0,1
ε=0,2
3π/4
π/2
π/4
0
φ

Fig. 6

curbă are un minim pentru φ, dat de ecuația $\cos\varphi = \dfrac{-1+\sqrt{1+8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}$.

Deoarece ε este mic, rezultă din dezvoltarea în serie $\varphi \approx -\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$.

În condițiile de stabilitate (20), considerînd egalități în locul inegalităților, se determină limitele domeniilor de stabilitate. Prima egalitate, care se scrie

$$\varphi = -\arccos\frac{-1+\sqrt{1+8\varepsilon^2}}{4\varepsilon} \tag{23}$$

sau, pentru ε mic,

$$\varphi \approx -0{,}5\pi + \varepsilon, \tag{23'}$$

se reprezintă grafic printr-o dreaptă paralelă cu axa ξ, care trece prin punctul de minim al curbei (22). A doua egalitate se scrie

$$\xi = \frac{2}{\cos\varphi + \varepsilon\cos 2\varphi}\,\frac{1+R^2}{(1+R)^2}. \tag{24}$$

Curba reprezentativă are o asimptotă verticală identică cu dreapta (23), determinată anterior.

Dreapta (23) și curba (24) determină pe curba (22) intervalele de stabilitate și de instabilitate. În figura 4 sînt reprezentate aceste curbe pentru mișcări periodice cu $R = 0{,}4$, $n = 1$ și $\varepsilon = 0{,}1$. Porțiunea corespunzătoare intervalului de stabilitate a mișcării periodice s-a trasat cu linie plină îngroșată. De asemenea s-au hașurat domeniile în care nu sînt verificate condițiile de stabilitate (20). Se poate citi de pe diagramă că mișcările periodice stabile pot să apară numai pentru $1{,}30 < \xi < 1{,}75$.

Pentru a aprecia efectul armonicii a doua asupra mișcărilor periodice stabile, în figura 5 am reprezentat intervalele de stabilitate pentru $R = 0{,}4$; $n = 1, 2, 3$; $\varepsilon = 0$; $0{,}1$; $0{,}2$, iar în figura 6 pentru $R = 0{,}6$; $n = 1, 2, 3$, $\varepsilon = 0$; $0{,}1$; $0{,}2$.

Pentru mișcările stabile corespund liniile continue.

Din aceste diagrame se desprind următoarele concluzii:

a) armonica a doua modifică într-o mică măsură intervalul pentru $\xi = \dfrac{r\omega^2}{g}$ în care mișcările periodice sînt stabile.

b) nu pentru orice valoare a lui ξ există mișcări periodice stabile. Pentru o valoare a lui ξ pentru care există o astfel de mișcare, ea se realizează numai cu o singură valoare a lui n.

Primită la redacție la 30 octombrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. А. Е. Кобринский, А. В. Шляхтин, М. Н. Ямщикова, *К теории машин виброударного действия*, Труды Института машиностроения, АН СССР, Семинар по теории механизмов и машин, вып. 79, Изд. АН СССР, 1960.
2. В. Л. Рагульскене, *Виброударные системы: Самоинхронизация механических систем I*, Изд. „Минтис", 1965.
3. И. И. Быховский, А. Д. Дорохова, Л. Б. Зарецкий, С. И. Лукомский, *О некоторых периодических движениях и структере фазого пространства ударно-колебательной системы с постоянной восстановливающей силой*, Изв. АН СССР, *2* (1964).
4. Peterka Frantisek, *Periodicke kmitani mechanicke soustavy s vnitrnimi razy*, Strojnicky Casopis, **XVI**, *3* (1965).
5. K. Kuphal, *Über die Beeinflussung von Schwingungen durch einen Stoßkorper I*, ZAMM, **45**, H *2/3* (1965).
6. Gh. Silaş, L. Brîndeu, A. Hegedüs, *Mişcări periodice cu ciocniri ale vibratorului liber*, Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului politehnic Timişoara, **12** (**26**), (1967).

SINTEZA MECANISMELOR PLANE CU $\nu > 1$ PE BAZA FUNCȚIILOR DE TRANSMITERE

de V. HANDRA-LUCA
Institutul politehnic Cluj

În lucrare se face sinteza geometrică a mecanismelor plane cu mai multe cicluri independente ($\nu > 1$) care au în structura lor două grupe de clasa a II-a sau o grupă de clasa a III-a pe baza funcțiilor de transmitere de ordinul zero [1]. Mecanismele luate în discuție au unu sau două grade de mobilitate. Ca metodă se utilizează numerele complexe și sistemele complex conjugate ale sistemelor complexe de ecuații. Făcîndu-se o comparație între mecanismele studiate, se trag concluzii privitor la schemele structurale optime ce trebuie alese la sinteza mecanismelor pe baza funcțiilor de transmitere.
Astfel se alege mecanismul din figura 3, cu un grad de mobilitate și cinci elemente cinematice, și nu cel din figura 2, cu două grade de mobilitate și șase elemente cinematice, performanțele lor fiind aceleași din punctul de vedere al numărului de poziții relative asociate.

Semnificația funcțiilor de transmitere de diferite ordine care apar în analiza și sinteza mecanismelor a fost scoasă în evidență în lucrările [1]—[3].

În prezenta notă se face sinteza mecanismelor cu $\nu > 1$ pe baza funcțiilor de transmitere de ordinul zero. Se vor trata cîteva mecanisme care permit o extindere și la alte tipuri de mecanisme cu un număr de cicluri independente mai mare ca unu.

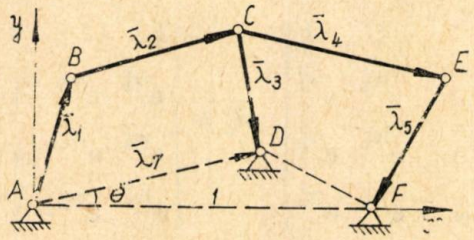


Fig. 1

1. La început se ia mecanismul de $M = 1$, $n = 5$, $\nu = 2$, format din două grupe de clasa a II-a, ordinul 2 (fig. 1). Se consideră ca element conducător AB, iar ca element condus EF.

Făcîndu-se sinteza pe baza poziţiilor relative asociate şi luînd în considerare funcţiile de transmitere de ordinul zero [4], rezultă că se pot alege $P_0 = 9$ poziţii relative asociate. Se ataşează fiecărui element al mecanismului cîte un număr complex, notat în poziţia iniţială prin $\bar{\lambda}$.

Din condiţia de închidere a ciclului independent $ABCDEF$ în cele 9 poziţii se scrie sistemul

$$\begin{gathered}\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_5 = 1,\\ \bar{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \bar{\lambda}_2 e^{i\varphi_j^2} + \bar{\lambda}_4 e^{i\varphi_j^4} + \bar{\lambda}_5 e^{i\varphi_j^5} = 1 \qquad (1)\\ (j = 1, 2, \ldots, 8),\end{gathered}$$

iar pentru ciclul $ABCD$ sistemul

$$\begin{gathered}\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_7,\\ \bar{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \bar{\lambda}_2 e^{i\varphi_j^2} + \bar{\lambda}_3 e^{i\varphi_j^3} = \bar{\lambda}_7 \qquad (2)\\ (j = 1,2, \ldots, 8),\end{gathered}$$

unde unghiurile φ_j^2, φ_j^3, φ_j^4, φ_j^5, corelate cu φ_j^1, sînt funcţiile de transmitere de ordinul zero ale elementelor respective în poziţia j.

Din primele patru ecuaţii ale sistemului (1) rezultă

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{d_1}{d};\quad \bar{\lambda}_2 = \frac{d_2}{d};\quad \bar{\lambda}_4 = \frac{d_4}{d};\quad \bar{\lambda}_5 = \frac{d_5}{d}, \qquad (3)$$

unde

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} & e^{i\varphi_1^5} \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} & e^{i\varphi_2^5} \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} & e^{i\varphi_3^5} \end{vmatrix},\quad d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} & e^{i\varphi_1^5} \\ 1 & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} & e^{i\varphi_2^5} \\ 1 & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} & e^{i\varphi_3^5} \end{vmatrix},$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & 1 & e^{i\varphi_1^4} & e^{i\varphi_1^5} \\ e^{i\varphi_2^1} & 1 & e^{i\varphi_2^4} & e^{i\varphi_2^5} \\ e^{i\varphi_3^1} & 1 & e^{i\varphi_3^4} & e^{i\varphi_3^5} \end{vmatrix},\quad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & 1 & e^{i\varphi_1^5} \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & 1 & e^{i\varphi_2^5} \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & 1 & e^{i\varphi_3^5} \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} & 1 \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} & 1 \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} & 1 \end{vmatrix}.$$

Înlocuind pe (3) în (1), obținem

$$d_1 e^{i\varphi_j^1} + d_2 e^{i\varphi_j^2} + d_4 e^{i\varphi_j^4} + d_5 e^{i\varphi_j^5} = d \tag{5}$$

$$(j = 4, 5, 6, 7, 8),$$

care, dacă se ia în considerare (4), devine

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} & e^{i\varphi_1^5} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} & e^{i\varphi_2^5} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} & e^{i\varphi_3^5} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^4} & e^{i\varphi_j^5} \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

$$(j = 4, 5, 6, 7, 8).$$

Din prima ecuație a sistemului (2) avem

$$\bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_7 - \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2, \tag{7}$$

care transformă sistemul (2) în

$$\bar{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \bar{\lambda}_2 e^{i\varphi_j^2} + (\bar{\lambda}_7 - \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) e^{i\varphi_j^3} = \bar{\lambda}_7 \tag{8}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, 8).$$

Ținînd seama de (3), sistemul (8) devine

$$d_1 e^{i\varphi_j^1} + d_2 e^{i\varphi_j^2} + (d\lambda_7 e^{i\theta} - d_1 - d_2) e^{i\varphi_j^3} = d\lambda_7 e^{i\theta} \tag{9}$$

$$(j = 1,2, \ldots, 8).$$

Pentru eliminarea necunoscutelor φ_j^3 $(j = 1, 2, .., 8)$ se introduce sistemul complex conjugat al sistemului (9), care are forma

$$\bar{d}_1 e^{-i\varphi_j^1} + \bar{d}_2 e^{-i\varphi_j^2} + (\bar{d}\lambda_7 e^{-i\theta} - \bar{d}_1 - \bar{d}_2) e^{-i\varphi_j^3} = \bar{a}\lambda_7 e^{-i\theta} \tag{10}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, 8),$$

unde $\bar{d}$, $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$ sînt numerele complexe conjugate ale numerelor d, d_1, d_2.

Din (9) şi (10), după eliminarea lui φ_j^3 şi gruparea termenilor, avem

$$\lambda_7 e^{i\theta}(d\bar{d}_1 + d\bar{d}_2 - d\bar{d}_1 e^{-i\varphi_j^1} - d\bar{d}_2 e^{-i\varphi_j^2}) + \lambda_7 e^{-i\theta}(\bar{d}d_1 +$$

$$+ \bar{d}d_2 - \bar{d}d_1 e^{i\varphi_j^1} - \bar{d}d_2 e^{i\varphi_j^2}) - \{\bar{d}_1 d_2[1 - e^{i(\varphi_j^1 - \varphi_j^2)}] +$$

$$+ d_1\bar{d}_2[1 - e^{-i(\varphi_j^1 - \varphi_j^2)}]\} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 8). \tag{11}$$

Dacă punem

$$R_j + iI_j = d\bar{d}_1 + d\bar{d}_2 - d\bar{d}_1 e^{-i\varphi_j^1} - d\bar{d}_2 e^{-i\varphi_j^2},\ K_j = \sqrt{R_j^2 + I_j^2},$$

$$R_j' + iI_j' = \bar{d}_1 d_2[1 - e^{i(\varphi_j^1 - \varphi_j^2)}], \tag{12}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_j = \frac{I_j}{R_j}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, 8)$$

şi simplificăm cu 2, sistemul (11) devine

$$\lambda_7 K_j \cos(\theta + \alpha_j) - R_j' = 0,\ (j = 1, 2, \ldots, 8), \tag{13}$$

un sistem de opt ecuaţii obişnuite.

Din (13) eliminăm necunoscuta λ_7 şi obţinem sistemul

$$\frac{R_1'}{K_1 \cos(\theta + \alpha_1)} = \frac{R_j'}{K_j \cos(\theta + \alpha_j)} \tag{14}$$

$$(j = 2, 3, \ldots, 8).$$

Sistemul (14) poate fi pus şi sub forma

$$(K_1 R_j' \cos\alpha_1 - R_j' K_j \cos\alpha_j)\cos\theta - (K_1 R_j' \sin\alpha_1 - R_1' K_1 \sin\alpha_j)\sin\theta = 0$$

$$(j = 2, 3, \ldots, 8)$$

sau

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{K_1 R_j' \cos\alpha_1 - R_1' K_j \cos\alpha_j}{K_1 R_j' \sin\alpha_1 - R_1' K_j \sin\alpha_j} \tag{15}$$

$$(j = 2, 3, \ldots, 8).$$

Eliminînd pe θ din sistemul (15), avem

$$\frac{K_1R_2'\cos\alpha_1 - R_1'K_2\cos\alpha_2}{K_1R_2'\sin\alpha_1 - R_1'K_2\sin\alpha_2} = \frac{K_1R_j'\cos\alpha_1 - R_1'K_j\cos\alpha_j}{K_1R_j'\sin\alpha_1 - R_1'K_j\sin\alpha_j} \tag{16}$$

$$(j = 3, 4, \ldots, 8).$$

Dezvoltînd determinantul (6) după coloana a 4-a, obţinem

$$A_j^1 e^{i\varphi_1^4} + A_j^2 e^{i\varphi_2^4} + A_j^3 e^{i\varphi_3^4} + A\, e^{i\varphi_j^4} + B_j = 0$$

$$(j = 4, 5, 6, 7, 8),$$

unde

$$B_j = u_j + iv_j = -\begin{vmatrix} 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^5} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^5} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^5} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^5} \end{vmatrix} \quad A_j^1 = u_j^1 + iv_j^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^5} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^5} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^5} \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$A_j^2 = u_j^2 + iv_j^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^5} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^5} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^5} \end{vmatrix} \quad A_j^3 = u_j^3 + iv_j^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & 1^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^5} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^5} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^5} \end{vmatrix},$$

$$A = u + iv = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_1^5} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^5} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^5} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$(j = 4, 5, 6, 7, 8).$

Deoarece în sinteza mecanismului $\varphi_j^4 (j = 4, 5, \ldots, 8)$ nu intervin, se vor elimina. În acest scop se va introduce sistemul complex conjugat al sistemului (17), care are forma

$$\overline{A}_j^1 e^{-i\varphi_j^4} + \overline{A}_j^2 e^{-i\varphi_2^4} + \overline{A}_j^3 e^{-i\varphi_3^4} + \overline{A} e^{-i\varphi_j^4} + \overline{B}_j = 0 \tag{19}$$

$(j = 4, 5, 6, 7, 8)$,

unde $\overline{A}_j^1$, $\overline{A}_j^2$, $\overline{A}_j^3$, $\overline{A}$ şi $\overline{B}_j$ sînt numerele complex conjugate ale numerelor A_j^1, A_j^2, A_j^3 şi B_j, A.

Din sistemul (17) şi (19) avem

$$\begin{aligned} A\overline{A} = {} & A_j^1\overline{A}_j^1 + A_j^2\overline{A}_j^2 + B_j^3\overline{B}_j^3 + B_j\overline{B}_j + A_j^1\overline{B}_j e^{i\varphi_1^4} + \overline{A}_j^1 B_j e^{-i\varphi_1^4} + \\ & + A_j^2\overline{B}_j e^{i\varphi_2^4} + \overline{A}_j^2 B e^{-i\varphi_2^4} + A_j^3\overline{B}_j e^{i\varphi_3^4} + \overline{A}_j^3 B_j e^{-i\varphi_3^4} + A_j^1\overline{A}_j^2 e^{i(\varphi_1^4 - \varphi_2^4)} + \\ & + \overline{A}_j^1 A_j^2 e^{-i(\varphi_1^4 - \varphi_2^4)} + A_j^1\overline{A}_j^3 e^{i(\varphi_1^4 - \varphi_3^4)} + \overline{A}_j^1 A_j^3 e^{-i(\varphi_1^4 - \varphi_3^4)} + \\ & + A_j^2\overline{A}_j^3 e^{i(\varphi_2^4 - \varphi_3^4)} + \overline{A}_j^2 A_j^3 e^{-i(\varphi_2^4 - \varphi_3^4)} \end{aligned} \tag{20}$$

$(j = 4,5, 6, 7, 8)$.

Reunind (16), obţinem un sistem de 11 ecuaţii cu tot atîtea necunoscute, şi anume φ_1^2, φ_2^2, ..., φ_8^2, φ_1^4, φ_2^4, φ_3^4. Rezolvarea acestui sistem se face prin aproximaţii succesive, aplicînd metoda lui Newton.

După determinarea acestor necunoscute, din (4) şi (3) se determină $\overline{\lambda}_1$, $\overline{\lambda}_2$, $\overline{\lambda}_4$, $\overline{\lambda}_5$ iar din (13) pe $\overline{\lambda}_7$, pentru ca apoi din (7) să se determine $\overline{\lambda}_3$ şi astfel sinteza este făcută.

2. Se ia în studiu mecanismul cu $M = 2$, $n = 6$, $\nu = 2$, format din două grupe de clasa a II-a, ordinul 2 (fig. 2), la care elemente conducătoare sînt AB şi DE, iar element condus se consideră FG. Numărul de poziţii relative asociate se calculează cu formula [4] şi rezultă $P_0 = 11$.

Ataşînd fiecărui element al mecanismului cîte un număr complex în sistemul xAy, din condiţia de închidere a circuitului independent $ABCFGA$ rezultă sistemul

$$\begin{aligned} & \overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2 + \overline{\lambda}_5 + \overline{\lambda}_6 = \overline{\lambda}_7, \\ & \overline{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \overline{\lambda}_2 e^{i\varphi_j^2} + \overline{\lambda}_5 e^{i\varphi_j^5} + \overline{\lambda}_6 e^{i\varphi_j^6} = \overline{\lambda}_7 \end{aligned} \tag{21}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$,

iar din condiţia de închidere a circuitului independent $ABCDEA$ sistemul

$$\begin{aligned} & \overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2 + \overline{\lambda}_3 + \overline{\lambda}_4 = 1, \\ & \overline{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \overline{\lambda}_2 e^{i\varphi_j^2} + \overline{\lambda}_3 e^{i\varphi_j^3} + \overline{\lambda}_4 e^{i\varphi_j^4} = 1 \end{aligned} \tag{22}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$.

Semnificaţia notaţiilor folosite în aceste două sisteme este aceeaşi ca în (3.1), (4.1) şi (5.9).

Din primele patru ecuaţii ale sistemului (21) se obţine

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{d_1}{d}\bar{\lambda}_7;\quad \bar{\lambda}_2 = \frac{d_2}{d}\bar{\lambda}_7;\quad \bar{\lambda}_5 = \frac{d_5}{d}\bar{\lambda}_7;\quad \bar{\lambda}_6 = \frac{d_6}{d}\bar{\lambda}_7, \tag{23}$$

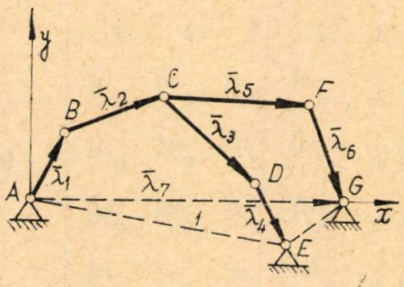


Fig. 2

unde s-au folosit notaţiile

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^5} & e^{i\varphi_1^6} \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^5} & e^{i\varphi_2^6} \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^5} & e^{i\varphi_3^6} \end{vmatrix},\quad d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^5} & e^{i\varphi_1^6} \\ 1 & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^5} & e^{i\varphi_2^6} \\ 1 & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^5} & e^{i\varphi_3^6} \end{vmatrix},$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & 1 & e^{i\varphi_1^5} & e^{i\varphi_1^6} \\ e^{i\varphi_2^1} & 1 & e^{i\varphi_2^5} & e^{i\varphi_2^6} \\ e^{i\varphi_3^1} & 1 & e^{i\varphi_3^5} & e^{i\varphi_3^6} \end{vmatrix},\quad d_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & 1 & e^{i\varphi_1^6} \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & 1 & e^{i\varphi_2^6} \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & 1 & e^{i\varphi_3^6} \end{vmatrix},$$

$$d_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^5} & 1 \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^5} & 1 \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^5} & 1 \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Înlocuind (23) în ultimele șapte ecuații ale sistemului (21), obținem

$$d_1 e^{i\varphi_j^1} + d_2 e^{i\varphi_j^2} + d_5 e^{i\varphi_j^5} + d_6 e^{i\varphi_j^6} = d \tag{25}$$

$(j = 4, 5, \ldots, 10)$,

care, luînd în considerare (14), devine

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^5} & e^{i\varphi_1^6} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^5} & e^{i\varphi_2^6} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^5} & e^{i\varphi_3^6} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^5} & e^{i\varphi_j^6} \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

$(j = 4, 5, \ldots, 10)$.

Introducem sistemul complex conjugat al sistemului (22), care are form

$$\bar{\lambda}^* + \bar{\lambda}_2^* + \bar{\lambda}_3^* + \bar{\lambda}_4^* = 1,$$

$$\bar{\lambda}_1^* e^{-i\varphi_j^1} + \bar{\lambda}_2^* e^{-i\varphi_j^2} + \bar{\lambda}_3^* e^{-i\varphi_j^3} + \bar{\lambda}_4^* e^{-i\varphi_j^4} = 1 \tag{27}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$,

unde $\bar{\lambda}_1^*$, $\bar{\lambda}_2^*$, $\bar{\lambda}_3^*$, $\bar{\lambda}_4^*$ reprezintă numerele complexe conjugate ale numerelor $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4$.

Din (22) și (27) se elimină necunoscutele $\bar{\lambda}_3$ și $\varphi_j^{3*}(j = 1, 2, \ldots, 10)$ și obținem

$$\bar{\lambda}_1 (e^{i\varphi_j^1} - 1) + \bar{\lambda}_1^* (e^{-i\varphi_j^1} - 1) + \bar{\lambda}_2 (e^{i\varphi_j^2} - 1) + \bar{\lambda}_2^* (e^{-i\varphi_j^2} - 1) +$$

$$+ \bar{\lambda}_4 (e^{i\varphi_j^4} - 1) + \bar{\lambda}_4^* (e^{-i\varphi_j^4} - 1) - \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2^* [e^{i(\varphi_j^1 - \varphi_j^2)} - 1] -$$

$$- \bar{\lambda}_1^* \bar{\lambda}_2 [e^{-i(\varphi_j^1 - \varphi_j^2)} - 1] \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_4^* [e^{i(\varphi_j^1 - \varphi_j^4)} - 1] -$$

$$- \bar{\lambda}_1^* \bar{\lambda}_4 [e^{-i(\varphi_j^1 - \varphi_i^4)} - 1] - \bar{\lambda}_4 \bar{\lambda}_2^* [e^{i(\varphi_j^4 - \varphi_j^2)} - 1] -$$

$$- \bar{\lambda}_4^* \bar{\lambda}_2 [e^{-i(\varphi_j^4 - \varphi_j^2)} - 1] = 0 \tag{28}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$.

Cu notațiile

$$
\begin{aligned}
f(\varphi_j^1) &= e^{i\varphi_j^1} - 1; & f^*(\varphi_j^1) &= e^{-i\varphi_j^1} - 1,\\
f(\varphi_j^2) &= e^{i\varphi_j^2} - 1; & f^*(\varphi_j^2) &= e^{-i\varphi_j^2} - 1,\\
f(\varphi_j^4) &= e^{i\varphi_j^4} - 1; & f^*(\varphi_j^4) &= e^{-i\varphi_j^4} - 1,\\
f(\varphi_j^1, \varphi_j^2) &= e^{i(\varphi_j^1 - \varphi_j^2)} - 1; & f^*\varphi_j^1, \varphi_j^2) &= e^{-i(\varphi_j^1 - \varphi_j^2)} - 1,\\
f(\varphi_j^1, \varphi_j^4) &= e^{i(\varphi_j^1 - \varphi_j^4)} - 1; & f^*(\varphi_j^1, \varphi_j^4) &= e^{-i\varphi_j^1 - \varphi_j^4)} - 1,\\
f(\varphi_j^4, \varphi_j^2) &= e^{i(\varphi_j^4 - \varphi_j^2)} - 1; & f^*(\varphi_j^4, \varphi_j^2) &= e^{-i(\varphi_j^4 - \varphi_j^2)} - 1,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

sistemul (28) se poate scrie

$$
\begin{aligned}
&\bar{\lambda}_4[f(\varphi_j^4) - \bar{\lambda}_1^* f^*(\varphi_j^1, \varphi_j^4) - \bar{\lambda}_2^* f(\varphi_j^4, \varphi_j^2) + \bar{\lambda}_4^*[f^*(\varphi_j^*) -\\
&- \bar{\lambda}_1 f(\varphi_j^1, \varphi_j^4) - \bar{\lambda}_2 f^*(\varphi_j^5, \varphi_j^2)] = \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2^* f(\varphi_j^1, \varphi_j^2) +\\
&+ \bar{\lambda}_2^*\bar{\lambda}_2 f^*(\varphi^1, \varphi_j^2) - \bar{\lambda}_1 f(\varphi_j^1) - \bar{\lambda}_1^* f^*(\varphi_j^1) - \bar{\lambda}_2 f(\varphi_j^2) -\\
&- \bar{\lambda}_2^* f^*(\varphi_j')
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$.

Soluțiile (23) pot fi puse sub forma complex conjugată

$$
\bar{\lambda}_1^* = \frac{d_1^*}{d^*}\bar{\lambda}_7^*;\ \bar{\lambda}_2^* = \frac{d_2^*}{d^*}\bar{\lambda}_7^*;\ \bar{\lambda}_5^* = \frac{d_5^*}{d^*}\bar{\lambda}_7^*;\ \bar{\lambda}_6^* = \frac{d_6^*}{d^*}\bar{\lambda}_7^*, \tag{31}
$$

unde d^*, d_1^*, d_2^*, d_5^*, d_6^*, $\bar{\lambda}_7^*$ sînt numerele complex conjugate ale numerelor d, d_1, d_2, d_5, d_6, $\bar{\lambda}_7$.

Ținînd seama de (23) și (31), sistemul (30) devine

$$
\begin{aligned}
&\bar{\lambda}_4 d[d^* f(\varphi_j^4) - d_1^*\bar{\lambda}_7^* f^*(\varphi_j^1, \varphi_j^4) - d_2^*\bar{\lambda}_7^* f(\varphi_j^4, \varphi_j^2)] +\\
&+ \bar{\lambda}_1^* d^*[df^*(\varphi_j^4) - d_1\bar{\lambda}_7 f(\varphi_j^1, \varphi_j^4) - d_2\bar{\lambda}_7 f^*(\varphi_j^4, \varphi_j^2)] =\\
&= [d_1 d_2^* f(\varphi_j^1, \varphi_j^2) + d_1^* d_2 f^*(\varphi_j^1, \varphi_j^2)]\,\bar{\lambda}_7\bar{\lambda}_7^* - [d_1 d^* f(\varphi_j^1) +\\
&+ d_2 d^* f(\varphi_j^2)]\,\bar{\lambda}_7 - [d_1^* df^*(\varphi_j^1) + d_2^* df^*(\varphi_j^2)]\,\bar{\lambda}_7^*
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$(j, = 1, 2, \ldots, 10)$.

Cu notațiile

$$A_j = dd^*f(\varphi_j^4); \qquad \overline{A}_j = d\,d^*f^*(\varphi_j^4),$$

$$B_j = dd_1^*f^*(\varphi_j^1, \varphi_j^4) + dd_2^*f(\varphi_j^4, \varphi_j^2);$$

$$\overline{B}_j = d^*d_1f(\varphi_j^1, \varphi_j^4) + d^*d_2f^*(\varphi_j^4, \varphi_j^2), \tag{33}$$

$$E_j = d_1d_2^*f(\varphi_j^1, \varphi_j^2) + d_1^*d_2f^*(\varphi_j^1, \varphi_j^2),$$

$$C_j = d_1d^*f(\varphi_j^1) + d_2d^*f(\varphi_j^2); \ \overline{C}_j = d_1^*df^*(\varphi_j^1) + d_2^*df^*(\varphi_j^2),$$

sistemul (32) se rezolvă în raport cu $\overline{\lambda}_4$ și $\overline{\lambda}_4^*$:

$$\overline{\lambda}_4 = \frac{\begin{vmatrix} E_1\lambda_7^2 - C_1\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_1\overline{\lambda}_7^*, & \overline{A}_1 - \overline{B}_1\overline{\lambda}_7 \\ E_j\lambda_7^2 - C_j\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_j\overline{\lambda}_7^*; & \overline{A}_j - \overline{B}_j\overline{\lambda}_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 - B_1\overline{\lambda}_7^* & \overline{A}_1 - \overline{B}_1\overline{\lambda}_7 \\ A_j - B_j\overline{\lambda}_7^* & \overline{A}_j - \overline{B}_j\overline{\lambda}_7 \end{vmatrix}},$$

$$\overline{\lambda}_4^* = \frac{\begin{vmatrix} A_1 - B_1\overline{\lambda}_7^* & E_1\lambda_7^2 - C_1\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_1\overline{\lambda}_7^* \\ A_j - B_j\overline{\lambda}_7^* & E_j\lambda_7^2 - C_j\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_j\overline{\lambda}_7^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 - B_1\overline{\lambda}_7^* & \overline{A}_1 - \overline{B}_1\overline{\lambda}_7 \\ A_j - B_j\overline{\lambda}_7^* & \overline{A}_j - \overline{B}_j\overline{\lambda}_7 \end{vmatrix}}. \tag{34}$$

Din sistemul (34) se elimină $\overline{\lambda}_4 = \lambda_4 e^{i\varphi_0^4}$ și $\overline{\lambda}_4^* = \lambda_4 e^{-i\varphi_0^4}$ și se obține

$$\frac{\begin{vmatrix} E_1\lambda_7^2 - C_1\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_1\overline{\lambda}_7^* & \overline{A}_1 - \overline{B}_1\overline{\lambda}_7 \\ E_2\lambda_7^2 - C_2\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_2\overline{\lambda}_7^* & \overline{A}_2 - \overline{B}_2\overline{\lambda}_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 - B_1\overline{\lambda}_7^* & E_1\lambda_7^2 - C_1\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_1\overline{\lambda}_7^* \\ A_2 - B_2\overline{\lambda}_7^* & E_2\lambda_7^2 - C_2\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_2\overline{\lambda}_7^* \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} E_1\lambda_7^2 - C_1\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_1\overline{\lambda}_7^* & \overline{A}_1 - \overline{B}_1\overline{\lambda}_7 \\ E_j\lambda_5^2 - C_j\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_j\overline{\lambda}_7^* & \overline{A}_j - \overline{B}_j\overline{\lambda}_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 - B_1\overline{\lambda}_7^* & E_1\lambda_7^2 - C_1\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_1\overline{\lambda}_7^* \\ A_j - B_j\overline{\lambda}_7^* & E_j\lambda_7^2 - C_j\overline{\lambda}_7 - \overline{C}_j\overline{\lambda}_7^* \end{vmatrix}} \tag{35}$$

$(j = 3, 4, \ldots, 10)$.

Dezvoltînd determinantul (26) după coloana a 4-a, obținem

$$A_j^1 e^{i\varphi_1^5} + A_j^2 e^{i\varphi_2^5} + A_j^3 e^{i\varphi_3^5} + A e^{i\varphi_j^5} + B_j = 0 \tag{36}$$

$(j = 4, 5, \ldots, 10)$,

unde

$$B_j = u_j + iv_j = -\begin{vmatrix} 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^6} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^6} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^6} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^6} \end{vmatrix}; \quad A_j^1 = u_j^1 + iv_j^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^6} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^6} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^6} \end{vmatrix},$$

$$A_j^2 = u_j^2 + iv_j^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^6} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^6} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^6} \end{vmatrix}; \quad A_j^3 u_j^3 = +iv_j^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^6} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^6} \\ 1 & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^6} \end{vmatrix},$$

$$A = u + iv = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^6} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^6} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^6} \end{vmatrix}, \tag{37}$$

($j = 4, 5, 6, \ldots, 10$).

Cu scopul eliminării necunoscutelor $\varphi_j^5 (j = 4, 5, \ldots, 10)$ care nu intervin în sinteza mecanismului, se introduce sistemul complex conjugat al sistemului (36):

$$\overline{A}_j^1 e^{-i\varphi_1^5} + \overline{A}_j^2 e^{-i\varphi_2^5} + \overline{A}_j^3 e^{-i\varphi_3^5} + A e^{-i\varphi_j^5} + \overline{B}_j = 0 \tag{38}$$

($j = 4, 5, \ldots, 10$).

Din sistemul (36) și (38) se obține

$$\begin{aligned} A\overline{A} = {} & A_j^1\overline{A}_j^1 + A_j^2\overline{A}_j^2 + A_j^3\overline{A}_j^3 + B_j\overline{B}_j + A_j^1\overline{B}_j e^{i\varphi_1^5} + \overline{A}_j^1 B_j e^{-i\varphi_1^5} + \\ & + A_j^2\overline{B}_j e^{i\varphi_2^5} + \overline{A}_j^2 B_j e^{-i\varphi_2^5} + A_j^3\overline{B}_j e^{i\varphi_3^5} + \overline{A}_j^3 B_j e^{-i\varphi_3^5} + A_j^1\overline{A}_j^2 e^{i(\varphi_1^5 - \varphi_2^5)} + \\ & + \overline{A}_j^1 A_j^2 e^{-i(\varphi_1^5 - \varphi_2^5)} + A_j^1\overline{A}_j^3 e^{-i(\varphi_1^5 - \varphi_3^5)} + \overline{A}_j^1 A_j^3 e^{-i(\varphi_1^5 - \varphi_3^5)} + \\ & + A_j^2\overline{A}_j^3 e^{i(\varphi_2^5 - \varphi_3^5)} + \overline{A}_j^2 A_j^3 e^{-i(\varphi_2^5 - \varphi_3^5)} \end{aligned} \tag{39}$$

$= 4, 5, \ldots, 10$).

Reunind (35) cu (39), obţinem un sistem de 15 ecuaţii cu tot atîtea necunoscute, şi anume $\varphi_1^2, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_{10}^2, \varphi_1^5, \varphi_2^5, \varphi_3^5, \bar{\lambda}_7 (\bar{\lambda}_7 = \lambda_7 e^{i\varphi_0^7})$. Rezolvarea acestui sistem se face prin aproximaţii succesive după metoda lui Newton.

După determinarea acestor 5 necunoscute cu ajutorul lui (24), din (23) se determină $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_5, \bar{\lambda}_6$. Din (34) se determină $\bar{\lambda}_4$, iar apoi din prima

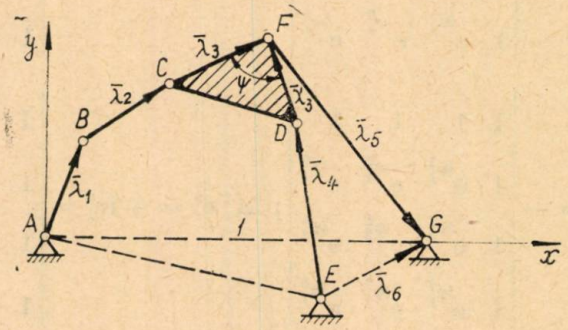


Fig. 3

relaţie a sistemului (22) se determină $\bar{\lambda}_3$ şi astfel sinteza mecanismului este făcută.

3. Se va studia în cele ce urmează sinteza unui mecanism plan care are în structura lui o grupă de clasa a III-a, ordinul 3 (fig. 3), şi $M = 1$, $n = 5$, $\nu = 2$, $N = 10$. Se consideră ca element conducător AB, iar ca element condus FG. Numărul maxim de poziţii relative asociate care se pot lua aici cu impunerea funcţiilor de transmitere de ordinul zero este, conform [4], de $P_0 = 11$.

Se ataşează fiecărui element al mecanismului cîte un număr complex în sistemul lui Gauss xAy, notat în poziţia iniţială prin $\bar{\lambda}$.

Din condiţia de închidere a ciclului independent $ABCFGA$ în cele 11 poziţii se poate scrie sistemul

$$\begin{aligned} &\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_5 = 1, \\ &\bar{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \bar{\lambda}_2 e^{i\varphi_j^2} + \bar{\lambda}_3 e^{i\varphi_j^3} + \bar{\lambda}_5 e^{i\varphi_j^5} = 1 \end{aligned} \tag{40}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$,
iar din condiţia de închidere a ciclului independent $EDFGE$ în cele 11 poziţii se poate scrie sistemul

$$\begin{aligned} &\bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_3^1 + \bar{\lambda}_5 = \bar{\lambda}_6, \\ &\bar{\lambda}_4 e^{i\varphi_j^4} + \bar{\lambda}_3^1 e^{i\varphi_j^3} + \bar{\lambda}_5 e^{i\varphi_j^5} = \bar{\lambda}_6 \end{aligned} \tag{41}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$.

Între numărul complex $\bar{\lambda}_3$ și $\bar{\lambda}_3'$ există relația de legătură generată de faptul că cele două numere complexe reprezintă doi vectori sudați între ei :

$$\bar{\lambda}_3' = a\,\bar{\lambda}_3 e^{i\alpha}\,;\ \bar{a} = ae^{i\alpha}. \tag{42}$$

Din prima relație a sistemului (41) se poate explicita $\bar{\lambda}_4$, care se poate introduce în celelalte relații ale aceluiași sistem, și obținem

$$(\bar{\lambda}_6 - a\bar{\lambda}_3 e^{i\alpha} - \bar{\lambda}_5)e^{i\varphi_j^4} + a\bar{\lambda}_3 e^{i\alpha}\, e^{i\varphi_j^3} + \bar{\lambda}_5 e^{i\varphi_j^5} = \lambda_6 \tag{43}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$.

Din primele patru ecuații ale sistemului (40) se poate scoate

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{d_1}{d}\,;\ \bar{\lambda}_2 = \frac{d_2}{d}\,;\ \bar{\lambda}_3 = \frac{d_3}{d}\,;\ \bar{\lambda}_5 = \frac{d_5}{d}, \tag{44}$$

unde

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^3} & e^{i\varphi_1^5} \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^3} & e^{i\varphi_2^5} \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^3} & e^{i\varphi_3^5} \end{vmatrix},\ d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^3} & e^{i\varphi_1^5} \\ 1 & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^3} & e^{i\varphi_2^5} \\ 1 & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^3} & e^{i\varphi_3^5} \end{vmatrix},$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & 1 & e^{i\varphi_1^3} & e^{i\varphi_1^5} \\ e^{i\varphi_2^1} & 1 & e^{i\varphi_2^3} & e^{i\varphi_2^5} \\ e^{i\varphi_3^1} & 1 & e^{i\varphi_3^3} & e^{i\varphi_3^5} \end{vmatrix},\ d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & 1 & e^{i\varphi_1^5} \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & 1 & e^{i\varphi_2^5} \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & 1 & e^{i\varphi_3^5} \end{vmatrix}, \tag{45}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^3} & 1 \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^2} & 1 \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Înlocuind (44) în (43) se obține

$$(d\bar{\lambda}_6 - \bar{a}\,\bar{d}_3 - \bar{d}_5)e^{i\varphi_j^4} + \bar{a}\,d_3 e^{i\varphi_j^3} + d_5 e^{i\varphi_j^5} = \bar{\lambda}_6 d \tag{46}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$.

Introducem sistemul complex conjugat al sistemului (46):

$$(\bar{d}\bar{\lambda}_6^* - \bar{a}^* d_3 - \bar{d}_5)e^{-i\varphi_j^4} + \bar{a}^*\bar{d}_3 e^{-i\varphi_j^3} + \bar{d}_5 e^{-i\varphi_j^5} = \bar{\lambda}_6^*\bar{d} \tag{47}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$.

Din (46) și (47) se elimină φ_j^4, obținîndu-se sistemul

$$(d\bar{\lambda}_6 - \bar{a}d_3 - d_5)(\bar{d}\bar{\lambda}_6^* - \bar{a}^*\bar{d}_3 - \bar{d}_5) = (\bar{\lambda}_6 d - \bar{a}d_3 e^{i\varphi_j^3} - d_5 e^{i\varphi_j^5}) \times$$

$$\times (\bar{\lambda}_6^*\bar{d} - \bar{a}^*\bar{d}_3 e^{-i\varphi_j^3} - \bar{d}_5 e^{-i\varphi_j^5}) \tag{48}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$,

care poate fi pus sub forma

$$\bar{\lambda}_6[-d\bar{a}^*\bar{d}_3 - d\bar{d}_5 + d\bar{a}^*\bar{d}_3 e^{-i\varphi_j^3} + d\bar{d}_5 e^{-i\varphi_j^5}] + \bar{\lambda}_6^*[-\bar{d}\,\bar{a}\,d_3 -$$

$$- \bar{d}d_5 + \bar{d}\,\bar{a}d_3 e^{i\varphi_j^3} + \bar{d}d_5 e^{i\varphi_j^5}] = -(\bar{a}d_3 + d_5)(\bar{a}^*\bar{d}_3 + \bar{d}_5) +$$

$$+ (\bar{a}d_3 e^{i\varphi_j^3} + d_5 e^{i\varphi_j^5})(\bar{a}^*\bar{d}_3 e^{-i\varphi_j^3} + \bar{d}_5 e^{-i\varphi_j^5}) \tag{49}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 10)$.

Sistemul (49) se transformă similar cu sistemul (32), eliminîndu-se aici $\bar{\lambda}_6 = \lambda_6 e^{i\varphi_0^6}$ și $\bar{\lambda}_6^* = \lambda_6 e^{-i\varphi_0^6}$ în loc de $\bar{\lambda}_4$ și $\bar{\lambda}_4^*$.

Din ultimele relații ale sistemului (40), ținînd seama de (44), avem

$$d_1 e^{i\varphi_j^1} + d_2 e^{i\varphi_j^2} + d_3 e^{i\varphi_j^3} + d_5 e^{i\varphi_j^5} = d \tag{50}$$

$(j = 4, 5, \ldots, 10)$

sau, dacă luăm în considerare (45),

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^3} & e^{i\varphi_1^5} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^3} & e^{i\varphi_2^5} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^3} & e^{i\varphi_2^5} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^3} & e^{i\varphi_j^5} \end{vmatrix} = 0 \qquad (51)$$

$(j = 4, 5, \ldots, 10)$.

Din sistemul (51) se elimină φ_j^2 $(j = 4, 5, \ldots, 10)$, obţinîndu-se un sistem de forma sistemului (39).

Reunind sistemele obţinute din (49) după eliminarea lui $\bar{\lambda}_4$ şi $\bar{\lambda}_4^*$ şi din (51) după eliminarea lui φ_j^2 $(j = 4, 5, \ldots, 10)$ obţinem un sistem de $8 + 7 = 15$ ecuaţii cu tot atîtea necunoscute, şi anume φ_1^2, φ_2^2 φ_3^2, φ_j^3 $(j = 1, 2, \ldots, 10)$ şi $\bar{a} = ae^{i\alpha}$. Rezolvarea acestui sistem se face prin aproximaţii succesive după metoda lui Newton [5].

După determinarea acestor necunoscute, folosindu-ne de expresiile (45), din (44) se vor determina $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, $\bar{\lambda}_3$, $\bar{\lambda}_5$, iar din (49) se va determina $\bar{\lambda}_6$, care permit ca din (42) şi din prima relaţie a sistemului (41) să se determine $\bar{\lambda}_4$. În acest fel, sinteza mecanismului este făcută.

Făcînd o comparaţie între cazul 2 şi 3, care oferă aceleaşi performanţe ale elementului condus sub aspectul funcţiilor de transmitere de ordinul zero, se constată că numărul de necunoscute ce trebuie determinate cu ajutorul metodei aproximaţiilor succesive este acelaşi, iar complexitatea ecuaţiilor este la fel.

Se impune de la sine concluzia că este mai convenabil să se aleagă mecanismul din figura 3, care are mai puţine elemente cinematice (cinci) şi, în plus, are un singur grad de mobilitate faţă de cel din figura 2, care are şase elemente cinematice şi două grade de mobilitate.

Primită la redacţie la 12 mai 1969

BIBLIOGRAFIE

1. I. Székely, V. Handra-Luca, *Studiul cinematic al mecanismelor plane cu mai multe grade de mobilitate cu ajutorul funcţiilor de transmitere*, Buletinul ştiinţific al Institutului politehnic Cluj, *8* (1965).
2. — *Studiul cinematic al mecanismelor plane cu ajutorul funcţiilor de transmitere*, St. cerc. mec. agricolă, **II**, 2—3 (1968).
3. — *A Kinematic Investigation of Spatial Mechanisms with Several Degrees of Mobility by Means Transmission Functions*, Journal of Engineering for Industry *11*, (1968).

4. V. HANDRA-LUCA, *Asupra sintezei mecanismelor pe baza funcțiilor de transmitere*, Buletinul științific al Institutului politehnic Cluj, *12* (1969).

5. B. P. DEMIDOVICI, I. A. MARON ; *Osnovî vîcislitelnoi matematiki*, Gosudarstvenie izdatelstvo fiziko-matematiceskoi literaturî, Moskva, 1960.

6. I.I. ARTOBOLEVSKII, N. I. LEVIȚKI, S. A. CERCUDINOV, *Sintez ploschih mehanizmov*, Moskva, FIZMATGHIZ, 1959.

7. N. I. MANOLESCU, I. TEMPEA, *Sinteza structurală a lanțurilor cinematice plane cu articulații multiple și cinci grade de libertate* $L_3 = 5$ *„total”*; $L_3^p = 5$ *„parțial”* și $L_3^{fr} = 3$ *„fracționat”*, St. cerc. mec. apl., **25**, *3* (1967).

8 CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN, *Considerații asupra metodei analitice de cercetare a mecanismelor plane pe baza variabilelor complexe*, St. cerc. mec. apl., *2* (1959).

CUPLE MULTIAXE ÎN MECANISMELE MONO- ŞI BICONTURURI TRIDIMENSIONALE

de CHR. PELECUDI
Centrul de mecanică a solidelor

Lucrarea cuprinde o sistematizare a cuplelor cinematice simple sau compuse în raport cu posibilităţile lor de realizare şi de întrebuinţare, precum şi a mecanismelor de diferite familii în raport cu clasele contururilor şi cu varietatea cuplelor multiaxe. Ea este însoţită de calculul analitic pe baze vectoriale ale funcţiilor de poziţii în cazul general.

Varietatea mecanismelor tridimensionale mono- şi bicontururi este mult mai mare decît a mecanismelor plane. Dacă, în plan, din mecanismele monocontururi patrulatere sau biconture cu şase elemente, sub cele două forme independente Watt şi Stephenson, se obţin diferite mecanisme după felul şi numărul cuplelor de rotaţie sau de translaţie utilizate şi după lungimile şi formele elementelor, în spaţiu aceste mecanisme derivate sînt într-un număr mult mai mare, întrucît şi varietatea cuplelor cinematice este mai mare. În anumite limitări, Harrisberger a dedus numărul acestor mecanisme pentru fiecare familie spaţială [1].

Într-adevăr, la cuplele spaţiale există multiple posibilităţi de constrîngere relativă a elementelor în conformitate cu suprafeţele lor de contact [2]. Totuşi, numărul cuplelor utilizate cel mai des în practică este redus. O clasificare a cuplelor spaţiale este redată după numărul axelor, natura mişcărilor şi clasele de constrîngere sau de mobilitate. Aceasta permite să se utilizeze schematizarea unui element binar sub forma frecvent întîlnită în literatura de specialitate, şi anume a perpendicularei comune pe axele cuplelor de la capetele sale. Apoi metodele grafice, analitice sau grafoanalitice pot fi uşor sistematizate pentru analiza şi sinteza cinematică a mecanismelor de diverse cuple.

Cuplele cinematice se pot împărţi în simple şi multiple sau compuse. Cupla simplă intervine ca legătură, mobilă, directă, permanentă, numai între două corpuri. Cupla compusă, multiplă de ordinul p reprezintă legăturile suprapuse în acelaşi punct geometric dintre $(1 + p)$ elemente,

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 5, P. 1053–1091, 1970

ceea ce o face echivalentă cu p cuple simple confundate. Ea provine prin reducerea unui lanț simplu deschis format cu $(p-1)$ elemente intermediare, ale căror dimensiuni se reduc teoretic la zero. Cupla compusă are un aspect aparent simplu, ca legătură între primul și ultimul corp.

Conform schematizării elementelor binare, considerînd la capetele lor numai cuple cu o axă, prin reducerea elementelor intermediare cuplele compuse vor avea p axe. Deci o cuplă compusă de ordinul doi are două axe concurente și este formată din trei corpuri, dintre care unul este redus. Cupla compusă de ordinul trei are trei axe concurente și este formată din patru corpuri, dintre care cele două intermediare sînt reduse. Cuplele compuse au clasa de constrîngere mai mică sau clasa de mobilitate mai mare decît cuplele simple care le compun.

Pe de altă parte, cuplele simple cu mai multe axe au de asemenea mobilități superioare. De altfel, o cuplă simplă de clasa $k = 6 - c$ provine din înlocuirea a c cuple elicoidale și eliminarea a $m = c - 1$ elemente, în care caz gradul de mobilitate se păstrează [1], [2]. Deci atît cuplele compuse, cît și cele simple de mobilități superioare au, în general, mai multe axe și provin din lanțuri simple deschise. Pe cînd la primele elementele componente intermediare există, dar au dimensiuni teoretic nule, la celelalte acestea sînt eliminate. Pentru uniformizare ar trebui să se păstreze în categoria cuplelor compuse numai acelea care au axele concurente rectangulare, așa cum se obișnuiește la cuplele simple de clase inferioare.

Cuple cu o singură axă. În această grupă intră cuplele cinematice care permit o mișcare relativă în jurul sau în lungul unei singure axe. Există cupla rotoidă de clasa a patra, cu două grade de mobilitate, și cuplele de translație și de rotație de clasa a cincea, cu un grad de mobilitate.

Vectorial [3], poziționarea unui punct C din corpul mobil față de corpul considerat fix (fig. 1) se face prin

$$\bar{\Delta} = r\bar{e} = r_1\bar{e}_1 + r_2\bar{e}_2; \quad \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = c_{12}, \quad \bar{e}_1^2 = 1, \quad \bar{e}_2^2 = 1, \quad \bar{e}^2 = 1. \tag{1}$$

a) La cupla de translație se mai cunoaște unghiul făcut de versorul $e_{|2}$ cu orice alt versor $\bar{e}_0 \neq \bar{e}_1$, dar considerat față de sistemul primului corp, deoarece este exclusă orice posibilitate de rotație. Se adaugă deci

$$\bar{e}_0 \cdot \bar{e}_2 = c_{02}. \tag{2}$$

Pentru rezolvarea poziției, pe lîngă determinarea mărimii r și a versorului $\bar{e}$ mai trebuie determinate distanța de alunecare $s = r_1$ și, respectiv, $\bar{e}_2$ direcția brațului elementului al doilea BC. Sînt cunoscute e_1 direcția primului vector și r_2 mărimea celui de-al doilea vector de poziționare, iar suplimentar direcția versorului $\bar{e}_0$.

Problema are $12-3\ (\bar{e}_1) - 1\ (r_2) = 8$ necunoscute și $7 + 1\ (c_{02}) - 1\ (\bar{e}_1^2) = 7$ ecuații.

În rezolvarea vectorială se determină în primă fază versorul $\bar{e}_2$, presupunîndu-l descompus după $\bar{e}_1$, $\bar{e}_0$ și $\bar{e}_1 \times \bar{e}_0$, adică

$$\bar{e}_2 = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_0 + c\bar{e}_1 \times \bar{e}_0. \tag{3}$$

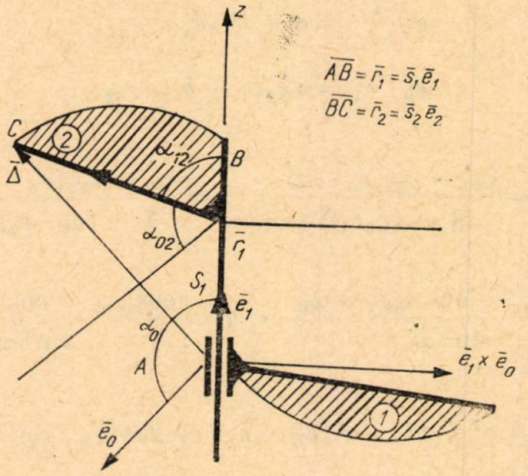

z
$\overline{AB} = \bar{r}_1 = \bar{s}_1 \bar{e}_1$
$\overline{BC} = \bar{r}_2 = \bar{s}_2 \bar{e}_2$
C
2
α_{12}
B
$\bar{\Delta}$
α_{02}
$\bar{r}_1$
S_1
$\bar{e}_1$
α_0
A
$\bar{e}_1 \times \bar{e}_0$
1
$\bar{e}_0$

Fig. 1

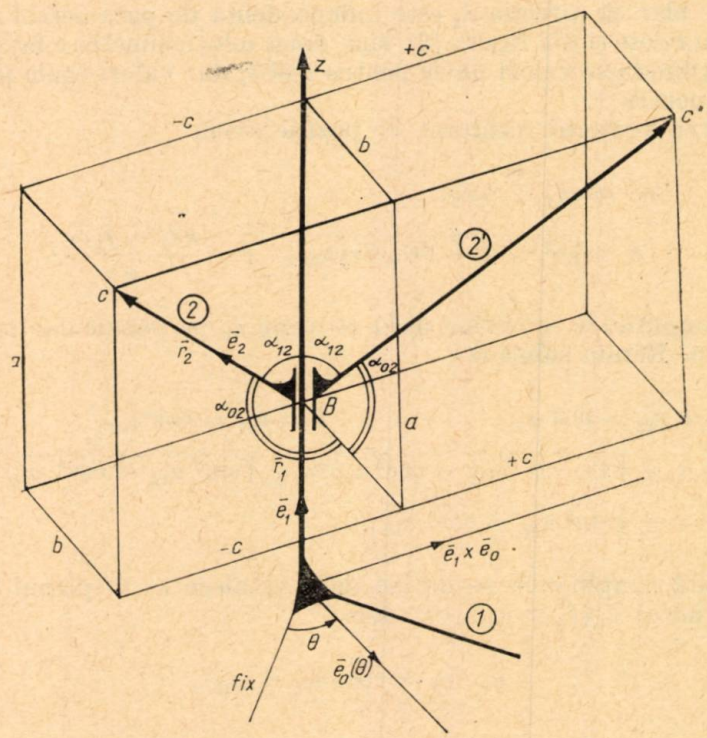

z
+c
-c
b
C'
2'
c
2
$\bar{r}_2$
$\bar{e}_2$
α_{12}
α_{12}
α_{02}
α_{02}
B
a
$\bar{r}_1$
+c
$\bar{e}_1$
b
-c
$\bar{e}_1 \times \bar{e}_0$
1
θ
fix
$\bar{e}_0(\theta)$

Fig. 2

Din

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 &= a + b\bar{e}_0\bar{e}_1 = c_{12}, \\ \bar{e}_0 \cdot \bar{e}_2 &= a\bar{e}_0\bar{e}_1 + b = c_{02}. \end{aligned} \tag{4}$$

se găsește

$$a = \frac{c_{12} - c_{02}(\bar{e}_0 \cdot \bar{e}_1)}{1 - (\bar{e}_0\bar{e}_1)^2}, \quad b = \frac{c_{02} - c_{12}(\bar{e}_0 \cdot \bar{e}_1)}{1 - (\bar{e}_0 \cdot \bar{e}_1)^2} \tag{5}$$

sau

$$a = \frac{\cos \alpha_{12} - \cos \alpha_{02} \cos \alpha_{01}}{\sin^2 \alpha_{01}}, \quad b = \frac{\cos \alpha_{02} - \cos \alpha_{12} \cos \alpha_{01}}{\sin^2 \alpha_{01}}. \tag{6}$$

Din

$$\bar{e}_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 (\bar{e}_0 \times \bar{e}_1)^2 + 2ab(\bar{e}_0 \cdot \bar{e}_1) = 1 \tag{7}$$

se află

$$c = \pm \frac{\sqrt{1 - a^2 - b^2 - 2ab \cos \alpha_{01}}}{\sin \alpha_{01}}. \tag{8}$$

Este clar că direcția $\bar{e}_2$ este independentă de parametrul mișcării s. După cum reiese și din figura (2), sînt două soluții simetrice față de planul $\bar{e}_0$, $\bar{e}_1$, obținîndu-se valori unice pentru a și b, dar valori egale și de semne contrare pentru c.

Pentru vectorul rezultant de poziție avem

$$\begin{aligned} r\bar{e} &= s\bar{e}_1 + r_2\bar{e}_2, \\ r &= \sqrt{s^2 + r_2^2 + 2sr_2 \cos \alpha_{01}}, \quad \bar{e} = \frac{s\bar{e}_1 + r_2\bar{e}_2}{r}. \end{aligned} \tag{9}$$

O simplificare se obține dacă se alege $\bar{e}_0$ perpendicular pe $\bar{e}_1$, adică $\bar{e}_0 \cdot \bar{e}_1 = 0$. Rămîn soluțiile

$$\begin{aligned} a &= c_{12} = \cos \alpha_{12} \qquad b = c_{02} = \cos \alpha_{02}, \\ c &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_{12} - \cos^2 \alpha_{02}} = \pm \sqrt{\sin^2 \alpha_{12} - \cos^2 \alpha_{02}} = \\ &= \pm \sqrt{\sin^2 \alpha_{02} - \cos^2 \alpha_{12}}. \end{aligned} \tag{10}$$

O altă simplificare se obține dacă se alege $\bar{e}_0$ în planul format de $\bar{e}_1$ și $\bar{e}_2$, adică $\bar{e}_0(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2) = 0$, deci

$$\bar{e}_0 \cdot \bar{e}_1 = \cos(\alpha_{02} + \alpha_{12}), \tag{11}$$

astfel că

$$a = \frac{\sin \alpha_{02}}{\sin(\alpha_{02} + \alpha_{12})}, \quad b = \frac{\sin \alpha_{12}}{\sin(\alpha_{02} + \alpha_{12})}. \tag{12}$$

Dacă luăm ambele simplificări deodată, avem

$$\bar{e}_2 = \cos \alpha_{12} \bar{e}_1 + \sin \alpha_{12} \bar{e}_0. \tag{13}$$

În rezolvarea algebrică în coordonate carteziene rectangulare, explicitînd ecuațiile vectoriale în raport cu un triedru oarecare avem

$$\begin{aligned} r_1 x_1 + r_2 x_2 &= rx, & x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ r_1 y_1 + r_2 y_2 &= ry, & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= 1, \\ r_1 z_1 + r_2 z_2 &+ rz, & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= 1, \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 &= c_{12}, \\ x_0 x_2 + y_0 y_2 + z_p z_2 &= c_{02}, \end{aligned} \tag{14}$$

în care x_i, y_i, z_i sînt componentele (cosinusurile directoare) ale versorilor $\bar{e}_i$. Presupunînd x_2, y_2 de formele

$$x_2 = \alpha_x + \beta_x z_2 \qquad y_2 = \alpha_y + \beta_y z_2 \tag{15}$$

și introducîndu-i în ultimele două ecuații anterioare

$$\begin{aligned} x_0(\alpha_x + \beta_x z_2) + y_0(\alpha_y + \beta_y z_2) + z_0 z_2 &= c_{02}, \\ x_1(\alpha_x + \beta_x z_2) + y_1(\alpha_y + \beta_y z_2) + z_1 z_2 &= c_{12}, \end{aligned} \tag{16}$$

se găsesc, prin identificările termenilor liberi și ai coeficienților variabilei z_2, patru ecuații

$$\begin{aligned} x_0 \alpha_x + y_0 \alpha_y + c_{02}, & \qquad \alpha_0 \beta_x + y_0 \beta_y + z_0 = 0, \\ x_1 \alpha_x + y_1 \alpha_y + c_{12}, & \qquad x_1 \beta_x + y_1 \beta_y + z_1 = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

care determină pe

$$\alpha_x = \frac{c_{02} y_1 - c_{12} y_0}{x_0 y_1 - x_1 y_0}, \qquad \alpha_y = \frac{z_1 y_0 - z_0 y_1}{x_0 y_1 - x_1 y_0}, \tag{18}$$

$$\beta_x = \frac{c_{12} x_0 - c_{02} x_1}{x_0 y_1 - x_1 y_0}, \qquad \beta_y = \frac{z_0 x_1 - z_1 x_0}{x_0 y_1 - x_1 y_0}. \tag{19}$$

Apoi din ecuația $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1$, respectiv

$$(\alpha_x + \beta_x z_2)^2 + (\alpha_y + \beta_y z_2)^2 + z_2^2 = 1, \tag{20}$$

se scoate valoarea lui z_2, care marchează din nou două soluții posibile. Se găsește apoi

$$x = \frac{s x_1 + r_2 x_2}{r}; \qquad y = \frac{s y_1 + r_2 y_2}{r}; \qquad z = \frac{s z_1 + r_2 z_2}{r}. \tag{21}$$

O altă rezolvare algebrică urmăreşte direct calea vectorială, adică se alege

$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 + bx_0 + c(y_1z_0 - z_1y_0), \\ y_2 &= ay_1 + by_0 + c(z_1x_0 - x_1z_0), \\ z_2 &= az_1 + bz_0 + c(x_1y_0 - y_1x_0), \end{aligned} \tag{22}$$

ceea ce conduce la aceleaşi valori pentru a, b, c, scoase din ecuaţiile $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = c_{12}$, $x_0x_2 + y_0y_2 + z_0z_2 = c_{02}$ şi $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1$.

Simplificări în calculele algebrice se pot face prin alegerea convenabilă a sistemului de referinţă cartezian legat de corpul considerat fix şi cu axa OZ îndreptată după axa cuplei. Astfel $\bar{e}_1 = \bar{k}$ şi $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$.

Dacă $\bar{e}_0 \perp \bar{e}_1$, se poate lua $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ şi soluţiile sînt

$$x_2 = c_{02}; \quad z_2 = c_{12}; \quad y_2 = \pm\sqrt{1 - c_{02}^2 - c_{12}^2}. \tag{23}$$

Utilizînd coordonatele polare sferice

$$x_2 = \sin\varphi_2 \cos\theta_2; \quad y_2 = \sin\varphi_2 \sin\theta_2; \quad z_2 = \cos\varphi_2, \tag{24}$$

avem soluţiile

$$\varphi_2 = \arccos c_{12} = \alpha_{12}, \quad \theta_2 = \operatorname{are}\cos\left(\frac{\cos\alpha_{02}}{\cos\alpha_{12}}\right). \tag{25}$$

În coordonate polare cilindrice

$$x_2 = \rho_2\cos\theta_2, \quad y_2 = \rho_2\sin\theta_2, \quad z_2 = z_2, \tag{26}$$

căpătăm

$$\begin{aligned} z_2 = c_{12} &= \cos\alpha_{12}, \quad \rho_2 = \sqrt{1 - c_{12}^2} = \sin\alpha_{12}, \\ \cos\theta_2 &= \frac{c_{02}}{\sqrt{1 - c_{12}^2}} = \frac{\cos\alpha_{02}}{\sin\alpha_{12}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Dacă, în plus, $\bar{e}_0$ este în acelaşi plan cu $\bar{e}_1$ şi $\bar{e}_2$, se găseşte

$$x_2 = \sin\alpha_{12}, \quad z_2 = \cos\alpha_{12}, \quad y_2 = 0. \tag{28}$$

b) La articulaţia cilindrică se schimbă parametrul arbitrar de poziţionare în unghiul de rotaţie θ, valoarea segmentului r_1 fiind acum cunoscută. Fără ecuaţia suplimentară $c_{02}(2)$, versorul $\bar{e}_2$ va rămîne nedeterminat în funcţie de parametrul variabil θ şi va avea direcţia variabilă constrînsă numai de faptul că unghiul $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ trebuie să fie constant. Spre a urmări rezolvarea în acelaşi fel ca în cazul precedent, se consideră versorul $\bar{e}_0(\theta)$ mobil în funcţie de unghiul de rotaţie θ. Cu ajutorul ecuaţiei c_{02} (2) vom avea

$$\bar{e}_2 = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_0(\theta) + c\bar{e}_1 \times \bar{e}_0(\theta), \tag{29}$$

în care a,b,c au valori constante, independente de θ găsite anterior (6), (8). Vectorul de poziţie $\bar{r}(c)$ are modulul constant

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 c_{12}}, \tag{30}$$

dar direcţia variabilă $\bar{e} = \dfrac{\bar{r}}{r}$,

unde

$$\bar{r} = (r_1 + r_2 a)\,\bar{e}_1 + r_2 b\bar{e}_0(\theta) + r_2 c\bar{e}_1 \times \bar{e}_0(\theta). \tag{31}$$

Alegerea lui $\bar{e}_0(\theta)$ perpendicular pe $\bar{e}_1$ şi în acelaşi plan cu $\bar{e}_2$ face ca $\bar{e}_2$ să se descompună numai după direcţiile $\bar{e}_1$ şi $\bar{e}_0$ prin

$$\bar{e}_2 = \cos \alpha_{12}\,\bar{e}_1 + \sin \alpha_{12}\,\bar{e}_0(\theta). \tag{32}$$

Celelalte particularizări şi rezolvările algebrice urmează îndeaproape rezultatele precedente.

c) Cupla elicoidală se rezolvă în acelaşi fel ca şi cupla de rotaţie sau de translaţie, dar se ţine seama că deplasarea în lungul axei $r_1 = s = k\theta$ este proporţională cu unghiul rotaţiei în jurul axei. Se găseşte

$$\bar{r} = (k\theta + r_2 a)\,\bar{e}_1 + r_2 b\bar{e}_0(\theta) + r_2 c\bar{e}_1 \times \bar{e}_0(\theta). \tag{33}$$

La particularizarea semnalată mai sus avem

$$\bar{r} = (k\theta + r_2 \cos \alpha_{12})\,\bar{e}_1 + r_2 \sin \alpha_{12}\,\bar{e}_0(\theta), \tag{34}$$

iar dacă se alege mai departe axa de rotaţie ca axă OZ se obţine

$$\bar{e}_2 = \sin \alpha_{12} \cos \theta\bar{i} + \sin \alpha_{12} \sin \theta\bar{j} + \cos \alpha_{12}\,\bar{k} \tag{35}$$

şi

$$\bar{r} = r_2 \sin \alpha_{12} \cos \theta\bar{i} + r_2 \sin \alpha_{12} \sin \theta\bar{j} + (k\theta + r_2 \cos \alpha_{12})\,\bar{k}. \tag{36}$$

d) Cupla rotoidă cilindrică se deosebeşte de cupla elicoidală numai prin faptul că translaţia s şi rotaţia θ sînt independente, ceea ce conduce la vectorul de poziţie sub forma

$$\bar{r} = (s + r_2 a)\,\bar{e}_1 + r_2 b\bar{e}_0(\theta) + r_2 c\bar{e}_1 \times \bar{e}_0(\theta) \tag{37}$$

şi cu particularizarea

$$\bar{r} = (s + r_2 \cos \alpha_{12})\,\bar{e}_1 + r_2 \sin \alpha_{12}\,\bar{e}_0(\theta) \tag{38}$$

sau

$$\bar{r} = r_2 \sin \alpha_{12} \cos \theta\bar{i} + r_2 \sin \alpha_{12} \sin \theta\bar{j} + (s + r_2 \cos \alpha_{12})\,\bar{k}$$

în raport cu triedrul trirectangular.

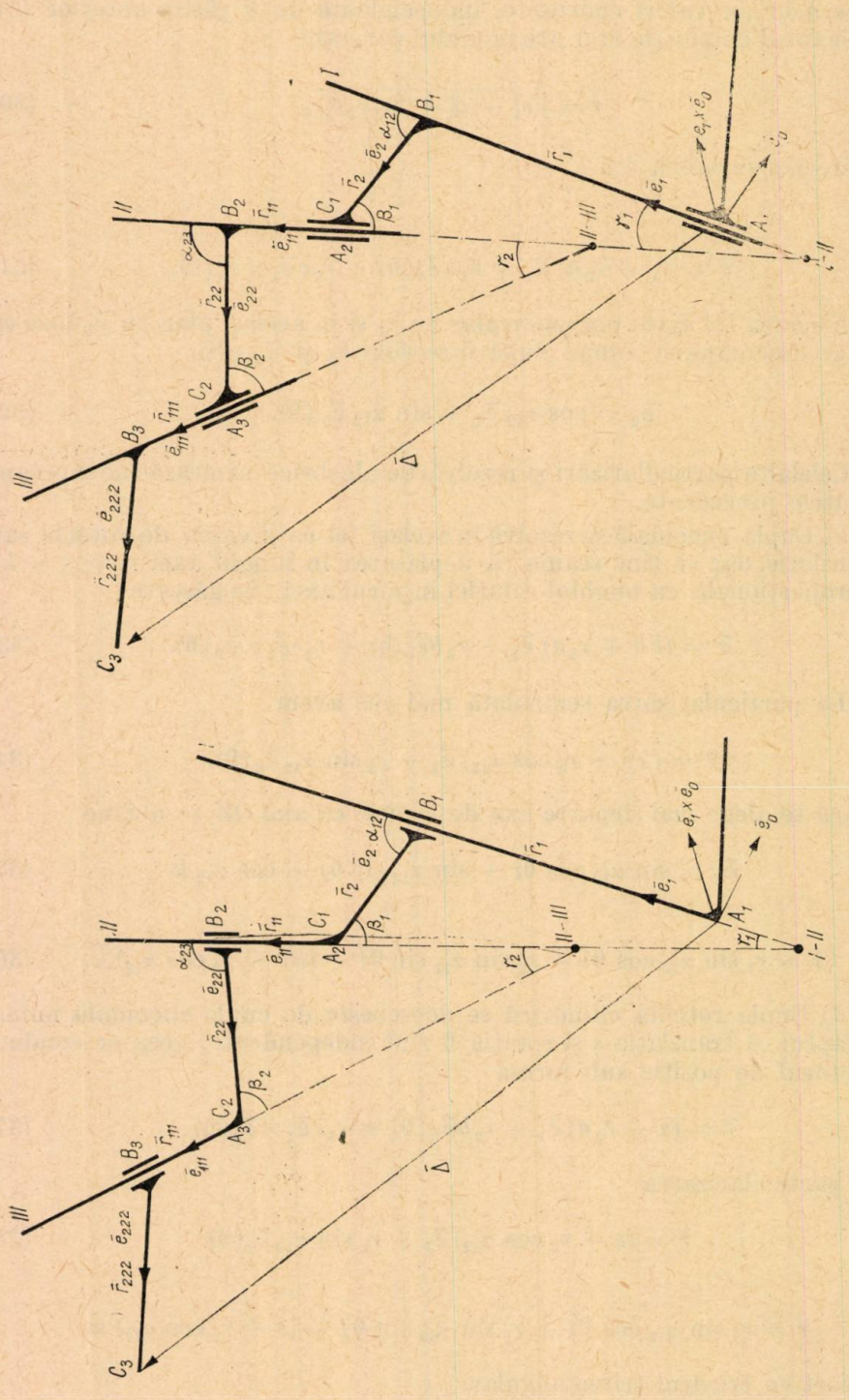

a
b
I
II
III
A_1
A_2
A_3
B_1
B_2
B_3
C_1
C_2
C_3
$\bar{r}_1$
$\bar{r}_2$
$\bar{r}_{11}$
$\bar{r}_{22}$
$\bar{r}_{111}$
$\bar{r}_{222}$
$\bar{e}_1$
$\bar{e}_2$
$\bar{e}_{11}$
$\bar{e}_{22}$
$\bar{e}_{111}$
$\bar{e}_{222}$
$\bar{e}_0$
$\bar{e}_1 \times \bar{e}_0$
$\bar{\Delta}$
α_{12}
α_{23}
β_1
β_2
r_1
r_2
I - II
II - III

Fig. 3

Cuple cu mai multe axe. Pentru tratarea unitară a cuplelor simple şi compuse se întrebuinţează numai cuple cu axe trirectangulare concurente. Pe fiecare axă se consideră o cuplă rotoidă, iar conturul vectorial care determină vectorul de poziţie final se descompune (fig. 3 *a*, *b*) în două sau trei contururi vectoriale simple arătate anterior, ale căror elemente cu indicii 1,11, 111 sau 2, 22, 222. Pentru fiecare dintre ele se pot scrie relaţiile (1), (2) în care versorul $\bar{e}_1$ este cunoscut, $\bar{e}_0(\theta)$ este un versor ajutător pentru marcarea rotaţiei şi deci cunoscut în funcţie de un parametru unghiular θ (sau fix), r_1 este parametrul translaţiei s (sau fix) şi r_2 este cunoscut.

Problema are $12-3\ (\bar{e}_1) = 9$ necunoscute şi $7 + 1\ (\bar{e}_2) - 1\ (\bar{e}_1) = 7$ ecuaţii, rămînînd arbitrari cei doi parametri s şi θ care marchează cupla rotoidă şi care prin particularizare conduc la cuplele de translaţie, rotaţie sau elicoidală. Rezultatele fiecărui contur, respectiv de fiecărei axe, sînt redate anterior.

De la un contur la altul, versorii se determină prin relaţiile

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \cos \beta_1, \quad \bar{e}_{11} \cdot \bar{e}_1 = \cos \gamma_1, \quad \bar{e}_{11}^2 = 1. \tag{39}$$

Cum axele cuplei compuse sînt concurente două cîte două (sau toate trei), versorii $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ şi $\bar{e}_{11}$ sînt şi coplanari, adică

$$\bar{e}_{11}(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2) = 0.$$

Rezolvarea ecuaţiilor (39) se simplifică, deoarece $\bar{e}_{11}$ se descompune numai după versorii $\bar{e}_1$ şi $\bar{e}_2$, adică

$$\bar{e}_{11} = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2, \tag{40}$$

cu

$$\bar{e}_{11}^2 = a^2 + b^2 + 2ab\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 1. \tag{41}$$

Soluţiile determinate din teorema sinusurilor sînt

$$\bar{e}_{11} = \frac{\sin(\alpha_{12} - \gamma_1)}{\sin \alpha_{12}} \bar{e}_1 + \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha_{12}} \bar{e}_2. \tag{42}$$

Fără a implica o particularizare, dacă se consideră $\gamma_1 = \alpha_{12}$, schema cuplei compuse se simplifică (fig. 4), iar $\bar{e}_{11} \equiv \bar{e}_2$. Notînd pentru această simplificare versorii axelor prin $\bar{e}_i$, se va determina poziţia punctului C prin vectorul

$$\bar{\Delta} = r_1\bar{e}_1 + r_2\bar{e}_2 + r_3\bar{e}_3 + r\bar{e}, \tag{43}$$

care capătă expresii simple dacă axele sînt particulare: $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = 90°$.

Clasificarea cuplelor după axe, clase şi natura mişcărilor este redată astfel:

Clase \ Axe	I Axa	II Axe	III Axe
$f = 1$ $k = 5$	Rotaţie R Translaţie T Elicoidală $H(R, T)$	–	–
$f = 2$	Rototranslaţie $RT = C$ Cilindrică	$R + T = R + T$	–
$k = 4$		$2R = R + R$ $2T = T + T$	
$f = 3$	–	$2R + T = RT + R$ $2T + R = RT + T$	$2R + T = R + R + T$ $2T + R = R + T + T$
$k = 3$		–	$3R = R + R + R$ $3T = T + T + T$
$f = 4$	–	$2R + 2T = RT + RT$	$2R + 2T = RT + R + T$
$k = 2$		+	$R + 3T = RT + T + T$ $3R + T = RT + R + R$
$f = 5$ $k = 1$	–	–	$3R + 2T = RT + RT + R$ $2R + 3T = RT + RT + T$

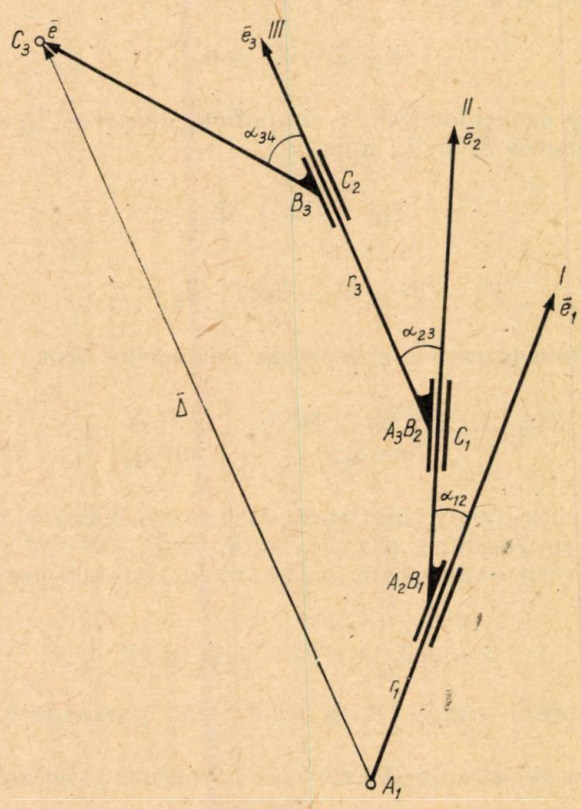


Fig. 4

Cuplele uzuale (tabelele 1, 2, 3, 4) care se încadrează în aceste grupări sînt :

Tabela 1

Clasa	I Axe	
$f = 1$ $k = 5$	R — cupla de rotaţie (revoluţie) sau articulaţia cilindrică	(fig. 1.1 *a,b,c*)
	pivot cilindric circular	(fig. 1.2)
	pivot conic circular	(fig. 1.3)
	T — cupla de translaţie sau prismatică (cilindru necircular)	(fig. 1.4 *a, b*)
	H — cupla elicoidală (cupla şurub-piuliţă pas constant)	(fig 1.5)
$f = 2$ $k = 4$	$RT = C$ — cupla de rototranslaţie axială sau cupla rotoidă sau cupla cilindrică (cupla şurub piuliţă pas variabil)	(fig. 1.6 *a, b*)
$f = 3$ $k = 3$	—	
$f = 4$ $k = 2$	—	
$f = 5$ $k = 1$	—	

Tabela 2

Clasa	II Axe	
$f = 1$ $k = 5$	—	
$f = 2$ $k = 4$	$R + T$ — cupla rototranslaţie normală (compusă)	(fig. 2.1. *a,e*)
	— cupla rosto-alunecătoare plană (cilindru-cilindru contact pe generatoare)	(fig. 2.2 *a,b*)
	(cupla camă-tachet, cupla roţilor dinţate plane)	(fig. 2.3)
	— cupla plană cu deget	(fig. 2.4 *a, b*)
	$R + R$ — cupla de rotaţie dublă (compusă sau articulaţia universală sau crucea cardanică)	(fig. 2.1 *b, e*) 2.5
	— cupla rosto-alunecătoare sferică (con-con contact pe generatoare)	(fig. 2.6)
	— cupla sferică cu deget	(fig. 2.7
	— cupla torică (tor-tor)	(fig. 2.8)
	$T + T$ — cupla de translaţie dublă (compusă) (cupla prismatică dublă	(fig. 2.1 *c, e*)
$f = 3$ $k = 3$	$RT + R$ — cupla compusă dublă rotaţie-translaţie	(fig. 2.1 *d, e*)
	$RT + T$ — cupla compusă dublă translaţie-rotaţie	(fig. 2.1 *d, e*)
$f = 4$ $k = 2$	$RT + RT$ — cupla compusă dublă rototranslaţie	(fig. 2.1 *d,e*)
$f = 5$ $k = 1$	—	

Tabela 3

Clasa	III Axe		
$f = 1$ $k = 5$	–		
$f = 2$ $k = 4$	–		
$f = 3$	$R + R + T$	– cupla compusă R,R,T-	(fig. 3.1 *a,b* 3.2)
$k = 3$		– cupla cilindru sferă cu deget	(fig. 3,3)
	$R + T + T$	– cupla compusă R,T,T,	(fig. 31 *a,b* 3.2)
		– cupla plană	(fig. 3.4)
	$R + R + R$	– cupla compusă RRR	(fig. 3,1 *a,b*)
		– cupla sferică (articulația sferică)	(fig. 3.5)
	$T + T + T$	– cupla compusă TTT	(fig. 3.2)
$f = 4$	$RT + T + T$	– cupla compusă RT,T,T.	(fig. 3.2)
$k = 2$	$RT + R + R$	– cupla compusă RT,R,R.	(fig. 3.1 *a, b*)
		– cupla cilindru-sferă	(fig. 3.6)
		– cupla prismă-sferă	(fig. 3.7)
	$RT + R + T$	– cupla compusă RT,R,T.	(fig. 31. *a,b* 3.2)
		– cupla plan-cilindru	(fig. 3.8)
$f = 5$	$RT + R\,T + R$	– cupla compusă RT,RT,R.	(fig. 3.1 *a, b*)
		– cupla suprafață-suprafață (plan-sferă, plan-con-vîrf etc.)	(fig. 3.9–3.10*a b*)
$k = 1$	$RT + RT + T$	– cupla compusă RT,RT,T	(fig. 3.2)

Clasificarea mecanismelor monocontururi de pe axe, clase și familii este redată în tabela 4 [2], [4], [5]. Acesta cuprinde *mecanismele fundamentale* formate numai cu cuple elicoidale $f = 1$ și $k = 5$, precum și derivatele lor, *mecanismele generale*, formate cu cuple de diverse clase k. Mecanismele generale se obțin din cele fundamentale prin înlocuirea a c cuple elicoidale succesive cu cuplă de clasa $k = 6 - c$, eliminîndu-se $m = c - 1$ elemente, dar păstrîndu-se gradul de mobilitate. În acest fel, clasa conturului se reduce, ajungîndu-se pînă la valoarea minimă trei. Pe de altă parte, cuplele cu mobilități superioare $f > 1$ cuprinse în aceste mecanisme sînt grupate în raport cu numărul axelor de-a lungul cărora mișcările relative ale elementelor sînt în general mișcări simple de rotație, translație, sau elicoidale. Mișcarea de rototranslație axială corespunzătoare cuplei cilindrice este însemnată separat $C = RT$.

Axele cuplelor simple sînt rectangulare concurente și se adoptă aceeași situații pentru cuplele compuse. Dar în tabela 4 clasele contururilor sînt reale pentru cuplele simple și aparente pentru cuplele compuse, dat fiind faptul, așa cum s-a subliniat anterior, că la acestea elementele reduse au dimensiuni neglijabile, dar rămîn mai departe în mecanism. Aceasta permite uneori ca pentru contururile aparente clasa să se reducă sub trei. Astfel, la mecanismul patrulater articulat sferic,

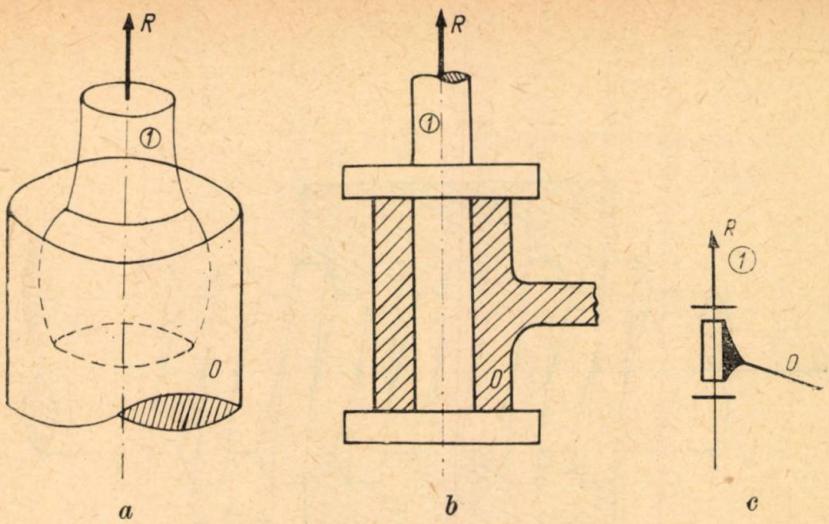


Fig. 1.1

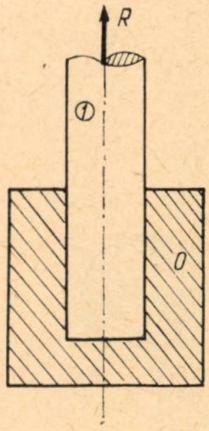


Fig. 1.2

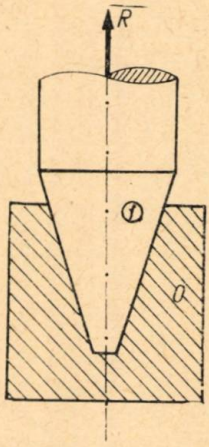


Fig. 1.3

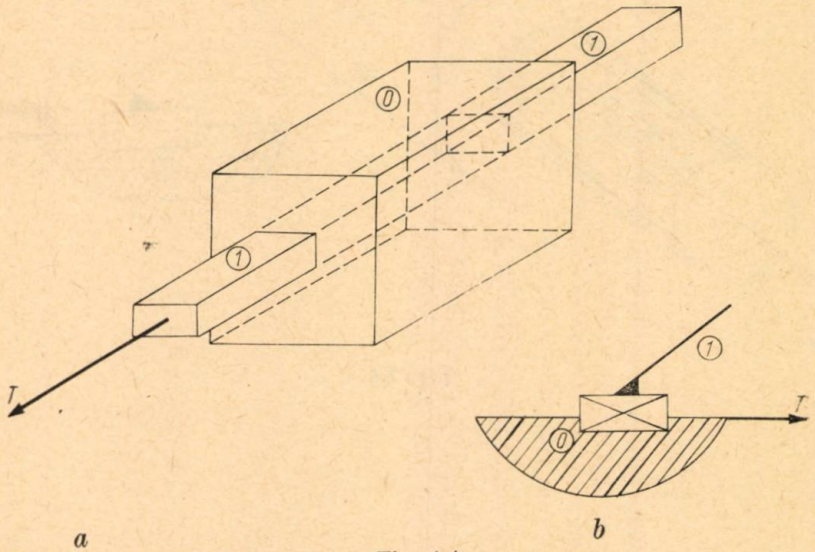


Fig. 1.4

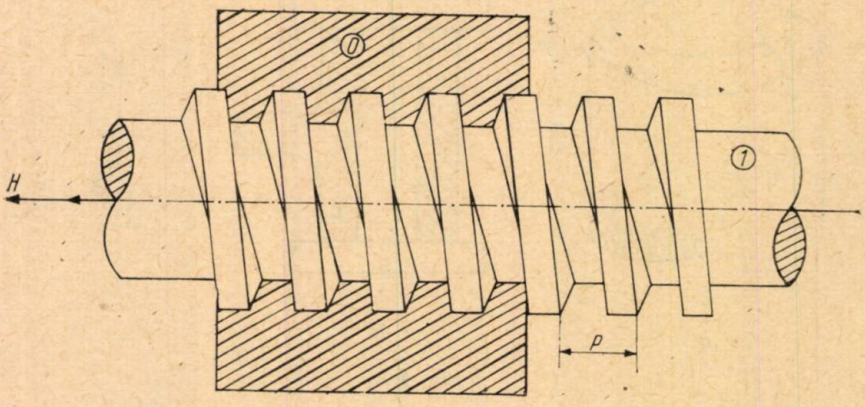


Fig. 1.5

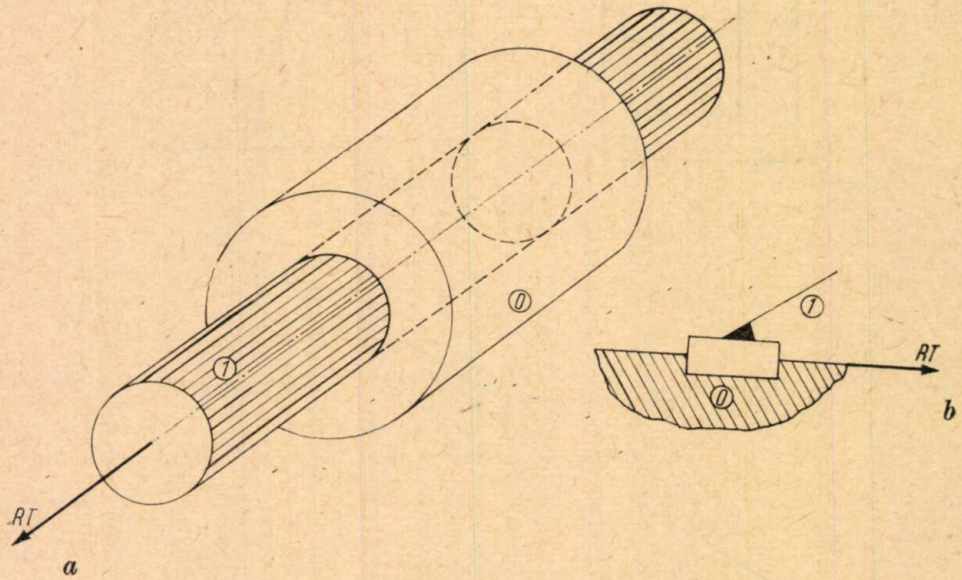


Fig. 1.6

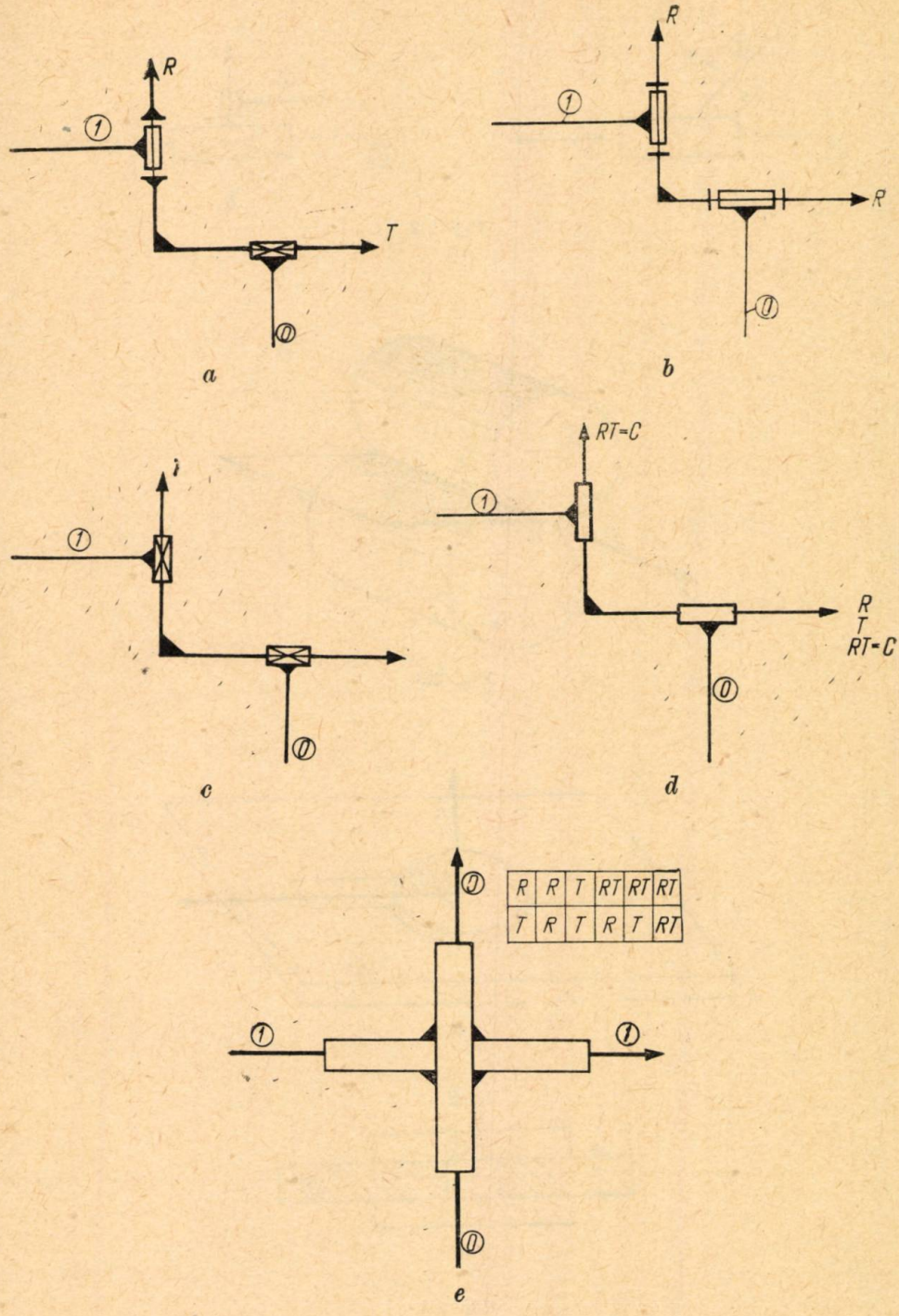
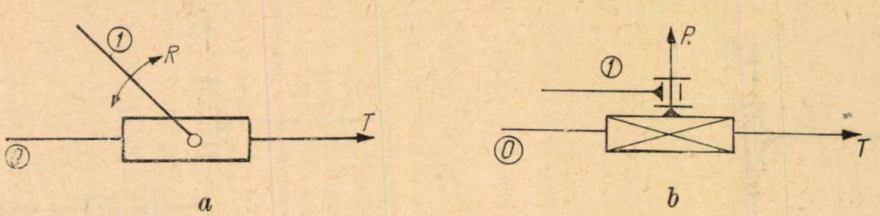


Fig. 2.1



a *b*

Fig. 2.2

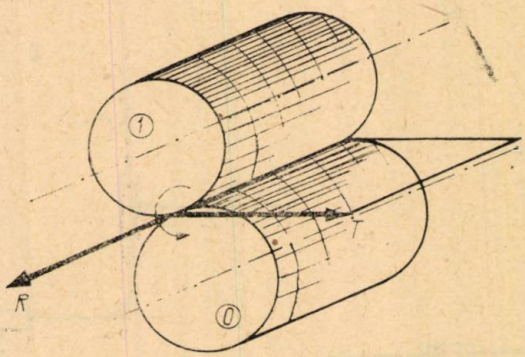
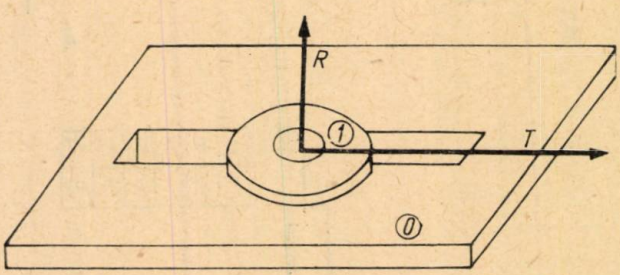
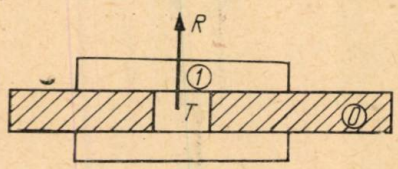


Fig. 2.3



a



b

Fig. 2.4

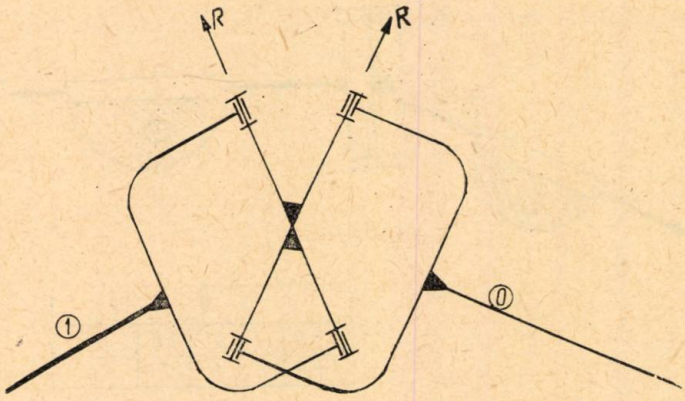


Fig. 2.5

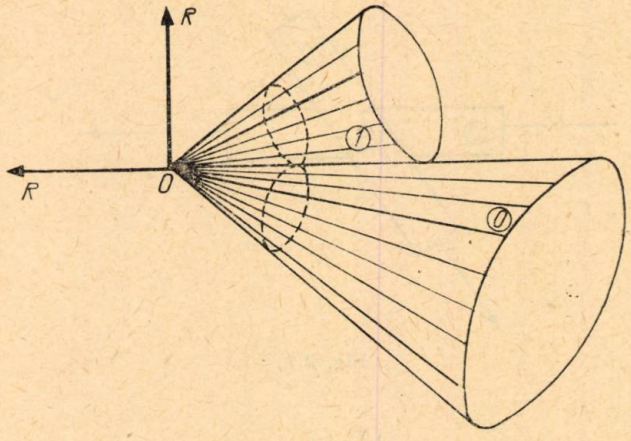


Fig. 2.6

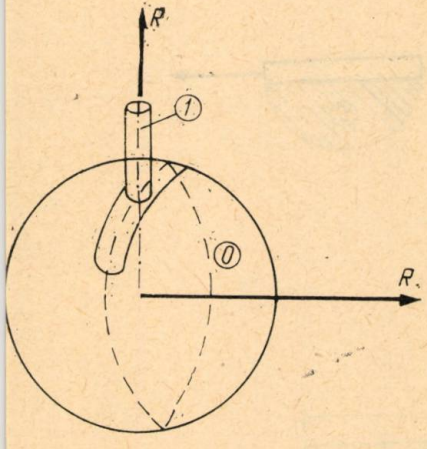


Fig. 2.7

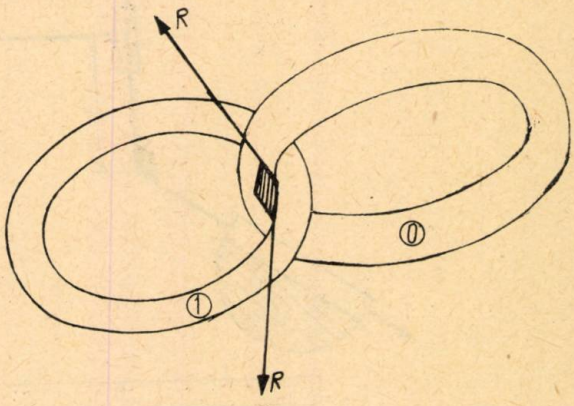
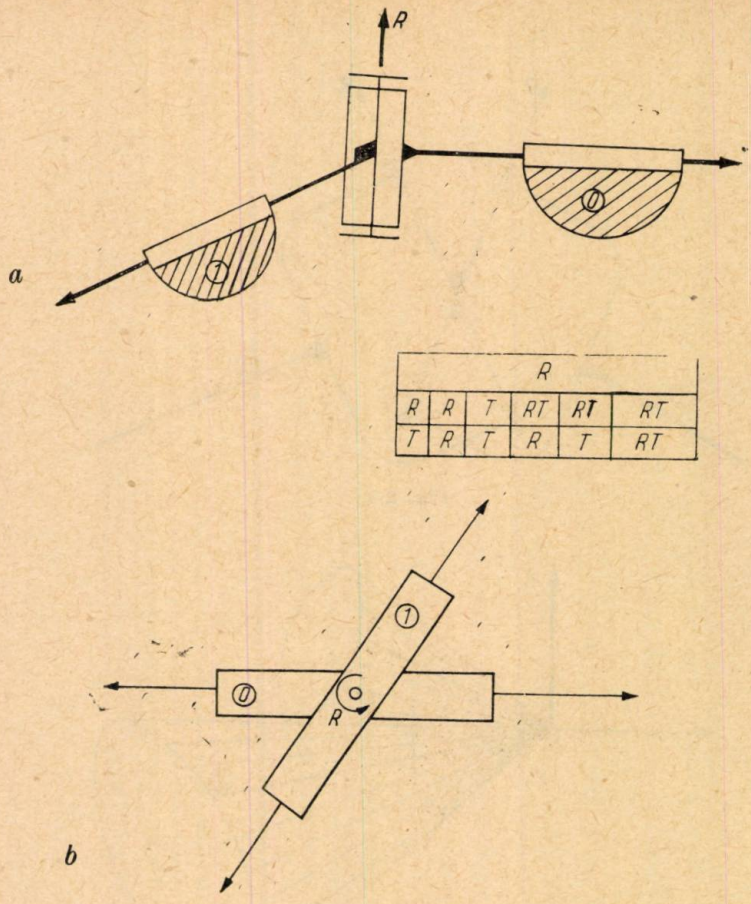
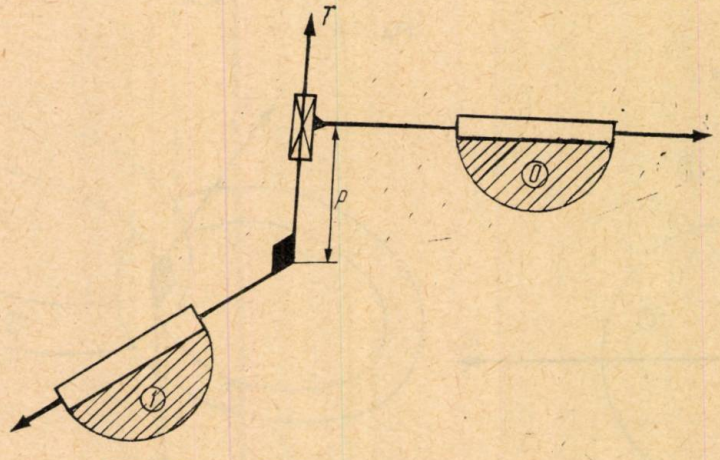


Fig. 2.8



R					
R	R	T	RT	RT	RT
T	R	T	R	T	RT

Fig. 3.1



T					
R	R	T	RT	RT	RT
T	R	T	R	T	RT

Fig. 3.2

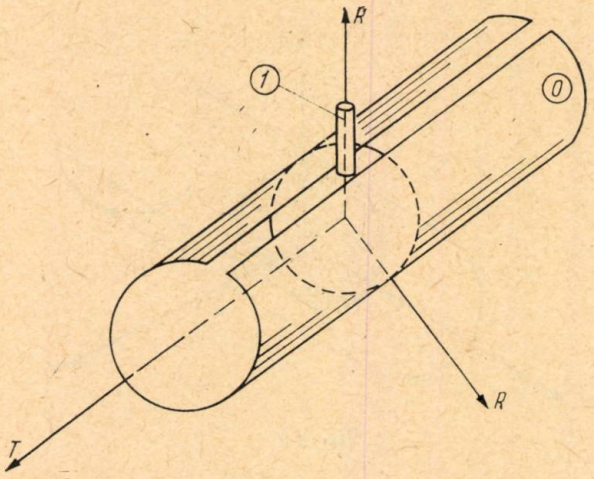


Fig. 3.3

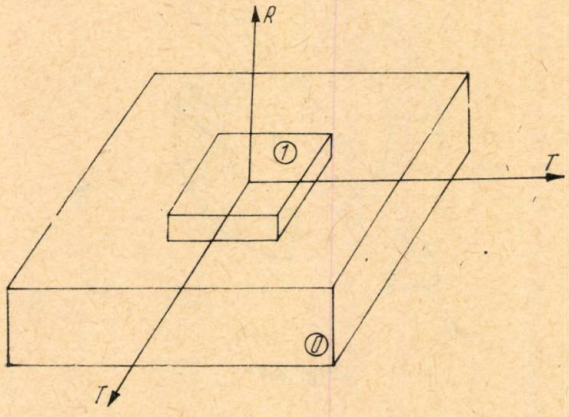


Fig. 3.4

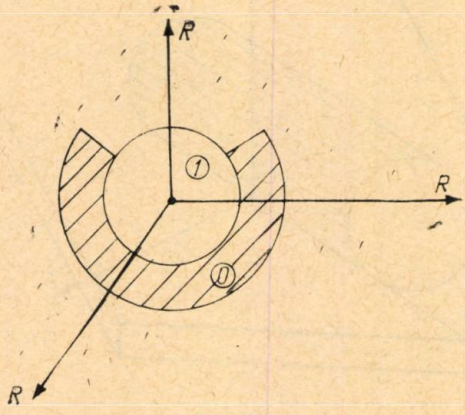


Fig. 3.5

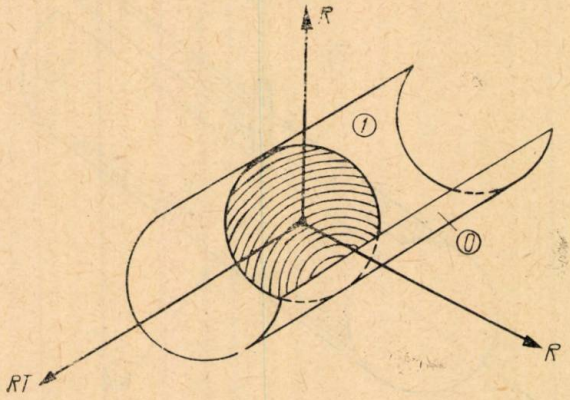


Fig. 3.6

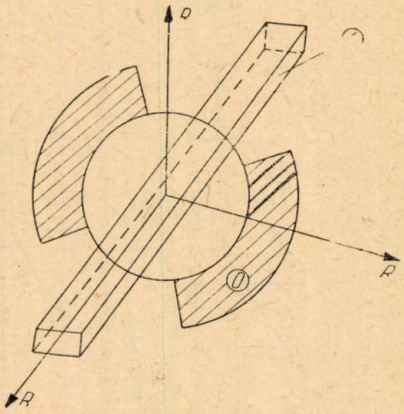


Fig. 3.7

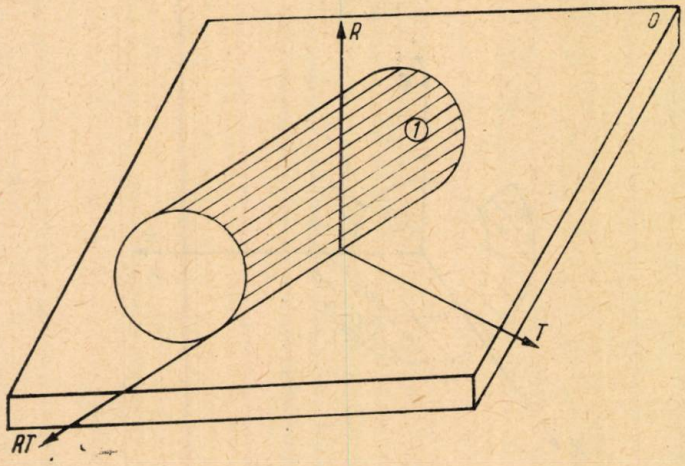


Fig. 3.8

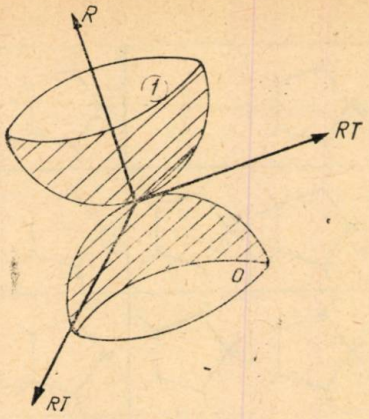
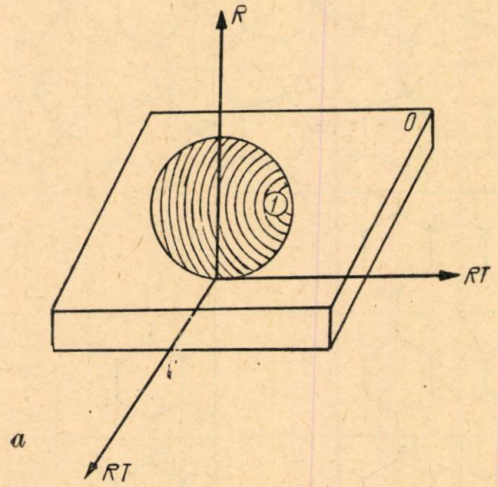
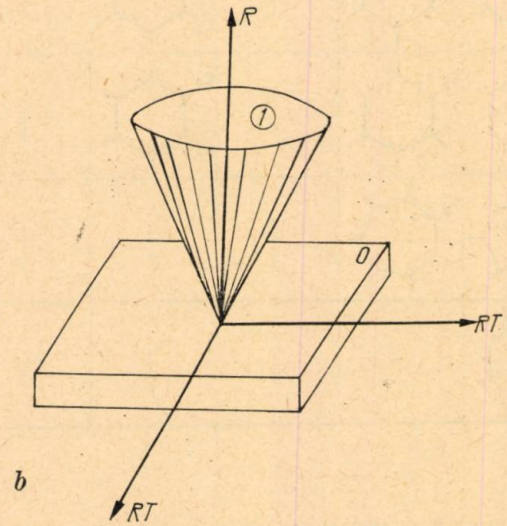


Fig. 3.9



a



b

Fig. 3.10

Tabela 4.1
GRUPA 02- $M_0=2$

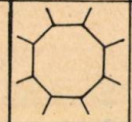
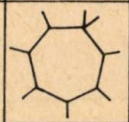
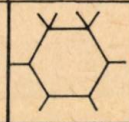
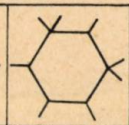
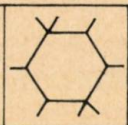
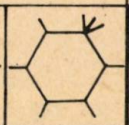
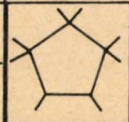
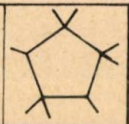
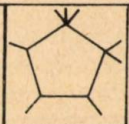
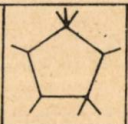
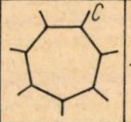
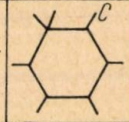
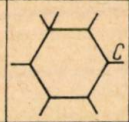
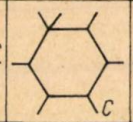
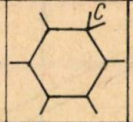
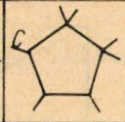
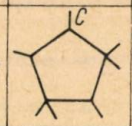
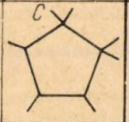
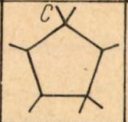
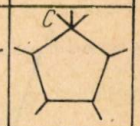
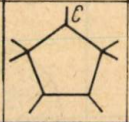
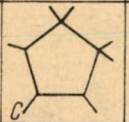
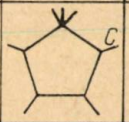
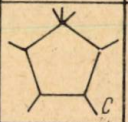
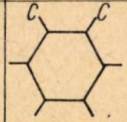
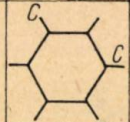
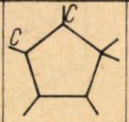
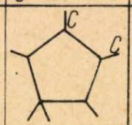
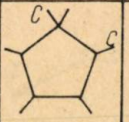
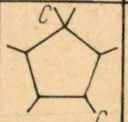
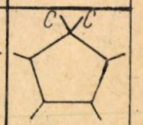
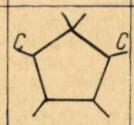
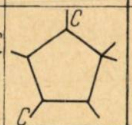
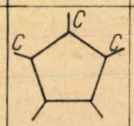
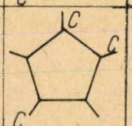
Nr. de axe \ Clasa cor turului	8	7	6				5				
8											—
7	—										
	—	—	—	—	—	—					—
6	—	—				—					
	—	—	—	—	—	—			—	—	—
5	—	—	—	—	—	—			—	—	—

Tabela 4.2
GRUPA $O2-M_0=2$

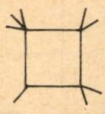
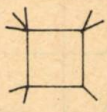
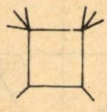
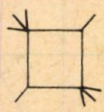
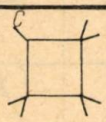
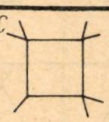
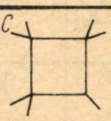
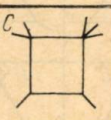
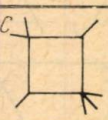
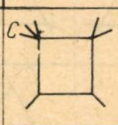
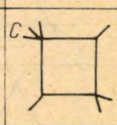
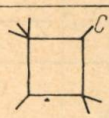
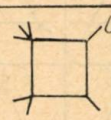
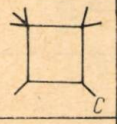
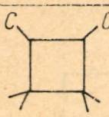
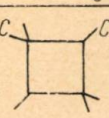
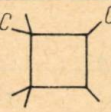
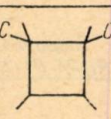
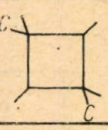
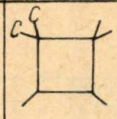
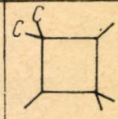
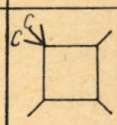
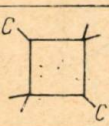
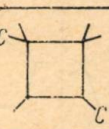
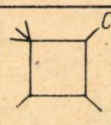
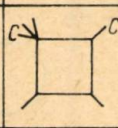
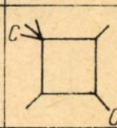
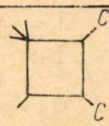
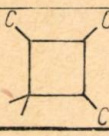
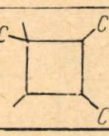
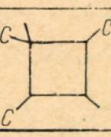
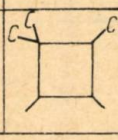
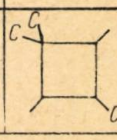
Clasa conturului / axe	4							
8						—	—	—
7								
	—			—	—	—	—	—
	—		—	—	—	—	—	—
6								
				—	—			—
	—		—	—	—	—	—	—
5				—	—			—

Tabela 4.3
GRUPA 02 - $M_0 = 2$

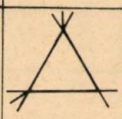
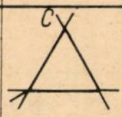
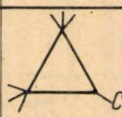
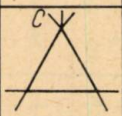
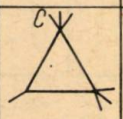
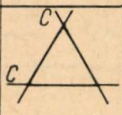
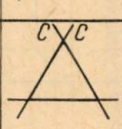
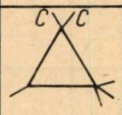
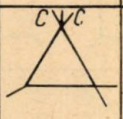
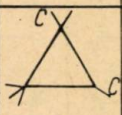
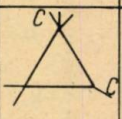
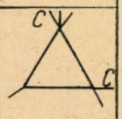
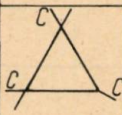
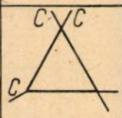
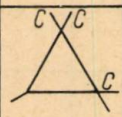
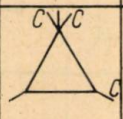
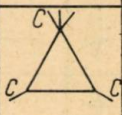
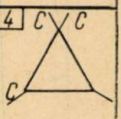
Clasa contururilor / Nr de axe	3						
8		—	—	—	—	—	—
7					—	—	—
6							
5						—	

Tabela 4.4
GRUPA 01 - $M_0 = 1$

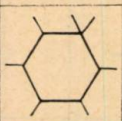
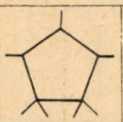
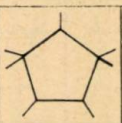
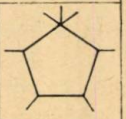
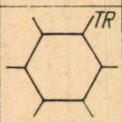
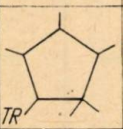
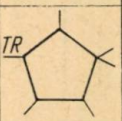
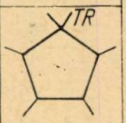
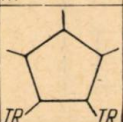
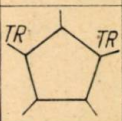
Clasa contururilor / Nr de axe	7	6	5		
7					
6	—				
5	—	—			—
4	—	—	—	—	—

Tabela 4.5
GRUPA 01-M_0=1

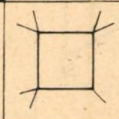
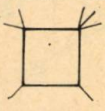
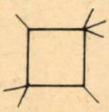
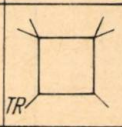
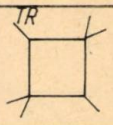
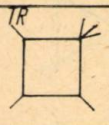
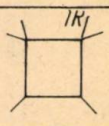
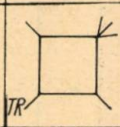
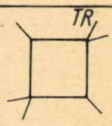
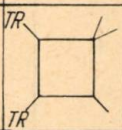
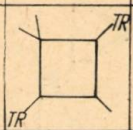
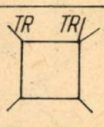
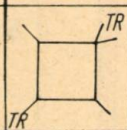
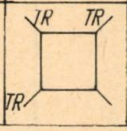
Nr de axe \ Clasa contururi	4					
7		—		—		—
6						
5				—		—
4		—	—	—	—	—

Tabela 4.6
GRUPA 01-M_0=1

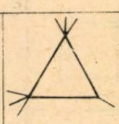
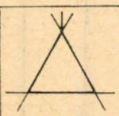
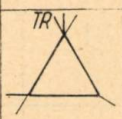
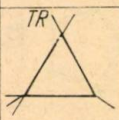
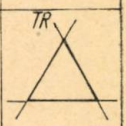
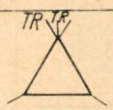
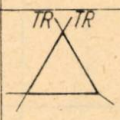
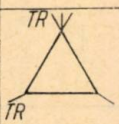
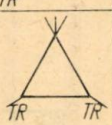
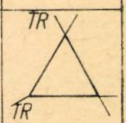
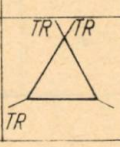
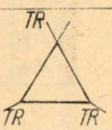
Nr de axe \ Clasa contururi	3					
7	—	—	—			—
6	—		—			
5						
4	—		—	—		—

Tabela 4.7
GRUPA 11 - $M_1 = 1$

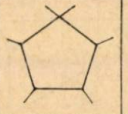
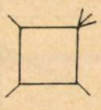
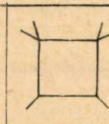
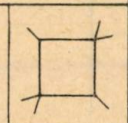
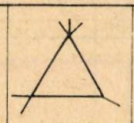
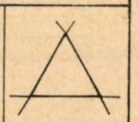
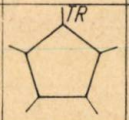
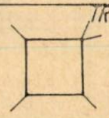
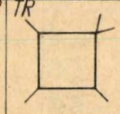
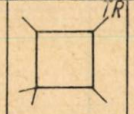
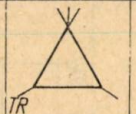
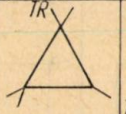
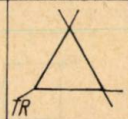
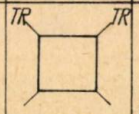
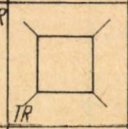
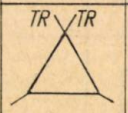
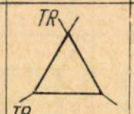
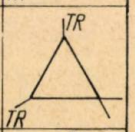
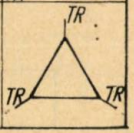
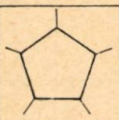
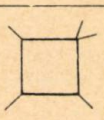
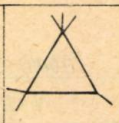
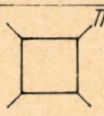
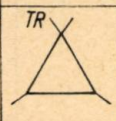
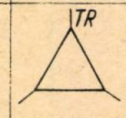
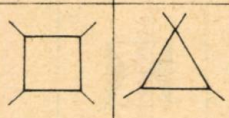
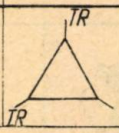
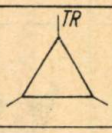
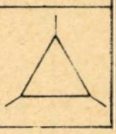
Clasa contururi / Nr de axe	6	5	4			3			
6						—		—	
5	—								
4	—	—	—					—	
3	—	—	—	—	—	—	—	—	

Tabela 4.8

Nr de axe \ Clasa conturului	GRUPA 21 - $M_2=1$				GRUPA 31 - $M_3=1$		GRUPA 41 $M_4=1$
	5	4	3		4	3	3
5					—	—	—
4	—						—
3	—	—	—		—		

toate axele cuplelor sînt concurente şi conturul său aparent este redus complet, lanţul patrulaterului apărînd ca o cuplă compusă cu mai multe axe. Reţinînd faptul că lanţurile de cuple simple cu poziţii particulare impuse axelor se pot interpreta drept cuple compuse (sau invers), se poate face un studiu analitic-vectorial unitar pe baza lanţurilor cinematice cu cuple de o singură axă.

Clasificarea mecanismelor bicontururi este redată pentru mecanismele fundamentale în tabela 5. Dezvoltarea fiecăruia în mecanisme generale, după numărul cuplelor şi felul mişcărilor şi urmărind procedeul amintit anterior conduce la numeroase scheme structurale. De aceea în aceeaşi tabelă putem considera că sînt cuprinse şi lanţurile generale cu clasele contururilor reduse, dar cu cuple de mobilităţi superioare. Cuplele cinematice se pot încadra în toate combinaţiile posibile de clase. Spre exemplu, dacă lanţul cinematic general cu $c = 7$ şi $n = 6$ este provenit din lanţul fundamental $c = 11$ şi $n = 10$ [4] şi deci are mobilitatea aceeaşi, cele $f = 11$ mobilităţi rezultante ale cuplelor trebuie împărţite între şapte cuple, ceea ce conduce la soluţiile

$$\Sigma f = 11 = 5+1+1+1+1+1+1 = 4+2+1+1+1+1+1 =$$
$$= 3+3+1+1+1+1+1 = 3+2+2+1+1+1+1 =$$
$$= 2+2+2+2+1+1+1. \qquad (44)$$

Într-un alt exemplu, dacă lanţul general cu $c = 9$ şi $n = 8$ trebuie să aibă mobilitatea $M_1 = 2$ în familia $\varphi = 1$, tabela 6 arată că el provine din lanţul fundamental cu $c = 12$ şi $n = 11$. Deci cele $\Sigma f = 12$ mobilităţi trebuie repartizate între $c = 9$ cuple, adică avem soluţiile

$$\Sigma f = 12 = 3+2+1+1+1+1+1+1+1 =$$
$$= 2+2+2+1+1+1+1+1+1. \qquad (45)$$

Tabela 5.1

n/n_2	N = 2				
5.3	4 (4,4)				
6.4	5 (6,4)	6 (4,4)			
7.5	6 (6,4)	6 (5,5)	1 (4,5)		
8.6	6 (6,6)	7 (5,6)	7 (7,4)	8 (5,5)	8 (6,4)
9.7	7 (6,7)	9 (6,5)	9 (4,7)		
	8 (6,6)	8 (7,5)	8 (8,4)		

Tabela 5.2

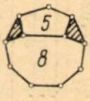
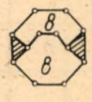
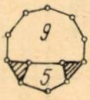
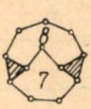
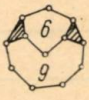
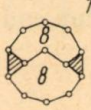
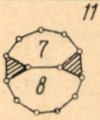
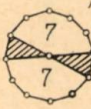
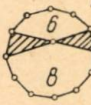
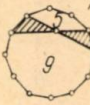
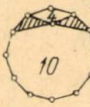
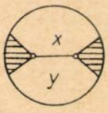
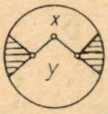
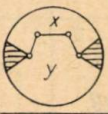
n/n_2	N = 2				
10.8	8	8	9	9 	9
	10	10	10		
11.9	8 	10	10	10 	10
	9 	9 	11	11	11
	9	10 	10	10	
12.10	11 	11	11	11	
	12 	12 	12 	12 	

Tabela 5.3.

Nr. 2									
$n-k$		n	5	6	7	8	9	10	11	12
$c-k$		c	6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{0}{1}$		k		6	7	8	9	10	11	12
		x		4	4	4 5	4 5	4 5 6	4 5 6	4 5 6 7
		y		4	5	6 5	7 6	8 7 6	9 8 7	10 9 8 7
$\frac{1}{2}$		k	4	5	6	7	8	9	10	11
		x	4	4	4 5	4 5	4 5 6	4 5 6	4 5 6 7	4 5 6 7
		y	4	5	6 5	7 6	8 7 6	9 8 7	10 9 8 7	11 10 9 8
$\frac{2}{3}$		k				6	7	8	9	10
		x				6	6	6 7	6 7	6 7 8
		y				6	7	8 7	9 8	10 9 8
$\frac{3}{4}$		k							8	9
		x							8	8
		y							8	9

Totodată trebuie reţinute numai soluţiile cu $f < 6 - \varphi$, respectiv trebuie eliminate lanţurile generale care cuprind cuple de clase egale sau inferioare familiei respective.

Tabela 6.1

$M\,(N = 1)$

n	3	4	5	6	7	8
C	3	4	5	6	7	8
M_0	−3	−2	−1	0	1	2
M_1	−2	−1	0	1	2	3
M_2	−1	0	+1	2	3	4
M_3	0	+1	+2	3	4	5
M_4	+1	+2	+3	4	5	6

Structura numerică şi mobilitatea lanţurilor este redată în tabela 6 [2]. Lanţurile monocontururi au numai elemente binare, pe cînd lanţurile bicontururi au două elemente ternare şi deci $(n-2)$ elemente binare. Acestea fac parte din lanţul simplu deschis care leagă cele două contururi. De aceea în tabela 5.3 lanţurile sînt grupate de pe felul lanţului

Tabela 6.2

(M ($N = 2$)

n	5	6	7	8	9	10	11	12
c	6	7	8	9	10	11	12	13
M_0	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
$M_{0,5}$	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2
M_1	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
$M_{1,5}$	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
M_2	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$M_{2,5}$	−1	0	1	2	3	4	5	6
M_3	0	1	2	3	4	5	6	7
$M_{3,5}$	1	2	3	4	5	6	7	8
M_4	2	3	4	5	6	7	8	9

interior, respectiv de pe numărul elementelor sale binare. Atît în tabela 6. 1 a lanțurilor monocontururi, cît și în tabela 6. 2 a lanțurilor bicontururi sînt redate mobilitățile grupelor în funcție de familia în care se încadrează. La lanțurile bicontururi s-au menționat și familiile fracționare 0,5—1,5—2,5—3,5, în ipoteza că cele două contururi sînt de familii diferite, adică

$$M_\varphi = M_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = M_0 + 2\varphi \tag{46}$$

și deci

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Rămîne să se determine felul cuplelor H (R, T, H) pentru ca mecanismele schematizate în tabele să existe.

Rezolvarea generală a pozițiilor în lanțurile tridimensionale utilizează contururile vectoriale, care schematizează diferitele contururi închise și mobile ale corpurilor. Vectorii contururilor au extremitățile pe axele cuplelor, fiind așezați unul după altul și, indiferent de modificarea pozițiilor lor, în permanență extremitatea finală a unuia coincide cu extremitatea inițială a următorului. Se formează astfel un poligon vectorial spațial (fig. 7).

Urmărind schematizarea elementelor sub forma perpendicularei pe axele cuplelor (fig. 8), oricare dintre vectorii laturii ai poligonului se va descompune în două componente : una în direcția unei axe și alta normală pe ea.

Din egalitatea vectorială

$$\overline{A_i^* A_i'} + \overline{A_i' B_{i+1}} = \overline{A_i^* B_{i+1}^*} + \overline{B_{i+1}^* B_{i+1}}$$

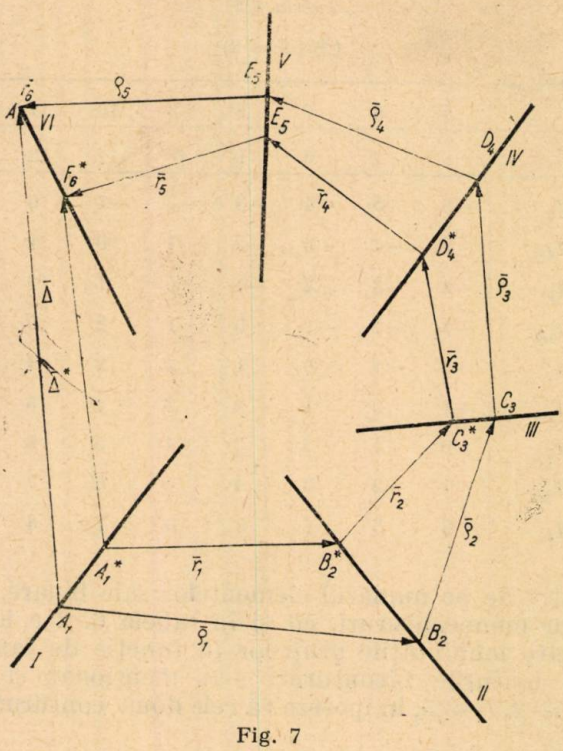

A
VI
V
IV
III
II
I
Δ
Δ*

Fig. 7

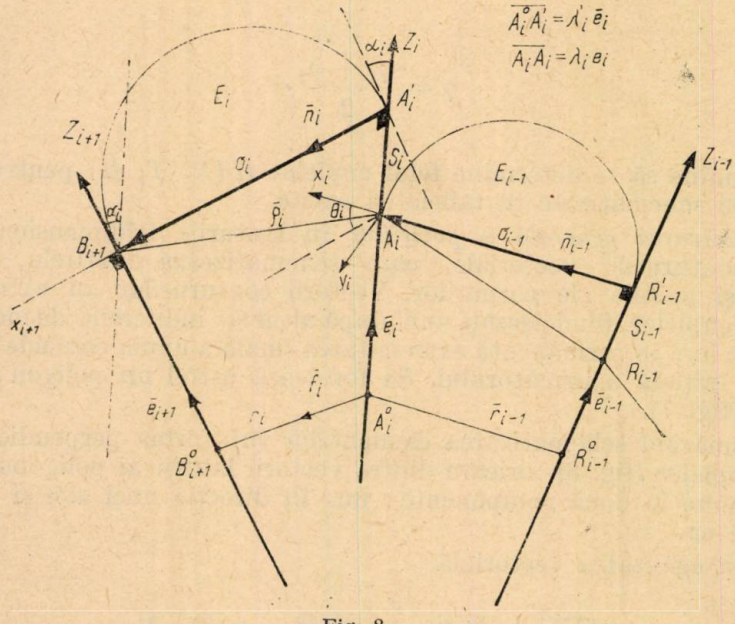

$\overline{A_i^0 A_i'} = \lambda_i' \bar{e}_i$
$\overline{A_i A_i} = \lambda_i e_i$
α_i
Z_i
E_i
A_i'
$\bar{n}_i$
Z_{i+1}
σ_i
S_i
x_i
E_{i-1}
Z_{i-1}
φ_i
θ_i
B_{i+1}
A_i
σ_{i-1}
$\bar{n}_{i-1}$
R_{i-1}'
y_i
x_{i+1}
$\bar{e}_i$
S_{i-1}
R_{i-1}
$\bar{f}_i$
$\bar{e}_{i+1}$
r_i
A_i^0
$\bar{r}_{i-1}$
$\bar{e}_{i-1}$
B_{i+1}^0
R_{i-1}^0

Fig. 8

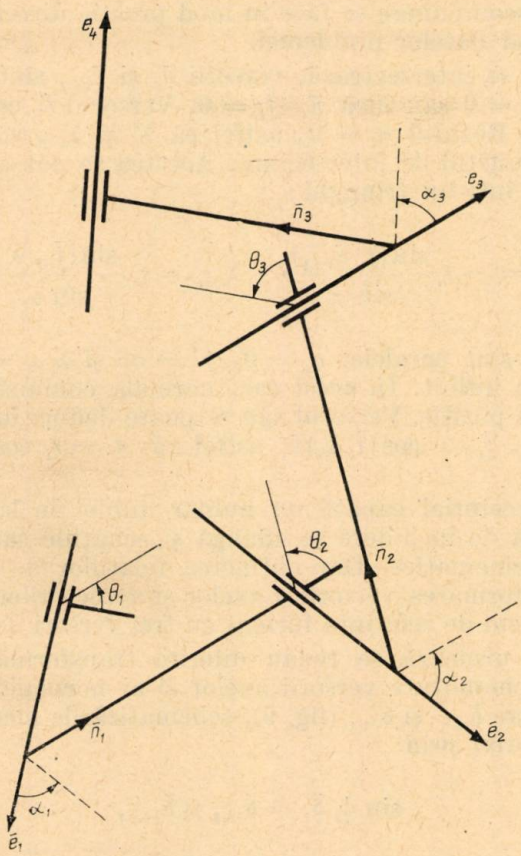


Fig. 9

sau

$$\lambda_i' \bar{e}_i + \sigma_i \bar{n}_i = r_i \bar{f}_i + \lambda_{i+1} \bar{e}_{i+1}, \tag{47}$$

prin înmulţire scalară cu $\bar{n}_i, \bar{e}_i$ şi $\bar{e}_{i+1}$ avem

$$\begin{aligned} \lambda_i' &= r_i (\bar{f}_i \cdot \bar{e}_i) + \lambda_{i+1} \cos \alpha_i, \\ \lambda_i' \cos \alpha_i &= r_i (\bar{f}_i \cdot \bar{e}_{i+1}) + \lambda_{i+1}, \\ \sigma_i &= r_i (\bar{f}_i \cdot \bar{n}_i), \end{aligned} \tag{48}$$

astfel că

$$\begin{aligned} \sigma_i &= r_i \cos (\bar{f}_i \cdot \bar{n}_i), \qquad s_i = \lambda_i' - \lambda_i, \\ \lambda_i' &= r_i \frac{\cos (\bar{f}_i \bar{e}_i) - \cos (\bar{e}_i \bar{e}_{i+1}) \cos \alpha_i}{\sin^2 \alpha_i} = \lambda_i + s_i, \\ \lambda_{i+1} &= r_i \frac{\cos (\bar{f}_i \bar{e}_i) \cos \alpha_i - \cos (\bar{f}_i \bar{e}_{i+1})}{\sin^2 \alpha_i}. \end{aligned} \tag{49}$$

Această descompunere se face în mod practic direct grafic sau analitic, corespunzînd datelor problemei.

Dacă axele se intersectează, versorii $\bar{e}_i$ și $\bar{e}_{i+1}$ sînt în același plan, deci $\bar{f}_i(\bar{e}_i \times \bar{e}_{i+1}) = 0$ sau încă $\bar{n}_i \cdot \bar{f}_i = 0$. Versorul $\bar{n}_i$ este perpendicular pe $\bar{f}_i$, $\bar{e}_i$ și $\bar{e}_{i+1}$. Rezultă $\sigma_i = 0$, astfel că λ_i' și λ_{i+1} vor reprezenta distanțele pînă la punctul de intersectare. Acestea se pot scoate și din teorema sinusurilor într-un triunghi:

$$\lambda_i' = -r_i \frac{\sin(\bar{f}_i\, \bar{e}_{i+1})}{\sin \alpha_i}, \quad \lambda_{i+1} = r_i \frac{\sin(\bar{f}_i, \bar{e}_i)}{\sin \alpha_i}. \tag{50}$$

Dacă axele sînt paralele, $\alpha_i = 0$, $\lambda_i' = \infty$ și $\lambda_{i+1} = \infty$, punctul de intersecție este la infinit. În acest caz, normala comună între $\bar{e}_i$ și $\bar{e}_{i+1}$ este nedefinită ca poziție. Versorul său se poate deduce din $\sin(\bar{f}_i\, \bar{e}_i)\, \bar{n}_i = \bar{e}_i \times (\bar{f}_i \times \bar{e}_i) = \bar{f}_i - \cos(\bar{f}_i\, \bar{e}_i)\bar{e}_i$ astfel că $s_i = r_i \cos(\bar{f}_i\, \bar{e}_i)$ și $\sigma_i = r_i \sin(\bar{f}_i\, \bar{e}_i)$.

Poligonul vectorial capătă un număr dublu de laturi (fig. 7). La ecuația vectorială de închidere se adaugă și ecuațiile care caracterizează natura cuplelor cinematice. Dar obținerea relațiilor de calcul analitic se bazează pe transformarea versorilor axelor și a vectorilor conturului poligonal într-un sistem de referință format cu trei versori de bază.

În cele ce urmează se redau diferite transformări între versori. Notînd pentru generalitate versorii axelor și ai normalelor prin $\bar{\delta}_i$ și cu ψ_i unghiurile dintre $\bar{\delta}_{i-1}$ și $\bar{\delta}_{i+1}$ (fig. 9), schematizările menționate anterior se exprimă vectorial prin

$$\begin{aligned} \sin \psi_i\, \bar{\delta}_i &= \bar{\delta}_{i-1} \times \bar{\delta}_{i+1}, \\ \cos \psi_i \quad &= \bar{\delta}_{i-1} \cdot \bar{\delta}_{i+1}, \end{aligned} \tag{51}$$

astfel că

$$\sin \psi_i = \bar{\delta}_i(\bar{\delta}_{i-1} \times \bar{\delta}_{i+1})$$

și

$$\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_{i+1} = 0, \quad \bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_{i-1} = 0. \tag{52}$$

Se deduce

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{i+1} &= \cos \psi_i\, \bar{\delta}_{i-1} + \sin \psi_i\, \bar{\delta}_i \times \bar{\delta}_{i-1}, \\ \bar{\delta}_{i-1} &= \cos \psi_i\, \bar{\delta}_{i+1} + \sin \psi_i\, \bar{\delta}_{i+1} \times \bar{\delta}_i. \end{aligned} \tag{53}$$

Luînd

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{i+2} &= \cos \psi_{i+1}\, \bar{\delta}_i + \sin \psi_{i+1} \bar{\delta}_{i+1} \times \bar{\delta}_i, \\ \bar{\delta}_{i-2} &= \cos \psi_{i-1}\, \bar{\delta}_i + \sin \psi_{i-1}\, \bar{\delta}_i \times \bar{\delta}_{i-1}, \end{aligned} \tag{54}$$

se obține

$$\bar{\delta}_{i-1}\,\bar{\delta}_{i+2} = \sin\psi_i \sin\psi_{i+1},$$

$$\bar{\delta}_{i-2}\,\bar{\delta}_{i+1} = \sin\psi_{i-1} \sin\psi_i,$$

$$\bar{\delta}_{i-2}\cdot\bar{\delta}_{i+2} = \cos\psi_{i-1}\cos\psi_{i+1} - \sin\psi_{i-1}\sin\psi_{i+1}\cos\psi_i. \tag{55}$$

Împreună cu $\cos\psi_{i+1} = \bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_{i+2}$, se deduce

$$\bar{\delta}_{i+2} = a_{i+2}\,\bar{\delta}_{i-1} \times \bar{\delta}_i + b_{i+2}\,\bar{\delta}_{i-1} + c_{i+2}\,\bar{\delta}_i, \tag{56}$$

cu

$$\begin{aligned} a_{i+2} &= \cos\psi_i \sin\psi_{i+1}, \\ b_{i+2} &= \sin\psi_i \sin\psi_{i+1}, \\ c_{i+2} &= \cos\psi_{i+1} \end{aligned} \tag{57}$$

și simetric pentru

$$\bar{\delta}_{i-2} = a_{i-2}\,\bar{\delta}_{i+1} \times \bar{\delta}_i + b_{i-2}\,\bar{\delta}_{i+1} + c_{i-2}\,\bar{\delta}_i, \tag{58}$$

cu

$$\begin{aligned} a_{i-2} &= -\sin\psi_{i-1}\cos\psi_i, \\ b_{i-2} &= \sin\psi_{i-1}\sin\psi_i, \\ c_{i-2} &= \cos\psi_{i-1}. \end{aligned} \tag{59}$$

De asemenea avem

$$\bar{\delta}_{i+2} = A_{i+2}\,\bar{\delta}_{i-2} \times \bar{\delta}_i + B_{i+2}\,\bar{\delta}_{i-2} + c_{i+2}\,\bar{\delta}_i, \tag{60}$$

cu

$$\begin{aligned} A_{i+2} &= \frac{\sin\psi_i \sin\psi_{i+1}}{\sin\psi_{i-1}}, \\ B_{i+2} &= -\frac{\cos\psi_i \sin\psi_{i+1}}{\sin\psi_{i-1}}, \\ C_{i+2} &= \cos\psi_{i+1} + \frac{\cos\psi_{i-1}\cos\psi_i \sin\psi_{i+1}}{\sin\psi_{i-1}} \end{aligned} \tag{61}$$

și la fel

$$\bar{\delta}_{i-2} = A_{i-2}\,\bar{\delta}_{i+2} \times \bar{\delta}_i + B_{i-2}\,\bar{\delta}_{i+2} + c_{i-2}\,\bar{\delta}_i, \tag{62}$$

cu

$$A_{i-2} = -\frac{\sin\psi_{i-1}\sin\psi_i}{\sin\psi_{i+1}},$$

$$B_{i-2} = -\frac{\sin\psi_{i-1}\cos\psi_i}{\sin\psi_{i+1}}, \tag{63}$$

$$C_{i-2} = \cos\psi_{i-1} + \frac{\cos\psi_{i+1}\sin\psi_{i-1}\cos\psi_i}{\sin\psi_{i+1}}.$$

Apoi, din

$$\begin{aligned}
&\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_{i+3} = \sin\psi_{i+1}\sin\psi_{i+2},\\
&\bar{\delta}_{i-1}\cdot\bar{\delta}_{i+3} = \cos\psi_i\cos\psi_{i+2} - \sin\psi_i\sin\psi_{i+2}\cos\psi_{i+1},\\
&\bar{\delta}_{i-2}\cdot\bar{\delta}_{i+3} = \cos\psi_{i-1}\sin\psi_{i+1}\sin\psi_{i+2} + \sin\psi_{i-1}\sin\psi_i\cos\psi_{i+2} +\\
&\qquad + \sin\psi_{i-1}\cos\psi_i\ \sin\psi_{i+2}\cos\psi_{i+1},
\end{aligned} \tag{64}$$

avem

$$\bar{\delta}_{i+3} = a_{i+3}\,\bar{\delta}_{i-1}\times\bar{\delta}_i + b_{i+3}\,\bar{\delta}_{i-1} + c_{i+3}\,\bar{\delta}_i \tag{65}$$

sau

$$\bar{\delta}_{i+3} = A_{i+3}\,\bar{\delta}_{i-2}\times\bar{\delta}_i + B_{i+3}\,\bar{\delta}_{i-2} + C_{i+3}\,\bar{\delta}_i, \tag{66}$$

cu

$$\begin{aligned}
a_{i+3} &= -(\sin\psi_i\cos\psi_{i+2} + \cos\psi_i\sin\psi_{i+2}\cos\psi_{i+1}),\\
b_{i+3} &= \cos\psi_i\cos\psi_{i+2} - \sin\psi_i\sin\psi_{i+2}\cos\psi_{i+1},\\
c_{i+3} &= \sin\psi_{i+1}\sin\psi_{i+2};
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
A_{i+3} &= \frac{\cos\psi_i\cos\psi_{i+2} - \sin\psi_i\sin\psi_{i+2}\cos\psi_{i+1}}{\sin\psi_{i-1}},\\
B_{i+3} &= \frac{\sin\psi_i\cos\psi_{i+2} + \cos\psi_i\sin\psi_{i+2}\cos\psi_{i+1}}{\sin\psi_{i-1}},\\
C_{i+3} &= \sin\psi_{i+1}\sin\psi_{i+2} -\\
&\quad - \frac{\cos\psi_{i+1}\sin\psi_i\cos\psi_{i+2} - \cos\psi_{i-1}\cos\psi_i\cos\psi_{i+1}\sin\psi_{i+2}}{\sin\psi_{i-1}}.
\end{aligned} \tag{68}$$

O altă descompunere a versorilor axelor în funcție de versorii axelor anterioare este

$$\bar{\delta}_{i+2} = a_i \bar{\delta}_{i-1} + b_i \bar{\delta}_{i+1} + c_i \bar{\delta}_i, \tag{69}$$

cu

$$a_i = \frac{\sin \psi_{i-1}}{\sin \psi_i}, \quad b_i = -\frac{\cos \psi_i \sin \psi_{i+1}}{\sin \psi_i}, \quad c_i = \cos \psi_{i+1} \tag{70}$$

sau

$$A_i \bar{\delta}_{i+3} + B_i \bar{\delta}_{i+1} + C_i \bar{\delta}_{i-1} + D_i \bar{\delta}_{i-3} = 0, \tag{71}$$

cu

$$\begin{aligned}
A_i &= \sin \psi_{i-2} \sin \psi_i \sin \psi_{i-1}, \\
B_i &= -[\sin \psi_{i-2} \sin \psi_i \sin \psi_{i-1} \cos \psi_{i+2} + \\
&\quad + \sin \psi_{i-2} \sin \psi_{i-1} \cos \psi_i \sin \psi_{i+2} \cos \psi_{i+1} + \\
&\quad + \sin \psi_{i-2} \cos \psi_{i-1} \sin \psi_{i+1} \sin \psi_{i+2}], \\
C_i &= \cos \psi_{i-2} \sin \psi_i \sin \psi_{i+2} \sin \psi_{i+1} + \\
&\quad + \sin \psi_{i-2} \sin \psi_{i+2} \sin \psi_{i-1} \cos \psi_{i+1} + \\
&\quad + \sin \psi_{i-2} \sin \psi_{i+2} \cos \psi_i \cos \psi_{i-1} \sin \psi_{i+1}, \\
D_i &= -\sin \psi_i \sin \psi_{i+2} \sin \psi_{i+3}.
\end{aligned} \tag{72}$$

Se verifică

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}_{i-3} \cdot \bar{\delta}_{i+3} &= \cos \psi_{i-2} \cos \psi_i \cos \psi_{i+2} - \cos \psi_{i-2} \sin \psi_i \sin \psi_{i+2} \cos \psi_{i+1} - \\
&\quad - \sin \psi_{i-2} \sin \psi_i \cos \psi_{i-1} \sin \psi_{i+1} - \\
&\quad - \sin \psi_{i-2} \cos \psi_{i-1} \cos \psi_i \sin \psi_{i+2} \cos \psi_{i+1} + \\
&\quad + \sin \psi_{i-2} \sin \psi_{i-1} \sin \psi_{i+1} \sin \psi_{i+2}.
\end{aligned} \tag{73}$$

Revenind la caracteristicile schematizărilor adoptate pentru lanțurile cinematice, se notează versorii axelor cuplelor prin $\bar{e}_i$, versorii normalelor prin $\bar{n}_i$, unghiurile dintre axele z_i și z_{i+1} prin α_i și unghiurile dintre normalele x_{i-1} și x_i prin θ_i (fig. 8). Se pot stabili două corespondențe cu notația generală anterioară după cum $\bar{\delta}_i$ coincide cu $\bar{e}_i$ sau cu $\bar{n}_i$, ceea ce face ca ψ_i să coincidă cu θ_i sau α_i. Așezînd versorii

şi unghiurile în ordinea indicilor descrescători, cele două corespondenţe sînt redate în tabela

$$\begin{aligned}
&\bar{n}_{i+1}\ \bar{e}_{i+1}\ \bar{n}_i \quad \bar{e}_i\ \bar{n}_{i-1}\ \bar{e}_{i-1}\ \bar{n}_{i-2},\\
&\bar{\delta}_{i+3}\ \bar{\delta}_{i+2}\ \bar{\delta}_{i+1}\ \bar{\delta}_i\ \bar{\delta}_{i-1}\ \bar{\delta}_{i-2}\ \bar{\delta}_{i-3},\\
&\bar{e}_{i+2}\ \bar{n}_{i+1}\ \bar{e}_{i+1}\ \bar{n}_i\ \bar{e}_i \quad \bar{n}_{i-1}\ \bar{e}_{i-1},
\end{aligned} \tag{74}$$

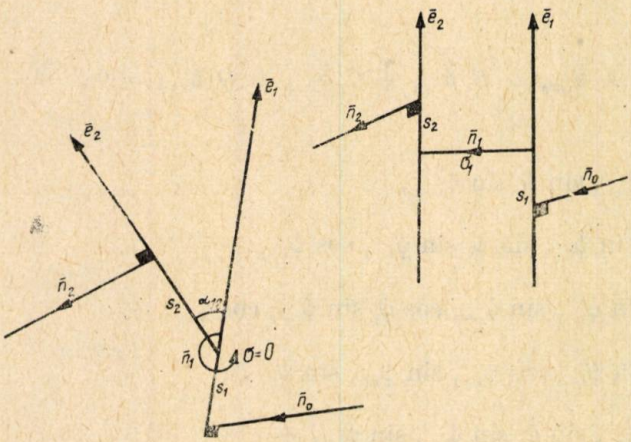


Fig. 10

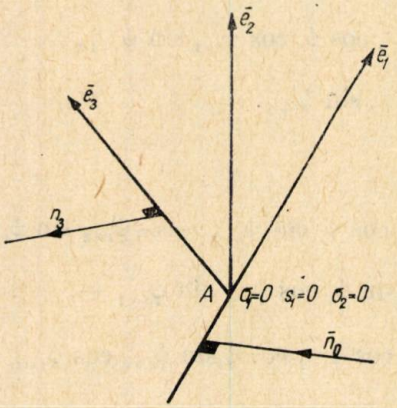


Fig. 11

şi

$$\begin{aligned}
&\alpha_{i+1}\ \theta_{i+1}\ \alpha_i \quad \theta_i\ \alpha_{i-1}\ \theta_{i-1}\ \alpha_{i-2},\\
&\psi_{i+3}\ \psi_{i+2}\ \psi_{i+1}\ \psi_i\ \psi_{i-1}\ \psi_{i-2}\ \psi_{i-3},\\
&\theta_{i+2}\ \alpha_{i+1}\ \theta_{i+1}\ \alpha_i\ \theta_i \quad \alpha_{i-1}\ \theta_{i-1}.
\end{aligned} \tag{75}$$

Totodată, notînd lungimile normalelor între două axe consecutive z_1 şi z_{i+1} prin σ_i şi lungimile axelor între două normale consecutive x_{i-1} şi x_i cu s_i (fig. 8.9), însumarea vectorială este

$$\overline{\Delta} = s_1 \overline{e}_1 + \sigma_1 \overline{n}_1 + s_2 \overline{e}_2 + \sigma_2 \overline{n}_2 + \ldots, \tag{76}$$

cu $\overline{\Delta} \neq 0$ pentru lanţul cuplelor compuse (poligon vectorial deschis) şi $\overline{\Delta} = 0$ pentru lanţurile cinematice închise.

Aceste ecuaţii cuprind în general ca necunoscute rotaţiile unghiulare θ_i şi deplasările de translaţie s_i atît în jurul, cît şi în lungul axelor z_i. Ecuaţiile sînt liniare în variabilele s_i şi sînt neliniare în variabilele θ_i, care sînt cuprinse sub formă trigonometrică în transformările versorilor.

În cazul unor poziţii particulare ale axelor cuplelor, ecuaţiile se pot reduce. La două axe concurente (fig. 10 *a*) $\overline{e}_1$ şi $\overline{e}_2$ avem $\sigma_1 = 0$ sau paralele (fig. 10 *b*) $s_1 = 0$ (sau $s_2 = 0$). Pentru trei axe concurente (fig. 11) $\sigma_1 = 0$ $s_2 = 0$, $\sigma_2 = 0$, calculele se simplifică mult.

Primită la redacţie la 16 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. L. HARRISBERGER, *A number synthesis survey of three dimensional mechanisms*, Journal of Engineering for Industry, 1964.
2. CHR. PELECUDI, *Bazele analizei mecanismelor*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967.
3. V. A. ZINOVIEV, *Prostransvennie mehanizmî i nizşimi parami*, Moskva, Gostehizdat, 1952.
4. W. RÖSSNER, *Zur strukturellen Ordnung der Getriebe*, Wiss. Z. der T. H. (Dresden), *10* (1961).
5. W. LICHTENHELDT, *Zur systematik der Raumgetriebe*, Wiss. Z. de T. H. (Dresden), *12* (1963).

CLASIFICAREA MECANISMELOR LOGICE CU ELEMENTE MECANICE

de I. SZÉKELY, T. MUREȘAN
Institutul politehnic Cluj

În lucrare se face o încercare de sistematizare a mecanismelor logice cu elemente mecanice în funcție de mai multe criterii. Se dau cîteva scheme cinematice de mecanisme logice utilizate în diferite domenii.

În lucrările [1], [2], [3] s-a scos în evidență faptul că funcționarea mecanismelor logice cu elemente mecanice are caracter discontinuu și, prin urmare, ele pot fi considerate ca automate finite. De asemenea s-a arătat că în componența lor intră elemente motoare, elemente de comandă și elemente executoare, ceea ce constituie o caracteristică de bază a acestor mecanisme.

În scopul de a fundamenta criteriile de clasificare, în cele ce urmează se va descrie funcționarea cîtorva mecanisme logice cu elemente mecanice din punct de vedere cinematic și logic.

Mecanismul din figura 1, utilizat la mașinile poligrafice pentru menținerea topului de hîrtie *6* la un nivel care asigură transportarea foilor de hîrtie între valțurile *12*, are un element motor *1*, un element de comandă *4* și un element executor *7*. La o valoare bine determinată a înălțimii topului de hîrtie H inclusă în limitele $h_1 \leqslant H \leqslant h_2$, alimentatorul pneumatic *11* transportă cîte o foaie de hîrtie spre valțurile *12*, care apoi le transmit în mașină. Concomitent cu aceasta, biela *2* a mecanismului patrulater $ABCD$ execută o mișcare plan-paralelă împreună cu clichetul *8*. La momentul cînd înălțimea topului de hîrtie scade cu valoarea δ (unde $\delta = H - h_1$), elementul *4* și biela *2* se deplasează în jos și, în consecință, clichetul *8* la fiecare rotație completă a elementului motor *1* rotește piulița specială *9* în jurul axei sale cu un unghi φ. Deoarece toate celelalte mișcări ale piuliței *9* sînt blocate, rezultă că șurubul *7* va deplasa masa *5* pe direcție verticală în sus, astfel că topul de hîrtie revine la nivelul inițial h_2 asigurînd alimentarea valțurilor cu hîrtie. În același timp, elementele *3* și *8* se îndepărtează de piuliță, clichetul nu mai transmite mișcarea șurubului *7* și masa se oprește. Se observă că, în timp ce înălțimea

topului de hîrtie se micşorează, cupla cinematică D ocupă diferite poziţii fixe, ceea ce face ca lungimea şi poziţia batiului AD al mecanismului patrulater $ABCD$ să fie mărimi variabile. Rezultă de asemenea că mecanismul

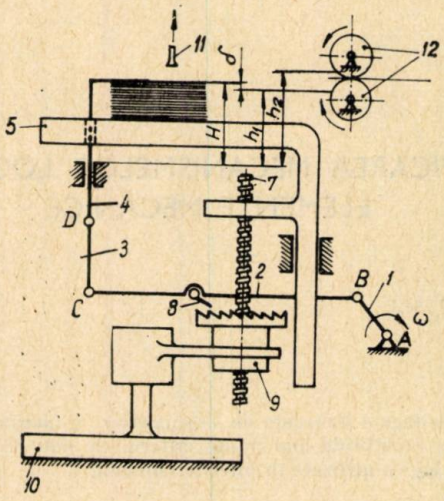


Fig. 1

logic studiat are structură variabilă. O perioadă de timp funcţionează numai mecanismul patrulater, iar o altă perioadă de timp intră în lucru şi cupla elicoidală şurub-piuliţă în urma contactului dintre clichet şi roata de clichet.

Analiza logică a mecanismului din figura 1 se face ataşînd elementului de comandă *4* variabila binară ξ, astfel ca

$$\xi = \begin{cases} 0 \text{ pentru} & 0 < \delta \leqslant h_2 - h_1, \\ 1 \text{ pentru} & \delta = 0, \end{cases}$$

iar elementului executor *7* variabila binară X, astfel ca

$$X = \begin{cases} 0 \text{ dacă elementul } 7 \text{ se află în repaus,} \\ 1 \text{ dacă elementul } 7 \text{ execută o mişcare de rotaţie.} \end{cases}$$

Considerînd perioada mişcării elementului motor *1*, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, rezultă ecuaţia caracteristică

$$X(t + T) = \xi(t).$$

Această ecuaţie caracteristică exprimă faptul că starea (de mişcare) elementului executor *7* la momentul dat este determinată de starea

(poziția) pe care a avut-o elementul de comandă *4* la momentul imediat anterior. Avînd în vedere că șurubul *7* în perioada cît execută mișcarea de rotație ($X = 1$) masa *5* se ridică cu cantitatea $\delta = h$, ceea ce determină valoarea $\xi = 0$, funcționarea mecanismului se poate descrie cu schema logică dată în figura 2. Semnul : = reprezintă operatorul de atribuire, iar γ grosimea unei file de hîrtie. Din cele expuse rezultă că mecanismul care menține topul de hîrtie la înălțimea de alimentare are o funcționare secvențială. Se menționează că s-a omis problema alimentării cu un nou top de hîrtie.

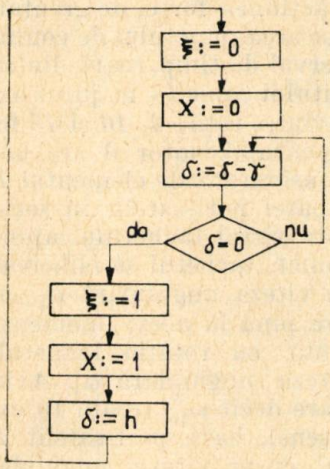


Fig. 2

În cele ce urmează se studiază funcționarea unui mecanism logic (fig. 3) care transformă mișcarea de rotație continuă a roții dințate conice *10* într-o mișcare discontinuă a roților *3,4* și *5* fixate pe arborii *2*, respectiv *6*. Motorul cu arc *1* acționează continuu, prin intermediul roții dințate *3*, asupra roții *5*, care tinde să rotească arborele *6* în sensul lui ω_6. O astfel de rotație însă nu poate avea loc atîta timp cît vîrful tachetului *7* intră în contact cu profilul *a b* al camei *8*, care face corp comun cu bara port-satelit *14*. Se menționează că tachetul este fixat pe arborele *6*, iar

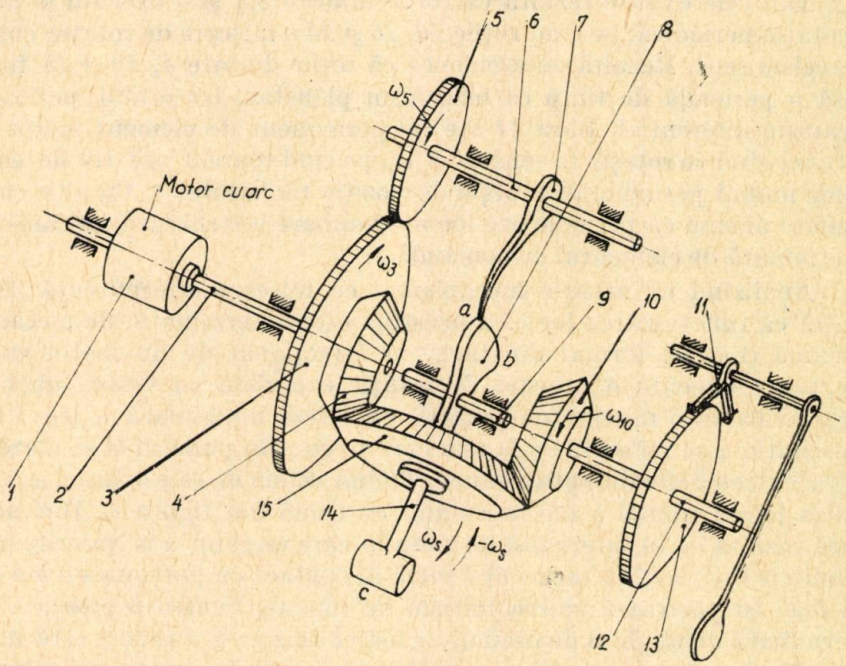


Fig. 3

cama pe arborele *9*. În perioada în care vîrful tachetului se deplasează pe porțiunea *a b* a profilului camei (care are forma unui arc de cerc cu centrul pe axa de simetrie a arborelui *9*), roțile dințate *3,4* și *5* sînt în repaus, cu toate că asupra lor acționează momentul continuu dezvoltat de motorul cu arc. Bara port-satelit *14*, sub acțiunea forței de greutate, se rotește în sensul arătat de ω_s, provocînd deplasarea punctului de contact dintre tachet și camă de la *a* la *b*. În acest interval de timp, roata dințată conică *4* fiind fixă, mișcarea de rotație a satelitului conic *15* în jurul axei proprii se transmite roții solare *10*. Cu alte cuvinte, roțile *4*, *10* și *15* formează un mecanism planetar la care rolul elementului motor îl are bara port-satelit. Mișcarea uniformă a roții *10* este asigurată de elementul *11*, care reprezintă un pendul Graham. Rotația barei port-satelit în sensul lui ω_s are loc numai pînă la momentul în care vîrful tachetului ajunge în punctul *b*. Cînd contactul trece de acest punct, tachetul se eliberează și se antrenează într-o mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω_5 sub acțiunea momentului motor devenit activ, care pînă în acest moment a fost doar un moment potențial. Concomitent cu rotația tachetului începe să se rotească și roata conică *4* cu viteza unghiulară ω_4. Avînd în vedere că viteza unghiulară ω_4 este mai mare decît ω_{10} (roata 10 execută o mișcare de rotație continuă în același sens), bara port-satelit *14*, împreună cu cama *8*, începe să se rotească în sensul vitezei unghiulare ω_s. Vitezele unghiulare — ω_s și ω_5 sînt astfel corelate, încît după o rotație completă a tachetului contactul dintre camă și tachet se restabilește în punctul *a*, fixîndu-se astfel din nou arborele *6*. Din această poziție, ciclul descris se repetă.

Din cele expuse rezultă că roțile dințate *3,4* și *5* execută o mișcare de rotație periodică, pe cînd roțile *10*, *13* și *15* o mișcare de rotație continuă de același sens. Rezultă de asemenea că roțile dințate *4*, *10* și *15* funcționează o perioadă de timp ca mecanism planetar, iar o altă perioadă ca mecanism diferențial. Bara *14* are rol permanent de element motor chiar și atunci cînd se rotește în sensul $-\omega_s$, pe cînd roata *3* are rol de element motor numai periodic, în funcție de poziția tachetului *7*. Cu alte cuvinte, se poate afirma că periodic are loc o schimbare a structurii mecanismului, determinată de elementul de comandă *7*.

Analizînd cu atenție mecanismul cu mișcare intermitentă (fig. 3), rezultă că funcționarea logică a acestuia este determinată de mecanismul cu camă (fig. 4), format din tachetul *7* (acționat de un motor cu arc), care poate executa o mișcare de rotație completă cu viteza unghiulară $\omega_7(t)$, iar cama o mișcare de oscilație cu viteza unghiulară $\omega_8(t)$. Unghiul de oscilație α se măsoară de la axa care trece prin punctul *O* și marchează poziția extremă din dreapta a camei. Ținînd seama de cele expuse, se va face analiza logică numai a mecanismului cu camă din figura 4. Din această figură rezultă că în intervalul de timp în care unghiul α ia valorile incluse în limitele $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, tachetul *7* intră în contact cu porțiunea *a b* a camei *8* și deci își păstrează starea inițială de repaus. Pentru o poziție a camei determinată de unghiul de oscilație α astfel ca $\alpha > \beta$ (unde β este unghiul de profil al camei), tachetul *7* execută o mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\omega_2(t)$.

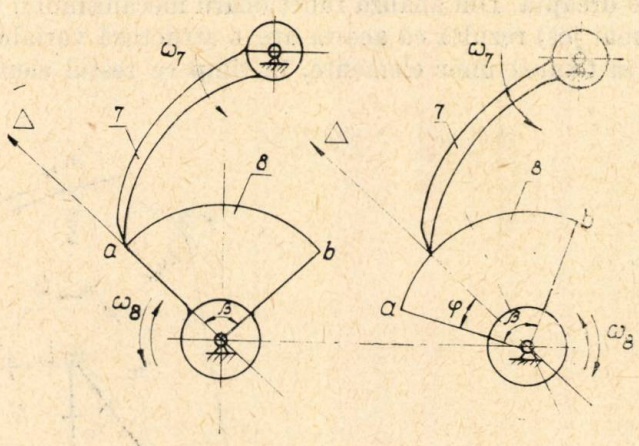


Fig. 4

Considerînd cama ca element de comandă şi tachetul ca element executor, rezultă că stările logice ale acestora pot fi descrise de variabilele binare ξ, respectiv X, aşa cum urmează :

$$\xi = \begin{cases} 0 \text{ pentru } 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta, \\ 1 \text{ pentru } \alpha > \beta, \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} 0 \text{ pentru starea de repaus,} \\ 1 \text{ pentru starea de mişcare de rotaţie.} \end{cases}$$

Ecuaţia caracteristică corespunzătoare este

$$X(t + \tau) = \xi(t).$$

Se menţionează faptul că legile de mişcare $\omega_7(t)$ şi $\omega_8(t)$ fiind independente, rezultă că practic orice perturbaţie care acţionează asupra unuia din elementele 7 sau 8 face ca punctul de restabilire a contactului să nu fie tot timpul acelaşi, ci poziţia lui să varieze pe arcul $a\ b$ al profilului camei. O astfel de variaţie a poziţiei iniţiale a punctului de contact poate să nu convină cînd procesul tehnologic condiţionează perioada în care tachetul trebuie să fie în repaus respectiv în mişcare. Pentru a înlătura un astfel de inconvenient se impune sincronizarea mişcărilor elementelor 7 şi 8, lucru pe care îl asigură mecanismul din figura 3. O asemenea sincronizare este necesară în toate cazurile unde elementele conducătoare ale mecanismelor logice au legi de mişcare independente (adică elementele conducătoare interacţionează avînd baze de timp diferite).

Un alt mecanism $ABCDE$ [4] care se analizează în prezenta lucrare (fig. 5) se caracterizează prin aceea că, în timp ce elementul motor 1 execută o rotaţie completă, punctul K, aparţinînd elementului 5, descrie o curbă-bielă cu două opriri în punctele K_1 şi K_4 şi prin aceea că porţiunea

K_3K_1 este o dreaptă. Din analiza funcţionării mecanismului (care urmează să se facă mai jos) rezultă că acesta are o structură variabilă, care se determină prin fixarea unor elemente, în timp ce restul elementelor meca-

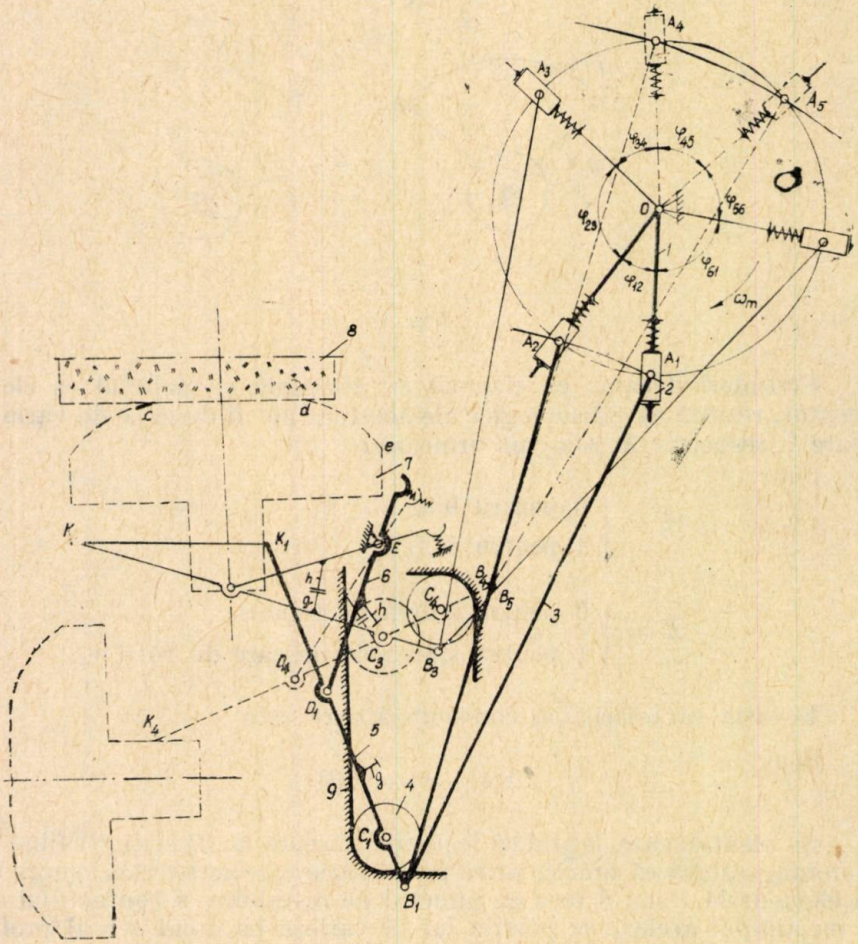


Fig. 5

nismului execută mişcări continue. O astfel de fixare se realizează cu repartiţia corespunzătoare a reacţiunilor în cuplele cinematice. În timpul în care elementul motor *1* execută o mişcare de rotaţie completă, procesul tehnologic se îndeplineşte de trei mecanisme cu trei structuri diferite, schimbarea acestora făcîndu-se de şase ori. O perioadă de timp se va utiliza mecanismul de clasa a II-a (fig. 6), format dintr-o grupă de clasa a II-a, ordinul 2, aspectul 2, o altă perioadă de timp va funcţiona un mecanism de clasa a III-a (fig. 7) în componenţa căruia intră o grupă de clasa a

III-a, ordinul 3, avînd o singură cuplă de translaţie suprapusă cu cupla rotoidă a elementului central *5*, şi, în sfîrşit, va mai fi utilizat un mecanism cu o singură grupă de clasa a II-a (fig.8), ordinul 2, aspectul 1. Mecanismele respective reprezentate în figurile 6,7 şi 8 se notează cu *U*, *V* şi *W* în ordinea în care ele au fost amintite.

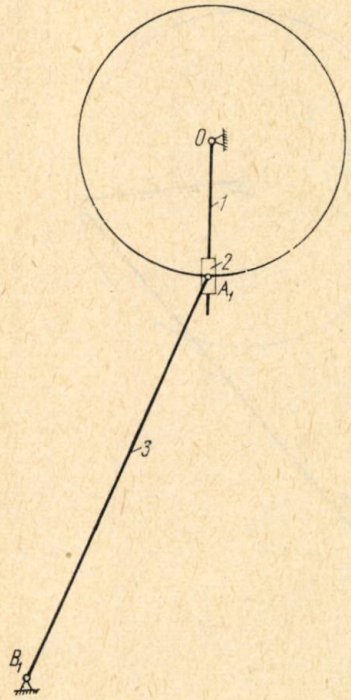


Fig. 6

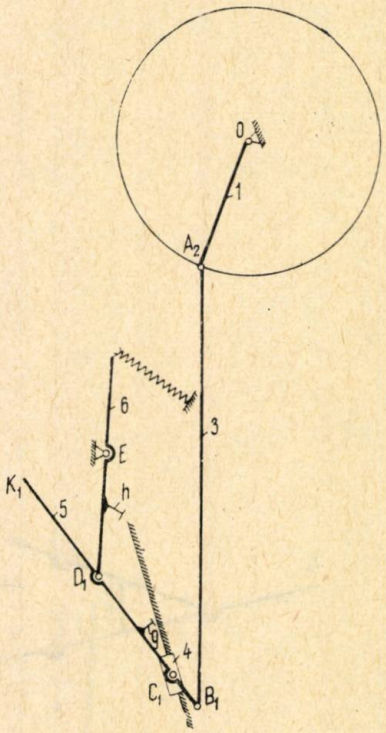


Fig. 7

Funcţionarea mecanismului tristructural se descrie pe baza schemei cinematice reprezentate în figura 5. Elementul-motor *1* execută o mişcare de rotaţie continuă în jurul axei care trece prin punctul *O*. În perioada în care cupla cinematică rotoidă trece din poziţia A_1 în A_2, elementul *5* este fix, funcţionează mecanismul *U* (fig. 6) şi, în consecinţă, punctul *K* al bielei este în repaus în K_1. Prin urmare, unghiului de rotaţie φ_{12} al manivelei îi corespunde o perioadă de repaus a piesei *7*, în care piatra de polizor *8* prelucrează porţiunea ei dreaptă *c d*. Manivela *1*, continuînd să se rotească, descrie unghiul φ_{23}. În acest interval de timp se ia în considerare mecanismul *V* (fig. 7), al cărui punct *K* se deplasează pe dreapta orizontală K_1K_3 (fig. 5), iar piatra de polizor prelucrează porţiunea *d e* a piesei *7*, care reprezintă un arc de cerc cu raza K_1e şi centrul în K_1. Cînd cupla *A* ocupă poziţia A_3, mişcarea relativă a elementelor *5* şi *6*

se limitează prin intermediul pieselor g şi h legate rigid de aceste elemente. Rezultă deci că unghiului de rotaţie φ_{34} îi corespunde mecanismul W (fig. 8). În timp ce cupla rotoidă A trece din poziţia A_4 în A_5, elementul 5 este în repaus (funcţionează mecanismul U), deci şi punctele B_4 şi K_4 sînt fixe. Această perioadă de oprire a piesei 7 în poziţia orizontală se utilizează pentru înlocuirea piesei prelucrate cu un semifabricat. Butonul

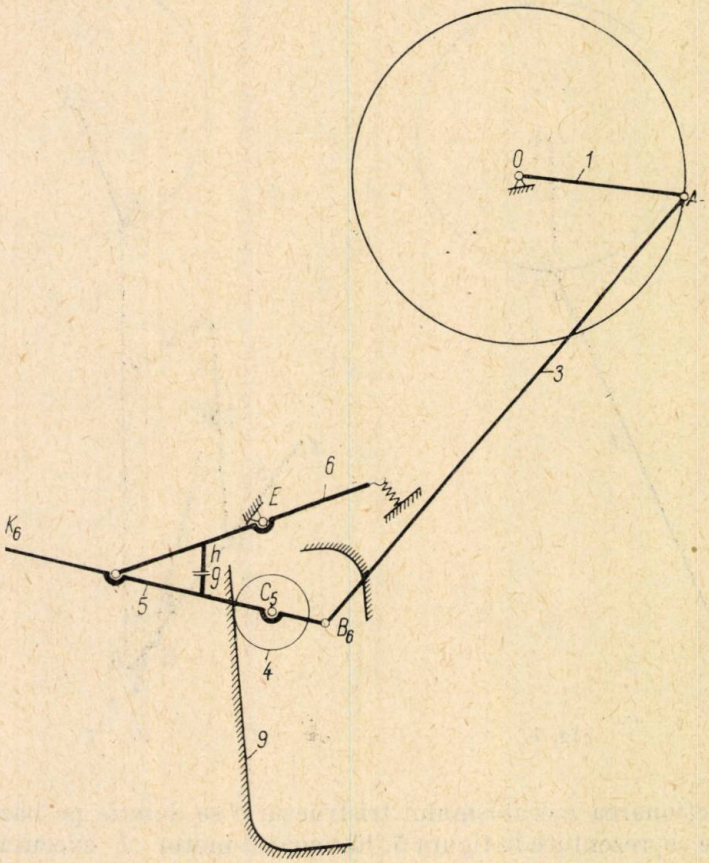


Fig. 8

manivelei trecînd din A_5 în A_6, centrul rolei 4 trece din poziţia C_4 în C_3 (funcţionează mecanismul W) şi face ca contactul dintre rolă şi ghidajul 9 să aibă loc în partea superioară a ghidajului, iar punctul K să ocupe poziţia K_3. În consecinţă, punctul e al piesei intră în contact cu piatra de polizor 8. În perioada în care elementul-motor execută o deplasare unghiulară φ_{61}, punctul K se deplasează pe dreapta K_3K_1 (funcţionează mecanismul V) şi se prelucrează arcul de cerc $e\,d$ al semifabricatului 7. Din acest moment, ciclul descris se repetă.

Din punct de vedere logic, funcționarea mecanismului tristructural este descrisă de variabila tetravalentă x, atașată elementului executor *5*, astfel ca

$$x = \begin{cases} 0 \text{ pentru poziția fixă } K_1B_1; \\ 1 \text{ pentru starea de mișcare corespunzătoare deplasării elementului } 5 \text{ din poziția } K_1B_1 \text{ la } K_3B_3 \text{ și revenirea de la } K_3B_3 \text{ la } K_1B_1; \\ 2 \text{ pentru starea de mișcare corespunzătoare deplasării elementului } 5 \text{ din poziția } K_3B_3 \text{ la } K_4B_4 \text{ și revenirea de la } K_4B_4 \text{ la } K_3B_3; \\ 3 \text{ pentru poziția fixă } K_4B_4. \end{cases}$$

Comanda mecanismului realizată prin repartizarea reacțiunilor în cuplele cinematice în funcție de unghiul de rotație φ (care se măsoară de la dreapta OA în sens orar) al elementului motor (fig. 5) determină

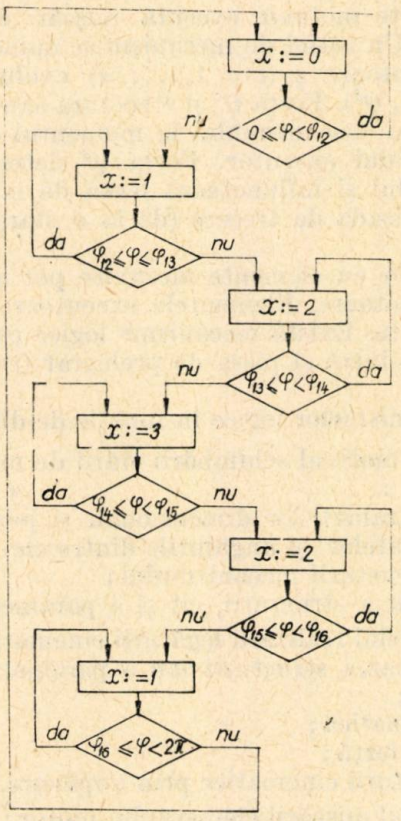


Fig. 9

funcționarea ciclică a mecanismului după un program fix (fig. 9). Se menționează că în figura 9 s-a utilizat notația dată de relația

$$\varphi_{1i} = \varphi_{12} + \varphi_{23} + \ldots + \varphi_{i-1,i}.$$

După ce s-a studiat funcționarea a trei mecanisme logice cu elemente mecanice mai reprezentative, două bistructurale și unu tristructural, se trece la sistematizarea mecanismelor logice în general, în funcție de mai multe criterii.

La începutul acestei lucrări s-a reamintit că mecanismele logice cu elemente mecanice sînt formate din elemente motoare, elemente de comandă și elemente executoare. În cele ce urmează se mai precizează următoarele.

Elementele motoare q_m $(m = 1, \ldots, \mu)$ evoluează sub acțiunea unui cîmp de forțe generalizate continue $Q^c = \sum Q^c_m$. Forțele Q^c_m acționează nemijlocit asupra elementelor motoare, determinîndu-le legea de mișcare.

Un element comandă g evoluează sub acțiunea unui cîmp de forțe generalizate discontinue $Q^d = \sum Q^d_n$ $(n = 1, \ldots, \nu)$. Cîmpul de forțe Q^d acționează direct asupra unor elemente motoare q_n, transmițînd elementului g mișcarea prin intermediul unui ansamblu de elemente care leagă q_n cu g. Elementele q_n, g, respectiv cele intermediare, formează un mecanism ale cărui elemente motoare execută mișcări discrete și realizează diferite funcții logice. Un astfel de mecanism se numește dispozitiv logic.

Elementele executoare q_e $(e = 1, \ldots, \varepsilon)$ evoluează sub acțiunea cîmpului de forță Q (Q^c, Q^d). Forța Q^c și structura sau parametrii (dimensionali și poziționali) ai mecanismului la momentul dat determină legea de variație a elementului executor. Forța Q^d determină structura sau parametrii mecanismului și influențează legea de mișcare a elementului executor numai în perioada de trecere (de la o stare la alta), ceea ce se poate neglija.

Mecanismele logice cu elemente mecanice pot avea unu, două sau mai multe elemente motoare. Elementele executoare pot avea două sau mai multe stări distincte. Există mecanisme logice cu elemente mecanice în a căror componență intră și piesa de prelucrat (transportul hîrtiei la mașinile poligrafice).

Clasificarea mecanismelor logice în funcție de diferite criterii.

A. În funcție de motivul schimbării stării de mișcare sau de repaus a elementului executor:

1) schimbarea parametrilor dimensionali și poziționali ai mecanismului (lungimile elementelor și unghiurile dintre ele);

2) schimbarea structurii mecanismului;

3) schimbarea atît a structurii, cît și a parametrilor mecanismului.

B. În funcție de felul realizării legăturii cinematice dintre elementele care participă la scimbarea structurii sau a parametrilor mecanismului:

1) prin fricțiune;

2) închidere cinematică;

3) închidere prin forță;

4) realizarea legăturii cinematice prin împănare.

C. După caracterul mișcării elementului motor:

1) în continuă mișcare de translație de du-te-vino sau de oscilație;

2) în continuă mișcare de rotație;

3) alternativ în mișcare sau în stare potențială.

D. În funcție de caracterul mișcării elementului condus:

1) o stare de mișcare și una de repaus;

2) două stări de mişcare diferite,
3) două stări de repaus diferite;
4) mai multe stări de repaus sau de mişcare distincte combinate în diferite feluri;
5) mişcări pe traiectorii diferite.

E. În funcţie de felul comenzii:
1) comandă prin salt de forţă de acţiune sau reacţiune (logică de nivel);
2) comandă prin impuls de forţă (logică de impuls).

F. În funcţie de transmiterea comenzii:
1) dispozitive logice (combinaţionale), în care caz comanda se transmite teoretic instantaneu;
2) mecanisme secvenţiale: comanda se transmite cu o anumită întîrziere sau se memorează. Se pot utiliza memorii fixe, caz în care comanda se transmite conform unui program fix (ca exemplu se poate da mecanismul tristructural din figura 5).

G. După funcţionarea logică a mecanismelor complexe organizate pe blocuri de prelucrare a informaţiei:
1) cu funcţionare asincronă, în care caz un bloc declanşează blocul următor numai după ce a terminat în întregime prelucrarea informaţiei;
2) cu funcţionare sincronă: declanşarea blocurilor, care prelucrează simultan informaţia se face de la unu sau de la mai multe elemente-pilot (baze de timp):
a) cu aceeaşi bază de timp;
b) cu baze de timp diferite. În acest caz trebuie utilizate elemente de sincronizare montate între blocurile cu baze de timp diferite.

Primită la redacţie la 9 iulie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. I. Székely, T. Mureşan, *Regimuri de funcţionare ale mecanismelor cu elemente rigide multipoziţionale*, St. cerc. mec. apl., *3*, 853—860 (1966).
2. — *Mecanisme cu elemente rigide şi elastice pentru realizarea funcţiilor logice*, Construcţia de maşini, *5*, 261—266 (1968).
3. — *Posibilităţi de realizarea şi utilizare a mecanismelor de comandă logică cu elemente mecanice*, Buletinul ştiinţific al Institutului politehnic Cluj, *11* (1968).
4. K. Reinsberg, *Eine getriebetechnische Anwendung der Geradführung für eine Schleifvorrichtung*, Maschinenbautechnik, *3*, p. 153—158 (1966).

CONSIDERAȚII DE MECANICĂ ASUPRA SAPELOR CU CONURI PENTRU FORAJ. II[1])

de ȘTEFAN S. MIHĂIESCU

Laureat al premiului de Stat
Institutul de fizică atomică

În partea a doua a lucrării se tratează următoarele:
— efectul conului suplimentar;
— cazul cînd forțele de contact pe coroanele de dinți au valori diferite între ele;
— efectul oscilator al conului sapei.

3. Se consideră două trunchiuri de con de rotație coaxiale și separate, rigid legate între ele, făcînd parte fiecare din conuri de rotație avînd unghiurile la vîrf diferite (fig. 10). Axa comună a acestor trunchiuri de con cuplate execută o mișcare de precesie regulată în jurul unei axe verticale (axa de rotație a sapei), cu care se intersectează într-un punct O. În timpul acestei mișcări, cele două trunchiuri de con rămîn tangente în lungul generatoarei lor, cu două suprafețe coaxiale cu axa de rotație a sapei (talpa găurii) pe care se rostogolesc.

Conul avînd unghiul la vîrf cel mai mare și vîrful în V se numește con principal, iar celălalt con, avînd vîrful în U, se numește con suplimentar. Se notează:

α — unghiul pe care axa de precesie îl face cu axa de rotație a celor două trunchiuri de con cuplate;

β — semiunghiul la vîrf al conului principal;

γ — semiunghiul la vîrf al conului suplimentar;

k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 — distanțele de la vîrful V al conului principal la punctul O și respectiv la bazele trunchiurilor de con considerate;

m — distanța dintre vîrfurile V și U;

AB — intervalul de contact situat pe generatoarea trunchiului de con principal;

CD — intervalul de contact situat pe generatoarea trunchiului de con suplimentar;

$\omega_s, \omega_c, \omega,$ — vitezele de rotație ale sapei, ale trunchiului de con dublu și respectiv ale mișcării rezultante, constante ca mărime și dirijate ca în cazurile precedente.

1) Partea I s-a tratat în nr. 4 — 1970

Se admit următoarele ipoteze : suprafeţele în contact sînt netede şi rigide, iar presiunea de contact este constantă şi are aceeaşi valoare f pe ambele intervale de contact. Pentru simplificarea calculelor şi fără a se influenţa generalitatea concluziilor, se face abstracţie de momentele $\mathfrak{M}_a$ şi $\mathfrak{M}_r$ definite la capitolul 1.3.

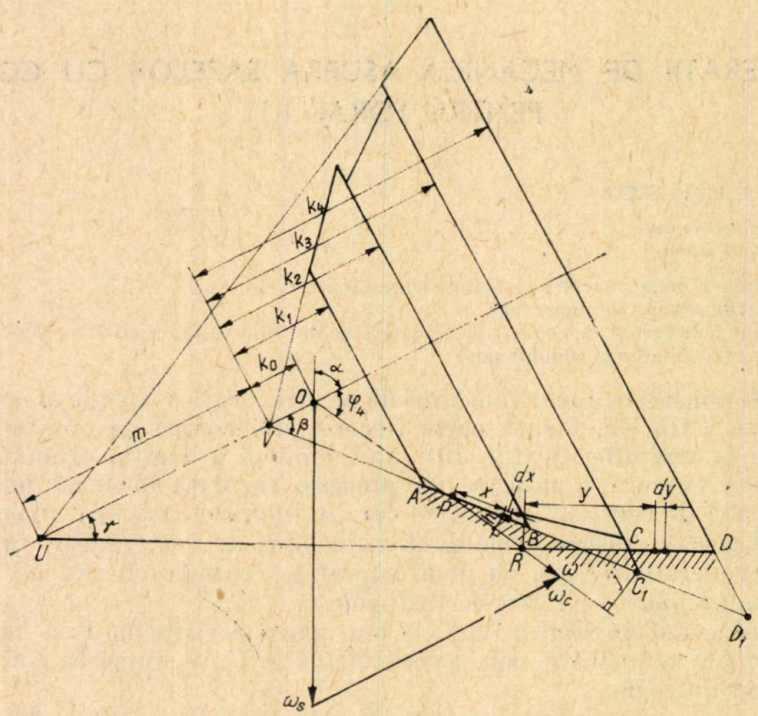


Fig. 10

Se deosebesc trei cazuri, care se vor trata ca în precedent.

3.1. Se presupune că axa instantanee de rotaţie trece prin intervalul AB, intersectînd în punctul P generatoarea trunchiului de con principal şi în punctul R generatoarea trunchiului de con suplimentar (fig. 10).

Se notează cu x distanţa măsurată de la punctul P la un punct oarecare situat pe AB şi cu y distanţa măsurată de la punctul R la un punct situat pe CD, iar cu h şi j distanţele respective ale elementelor dx şi dy la axa instantanee de rotaţie. Fie φ_4 unghiul pe care această axă îl face cu axa de rotaţie comună a celor două trunchiuri de con cuplate. Notînd cu u şi v vitezele periferice respective ale elementelor dx şi dy, lucrul mecanic total $\mathcal{L}_4$ al forţelor de frecare pe linia de contact este

$$\mathcal{L}_4 = \int_0^{\overline{PA}} vf\,\mathrm{d}x + \int_0^{\overline{PB}} vf\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{RC}}^{\overline{RD}} uf\,\mathrm{d}x.$$

Avem

$$\omega = \omega_s \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi_4},$$

$$h = x\sin(\varphi_4 - \beta), \quad v = \omega h = \omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_4 - \beta)}{\sin\varphi_4} x,$$

$$j = y\sin(\varphi_4 - \gamma), \quad u = \omega j = \omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_4 - \gamma)}{\sin\varphi_4} y.$$

Se fac înlocuiri în expresia lui $\mathcal{L}_4$:

$$\mathcal{L}_4 = \int_0^{\overline{PA}} f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_4 - \beta)}{\sin\varphi_4} x\,dx + \int_0^{\overline{PB}} f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_4 - \beta)}{\sin\varphi_4} x\,dx +$$

$$+ \int_{\overline{RC}}^{\overline{RD}} f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_4 - \gamma)}{\sin\varphi_4} y\,dy =$$

$$= f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_4 - \beta)}{\sin\varphi_4} \left(\left| \frac{x^2}{2} \right|_0^{\overline{PA}} + \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^{\overline{PB}} \right) +$$

$$+ f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_4 - \gamma)}{\sin\varphi_4} \left| \frac{y^2}{2} \right|_{\overline{RC}}^{\overline{RD}}. \tag{17}$$

Din figura 10 rezultă

$$\overline{VP} = k_0 \frac{\sin\varphi_4}{\sin(\varphi_4 - \beta)},$$

$$\overline{PA} = \overline{VP} - \overline{VA} = k_0 \frac{\sin\varphi_4}{\sin(\varphi_4 - \beta)} - \frac{k_1}{\cos\beta},$$

$$\overline{PB} = \overline{VB} - \overline{VP} = \frac{k_2}{\cos\beta} - k_0 \frac{\sin\varphi_4}{\sin(\varphi_4 - \beta)},$$

$$\overline{UR} = (m + k_0) \frac{\sin\varphi_4}{\sin(\varphi_4 - \gamma)},$$

$$\overline{RC} = \overline{UC} - \overline{UR} = \frac{m + k_3}{\cos\gamma} - (m + k_0) \frac{\sin\varphi_4}{\sin(\varphi_4 - \gamma)},$$

$$\overline{RD} = \overline{UD} - \overline{UR} = \frac{m + k_4}{\cos\gamma} - (m + k_0) \frac{\sin\varphi_4}{\sin(\varphi_4 - \gamma)}.$$

Se fac înlocuiri în expresia lui $\mathcal{L}_4$. Se obţine

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{2} f\omega_s \sin\alpha \left[2k_0^2 \frac{\sin\varphi_4}{\sin(\varphi_4 - \beta)} + \frac{k_1^2 + k_2^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin(\varphi_4 - \beta)}{\sin\varphi_4} - 2k_0 \frac{k_1 + k_2}{\cos\beta} + \right. \tag{18}$$

$$\left. \frac{k_4^2 - k_3^2 + 2m(k_4 - k_3)}{\cos^2\gamma} \frac{\sin(\varphi_4 - \gamma)}{\sin\varphi_4} - 2 \frac{(m + k_0)(k_4 - k_3)}{\cos\gamma} \right].$$

Prin derivarea acestei expresii în raport cu φ_4 şi egalarea cu zero se obţine

$$\operatorname{ctg}\varphi_4 = \left[\cos\beta - \frac{k_0 \sqrt{2\sin\beta}}{\sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{\cos\beta} \operatorname{tg}\beta + \frac{k_4^2 - k_3^2 + 2m(k_4 - k_3)}{\cos\gamma} \operatorname{tg}\gamma}} \right] \frac{1}{\sin\beta}. \tag{19}$$

Dacă în această expresie se face $\gamma = \beta$ şi $m = 0$, se obţine expresia (13) din cazul 2.1, care se mai poate scrie

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 = \left[\cos\beta - \frac{k_0 \sqrt{2\sin\beta}}{\sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{\cos\beta} \operatorname{tg}\beta + \frac{k_4^2 - k_3^2}{\cos\beta} \operatorname{tg}\beta}} \right] \frac{1}{\sin\beta}. \tag{20}$$

Pentru a compara valoarea lucrului mecanic $\mathcal{L}_4$ dată de expresia (18) cu valoarea lucrului mecanic $\mathcal{L}_1$ dată de expresia (14) (cînd nu există trunchi de con suplimentar), întrebuinţînd o metodă simplă şi evitînd un calcul laborios şi o formulă complicată dificil de interpretat, se va proceda în mod analog ca în cazul (2.1.), comparînd valoarea lui $\operatorname{ctg}\varphi_1$, scrisă sub forma dată de expresia (20), cu valoarea lui $\operatorname{ctg}\varphi_4$. Pentru aceasta se observă că este suficient să se compare între ei ultimii termeni de sub radical:

$$\frac{k_4^2 - k_3^2}{\cos\gamma} \operatorname{tg}\gamma + 2m \frac{k_4 - k_3}{\cos\gamma} \operatorname{tg}\gamma$$

şi

$$\frac{k_4^2 - k_3^2}{\cos\beta} \operatorname{tg}\beta.$$

Suprimînd factorii comuni ai acestor expresii şi ţinînd seama de figura 10, este suficient să se compare termenii

$$\frac{k_4 + k_3}{\cos\gamma} \operatorname{tg}\gamma + 2m \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\gamma} = \left(\frac{m + k_4}{\cos\gamma} + \frac{m + k_3}{\cos\gamma} \right) \operatorname{tg}\gamma =$$

$$= (\overline{UD} + \overline{UC}) \operatorname{tg}\gamma$$

și

$$\left(\frac{k_1}{\cos\beta}+\frac{k_2}{\cos\beta}\right)\operatorname{tg}\beta=(\overline{VD_1}+\overline{VC_1})\operatorname{tg}\beta,$$

C_1 și D_1 fiind intersecțiile generatoarei de contact a conului principal cu planele bazelor trunchiului de con suplimentar.

Din figura 10 rezultă

$$\frac{\overline{UD}+\overline{UC}}{2}\operatorname{tg}\gamma<\frac{\overline{VD_1}+\overline{VC_1}}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Valoarea primului membru al acestei inegalități se apropie de valoarea celui de-al doilea membru în același timp cu micșorarea lui m și cu creșterea lui γ. Pentru $m=0$ și $\gamma=\beta$ obținem valoarea lui φ_1. Deoarece valoarea lui φ_4 este diferită de valoarea lui φ_1, pentru care expresia lucrului mecanic $\mathcal{L}_1$ este minimă, avem $\mathcal{L}_4>\mathcal{L}_1$.

Rezultă că în acest caz *trunchiul de con suplimentar produce o creștere a valorii lucrului mecanic al forțelor de frecare dintre suprafețele de contact ale trunchiurilor de con considerate și suprafețele de contact pe care acestea se rostogolesc (talpa găurii). Această creștere se mărește în același timp cu valoarea diferenței* $\beta-\gamma$.

3.2. Se presupune că axa instantanee de rotație trece prin intervalul BC (fig. 11). Lucrul mecanic total $\mathcal{L}_5$ în acest caz al forțelor de frecare pe linia de contact este

$$\mathcal{L}_5=\int_{\overline{PB}}^{\overline{PA}}vf\,\mathrm{d}x+\int_{\overline{RC}}^{\overline{RD}}uf\,\mathrm{d}y.$$

Procedînd analog ca în cazul precedent, se obține

$$\mathcal{L}_5=\frac{1}{2}f\omega_s\frac{\sin(\varphi_5-\beta)}{\sin\varphi_5}\left|x^2\right|_{\overline{PB}}^{\overline{PA}}+\frac{1}{2}f\omega_s\frac{\sin(\varphi_5-\gamma)}{\sin\varphi_5}\left|y^2\right|_{\overline{RC}}^{\overline{RD}}.$$

Din figura 11 rezultă

$$\overline{VP}=k_0\frac{\sin\varphi_5}{\sin(\varphi_5-\beta)},$$

$$\overline{PA}=\overline{VP}-\overline{VA}=k_0\frac{\sin\varphi_5}{\sin(\varphi_5-\beta)}-\frac{k_1}{\cos\beta},$$

$$\overline{PB}=\overline{VP}-\overline{VB}=k_0\frac{\sin\varphi_5}{\sin(\varphi_5-\beta)}-\frac{k_2}{\cos\beta},$$

$$\overline{UR}=(m+k_0)\frac{\sin\varphi_5}{\sin(\varphi_5-\gamma)},$$

$$\overline{RC} = \overline{UC} - \overline{UR} = \frac{m + k_3}{\cos\gamma} - (m + k_0)\frac{\sin\varphi_5}{\sin(\varphi_5 - \gamma)},$$

$$\overline{RD} = \overline{UD} - \overline{UR} = \frac{m + k_4}{\cos\gamma} - (m + k_0)\frac{\sin\varphi_5}{\sin(\varphi_5 - \gamma)}.$$

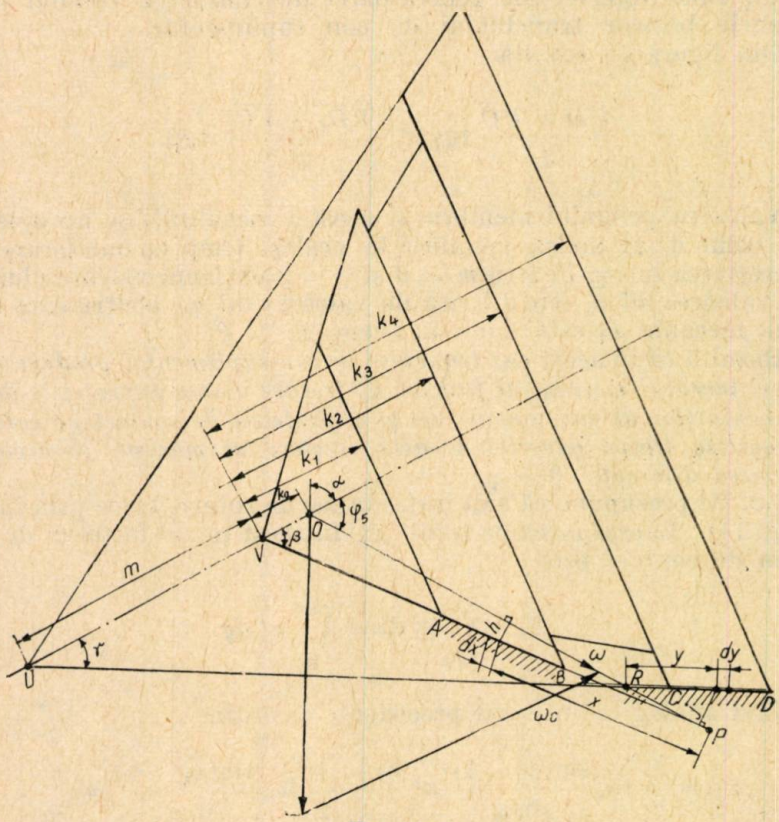


Fig. 11

Se înlocuiesc aceste valori în expresia lui $\mathcal{L}_5$. Se obține

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{2} f\omega_* \sin\alpha \left[\frac{k_1^2 - k_2^2}{\cos^2\beta} \cdot \frac{\sin(\varphi_5 - \beta)}{\sin\varphi_5} + 2\frac{k_0}{\cos\beta}(k_2 - k_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{(m + k_4)^2 - (m + k_3)^2}{\cos^2\gamma} \frac{\sin(\varphi_5 - \gamma)}{\sin\varphi_5} + 2\frac{m + k_0}{\cos\gamma}(k_3 - k_4) \right].$$

Se derivează această expresie în raport cu φ_5 și se egalează cu zero. Se obține

$$\mathcal{L}_5' = \frac{1}{2} f\omega_* \frac{\sin\alpha}{\sin^2\varphi_5} \left[\frac{k_1^2 - k_2^2}{\cos\beta} \operatorname{tg}\beta + \frac{(m + k_4)^2 - (m + k_3)^2}{\cos\gamma} \operatorname{tg}\gamma \right] = 0.$$

Această expresie nu se poate anula pentru valori reale ale lui φ_5. Rezultă că lucrul mecanic total al forțelor de frecare pe generatoarea de contact în acest caz nu are minim și, în consecință, axa instantanee de rotație a mișcării nu trece prin intevalul BC.

3.3. Se presupune că axa instantanee de rotație a mișcării trece. prin intervalul CD (fig. 12).

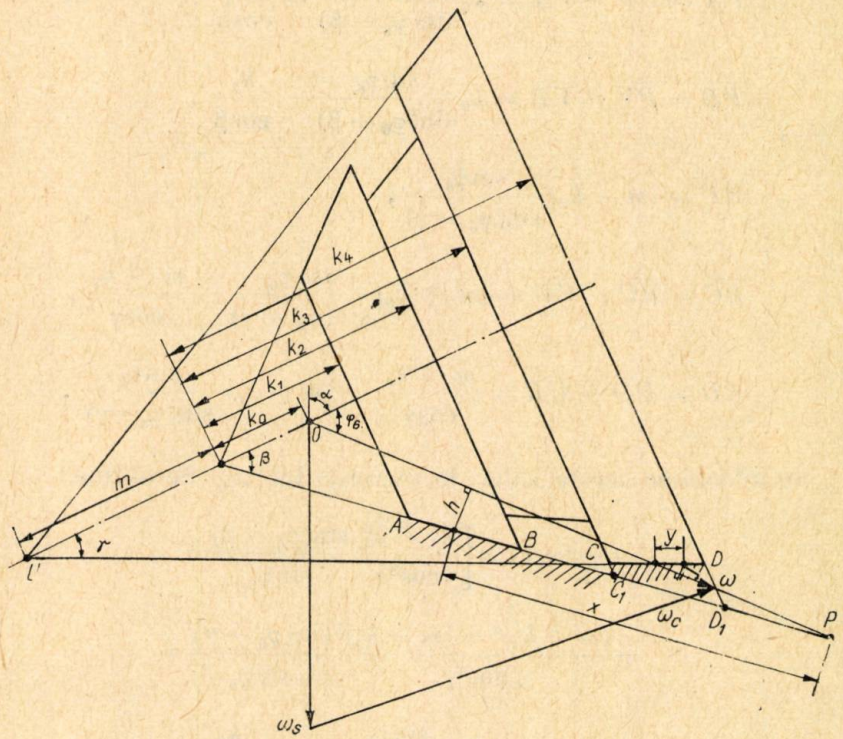


Fig. 12

Lucrul mecanic total $\mathcal{L}_6$ în acest caz al forțelor de frecare pe linia de contact este

$$\mathcal{L}_6 = \int_{\overline{PB}}^{\overline{PA}} vf\,\mathrm{d}x + \int_0^{\overline{RC}} uf\,\mathrm{d}y + \int_0^{\overline{RD}} uf\,\mathrm{d}y.$$

Procedînd analog ca în cazurile precedente, se obține

$$\mathcal{L}_6 = \frac{1}{2} f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_6 - \beta)}{\sin\varphi_6} \left| x^2 \right|_{\overline{PB}}^{\overline{PA}} + \frac{1}{2} f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_6 - \gamma)}{\sin\varphi_6} \left| y_2 \right|_0^{\overline{RC}} +$$

$$+ \frac{1}{2} f\omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_6 - \gamma)}{\sin\varphi_6} \left| y^2 \right|_0^{\overline{RD}}.$$

Din figura 12 rezultă

$$\overline{PV} = k_0 \frac{\sin\varphi_6}{\sin(\varphi_6 - \beta)},$$

$$\overline{PA} = \overline{PV} - \overline{VA} = k_0 \frac{\sin\varphi_6}{\sin(\varphi_6 - \beta)} - \frac{k_1}{\cos\beta},$$

$$\overline{PB} = \overline{PV} - \overline{VB} = k_0 \frac{\sin\varphi_6}{\sin(\varphi_6 - \beta)} - \frac{k_2}{\cos\beta},$$

$$\overline{RU} = (m + k_0) \frac{\sin\varphi_6}{\sin(\varphi_6 - \gamma)},$$

$$\overline{RC} = \overline{RU} - \overline{CU} = (m + k_0) \frac{\sin\varphi_6}{\sin(\varphi_6 - \gamma)} - \frac{m + k_3}{\cos\gamma},$$

$$\overline{RD} = \overline{UD} - \overline{UR} = \frac{m + k_4}{\cos\gamma} - (m + k_0) \frac{\sin\varphi_6}{\sin(\varphi_6 - \gamma)}.$$

Se înlocuiesc aceste valori în expresia lui $\mathcal{L}_6$. Se obţine

$$\mathcal{L}_6 = \frac{1}{2} f\omega_s \sin\alpha \left[\frac{k_1^2 - k_2^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin(\varphi_6 - \beta)}{\sin\varphi_6} + \right.$$

$$+ \frac{(m + k_3)^2 + (m + k_4)^2}{\cos^2\gamma} \frac{\sin(\varphi_6 - \gamma)}{\sin\varphi_6} +$$

$$+ 2(m + k_0)^2 \frac{\sin\varphi_6}{\mathrm{sib}(\varphi_6 - \gamma)} + 2 \frac{k_0}{\cos\beta} (k_2 - k_1) -$$

$$\left. - 2(m + k_0) \frac{2(m + k_3 + k_4}{\cos\gamma} \right]. \qquad (21)$$

Se derivează această expresie în raport cu φ_6 şi se egalează cu zero. Se obţine

$$\mathrm{ctg}\,\varphi_6 = \left[\cos\gamma - \frac{(m + k_0)\sqrt{2\sin\gamma}}{\sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2}{\cos\beta} \mathrm{tg}\beta + \frac{(m + k_3)^2 + (m + k_4)^2}{\cos\gamma} \mathrm{tg}\gamma}} \right] \frac{1}{\sin\gamma}. \qquad (22)$$

O comparaţie între lucrul mecanic $\mathcal{L}_3$ (cazul absenţei trunchiului de con suplimentar) şi lucrul mecanic $\mathcal{L}_6$ (cazul cînd există trunchi de con suplimentar), întrebuinţînd o metodă simplă care evită un calcul laborios şi o formulă complicată dificilă de interpretat, se poate face

comparînd valorile unghiurilor φ_3 și φ_6. Într-adevăr, axa instantanee de rotație a mișcării trebuind să treacă prin intervalul CD (fig. 12), este evident că unghiul φ_6 va fi mai mic decît unghiul φ_3 corespunzător cazului cînd axa instantanee de rotație a mișcării ar trece prin intervalul C_1D_1 (C_1 și D_1 fiind intersecțiile generatoarei de contact a conului principal cu planele bazelor trunchiului de con suplimentar). Deoarece valoarea lui $\mathcal{L}_3$ este minimă pentru valoarea φ_3 și avînd $\varphi_6 \neq \varphi_3$, rezultă $\mathcal{L}_6 > \mathcal{L}_3$. Valoarea lui $\mathcal{L}_6$ se apropie de valoarea lui $\mathcal{L}_3$ prin micșorarea distanței m dintre vîrfurile U și V și apropierea valorii unghiului γ de acea a unghiului β.

Și în acest caz rezultă că *prezența trunchiului de con suplimentar produce o creștere a lucrului mecanic al forțelor de frecare dintre suprafețele de contact ale trunchiurilor de con considerate și suprafețele de contact pe care acestea se rostogolesc (talpa găurii)*.

3.4. Procedînd ca mai sus, se demonstrează că în cazul cînd intersecția axei de rotație a mișcării cu generatoarele trunchiurilor de con are

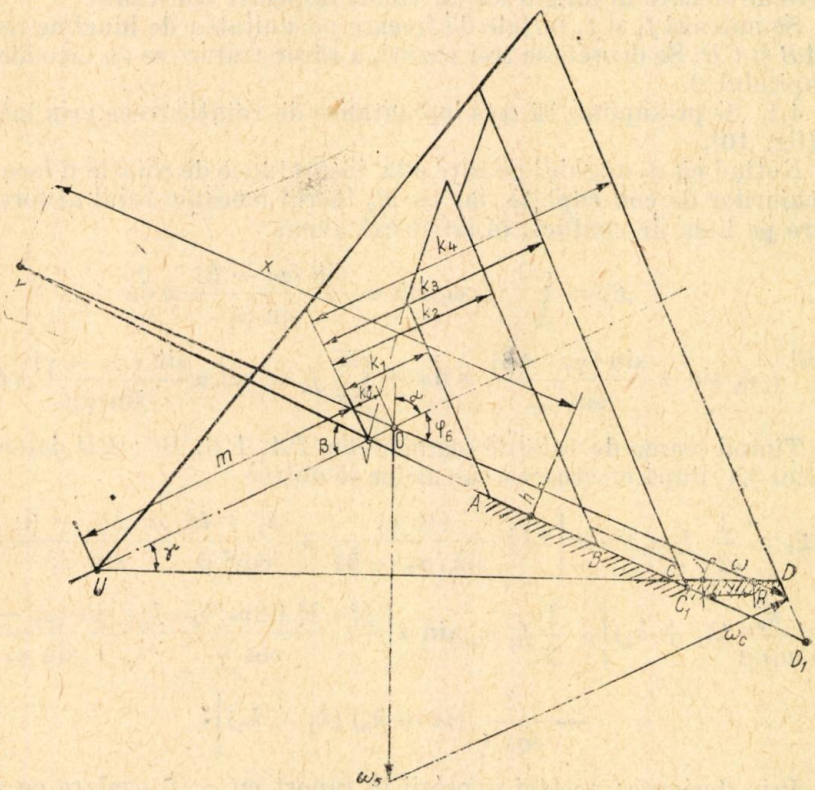


Fig. 13

loc astfel cum este indicat în figura 13, expresiile care dau valorile lucrului mecanic al forțelor de frecare pe linia de contact și unghiul φ_6 care definește poziției axei instantanee de rotație a mișcării sînt, respectiv, identice cu expresiile (21) și (22).

Valoarea lui ctg φ_4, dată de expresia (19), diferă de cea a lui ctg φ_6, dată de expresia (22). Deoarece pentru trunchiul de con considerat în cazul de faţă trebuie să existe numai o singură axă instantanee de rotaţie datorită faptului că lucrul mecanic total al forţelor de frecare este minim, va corespunde acea valoare, care, înlocuită în expresia lucrului mecanic total respectiv, va avea pentru aceasta valoarea cea mai mică (minimorum).

Expresiile lucrurilor mecanice totale $\mathcal{L}_4$ şi $\mathcal{L}_6$, în care s-a eliminat unghiul φ, respectiv, vor fi relaţii între elementele f, α, β, γ, m, k_0, k_1, k_2, k_3, k_4. Presupunînd că factorii f, k_0, α, β, γ păstrează aceeaşi valoare, poziţiile relative ale valorilor m, k_1, k_2, k_3, k_4 hotărăsc care din cele două expresii ale lucrului mecanic total are valoarea cea mai mică.

4. Se consideră cazul cînd pe liniile de contact AB şi CD (fig. 10 —13) nu avem aceeaşi presiune de contact, aşa cum am presupus pînă acum, forţele de frecare pe aceste porţiuni avînd valori diferite. Deoarece practic lungimea acestor linii de contact este relativ mică, se poate admite cu exactitate satisfăcătoare că presiunile respective de contact şi deci forţele respective de frecare în lungul lor au valori respectiv constante.

Se notează f_1 şi f_2 forţele de frecare pe unitatea de lungime respectiv din AB şi CD. Se deosebesc trei cazuri, a căror tratare se va face identic ca în capitolul 2.

4.1. Se presupune că axa instantanee de rotaţie trece prin intervalul AB (fig. 10).

Notînd cu φ_7 unghiul pe care axa instantanee de rotaţie îl face cu axa trunchiurilor de con cuplate, iar cu $\mathcal{L}_7$ lucrul mecanic total al forţelor de frecare pe linia de contact, în acest caz avem

$$\mathcal{L}_7 = \int_0^{\overline{PA}} f_1 \omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_7 - \beta)}{\sin\varphi_7} x\,dx + \tag{23}$$

$$+ \int_0^{\overline{PB}} f_1 \omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_7 - \beta)}{\sin\varphi_7} x\,dx + \int_{\overline{RC}}^{\overline{RD}} f_2 \omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_7 - \gamma)}{\sin\varphi_7} y\,dy.$$

Ţinînd seama de valorile segmentelor PA, PB, RC, RD determinate în cazul 3.1, după efectuarea calculelor se obţine

$$\mathcal{L}_7 = \frac{1}{2} f_1 \omega_s \sin\alpha \left[2k_0^2 \frac{\sin\varphi_7}{\sin(\varphi_7 - \beta)} + \frac{k_1^2 + k_2^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin(\varphi_7 - \beta)}{\sin\varphi_7} - \right.$$

$$\left. - 2\frac{k_0}{\cos\beta}(k_1 + k_2) \right] + \frac{1}{2} f_2 \omega_s \sin\alpha \left[\frac{k_4^2 - k_3^2 + 2m(k_4 - k_3)}{\cos\gamma} \frac{\sin(\varphi_7 - \gamma)}{\sin\varphi_7} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\cos\gamma}(m + k_0)(k_4 - k_3) \right].$$

Prin derivarea acestei expresii în raport cu φ_7 şi egalare cu zero se obţine

$$\operatorname{ctg}\varphi_7 = \left[\cos\beta - \frac{k_0\sqrt{2 f_1 \sin\beta}}{\sqrt{f_1 \frac{k_1^2 + k_2^2}{\cos\beta} \operatorname{tg}\beta + f_2 \frac{k_4^2 - k_3^2 + 2m(k_4 - k_3}{\cos\gamma} \operatorname{tg}\gamma}} \right] \frac{1}{\sin\beta}. \tag{24}$$

4.2. Se presupune că axa instantanee de rotație trece prin intervalul BC (fig. 11).

Notînd cu φ_8 unghiul pe care axa instantanee de rotație îl face cu axa trunchiului de con, iar cu $\mathcal{L}_8$ lucrul mecanic total al forțelor de frecare pe linia de contact, în acest caz avem

$$\mathcal{L}_8 = \int_{\overline{PA}}^{\overline{PB}} f_1 \omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_8 - \beta)}{\sin\varphi_8} x\,dx + \int_{\overline{RC}}^{\overline{RD}} f_2 \omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_8 - \gamma)}{\sin\varphi_8} y\,dy.$$

Ținînd seama de valorile segmentelor PA, PB, RC, RD determinate în cazul 3.2, după efectuarea calculelor se obține

$$\mathcal{L}_8 = \frac{1}{2} f_1 \omega_s \sin\alpha \left[\frac{k_1^2 - k_2^2}{\cos^2\beta} \frac{\sin(\varphi_8 - \beta)}{\sin\varphi_8} + \frac{2k_0}{\cos\beta}(k_2 - k_1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} f_2 \omega_s \sin\alpha \left[\frac{k_4^2 - k_3^2 + 2m(k_4 - k_3)}{\cos^2\gamma} \frac{\sin(\varphi_8 - \gamma)}{\sin\varphi_8} + 2\frac{m + k_0}{\cos\gamma}(k_3 - k_4)\right].$$

Derivînd această expresie în raport cu φ_8 și egalînd cu zero, se obține

$$\frac{1}{2}\omega_s \frac{\sin\alpha}{\sin^2\varphi_8}\left[f_1 \frac{k_1^2 - k_2^2}{\cos\beta} \operatorname{tg}\beta + f_2 \frac{k_4^2 - k_3^2 + 2m(k_4 - k_3)}{\cos\gamma} \operatorname{tg}\gamma\right] = 0.$$

Această expresie nu se poate anula pentru valori reale ale lui φ_8. Rezultă că lucrul mecanic total $\mathcal{L}_8$ al forțelor de frecare în acest caz nu are minim și, în consecință, axa instantanee de rotație nu trece prin intervalul BC.

Ținînd seama că în toate cazurile procedente similare am avut aceleași rezultate, rezultă concluzia generală că axa instantanee de rotație a mișcării nu trece prin intervalul de întrerupere al generatoarei de contact (intervalul dintre coroanele dinților).

4.3. Se presupune că axa instantanee de rotație trece prin intervalul CD (fig. 12).

Notînd cu φ_9 unghiul pe care axa instantanee de rotație îl face cu axa trunchiurilor de con cuplate, iar cu $\mathcal{L}_9$ lucrul mecanic total al forțelor de frecare pe linia de contact, în acest caz avem

$$\mathcal{L}_9 = \int_{\overline{PB}}^{\overline{PA}} f_1 \omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_9 - \beta)}{\sin\varphi_9} + \int_0^{\overline{RC}} f_2 \omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_9 - \gamma)}{\sin\varphi_9} y\,dy +$$

$$+ \int_0^{\overline{RD}} f_2 \omega_s \sin\alpha \frac{\sin(\varphi_9 - \gamma)}{\sin\varphi_9} y\,dy.$$

Ţinînd seama de valorile PA, PB, RC, RD determinate în cazul 3.3. se obţine

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} f_1 \omega_s \left[\frac{k_1^2 - k_2^2}{\cos^2 \beta} \frac{\sin(\varphi_9 - \beta)}{\sin \varphi_9} + 2 \frac{k_e}{\cos \beta} (k_2 - k_1) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} f_2 \omega_s \sin \alpha \left[2(m + k_0)^2 \frac{\sin \varphi_9}{\sin(\varphi_9 - \gamma)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(m + k_3)^2 + (m + k_4)^2}{\cos^2 \gamma} \frac{\sin(\varphi_9 - \gamma)}{\sin \varphi_9} - 2(m + k_0) \frac{2m + k_3 + k_4}{\cos \gamma} \right].$$

Derivînd această expresie în raport cu φ_9 şi egalînd cu zero, se obţine

$$\operatorname{ctg} \varphi_9 = \left[\cos \gamma - \frac{(m + k_0) \sqrt{2 f_2 \sin \gamma}}{\sqrt{f_1 \frac{k_1^2 - k_2^2}{\cos \beta} \operatorname{tg} \beta + f_2 \frac{(m + k_3)^2 + (m + k_4)^2}{\cos \gamma} \operatorname{tg} \gamma}} \right]. \quad (25)$$

Asupra alegerii valorilor convenabile ale lui ctg φ_7 şi ctgφ_9, care diferă între ele, se va proceda în modul precizat la sfîrşitul capitolului 2.

În cazul cînd pe generatoarea de contact există un număr oarecare de intervale de contact, se procedează în modul următor. Se presupune că axa instantanee de rotaţie trece prin fiecare interval de contact şi prin procedeul expus mai sus se stabileşte pentru fiecare interval expresia generală a lucrului mecanic de frecare total corespunzător, din care prin derivare şi egalare cu zero se deduce valoarea corespunzătoare a unghiului φ. Introducînd această valoare a lui φ în expresia lucrului mecanic total respectiv, se obţine valoarea lucrului de frecare total corespunzător intervalului considerat. Se obţin astfel toate valorile posibile pe care le poate avea lucrul mecanic de frecare total pe generatoarea de contact pentru o poziţie dată a intervalelor de contact pe aceasta. Dintre aceste valori, valoarea cea mai mică (minimorum) este aceea care răspunde poziţiei intervalelor de contact considerate şi corespunzător ei se alege valoarea unghiului φ, care determină poziţia axei instantanee de rotaţie.

4.4. Se poate obţine o formulă de recurenţă procedînd în modul următor. Pe suprafaţa trunchiului de con principal se află situate $2p$ puncte A, B, C, ..., definite cu ajutorul distanţelor k_1, k_2, ..., k_{2p}, iar pe trunchiul de con suplimentar se află punctele W, Z, definite cu ajutorul distanţelor k_{2p+1}, k_{2p+2}, la vîrful V în modul precizat în capitolele 3 şi 4. Se notează cu m distanţa dintre vîrfurile conului principal şi suplimentar. Intervalele definite cu ajutorul distanţelor-perechi k_{2n}, k_{2n+1} sînt întreruperi (n fiind mai mic decît p şi luînd valori întregi consecutive de la 0 la p). Se notează cu f_{n+1} forţa de frecare pe unitatea de lungime, care se dezvoltă pe intervalul de contact definit cu ajutorul distanţelor perechi k_{2n+1}, k_{2n+2}. În cazul cînd axa instantanee de rotaţie trece prin acest interval de contact, notînd cu $\varphi_{2n+1,\ 2n+2}$ unghiul pe care această axă îl

face cu axa trunchiurilor de con cuplate şi procedînd ca mai sus, se deduce că valoarea lucrului mecanic $\mathcal{L}_{2n+1,\,2n+2}$ corespunzător este dat de expresia

$$\mathcal{L}_{2p+1,\,2n+2} = \frac{1}{2}\,\omega_s \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}(1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\varphi_{2n+1,\,2n+2})\left[2f_{n+1}k_{2n+2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{n} f_{s+1}(k_{2s+1}^2 - k_{2s+2}^2) + \sum_{s=n+1}^{p-1} f_{s+1}(k_{2s+2}^2 - k_{2s+1}^2)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\omega_s f_{p+1}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}(1-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{ctg}\varphi_{2n+1,\,2n+1})\left[k_{2p+2}^2 - k_{2p+1}^2 - 2m(k_{2p+2} - k_{2p+1})\right] +$$

$$+ f_{n+1}\,\omega_s\,k_0^2\sin\alpha\,\frac{1}{\cos\beta - \sin\beta\operatorname{ctg}\varphi_{2n+1,\,2n+2}} +$$

$$+ \omega_s(m + k_0)f_{p+1}(k_{2p+1} - k_{2p+2})\frac{\sin\alpha}{\cos\gamma} +$$

$$+ \omega_s\,k_0\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left[\sum_{s=0}^{n} f_{s+1}(k_{2s+2} - k_{2s+1}) - 2f_n\,k_{2n+2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=n+1}^{p-1} f_{s+1}(k_{2s+1} - k_{2s+2})\right], \qquad (26)$$

iar valoarea unghiului $\varphi_{2n+1,\,2n+2}$ este dată de expresia

În cazul că axa instantanee d
al conului suplimentar definit cu
notînd cu $\varphi_{2p+1,\,2p+2}$ unghiul pe
chiurilor de con cuplate, se
total $\mathcal{L}_{2p+1,\,2p+2}$ corespunzător ac

$$\mathcal{L}_{2p+1,\,2p+2} = \frac{1}{2}\,\omega_s \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}(1 - t$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\gamma}(1 - \operatorname{tg}\gamma\operatorname{ctg}\varphi$$

$$+ f_{p+1}\,\omega_s\,(m+k_0)^2\,\frac{\sin\alpha}{\cos\gamma-\sin\gamma\,\operatorname{ctg}\varphi_{2p+1,\,2p+2}}+$$

$$+\,\omega_s\,k_0\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\sum_{s=0}^{p-1}(k_{2s+2}-k_{2s+1})- \tag{28}$$

$$-\,f_{p+1}\,\omega_s\,\frac{m+k_0}{\cos\gamma}\,(2m+k_{2p+1}+k_{2p+2})\sin\alpha,$$

iar valoarea unghiului $\varphi_{2p+1,\,2p+2}$ este dată de expresia

$$\operatorname{ctg}\varphi_{2p+1,\,2p+2}=\left\{\cos\gamma-\right.$$

$$\left.\frac{(m+k_0)\sqrt{2f_{p+1}\sin\gamma}}{\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\beta}\sum_{s=}^{p-1}f_{s+1}(k_{2s+1}^2-k_{2s+2}^2)+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\gamma}\left[(m+k_{2p+1})^2+(m+k_{2p+2})^2\right]}}\right\}\frac{1}{\sin\gamma}. \tag{29}$$

Expresiile (26) — (29) sînt generalizarea expresiilor obţinute la capitolul 2.4.

Se presupune că s-a determinat poziţia axei instantanee de rotaţie care corespunde lucrului mecanic de frecare total minimum minimorum pe generatoarea de contact a trunchiurilor de con cuplate pentru o poziţie oarecare a intervalelor de contact situate pe această generatoare. Dacă în această situaţie s-ar adăuga un al doilea trunchi de con suplimentar, avînd unghiul la vîrf diferit de acela al primului con suplimentar, este evident că axa instantanee de rotaţie în acest caz va avea o poziţie diferită de poziţia pentru care lucrul mecanic de frecare total a fost minimum minimorum şi deci lucrul mecanic de frecare total în acest caz va avea o valoare mai mare decît în primul caz. Rezultă că prin adăugirea unui al doilea con suplimentar se măreşte şi mai mult abraziunea în teren a suprafeţei exterioare a trunchiului de con.

Raţionînd în mod analog, rezultă că adăugirea de noi trunchiuri de con suplimentare măreşte abraziunea în teren a suprafeţei exterioare a trunchiurilor de con. În acest mod se poate pune şi problema ca suprafaţa exterioară a trunchiului de con să fie o curbă care pentru un teren dat să dezvolte un lucru mecanic de abraziune dorit.

4.5. Pentru un trunchi de con de construcţie dată, valorile $f_1, f_2 \ldots$ nu se pot determina decît în mod experimental. În acest scop s-a recurs la ajutorul fotoelasticităţii, proiectîndu-se de autor un dispozitiv (fig. 14) cu care să se determine aceste valori. Figura 14 c indică repartizarea forţelor de contact pe intervalele de contact ale unui trunchi de con pentru o poziţie a acestor intervale.

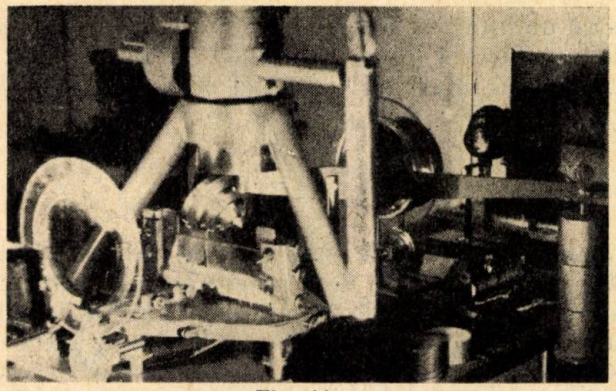


Fig. 14 *a*.

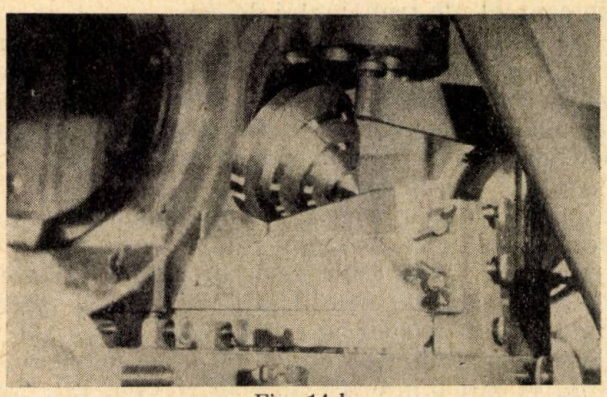


Fig. 14 *b*.

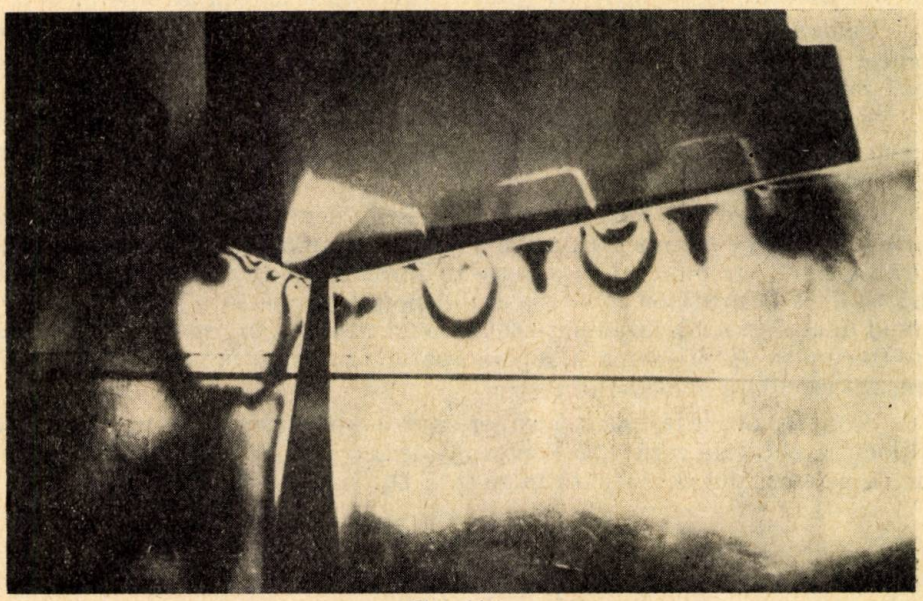


Fig. 14 *c*.

Dacă pentru un interval de contact AB, de exemplu, s-a determinat prin fotoelasticitate forța F_{AB} pe acest interval de contact, valoarea f_1 corespunzătoare acestui interval de contact este

$$f_1 = \frac{F_{AB}}{\overline{AB}}.$$

În mod analog se determină toate valorile lui f care intră în componența expresiilor (26) — (29). Se determină apoi cu ajutorul acestor expresii valoarea lucrului mecanic de frecare total pentru fiecare interval de contact. În conformitate cu cele expuse mai sus se va alege valoarea cea mai mică a lucrului mecanic de frecare total, care va fi valoarea lucrului mecanic de frecare total (de abraziune în teren) pentru poziția considerată a intervalelor de contact ale trunchiului de con.

După cum se va arăta mai jos, pentru un trunchi de con dat, poziția intervalelor de contact variază în timpul unei rotații complete a acestuia. Determinîndu-se, pentru o rotație completă a trunchiului de con, valoarea lucrului mecanic de abraziune pentru toate pozițiile posibile pe care le pot avea intervalele de contact cu terenul, se poate aprecia lucrul mecanic total de abraziune al trunchiului de con respectiv.

Procedînd în mod analog pentru fiecare trunchi de con al sapei, se poate aprecia lucrul mecanic de abraziune total al sapei.

5. Se consideră, în sfîrșit, cazul cînd porțiunile de contact situate în lucrul generatoarei întrerupte, considerată în cazurile precedente, sînt întrerupte, la rîndul lor, circular și echidistant în planul median care trece prin mijlocul porțiunii de contact și este perpendicular pe axa trunchiului de con, pe care o intersectează în O_1 (fig. 15), formînd proeminențe ascuțite egale între ele (dinții trunchiului de con al sapei):

Pentru început se consideră că pe trunchiul de con se află dispuse circular numai un șir de proeminențe ascuțite, al căror număr se notează cu z.

Se notează cu r raza medie a coroanei circulare aparținînd trunchiului de con pe care sînt așezate aceste proeminențe, iar cu M și N vîrfurile a două proeminențe vecine.

În timpul rostogolirii trunchiului de con considerat pe suprafața sa de contact (S), pe care pentru a fixa ideile o presupunem orizontală, punctul M rămîne fix, iar punctul O_1 descrie în jurul punctului M un arc de cerc pînă ce dintele următor R se așază din nou pe suprafața (S), punctul O_1 venind în același timp în punctul O_1', simetricul lui O_1 în raport cu verticala care trece prin M. Mișcarea se repetă apoi în mod identic pentru toți dinții coroanei circulare considerate.

Se notează cu O_3 poziția superioară a punctului O_1 în mișcarea sa (mijlocul arcului de cerc $O_1 O_1'$). Se consideră o poziție intermediară oarecare O_2 a punctului O_1, situată între O_1 și O_3, și se notează

$$\psi = \sphericalangle\, O_2 M O_3,$$

$$2\theta = \sphericalangle\, M O_1 N,$$

h distanţa, măsurată pe verticală, între punctele O_1 şi O_2. Avem

$$\theta = \frac{\pi}{Z},$$

$$\psi = Z\omega_c\, t,$$

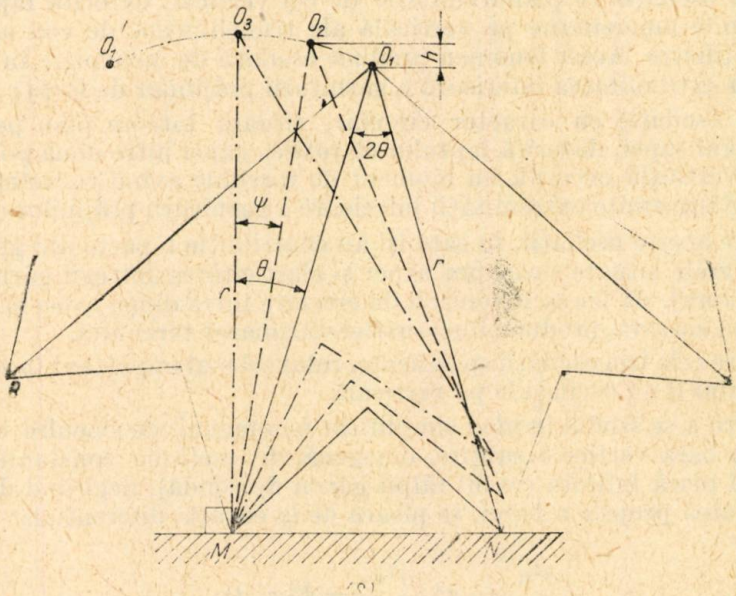


Fig. 15

ω_c fiind viteza unghiulară a trunchiului de con, iar t timpul. Din figură rezultă

$$h = r\cos\psi - r\cos\theta,$$

$$h = r\left(\cos Z\omega_c\, t - \cos\frac{\pi}{Z}\right).$$

Din această expresie rezultă că, prin rostogolirea pe vîrful unui dinte, mişcarea trunchiului de con are un caracter oscilator. În realitate, trunchiul de con are mai multe şiruri circulare de dinţi, denumite coroane, şi practic vîrfurile dinţilor situate pe o coroană nu corespund aceleiaşi generatoare cu vîrfurile dinţilor aparţinînd celorlalte coroane. Ca urmare, fenomenul de oscilaţie pe verticală al trunchiului de con pentru o rotaţie completă a acestuia este dat de o expresie cu un aspect mai complicat decît cel de mai sus. Acest aspect depinde de numărul de dinţi şi deci de construcţia sapei (terenul pentru care a fost construită).

Considerînd o sapă cu două, trei sau chiar patru trunchiuri de con, fiecare trunchi de con are independent o caracteristică proprie de oscilaţie.

În timpul operaţiei de foraj, cînd în mod normal toate trunchiurile de con ale sapei se rotesc, sapa execută următoarele oscilaţii, care se transmit garniturii de prăjini de foraj :

a) o oscilaţie pe verticală, care este rezultanta oscilaţiilor pe verticală a tuturor trunchiurilor de con ale sapei. Acest fenomen produce o mişcare oscilatorie pe verticală a extremităţii inferioare a garniturii de prăjini de foraj, la mişcarea în jos acţionînd şi greutatea proprie a acesteia ;

b) o oscilaţie în planuri diferite de cel vertical, datorită faptului că amplitudinile momentane pe verticală ale trunchiurilor de con ale sapei au valori diferite. Acest fenomen produce oscilaţii de încovoiere în diferite sensuri la extremitatea inferioară a garniturii prăjinilor de foraj ;

c) o oscilaţie cu caracter circular, situată într-un plan perpendicular pe axul sapei, datorită faptului că rotirea sapei între două poziţii extreme pe verticală necesită un moment de torsiune avînd caracter oscilator, care se transmite extremităţii inferioare a garniturii prăjinilor de foraj.

Toate aceste oscilaţii, în care îşi au contribuţie o parte din greutatea prăjinilor grele situate deasupra sapei şi elasticitatea întregii garnituri de prăjini de foraj, dă loc la fenomene de ciocnire între dinţii sapei şi terenul în care sapă aceasta, producîndu-se astfel sfărîmarea terenului.

Dintre cele trei oscilaţii specificate, rolul cel mai important în sfărîmarea terenului îl au oscilaţiile pe verticală.

Pentru a se studia în mod simplificat fenomenul de ciocnire care are loc între o bară verticală subţire, omogenă, de secţiune constantă şi un corp avînd masă infinită (cazul tălpii găurii de sondă), neglijînd deocamdată greutatea proprie a barei, se pleacă de la ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,\ t),$$

unde

x este distanţa de la capătul inferior al barei la o secţiune oarecare a sa,

u — deplasarea acestei secţiuni,

t — timpul,

a — viteza de propagare a sunetului în bară,

$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, E fiind modulul de elasticitate al materialului barei, iar ρ masa specifică a acesteia,

$F(x, t)$ este forţa exterioară care acţionează asupra barei.

În cazul că se ia în considerare şi greutatea proprie a garniturii prăjinilor de foraj, rezolvarea chestiunii se face prin metodele cunoscute.

Trebuie de asemenea luate în considerare deformaţiile care au loc între cele două elemente între care are loc fenomenul de ciocnire, precum şi contactul garniturii prăjinilor de foraj cu pereţii găurii de sondă.

O tratare riguroasă a problemei se poate face folosind teoria undelor.

6. CONCLUZII

În cele expuse s-au demonstrat relaţiile care există între elementele geometrice ale unui trunchi de con oarecare al unei sape şi lucrurile mecanice dezvoltate în timpul regimului de foraj de suprafaţa exterioară a acestuia pentru sfărîmarea terenului prin abraziune şi ciocnire.

S-a început cu tratarea cazurilor simple, pentru a se ajunge la concluzii care se aplică şi cazurilor generale tratate. Astfel se observă că şi în cazurile :

a) axa de rotaţie a sapei nu intersectează axa de rotaţie a trunchiului de con ;

b) generatoarea de contact are întreruperi ;

c) prezenţa trunchiului de con suplimentar ;

d) presiunea pe intervalele de contact are valoare diferită pentru fiecare interval,

lucrul mecanic total de abraziune în teren a suprafeţei exterioare a trunchiului de con considerat depinde de următoarele elemente geometrice :

a) distanţa k_0 dintre vîrful conului din care face parte trunchiul de con şi punctul de intersecţie al axei de rotaţie a acestuia cu axa de rotaţie a sapei în cazul cînd aceste axe sînt concurente sau dintre vîrful aceluiaşi con şi piciorul perpendicularei comune situat pe axa de rotaţie a trunchiului de con în cazul cînd aceste axe nu se intersectează ;

b) unghiul α făcut de axa de rotaţie a trunchiului de con cu axa de rotaţie a sapei ;

c) semiunghiul la vîrf β al conului principal din care face parte trunchiul de con situat în apropierea vîrfului acestui con ;

d) distanţa dintre axele de rotaţie ale sapei şi trunchiului de con în cazul cînd acestea nu se intersectează.

Poziţia axei de rotaţie a sapei faţă de aceea a trunchiului de con se alege astfel încît, pentru un sens de rotaţie dat al sapei, forţele de frecare, de tîrîre în lungul generatoarei de contact să contribuie la micşorarea încărcării axiale al lagărului cu bile al acestuia ;

e) prezenţa trunchiului de con suplimentar măreşte lucrul mecanic de abraziune în funcţie de semiunghiul la vîrf al conului din care face parte trunchiul de con suplimentar. Adăugirea unui al doilea con suplimentar măreşte şi mai mult lucrul mecanic de abraziune în teren ;

f) amplitudinea oscilaţiilor sapei ;

g) poziţiile intervalelor de contact faţă de vîrful conului din care face parte trunchiul de con.

În afară de mărimile geometrice specificate, lucrul mecanic pentru sfărîmarea terenului mai depinde şi de :

— viteza unghiulară a trunchiului de con, respectiv a sapei ;

— apăsarea pe generatoarea de contact a trunchiului de con, respectiv pe sapă ;

— numărul de dinţi al trunchiului de con, care împreună cu viteza unghiulară a acestuia dau frecvenţa de oscilaţie a sapei.

Frecarea din interiorul trunchiului de con este o mărime funcţională, care, în anumite cazuri, poate da loc la momente de frecare mari. Ea se opune mişcării de rostogolire a trunchiului de con, provocînd prin aceasta

forţe de frecare pe suprafaţa exterioară a acestuia, de valori incompatibile între uzura acestei suprafeţe şi sfărîmarea terenului.

Mijlocul de a se preveni acest inconvenient este montarea de pastile de material foarte dur atît în fundul interiorului trunchiului de con, cît şi în capul butonului fălcii acestuia. Aceste pastile de dimensiuni mici, venind în conctact pe suprafeţe mici, în timpul cînd sapa lucrează dezvoltă un lucru mecanic de frecare de pivot avînd valoare mică, împiedicînd în acelaşi timp venirea în contact a unor suprafeţe de dimenisuni mari situate în interiorul trunchiului de con care ar produce o frînare apreciabilă a rostogolirii acestuia.

Cu ajutorul fotoelasticităţii se poate determina repartizarea forţelor de contact între dinţii trunchiului de con pentru diferite poziţii posibile de contact a acestora, iar cu ajutorul formulelor stabilite se poate aprecia lucrul mecanic total de abraziune al acestuia.

Primită la redacţie la 13 mai, 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Bentson H. G,. *Rock bit desingn, selection and evalution*, Drilling and production practice 1956, A.P.I., New York.
2. Feodorov S. V., *Bazele ştiinţifice ale regimului de foraj*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1953.
3. Fox C., *An introduction to the calculus of variations*, Londra, Oxford University Press, 1950.
4. Gabos Z., Mangeron D., Stan I., *Fundamentele mecanicii*, Bucureşti, Edit. Academiei.
5. Grammel R., *Der Kreisel. Seine Theorie und seine Anwendungen*, Berlin, Springer Verlag, 1950.
6. Gregorian Ter, *Sape pentru foraj rotativ*, traducere.
7. Hamburger L., Buzdugan Gh., *Teoria vibraţiilor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1958.
8. Hamel G., *Teoretische Mechanik*, Berlin, Springer Verlag, 1949.
9. Herz H., *The principles of mechanics presented in a new form*, Dover publications, Inc., New York, 1956.
10. Ioachimescu A., *Mecanică raţională*, Bucureşti, „Monitorul oficial", 1947.
11. Kolsky H., *Stress waves in solids*, Oxford, 1953.
12. Lindslay, *Concepts and methods of theoretical physics*, D. Van Norstand Co., New York.
13. Лоицянский и Лурье, *Курс теоретической механике*, Москва, 1954.
14. Ponemarev şi colab, *Calculul modern de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. I, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956.
15. Pöschl Th., *Lehrbuch der technischen Mechanik*, Berlin, Springer Verlag, 1930.
16. Sommerfeld A., *Mechanics*, Academic Press, Inc., New York, 1952.
17. Stoenescu Al., Silaş Gh., *Mecanica teoretică*, Bucureşti, 1963.
18. Stoenescu Al., Ţiţeica Gh., *Teoria giroscopului şi aplicaţiile sale tehnice*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1961.
19. Saţov N. I. şi colab., *Forajul sondelor de ţiţei şi gaze*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.
20. Timoshenko S, D. H. Young, *Advanced dinamics*, McGraw-Hill Book, New York, 1958.
21. Timoshenko S., *Théorie de l'élasticité*, Paris, Ed. Ch. Béranger, 1948.
22. Vâlcovici V. şi colab., *Mecanica teoretică*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.

UN CONCEPT NOU DE EXPRIMARE A GRADULUI DE SIGURANȚĂ ÎN CALCULUL STRUCTURILOR ELASTO-PLASTICE. II

de ȘTEFAN BĂLAN și VALERIU PETCU
Institutul de construcții, București
I.N.C.E.R.C.

Se prezintă o teorie nouă a calculului structurilor continue de beton armat în domeniul plastic, bazată pe conceptul densității mecanice. O atenție specială este acordată perspectivelor pe care le are din punct de vedere practic folosirea conceptului densității mecanice în procesul de proiectare a structurilor în domeniul plastic, limitărilor rezultate din condițiile de cedare și de exploatare ale structurilor, precum și problemei optimizării soluțiilor stabilite pe baza acestui concept.

4. PROIECTAREA STRUCTURILOR DE BETON ARMAT

4.1. IDEEA MAXIMIZĂRII DENSITĂȚILOR MECANICE

La proiectarea unei structuri static nedeterminate de beton armat, calitățile betonului și armăturii se stabilesc pe baza unei analize tehnico-economice, iar forma și dimensiunile secțiunilor se obțin din operația de predimensionare. Pe baza acestora din urmă se stabilesc apoi modulii de rigiditate ai secțiunilor barelor, care, în condițiile actuale de efectuare a calculului elastic al solicitărilor, sînt independenți de procentele armăturii întinse și comprimate din aceste secțiuni.

Pentru fiecare schemă de încărcare, calculul elastic al solicitărilor conduce la un sistem de ecuații în care numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor. Datorită acestui fapt, prin aplicarea calculului elastic se obține întotdeauna o soluție unică a momentelor încovoietoare din secțiunile critice ale structurii.

Spre deosebire de calculul elastic, calculul plastic conduce la o singură ecuație de echilibru plastic pentru fiecare mecanism efectiv de cedare, care cuprinde ca necunoscute două sau mai multe momente plastice.

Prin *mecanism efectiv de cedare* se înțelege un mecanism distinct al structurii, care se formează în mod efectiv sub acțiunea încărcărilor de calcul, constituind o anumită schemă de încărcare.

Fie n_s numărul secțiunilor critice ale structurii și n_e numărul ecuațiilor de echilibru plastic ale mecanismelor efective ale structurii ce se pot

forma sub acţiunea încărcărilor de calcul, alcătuind toate schemele posibile de încărcare. Între aceste două numere există întotdeauna inegalitatea

$$n_e < n_s, \tag{74}$$

care decurge din faptul că un mecanism oarecare de cedare plastică include cel puţin două secţiuni critice, iar orice alt mecanism efectiv de cedare al structurii introduce în calcul cel puţin o nouă secţiune critică. Astfel, la grinda continuă din figura 5, numărul mecanismelor efective de cedare este $n_e = 3$, iar numărul secţiunilor critice este $n_s = 5$.

Pe de altă parte, momentul plastic al unei secţiuni de beton armat poate avea, *teoretic*, orice valoare, realizabilă prin alegerea convenabilă a mărimilor procentelor armăturii întinse şi armăturii comprimate din secţiunea critică respectivă. Această posibilitate provine din faptul că într-o secţiune de beton armat pot fi introduse, între anumite limite, orice cantităţi de armătură întinsă şi comprimată, mărimile acestor cantităţi reprezentînd, în consecinţă, parametri suplimentari care apar în calculul plastic al structurilor de beton armat.

Inegalitatea (74) şi observaţia de mai sus arată că la o structură static nedeterminată de beton armat numărul ecuaţiilor de echilibru plastic (egal cu numărul mecanismelor efective de cedare plastică ale structurii) este insuficient pentru determinarea momentelor plastice din toate secţiunile critice ale structurii. De aceea pentru obţinerea unei soluţii unice a valorilor acestor momente este necesar ca la cele n_e ecuaţii de echilibru plastic să se adauge $n_s - n_e$ ecuaţii suplimentare, astfel încît numărul ecuaţiilor să fie egal cu numărul momentelor plastice.

În această situaţie, stabilirea criteriului de alcătuire a celor $n_s - n_e$ ecuaţii suplimentare capătă o importanţă deosebită. În acest scop se face observaţia că la o structură oarecare de beton armat valorile momentelor plastice din cele n_s secţiuni critice ale ei se exprimă în funcţie de cele n_s densităţi mecanice ale acestor secţiuni. Fiecărei soluţii a valorilor momentelor plastice îi corespunde, în consecinţă, un ansamblu de n_s densităţi mecanice, a cărui limită inferioară este egală cu valoarea cea mai mică a acestor densităţi. Pe de altă parte, comportarea fiecărei secţiuni critice în parte şi a structurii în ansamblu, în stadiul de exploatare şi în stadiul de cedare, se îmbunătăţeşte cu cît densitatea mecanică a secţiunii critice respective este mai mare.

Consideraţiile de mai sus sugerează *ideea efectuării calculului plastic al structurilor de beton armat prin maximizarea limitei inferioare a ansamblului format de densităţile mecanice ale tuturor secţiunilor critice.*

În consecinţă, criteriul de alcătuire a celor $n_s - n_e$ ecuaţii suplimentare este cel al maximizării limitei inferioare a ansamblului format de densităţile mecanice ale tuturor secţiunilor critice pe care le posedă fiecare structură.

Punerea în aplicare a acestui criteriu, denumit *criteriul maximizării deniităţilor mecanice*, se bazează pe o teorie specifică structurilor de beton armat, ale cărei elemente fundamentale sînt prezentate mai jos.

4.2. TEORIA MAXIMIZĂRII DENSITĂȚILOR MECANICE

Utilizarea criteriului densităților mecanice maxime în calculul plastic al structurilor static nedeterminate de beton armat are ca suport următoarele trei teoreme fundamentale.

TEOREMA 1. *În calculul plastic al unei structuri de beton armat, egalarea între ele a densităților mecanice ale tuturor secțiunilor critice este posibilă numai dacă structura admite un singur mecanism efectiv de cedare.*

Demonstrație. Se consideră cazul general al unei structuri care admite n_e mecanisme efective de cedare. Prin egalarea între ele a densităților mecanice corespunzătoare celor n_s secțiuni critice care intră în alcătuirea mecanismelor structurii se obțin $n_s - 1$ ecuații. Pe de altă parte, numărul de ecuații suplimentare necesare pentru determinarea valorilor momentelor plastice din cele n_s secțiuni critice ale structurii este egal cu diferența $n_s - n_e$. În consecință, egalarea între ele a densităților mecanice corespunzătoare celor n_s secțiuni critice este posibilă numai dacă este satisfăcută condiția

$$n_s - 1 = n_s - n_e, \tag{75}$$

întrucît numai în acest caz numărul total de ecuații (format din numărul de ecuații de echilibru plastic la care se adaugă numărul de ecuații rezultat din egalarea între ele a tuturor densităților mecanice) devine egal cu numărul densităților mecanice care apar ca necunoscute în aceste ecuații.

Din condiția (75) se deduce

$$n_e = 1, \tag{76}$$

rezultat care demonstrează teorema enunțată.

Pentru exemplificare se consideră o grindă continuă de beton armat cu secțiunea constantă, simplu rezemată la extremități, avînd cinci deschideri egale. Grinda este solicitată de încărcări permanente și temporare aplicate concentrat în fiecare deschidere, punctele de aplicație împărțind deschiderile în cîte patru părți egale. Încărcările permanente din toate deschiderile sînt egale între ele și se aplică simultan în toate deschiderile grinzii. Încărcările temporare sînt de asemenea egale între ele, dar pot fi aplicate în una sau în mai multe deschideri, formînd astfel toate schemele posibile de încărcare. Secțiunile critice ale grinzii, numerotate de la 1 la 5, sînt situate în dreptul reazemelor intermediare și în mijlocul fiecărei deschideri (unde momentele elastice au valorile cele mai mari).

Schema generală a grinzii este reprezentată în figura 5 *a*.

Pentru efectuarea calculului plastic se aleg ca încărcări de referință încărcarea permanentă și încărcarea temporară, aplicate concentrat într-unul din punctele care împart fiecare deschidere a grinzii în patru părți egale.

Conform standardului 8 000 — 67 [3], pentru coeficienții de suprasarcină de calcul se aleg următoarele valori:

$$\lambda_c = \frac{G_c}{G_n} = 1{,}2 \tag{77}$$

și

$$\mu_c = \frac{P_c}{P_n} = 1{,}4, \tag{78}$$

în care G_n și G_c sînt valorile nominală și de calcul ale încărcării permanente de referință, iar P_n și P_c sînt valorile nominală și de calcul ale încărcării temporare de referință.

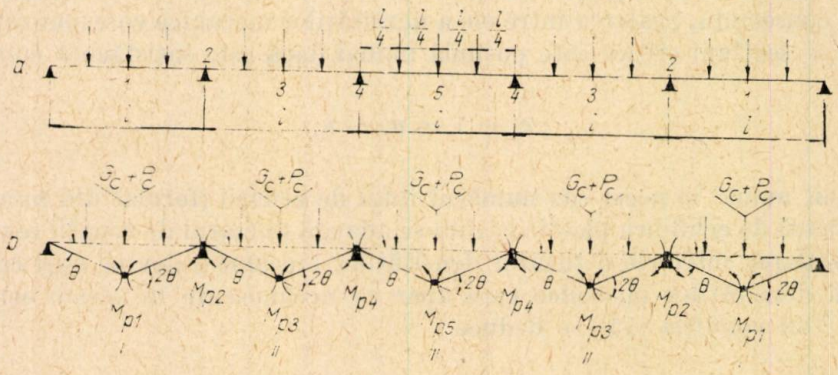


Fig. 5

Raportul dintre încărcările P_n și G_n se ia egal cu valoarea

$$H_n = \frac{P_n}{G_n} = 0{,}5. \tag{79}$$

Datorită simetriei, grinda are numai trei deschideri distincte, notate cu I, II și III, cărora le corespund tot atîtea mecanisme efective de cedare (fig. 5 *b*).

Momentul elastic maxim într-o secțiune critică i a grinzii ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), produs de încărcările permanente și temporare luate cu valorile lor nominale, are expresia

$$M_{ni} = (a_i G_n + b_i P_n)\, l \tag{80}$$

sau

$$M_{ni} = (a_i + b_i H_n)\, G_n\, l, \tag{81}$$

unde l este lungimea fiecărei deschideri a grinzii, iar a_i și b_i sînt doi coeficienți definiți în cadrul exemplului de calcul de la punctul 3.4, valorile lor fiind date în tabela 3 [18].

Tabela 3

Secțiunea critică i	a_i	b_i
1	0,303	0,401
2	0,395	0,449
3	0,155	0,327
4	0,296	0,417
5	0,204	0,352

Cu elementele numerice de mai sus, pentru momentele nominale din secțiunile critice ale grinzii se obțin următoarele valori :

$$\begin{aligned} M_{n1} &= 0{,}504\, G_n l, \\ M_{n2} &= 0{,}620\, G_n l, \\ M_{n3} &= 0{,}319\, G_n l, \\ M_{n4} &= 0{,}505\, G_n l, \\ M_{n5} &= 0{,}380\, G_n l. \end{aligned} \tag{82}$$

Comportarea grinzii sub acțiunea încărcărilor de calcul se poate manifesta, de exemplu, în funcție de modul de armare, după cum urmează.

Cazul 1. Grinda este astfel armată încît numai deschiderile marginale notate cu I se transformă în mecanisme sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul.

În această situație, ecuația de echilibru plastic a mecanismului corespunzător uneia dintre deschiderile notate cu I este (fig. 5 *b*)

$$2M_{p1}\theta + M_{p2}\theta = (G_c + P_c)\left(\frac{l}{2}\theta + 2\frac{l}{4}\theta\right) \tag{83}$$

sau

$$2\,M_{p1} + M_{p2} = 1{,}900\, G_n l. \tag{84}$$

Conform relațiilor (3) și (82), momentele plastice din ecuația (84) se pot exprima astfel :

$$M_{p1} = \delta_{p1} M_{n1} = 0{,}504\ \delta_{p1} G_n l \tag{85}$$

și

$$M_{p2} = \delta_{p2} M_{n2} = 0{,}620\ \delta_{p2} G_n l. \tag{86}$$

După înlocuiri, ecuaţia (84) devine

$$1{,}008\ \delta_{p1} + 0{,}620\ \delta_{p2} = 1{,}900, \tag{87}$$

unde necunoscutele sînt densităţile mecanice δ_{p1} şi δ_{p2}.

Adăugînd egalitatea

$$\delta_{p1} = \delta_{p2} \tag{88}$$

la ecuaţia (87), se obţine un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, a cărui soluţie este

$$\delta_{p1} = \delta_{p2} = 1{,}167. \tag{89}$$

Cazul 2. Grinda este astfel armată încît numai deschiderile notate cu II se transformă în mecanisme sub acţiunea încărcărilor permanente şi temporare de calcul.

Ecuaţia de echilibru plastic a mecanismului corespunzător uneia din deschiderile notate cu II este (fig. 5*b*).

$$M_{p2}\theta + 2\ M_{p3}\theta + M_{p4}\theta = (G_c + P_c)\left(\frac{l}{2}\theta + 2\frac{l}{4}\theta\right) \tag{90}$$

sau

$$M_{p2} + 2M_{p3} + M_{p4} = 1{,}900\ G_n\ l. \tag{91}$$

Momentele plastice din ecuaţia (91) au expresiile

$$M_{p2} = \delta_{p2}\ M_{n2} = 0{,}620\ \delta_{p2}\ G_n\ l, \tag{92}$$

$$M_{p3} = \delta_{p3}\ M_{n3} = 0{,}319\ \delta_{p3}\ G_n\ l \tag{93}$$

şi

$$M_{p4} = \delta_{p4}\ M_{n4} = 0{,}505\ \delta_{p4}\ G_n\ l. \tag{94}$$

După înlocuiri, ecuaţia (91) devine

$$0{,}620\ \delta_{p2} + 0{,}638\ \delta_{p3} + 0{,}505\ \delta_{p4} = 1{,}900, \tag{95}$$

în care necunoscutele sînt densităţile mecanice δ_{p2}, δ_{p3} şi δ_{p4}.

Adăugînd egalităţile

$$\delta_{p2} = \delta_{p3} = \delta_{p4} \tag{96}$$

la ecuaţia (95), se obţine un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute, a cărui soluţie este

$$\delta_{p2} = \delta_{p3} = \delta_{p4} = 1{,}077. \tag{97}$$

Cazul 3. Grinda este astfel armată încît numai deschiderea notată cu III se transformă în mecanism sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul.

Ecuația de echilibru plastic a mecanismului corespunzător deschiderii notate cu III este (fig. 5*b*)

$$2M_{p4}\theta + 2M_{p5}\theta = (G_c + P_c)\left(\frac{l}{2}\theta + 2\frac{l}{4}\theta\right) \tag{98}$$

sau

$$M_{p4} + M_{p5} = 0{,}950\, G_n\, l. \tag{99}$$

Momentele plastice din ecuația (99) au expresiile

$$M_{p4} = \delta_{p4}\, M_{n4} = 0{,}505\, \delta_{p4}\, G_n\, l \tag{100}$$

și

$$M_{p5} = \delta_{p5}\, M_{n5} = 0{,}380\, \delta_{p5}\, G_n\, l. \tag{101}$$

După înlocuiri, ecuația (99) devine

$$0{,}505\, \delta_{p4} + 0{,}380\, \delta_{p5} = 0{,}950, \tag{102}$$

în care necunoscutele sînt densitățile mecanice δ_{p4} și δ_{p5}.

Adăugînd egalitatea

$$\delta_{p4} = \delta_{p5} \tag{103}$$

la ecuația (102), se obține un sistem de două ecuații cu două necunoscute, a cărui soluție este

$$\delta_{p4} = \delta_{p5} = 1{,}073. \tag{104}$$

Cazurile tratate mai sus demonstrează posibilitatea egalării între ele a densităților mecanice corespunzătoare secțiunilor critice ale unei structuri de beton armat atunci cînd aceasta are un singur mecanism efectiv de cedare.

TEOREMA 2. *Limita inferioară a densităților mecanice corespunzătoare secțiunilor critice ale unui mecanism X al unei structuri de beton armat atinge valoarea ei maximă atunci cînd toate densitățile mecanice sînt egale între ele.*

Demonstrație. Fie s numărul secțiunilor critice ale mecanismului X și i o secțiune critică oarecare a acestuia, ($i = 1, 2, \ldots, s$).

Ecuația de echilibru plastic a mecanismului considerat este

$$\sum_{i=1}^{i=s} M_{pi}\theta_i = L_G + L_P, \tag{105}$$

în care

M_{pi} este momentul plastic al secțiunii critice i,

L_G — lucrul mecanic virtual al încărcărilor permanente de calcul,

L_P — lucrul mecanic virtual al încărcărilor temporare de calcul,

θ_i — rotirea virtuală a articulației plastice din secțiunea critică i.

Ținînd seama de relația (3), ecuația (105) poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{i=1}^{i=s} \delta_{pi} M_{ni} \theta_i = L_G + L_P, \tag{106}$$

unde singurele necunoscute sînt densitățile mecanice $\delta_{p1}, \delta_{p2}, \ldots, \delta_{ps}$.

Deoarece numărul secțiunilor critice ale unui mecanism oarecare de cedare este întotdeauna mai mare decît unitatea ($s > 1$), rezultă că numărul de soluții ale densităților mecanice care satisfac ecuația (106), este, teoretic, infinit. Conform teoremei 1, printre aceste soluții există însă întotdeauna una particulară în care toate densitățile mecanice $\delta_{p1}, \delta_{p2}, \ldots, \delta_{ps}$ sînt egale între ele.

Fie δ_p^x valoarea comună a acestor densități mecanice, adică

$$\delta_{p1} = \delta_{p2} = \ldots = \delta_{ps} = \delta_p^x. \tag{107}$$

Luînd în considerație egalitățile (107), din ecuația (106) se deduce

$$\delta_p^x = \frac{L_G + L_P}{\sum_{i=1}^{i=s} M_{ni} \theta_i}. \tag{108}$$

Ecuația (106) și relația (108) arată că orice altă soluție a densităților mecanice corespunzătoare secțiunilor critice ale mecanismului X diferită de cea dată de egalitățile (107) trebuie să conțină în mod necesar cel puțin o densitate mecanică mai mare decît δ_p^x și deci cel puțin o densitate mecanică mai mică decît δ_p^x, pentru ca ecuația de echilibru plastic (106) să poată fi satisfăcută.

Pentru exemplificare se consideră una dintre deschiderile notate cu I a grinzii din figura 5*b* și se presupune că aceasta se transformă în mecanism sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul. Condiția de echilibru a deschiderii I în momentul formării mecanismului de cedare este reprezentată de ecuația (87). Soluțiile acestei ecuații sînt trasate în diagrama din figura 6. Ținînd seama de relația (89), soluția în care densitățile mecanice ale secțiunilor critice 1 și 2 ale deschiderii considerate sînt egale între ele este

$$\delta_p^I = \delta_{p1} = \delta_{p2} = 1{,}167. \tag{109}$$

Din figura 6 rezultă că pentru orice valoare a densității mecanice δ_{p2} mai mare decît 1,167 se obține o densitate mecanică δ_{p1} mai mică decît 1,167, iar pentru orice valoare a densității mecanice δ_{p1} mai mare decît 1,167 se obține o densitate mecanică δ_{p2} mai mică decît 1,167.

Cele de mai sus arată că δ_p^{I} este valoarea maximă a limitei inferioare a densităţilor mecanice corespunzătoare secţiunilor critice ale deschiderii I din figura 5*b*.

Demonstraţia făcută, inclusiv exemplificarea ei, dovedesc că întotdeauna δ_p^{X} este valoarea maximă a limitei inferioare a densităţilor mecanice corespunzătoare secţiunilor critice ale mecanismului X, ($X = \mathrm{I}.\ \mathrm{I}, \ldots$), teorema 2 fiind astfel justificată.

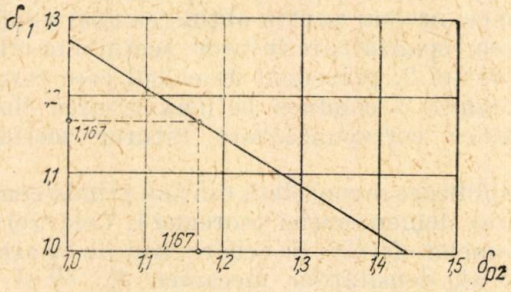


Fig. 6

Teorema 3. *O structură de beton armat cu două sau mai multe mecanisme efective de cedare admite întotdeauna o soluţie a momentelor plastice caracterizată prin* $n_s - n_e + 1$ *densităţi mecanice egale între ele, restul de* $n_e - 1$ *densităţi mecanice fiind mai mari decît valoarea comună a celor* $n_s - n_e + 1$ *densităţi mecanice.*

Observaţie preliminară. Se consideră o soluţie oarecare a densităţilor mecanice corespunzătoare celor s secţiuni critice ale unui mecanism oarecare X al structurii, care satisface ecuaţia de echilibru plastic a acestuia. O altă soluţie poate fi dedusă din prima prin micşorarea densităţilor mecanice ale unui număr de secţiuni critice egal cu $s - 1$. Din ecuaţia (106) rezultă că densitatea mecanică a secţiunii critice rămase va avea o valoare mai mare decît cea din soluţia iniţială pentru ca ecuaţia de echilibru plastic a mecanismului X să poată fi satisfăcută.

Demonstraţie. Conform teoremei 1, se consideră că structura admite pe rînd numai unul dintre mecanismele ei de cedare. În această situaţie, pentru fiecare mecanism în parte se poate efectua egalarea între ele a densităţilor mecanice corespunzătoare secţiunilor critice ale mecanismului respectiv. Fie $\delta_p^{\mathrm{I}}, \delta_p^{\mathrm{II}}, \delta_p^{\mathrm{III}}, \ldots, \delta_p^{L}$ valorile comune ale densităţilor mecanice corespunzătoare secţiunilor critice ale mecanismelor efective de cedare I, II, III, ..., L pe care le admite structura, calculate cu relaţia (108).

Se consideră, de exemplu, că aceste valori satisfac inegalităţile

$$\delta_p^{\mathrm{I}} < \delta_p^{\mathrm{II}} < \delta_p^{\mathrm{III}} < \ldots < \delta_p^{L}. \tag{110}$$

În această situaţie se neglijează iniţial cîte o secţiune critică aparţinînd fiecăruia din mecanismele II, III, ..., L, iar densităţile mecanice ale secţiunilor critice rămase se egalează cu valoarea comună δ_p^{I} a densităţilor mecanice corespunzătoare tuturor secţiunilor critice ale mecanismului I

(δ_p^{I} fiind valoarea cea mai mică a densităţilor mecanice δ_p^{I}, δ_p^{II}, δ_p^{III}, ..., δ_p^{L}). Ca rezultat al acestei operaţii se obţin, în final, $n_s - n_e + 1$ densităţi mecanice egale cu δ_p^{I} şi $n_e - 1$ densităţi mecanice mai mari decît δ_p^{I}. Această concluzie este consecinţa firească a faptului că densitatea mecanică a fiecărei secţiuni critice neglijate iniţial (numărul tuturor secţiunilor critice neglijate iniţial fiind egal cu $n_e - 1$) se încadrează în observaţia preliminară care precedă această demonstraţie.

Egalitatea dintre cele $n_s - n_e + 1$ densităţi mecanice, a căror valoare comună este δ_p^{I}, dă naştere la $n_s - n_e$ ecuaţii suplimentare, al căror număr este tocmai cel necesar pentru obţinerea unei soluţii a valorilor densităţilor mecanice corespunzătoare tuturor secţiunilor critice ale structurii.

Conform teoremei 2, procedeul de calcul care rezultă din cuprinsul demonstraţiei teoremei 3 conduce la maximizarea limitei inferioare a densităţilor mecanice corespunzătoare tuturor secţiunilor critice ale structurii.

Pentru exemplificare se consideră din nou grinda continuă din figura 5, folosită la ilustrarea demonstraţiei teoremei 1. Cele trei cazuri de formare separată a mecanismelor efective de cedare tratate cu acel prilej conduce la următoarele valori ale densităţilor mecanice δ_p^{I}, δ_p^{II} şi δ_p^{III}, corespunzătoare deschiderilor I, II şi III ale grinzii :

$$\begin{aligned} \delta_p^{\mathrm{I}} &= 1{,}167, \\ \delta_p^{\mathrm{II}} &= 1{,}078, \\ \delta_p^{\mathrm{III}} &= 1{,}073. \end{aligned} \tag{111}$$

Ele reprezintă o reproducere a rezultatelor furnizate de relaţiile (88), (96) şi (103).

Densităţile mecanice de mai sus satisfac inegalităţile

$$\delta_p^{\mathrm{III}} < \delta_p^{\mathrm{II}} < \delta_p^{\mathrm{I}}. \tag{112}$$

Conform teoremei 3, în faza iniţială de calcul se exclude cîte o secţiune critică aparţinînd fiecăruia din mecanismele I şi II, iar densităţile mecanice ale celorlalte secţiuni critice ale acestor două mecanisme se egalează cu δ_p^{III}, care reprezintă valoarea comună a densităţilor mecanice corespunzătoare tuturor secţiunilor critice ale mecanismului III. Secţiunile critice neglijate iniţial sînt în cazul de faţă cele notate cu 1 şi 3 (fig. 5 *a*).

Restul secţiunilor critice ale grinzii au următoarea valoare comună :

$$\delta_{p2} = \delta_{p4} = \delta_{p5} = \delta_p^{\mathrm{III}} = 1{,}073. \tag{113}$$

Momentele plastice ale secţiunilor critice 2, 4 şi 5, calculate cu relaţia generală

$$M_{pi} = \delta_{pi} M_{ni}, \tag{114}$$

în care momentele nominale sînt date de relaţiile (82), au valorile

$$M_{p2} = 1{,}073 \times 0{,}620\, G_n\, l = 0{,}665\, G_n\, l, \tag{115}$$

$$M_{p4} = 1{,}073 \times 0{,}505\, G_n\, l = 0{,}542\, G_n\, l \tag{116}$$

şi

$$M_{p5} = 1{,}073 \times 0{,}380\, G_n\, l = 0{,}408\, G_n\, l. \tag{117}$$

Momentele plastice ale secţiunilor critice 1 şi 3 se obţin din ecuaţiile de echilibru plastic (84) şi (91) ale deschiderilor I şi II ale grinzii, după cum urmează :

$$M_{p1} = 0{,}950\, G_n\, l - 0{,}5\, M_{p2} = 0{,}618\, G_n\, l \tag{118}$$

şi

$$M_{p3} = 0{,}950\, G_n\, l - 0{,}5\, (M_{p2} + M_{p4}) = 0{,}347\, G_n\, l. \tag{119}$$

Densităţile mecanice ale secţiunilor critice 1 şi 3 au valorile

$$\delta_{p1} = \frac{M_{p1}}{M_{n1}} = 1{,}266 \tag{120}$$

şi

$$\delta_{p3} = \frac{M_{p3}}{M_{n3}} = 1{,}088. \tag{121}$$

4.3. PRINCIPIUL DENSITĂŢILOR MECANICE MAXIME

Rezultatul practic al teoriei maximizării densităţilor mecanice este reprezentat de *principiul densităţilor mecanice maxime*, care indică modul de efectuare a calculului plastic al unei structuri static nedeterminate de beton armat. Conform acestui principiu, *numărul de ecuaţii suplimentare necesare pentru efectuarea calculului plastic al unei structuri de beton armat se obţine prin egalarea între ele a unui număr corespunzător de densităţi mecanice ale secţiunilor critice, astfel încît pentru restul densităţilor mecanice să se obţină în final valori mai mari decît valoarea comună a densităţilor mecanice care intră în alcătuirea ecuaţiilor suplimentare.*

Aplicarea principiului densităţilor mecanice maxime presupune :

— determinarea în prealabil a momentelor nominale corespunzătoare secţiunilor critice ale structurii. Această operaţie implică efectuarea calculului elastic al structurii pentru toate schemele defavorabile de încărcare formate de încărcările permanente şi temporare luate cu valorile lor nominale ;

— stabilirea tuturor mecanismelor efective de cedare ale structurii, folosind în acest scop metodele teoriei plastice simple a structurilor ;

— aplicarea teoriei densităţilor mecanice maxime pentru determinarea momentelor plastice corespunzătoare secţiunilor critice ale structurii.

Cele de mai sus arată că principiul densităţilor mecanice maxime completează teoria plastică simplă aplicată structurilor static nedeterminate de beton armat cu două elemente fundamentale, constînd din :

— considerarea momentelor nominale ca valori de referinţă în procesul de determinare a momentelor plastice şi

— maximizarea densităţilor mecanice ale secţiunilor critice ca criteriu de determinare a momentelor plastice.

Prin aceste două elemente fundamentale aduse de principiul densităţilor mecanice maxime se elimină factorul arbitrar din modul de efectuare a calculului plastic al structurilor de beton armat şi se exclude posibilitatea obţinerii unor soluţii necorespunzătoare din punct de vedere practic.

Pentru ilustrarea efectului favorabil al principiului densităţilor mecanice maxime se consideră o grindă continuă cu secţiunea constantă, simplu rezemată la extremităţi, avînd două deschideri egale. Grinda este solicitată de încărcări permanente şi temporare aplicate concentrat în fiecare deschidere, punctele de aplicaţie împărţind deschiderile în cîte trei părţi egale. Încărcările permanente sînt egale între ele şi se aplică simultan în ambele deschideri ale grinzii. Încărcările temporare sînt, de asemenea,egale între ele, dar pot fi aplicate fie în una fie în ambele deschideri, formînd astfel două scheme de încărcare. Secţiunile critice ale grinzii notate cu 1 şi 2, sînt cele în care momentele elastice au valorile cele mai mari. Aceste secţiuni sînt situate pe reazemul central şi în fiecare deschidere a grinzii, în dreptul punctului de aplicaţie a încărcărilor cel mai apropiat de reazemul marginal.

Schema generală a grinzii este reprezentată în figura 7.

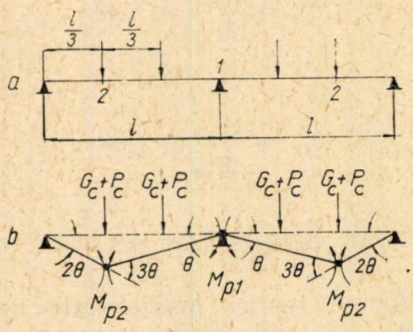


Fig. 7

Ca încărcări de referinţă se aleg încărcarea permanentă şi ncărcarea temporară, aplicate concentrat într-unul din punctele care împart fiecare deschidere în trei părţi egale.

Conform standardului 8000—67 [3], pentru coeficienţii de supraîncărcare de calcul se iau valorile

$$\lambda_c = \frac{G_c}{G_n} = 1{,}1 \tag{122}$$

şi

$$\mu_c = \frac{P_c}{P_n} = 1{,}4, \tag{123}$$

G_n şi G_c fiind valorile nominală şi de calcul ale încărcării permanente de referinţă, iar P_n şi P_c valorile nominală şi de calcul ale încărcării temporare de referinţă.

În acest exemplu, raportul dintre încărcările P_n şi G_n se ia egal cu valoarea

$$H_n = \frac{P_n}{G_n} = 1.$$

Datorită simetriei de alcătuire, grinda are doar un singur mecanism efectiv de cedare, care se notează cu I (fig. 7*b*).

Momentele nominale ale secțiunilor critice au expresiile

$$M_{n1} = (a_1 + b_1 H_n) G_n l \tag{125}$$

și

$$M_{n2} = (a_2 + b_2 H_n) G_n l, \tag{126}$$

unde l este lungimea fiecărei deschideri a grinzii, iar coeficienții a_1, a_2, b_1 și b_2 au semnificațiile date în cadrul exemplului de calcul de la punctul 3.4, valorile lor fiind [18]

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}333\,; \; a_2 = 0{,}222, \\ b_1 &= 0{,}333\,; \; b_2 = 0{,}278. \end{aligned} \tag{127}$$

Ținînd seama de relațiile (124) și (127), pentru momentele nominale se obțin următoarele valori :

$$M_{n1} = 0{,}666\, G_n l \tag{128}$$

și

$$M_{n2} = 0{,}500\, G_n l. \tag{192}$$

Momentele plastice ale secțiunilor critice au expresiile

$$M_{p1} = \delta_{p1} M_{n1} = 0{,}666\, \delta_{p1} G_n l \tag{130}$$

și

$$M_{p2} = \delta_{p2} M_{n2} = 0{,}500\, \delta_{p2} G_n l. \tag{131}$$

Ecuația de echilibru plastic a deschiderii I este (fig. 7*b*)

$$M_{p1}\theta + 3M_{p2}\theta = (G_c + P_c)\left(\frac{2l}{3}\theta + \frac{l}{3}\theta\right) \tag{132}$$

sau

$$M_{p1} + 3M_{p2} = 2{,}500\, G_n l. \tag{133}$$

Considerînd relațiile (130) și (131), ecuația (133) devine

$$0{,}666\, \delta_{p1} + 1{,}500\, \delta_{p2} = 2{,}500. \tag{134}$$

Ecuația (134) este reprezentată în diagrama din figura 8. Această diagramă arată că într-un calcul plastic efectuat exclusiv pe baza teoriei plastice simple, alături de soluțiile acceptabile din punct de vedere practic, definite prin condițiile $\delta_{p1} > 1$ și $\delta_{p2} > 1$, care conduc la momente plastice mai mari decît momentele nominale respective, există soluții inacceptabile, în care una dintre densitățile mecanice δ_{p1} și δ_{p2} este subunitară ($\delta_{p1} < 1$ sau $\delta_{p2} < 1$).

Această situație este însă complet eliminată de principiul densităților mecanice maxime, care conduce la soluția

$$\delta_{p1} = \delta_{p2} = 1{,}154 > 1. \tag{135}$$

Pe baza principiului densităților mecanice maxime pot fi stabilite în prealabil soluțiile densităților mecanice corespunzătoare secțiunilor critice ale structurilor de beton armat de orice tip, în funcție de raportul încărcărilor nominale H_n și de valorile coeficienților de supraîncărcare de calcul,

în ipoteza transformării structurilor în mecanisme sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul. Ca și în cazul structurilor de oțel, prezentarea sub formă de tabele a soluțiilor densităților mecanice date de principiul densităților mecanice maxime ar elimina nece-

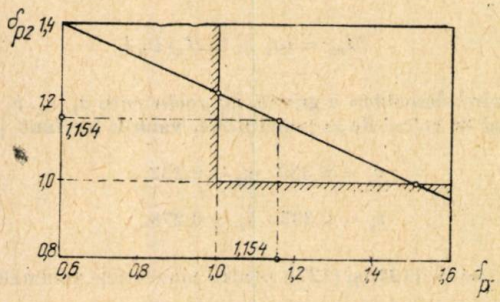


Fig. 8

sitatea efectuării calculului plastic propriu-zis al structurilor, ceea ce ar constitui un avantaj esențial în proiectarea curentă din punctul de vedere al economiei de timp.

4.4. APLICAȚII ALE PRINCIPIULUI DENSITĂȚILOR MECANICE MAXIME

Principiul densităților mecanice maxime are un caracter complet general, el fiind aplicabil oricărei structuri de beton armat ale cărei secțiuni critice sînt solicitate în principal la încovoiere.

În cele ce urmează se prezintă o sistematizare a modului de aplicare a principiului densităților mecanice maxime la calculul plastic al grinzilor continue, al cadrelor continue, al plăcilor continue armate pe o singură direcție și al plăcilor continue armate pe două direcții, solicitate de încărcări permanente și temporare aplicate vertical.

4.4.1. Grinzi continue, cadre continue și plăci continue armate pe o singură direcție

Cedarea grinzilor continue, a cadrelor continue și a plăcilor continue armate pe o singură direcție solicitate de încărcări permanente și temporare aplicate vertical se caracterizează prin transformarea în mecanism a uneia sau simultan a mai multora din deschiderile lor. Ca urmare, prima etapă a calculului plastic al acestor structuri, bazat pe principiul densităților mecanice maxime, constă în determinarea, conform teoremei 2, a densităților mecanice δ_p^{I}, δ_p^{II}, ... δ_p^{L} corespunzătoare deschiderilor distincte I, II, ..., L ale grinzii, cadrului sau plăcii respective.

Pentru stabilirea expresiei generale a acestor densități mecanice se consideră o deschidere oarecare X (X= I, II, ..., L), la care se fac următoarele notații (fig. 9 *a*):

$j-1$, j, $j+1$ — secțiunile critice de pe reazemul din stînga, din cîmpul și de pe reazemul din dreapta ale deschiderii;

$M_{nj-1}, M_{nj}, M_{nj+1}$ — valorile absolute ale momentelor nominale produse în secţiunile critice $j-1$, j şi $j+1$ de încărcările permanente şi temporare luate cu valorile lor nominale;

$M_{pj-1}, M_{pj}, M_{pj+1}$ — valorile absolute ale momentelor plastice din secţiunile critice $j-1$, j şi $j+1$;

$\delta_{pj-1}, \delta_{pj}, \delta_{pj+1}$ — densităţile mecanice ale secţiunilor critice $j-1$, j şi $j+1$.

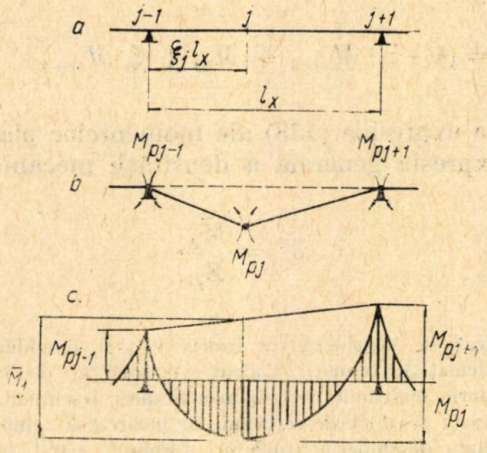


Fig. 9

Conform relaţiei generale (114), momentele plastice ale secţiunilor critice $j-1$, j şi $j+1$ pot fi scrise astfel:

$$\begin{aligned} M_{pj-1} &= \delta_{pj-1} M_{nj-1}, \\ M_{pj} &= \delta_{pj} M_{nj}, \\ M_{pj+1} &= \delta_{pj+1} M_{nj+1}. \end{aligned} \tag{136}$$

Se egalează între ele densităţile mecanice ale secţiunilor critice $j-1$, j şi $j+1$ şi se notează cu δ_p^x valoarea lor comună, adică

$$\delta_{pj-1} = \delta_{pj} = \delta_{pj+1} = \delta_p^x. \tag{137}$$

Momentele plastice devin în acest caz

$$\begin{aligned} M_{pj-1} &= \delta_p^x M_{nj-1}, \\ M_{pj} &= \delta_p^x M_{nj}, \\ M_{pj+1} &= \delta_p^x M_{nj+1}. \end{aligned} \tag{138}$$

Mărimea densităţii mecanice δ_p^x se obţine din ecuaţia de echilibru plastic a deschiderii X, care poate fi scrisă sub forma (fig. 9*b*, *c*)

$$(1-\xi_j) M_{pj-1} + M_{pj} + \xi_j M_{pj+1} = \overline{M}_j, \tag{139}$$

în care

$\overline{M}_j$ este momentul încovoietor în dreptul secţiunii critice j, produs de încărcările permanente şi temporare luate cu valorile lor de calcul în ipoteza simplei rezemări a deschiderii X la ambele ei capete,

ξ_j — raportul dintre distanţa cuprinsă între secţiunile critice $j-1$ şi j şi lungimea l_x a deschiderii X.

Folosind notaţia

$$Z_j = (1-\xi_j)\, M_{nj-1} + M_{nj} + \xi_j\, M_{nj+1} \tag{140}$$

şi ţinînd seama de expresiile (138) ale momentelor plastice, din ecuaţia (139) se obţine expresia generală a densităţii mecanice δ_p^X sub forma

$$\delta_p^X = \frac{\overline{M}_j}{Z_j}. \tag{141}$$

Pentru exmplificare se consideră un cadru cu trei deschideri egale şi un singur nivel, avînd stîlpii articulaţi în fundaţii. Cadrul este solicitat de încărcări permanente şi temporare aplicate uniform distribuit pe lungimea fiecărei deschideri. Încărcarea permanentă se aplică simultan în toate deschiderile cadrului, iar încărcarea temporară poate acţiona în una, în două, sau în toate deschiderile cadrului, formînd astfel toate schemele posibile de încărcare. Secţiunile critice ale cadrului sînt situate în mijlocul fiecărei deschideri şi la legătura dintre rigle şi stîlpi, ele fiind numerotate de la 1 la 5.

Schema generală a cadrului este reprezentată în figura 10 *a*, unde cu l s-a notat lungimea fiecărei deschideri, iar cu h înălţimea fiecărui stîlp. Ca încărcări de referinţă se iau încărcarea permanentă şi încărcarea temporară aplicate pe unitatea de lungime a riglelor cadrului.

Conform standardului 8000—67 [3], pentru coeficienţii de supraîncărcare de calcul se iau următoarele valori :

$$\lambda_c = \frac{g_c}{g_n} = 1{,}1 \tag{142}$$

şi

$$\mu_c = \frac{p_c}{p_n} = 1{,}4, \tag{143}$$

unde g_n şi g_c sînt valorile nominală şi de calcul ale încărcării permanente de referinţă, iar p_n şi p_c sînt valorile nominală şi de calcul ale încărcării temporare de referinţă.

Raportul dintre încărcările p_n şi g_n se ia egal cu valoarea

$$h_n = \frac{p_n}{g_n} = 1{,}5. \tag{144}$$

Datorită simetriei de alcătuire, cadrul are numai două deschideri distincte, notate cu I şi II (fig. 10*a*),

Momentul nominal într-o secțiune critică i a cadrului ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) are expresia

$$M_{ni} = (a_i + b_i\, h_n)\, g_n l^2 \tag{145}$$

unde coeficienții a_i și b_i au semnificațiile date în cuprinsul exemplului de calcul de la punctul 3.4.

Fie J_r momentul de inerție al secțiunilor riglelor și f_s momentul de inerție al secțiunilor stîlpilor.

Coeficienții a_i și b_i sînt dați în manualele pentru calculul construcțiilor, ca, de exemplu, *Manualul pentru beton armat* [19], în funcție de coeficientul

$$k = \frac{J_r\, h}{J_s\, l}. \tag{146}$$

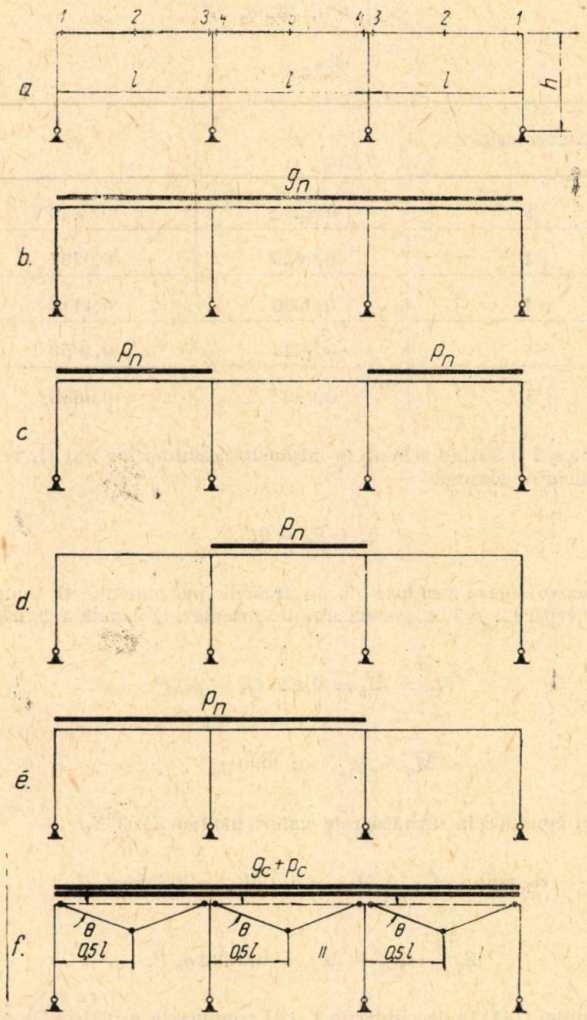


Fig. 10

Tabela 4 conține valorile coeficienților a_i și b_i, luați din lucrarea [19] în ipoteza că parametrul k dat de relația (146) este egal cu 2. Coeficienții a_i corespund schemei de încărcare din figura 10 *b*, iar coeficienții b_i schemelor de încărcare din figura 10 *c*, *d*, *e*.

Folosind relaţia (144) şi cifrele cuprinse în tabela 4, pentru momentele nominale ale cadrului se obţin următoarele valori :

$$M_{n1} = 0{,}0731\ g_n l^2,$$

$$M_{n2} = 0{,}1825\ g_n l^2,$$

$$M_{n3} = 0{,}2660\ g_n l^2, \tag{147}$$

$$M_{n4} = 0{,}2510\ g_n l^2,$$

$$M_{n5} = 0{,}1322\ g_n l^2.$$

Tabela 4

Secţiunea critică i	a_i	b_i
1	0,0252	0,0319
2	0,0629	0,0797
3	0,0990	0,1113
4	0,0923	0,1058
5	0,0327	0,0663

Secţiunile critice 2 şi 5 fiind situate în mijlocul deschiderilor I şi II, rezultă pentru coeficienţii ξ_2 şi ξ_5 valoarea comună

$$\xi_2 = \xi_5 = 0{,}5. \tag{148}$$

Momentele încovoietoare produse de încărcările permanente şi temporare de calcul în dreptul secţiunilor critice 2 şi 5 în ipoteza simplei rezemări la capete a riglelor respective sînt date de relaţiile

$$\overline{M}_2 = \overline{M}_5 = 0{,}125\,(g_c + p_c)\,l^2 \tag{149}$$

sau

$$\overline{M}_2 = \overline{M}_5 = 0{,}4000\ g_n l^2. \tag{150}$$

Expresia (140) conduce la următoarele valori pentru Z_2 şi Z_5 :

$$Z_2 = 0{,}5\,M_{n1} + M_{n2} + 0{,}5\,M_{n3} = 0{,}3554\ g_n l^2 \tag{151}$$

şi

$$Z_5 = M_{n4} + M_{n5} = 0{,}3832\ g_n l^2. \tag{152}$$

Aplicarea formulei (141) la deschiderile I şi II conduce la următoarele rezultate :

$$\delta_p^{\mathrm{I}} = \frac{\overline{M}_2}{Z_2} = 1{,}125 \tag{153}$$

și

$$\delta_p^{II} = \frac{\overline{M}_5}{Z_5} = 1{,}044. \tag{154}$$

Densitățile mecanice δ_p^I și δ_p^{II} satisfac inegalitatea

$$\delta_p^{II} < \delta_p^I. \tag{155}$$

Conform teoremei 3 a teoriei densităților mecanice maxime, se exclude inițial din calcul secțiunea critică 2, care aparține deschiderii I, iar densitățile mecanice ale celorlalte secțiuni critice se iau egale cu δ_p^{II}, adică

$$\delta_{p1} = \delta_{p3} = \delta_{p4} = \delta_{p5} = \delta_p^{II} = 1{,}044. \tag{156}$$

Momentele plastice ale secțiunilor critice 1, 3, 4 și 5 sînt în acest caz următoarele :

$$\begin{aligned} M_{p1} &= 1{,}044 \times 0{,}0731\ g_n l^2 = 0{,}0763\ g_n l^2, \\ M_{p3} &= 1{,}044 \times 0{,}2660\ g_n l^2 = 0{,}2777\ g_n l^2, \\ M_{p4} &= 1{,}044 \times 0{,}2510\ g_n l^2 = 0{,}2620\ g_n l^2, \\ M_{p5} &= 1{,}044 \times 0{,}1322\ g_n l^2 = 0{,}1380\ g_n l^2. \end{aligned} \tag{157}$$

Momentul plastic al secțiunii critice 2 se obține din ecuația de echilibru plastic a deschiderii I, care este (fig. 10 *f*)

$$M_{p1}\,\theta + 2M_{p2}\,\theta + M_{p3}\,\theta = 0{,}2500\,(g_c + p_c)\,l^2\,\theta \tag{158}$$

sau

$$M_{p1} + 2\,M_{p2} + M_{p3} = 0{,}8000\ g_n l^2. \tag{159}$$

Din această ecuație se deduce

$$M_{p2} = 0{,}2230\ g_n l^2. \tag{160}$$

Densitatea mecanică a secțiunii critice 2 este

$$\delta_{p2} = \frac{M_{p2}}{M_{n2}} = 1{,}198. \tag{161}$$

4.4.2. Plăci continue armate pe două direcții

Se consideră o placă continuă armată pe două direcții, rezemată pe tot conturul, alcătuită din panouri dreptunghiulare. Fie I, II, ... ,numerele de ordine ale panourilor distincte ale plăcii, fiecare din acestea transformîndu-se în mecanism sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul.

Pentru stabilirea expresiei generale a densităților mecanice δ_p^{I}, δ_p^{II}, ... se consideră panoul X al plăcii, ($X = I, II, \ldots$).

Se fac următoarele notații (fig. 11):

$j-1$, j, $j+1$ — secțiunile critice de pe reazemul din stînga, din cîmpul și de pe reazemul din dreapta pe direcția deschiderii l_j a panoului;

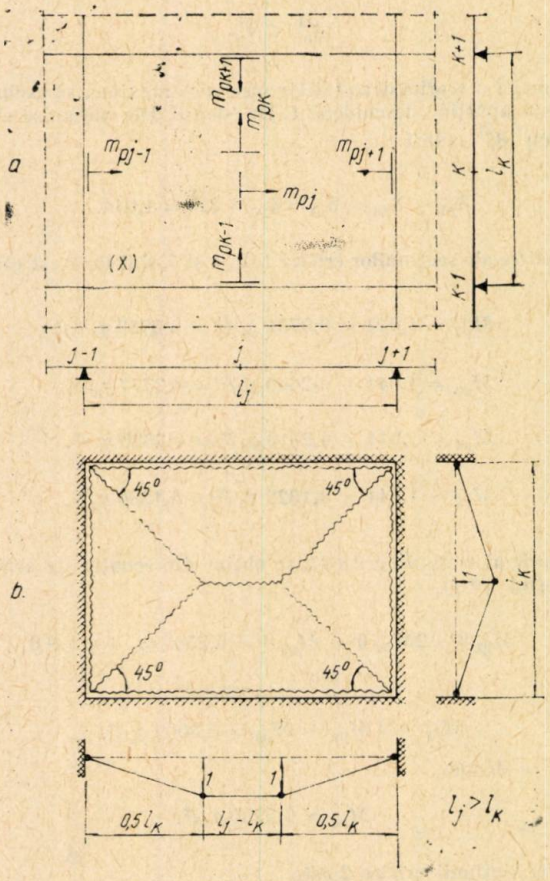


Fig. 11

$k-1$, k, $k+1$ — secțiunile critice de pe reazemul din stînga, din cîmpul și de pe reazemul din dreapta pe direcția deschiderii l_k a panoului;

l_j, l_k — lungimile deschiderilor panoului pe cele două direcții de armare;

$m_{nj-1}, m_{nj}, m_{nj+1}$ — valorile absolute ale momentelor nominale pe unitatea de lățime, corespunzătoare secțiunilor critice $j-1$, j și $j+1$;

$m_{nk-1}, m_{nk}, m_{nk+1}$ — valorile absolute ale momentelor nominale pe unitatea de lățime, corespunzătoare secțiunilor critice $k-1$, k și $k+1$;

$m_{pj-1}, m_{pj}, m_{pj+1}$ — valorile absolute ale momentelor plastice pe unitatea de lățime, corespunzătoare secțiunilor critice $j-1$, j și $j+1$;

$m_{pk-1}, m_{pk}, m_{pk+1}$ — valorile absolute ale momentelor plastice pe unitatea de lățime, corespunzătoare secțiunilor critice $k-1$, k și $k+1$;

δ_{pj-1}, δ_{pj}, δ_{pj+1} — densitățile mecanice ale secțiunilor critice $j-1$, j și $j+1$;

δ_{pk-1}, δ_{pk}, δ_{pk+1} — densitățile mecanice ale secțiunilor critice $k-1$, k și $k+1$.

Conform relației generale

$$m_{pi} = \delta_{pi}\, m_{ni}, \tag{162}$$

momentele plastice din secțiunile critice ale panoului considerat au următoarele expresii:

$$\begin{aligned} m_{pj-1} &= \delta_{pj-1}\, m_{nj-1}, \\ m_{pj} &= \delta_{pj}\, m_{nj}, \\ m_{pj+1} &= \delta_{pj+1}\, m_{nj+1} \end{aligned} \tag{163}$$

și

$$\begin{aligned} m_{pk-1} &= \delta_{pk-1}\, m_{nk-1}, \\ m_{pk} &= \delta_{pk}\, m_{nk}, \\ m_{pk+1} &= \delta_{pk+1}\, m_{nk+1}. \end{aligned} \tag{164}$$

Fie δ_p^X densitatea mecanică a secțiunilor critice ale panoului X, obținută pe baza teoremei 2, adică

$$\delta_{pj-1} = \delta_{pj} = \delta_{pj+1} = \delta_p^X \tag{165}$$

și

$$\delta_{pk-1} = \delta_{pk} = \delta_{pk+1} = \delta_p^X. \tag{166}$$

În această situație, expresiile (163) și (164) devin

$$\begin{aligned} m_{pj-1} &= \delta_p^X\, m_{nj-1}, \\ m_{pj} &= \delta_p^X\, m_{nj}, \\ m_{pj+1} &= \delta_p^X\, m_{nj+1} \end{aligned} \tag{167}$$

şi

$$m_{pk-1} = \delta_p^x m_{nk-1},$$

$$m_{pk} = \delta_p^x m_{nk}, \tag{168}$$

$$m_{pk+1} = \delta_p^x m_{nk+1}.$$

Mărimea densităţii mecanice δ_p^x se obţine din ecuaţia de echilibru plastic a panoului X. Pentru scrierea acestei ecuaţii se face observaţia că la calculul plastic al plăcilor armate pe două direcţii, rezemate pe tot conturul şi solicitate de încărcări permanente şi temporare uniform distribuite pe toată suprafaţa fiecărui panou, se ia în consideraţie, de regulă, o schemă aproximativă a mecanismului de cedare în care liniile pozitive de rupere care pătrund în colţurile panourilor formează unghiuri de 45° cu laturile adiacente [20]. Adoptarea unei astfel de scheme simplificate este justificată de faptul că erorile cu care se obţin valorile momentelor plastice nu depăşesc 3% [21].

Caracteristicile schemei aproximative a mecanismului de cedare al panoului X sînt indicate în figura 11.

Considerînd că deschiderile l_j şi l_k îndeplinesc condiţia

$$l_j > l_k, \tag{169}$$

ecuaţia de echilibru plastic a panoului X, obţinută pentru o deplasare virtuală egală cu unitatea a liniei pozitive de rupere paralele cu laturile de lungime l_j este

$$\frac{2}{l_k}(m_{pj-1} + 2\eta_j m_{pj} + m_{pj+1}) l_k + \tag{170}$$

$$\frac{2}{l_k}(m_{pk-1} + 2\eta_k m_{pk} + m_{pk+1}) l_j = L_g + L_p,$$

în care

L_g, L_p sînt lucrurile mecanice virtuale ale încărcărilor permanente şi temporare luate cu valorile lor de calcul,

η_j — raportul dintre aria armăturii intersectate de liniile pozitive de rupere pe direcţia deschiderii l_k a panoului şi produsul $A_j l_k$ ($\eta_j < 1$),

η_k — raportul dintre aria armăturii intersectate de liniile pozitive de rupere pe direcţia l_j a panoului şi produsul $A_k l_j$ ($\eta_k < 1$),

A_j, A_k — ariile armăturii corespunzătoare momentelor plastice m_{pj} şi m_{pk}.

Cu notaţiile

$$z_j = m_{nj-1} + 2\,\eta_j\,m_{nj} + m_{nj+1} \tag{171}$$

şi

$$z_k = m_{nk-1} + 2\,\eta_k\,m_{nk} + m_{kn+1} \tag{172}$$

şi ţinînd seama de relaţiile (167) şi (168), din ecuaţia (170) se obţine expresia generală a densităţii mecanice δ_p^x, sub forma

$$\delta_p^x = \frac{l_k\,(L_g + L_p)}{2\,(l_k\,z_j + l_j\,z_k)}\,. \tag{173}$$

Pentru exemplificare se consideră o placă continuă formată din două panouri egale de formă pătrată. Încărcările permanentă şi temporară care acţionează asupra plăcii sînt uniform distribuite pe suprafaţa fiecărui panou. Încărcarea permanentă se aplică simultan în ambele panouri, iar cea temporară poate acţiona într-unul sau în ambele panouri ale plăcii. Secţiunile critice ale plăcii sînt situate pe reazemul intermediar şi în mijlocul fiecărui panou pe ambele direcţii ale plăcii, fiind numerotate cu 1, 2 şi 3.

Schema generală a plăcii este redată în figura 12.

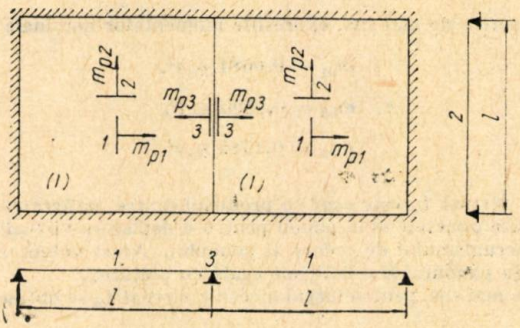


Fig. 12

Conform standardului 8000—67 [3], pentru coeficienţii de supraîncărcare de calcul se adoptă următoarele valori:

$$\lambda_c = \frac{g_c}{g_n} = 1{,}2 \tag{174}$$

şi

$$\mu_c = \frac{p_c}{p_n} = 1{,}4, \tag{175}$$

unde g_n şi g_c sînt valorile nominală şi de calcul ale încărcării permanente pe unitatea de suprafaţă, iar p_n şi p_c sînt valorile nominală şi de calcul ale încărcării temporare pe unitatea de suprafaţă.

Raportul dintre încărcările p_n şi g_n se ia cu valoarea

$$h_n = \frac{p_n}{g_n} = 1. \tag{176}$$

Datorită simetriei de alcătuire, placa are un singur panou distinct, notat cu I, căruia îi corespunde un singur mecanism efectiv de cedare (fig. 12).

Conform standardului 3599—52 [20], expresiile momentelor nominale corespunzătoare secţiunilor critice ale plăcii sînt

$$m_{n1} = \left(\frac{g_n + 0{,}5\, p_n}{K_{21}} + \frac{0{,}5\, p_n}{K_{11}} \right) l^2,$$

$$m_{n2} = \left(\frac{g_n + 0{,}5\, p_n}{K_{22}} + \frac{0{,}5\, p_n}{K_{12}} \right) l^2, \tag{177}$$

$$m_{n3} = \frac{1}{8}\, \alpha_{21}\, (g_n + p_n)\, l^2,$$

unde l este lungimea deschiderilor unui panou, iar K_{11}, K_{12}, K_{22} şi α_{21} sînt coeficienţi de influenţă, avînd următoarele valori [20]:

$$K_{11} = 27{,}4\,; \quad K_{12} = 27{,}4,$$
$$K_{21} = 29{,}9\,; \quad K_{22} = 36{,}7, \tag{178}$$
$$\alpha_{21} = 0{,}714.$$

Cu valorile numerice de mai sus, expresiile momentelor nominale devin

$$m_{n1} = 0{,}0684\ g_n\, l^2,$$
$$m_{n2} = 0{,}0590\ g_n\, l^2, \tag{179}$$
$$m_{n3} = 0{,}1785\ g_n\, l^2.$$

Lucrul mecanic virtual L_g este egal cu produsul dintre încărcarea g_c şi volumul deplasărilor efectuate de toate punctele unui panou pentru o deplasare virtuală egală cu unitatea a punctului central al mecanismului de cedare al panoului. Acest volum reprezintă o piramidă avînd ca bază suprafaţa panoului şi o înălţime egală cu unitatea.

Cu precizarea de mai sus, pentru lucrul mecanic virtual L_g se obţine expresia

$$L_g = \frac{1}{3}\, l^2 . 1 . g_c = \frac{g_c\, l^2}{3} = 0{,}4000\ g_n\, l^2, \tag{180}$$

Încărcarea temporară este de acelaşi tip cu încărcarea permanentă şi parcurge aceleaşi deplasări virtuale ca şi aceasta. În consecinţă, expresia lucrului mecanic virtual L_p este

$$L_p = \frac{1}{3}\, l^2 \cdot 1 \cdot p_c = \frac{p_c\, l^2}{3} = 0{,}4670\ g_n\, l^2. \tag{181}$$

În mod obişnuit, jumătate din armătura din cîmpuri se ridică pe reazeme la o distanţă egală cu $\frac{1}{5}$ de acestea. Pentru o astfel de armare, coeficienţii η_{ij} şi η_{ik} au valoarea

$$\eta_{ij} = \eta_{ik} = 0{,}8. \tag{182}$$

Folosind valorile numerice date de relaţiile (179) şi (182), notaţiile (171) şi (172) devin

$$z_1 = 0{,}288\,; \quad z_2 = 0{,}094. \tag{183}$$

Densitatea mecanică δ_p^I, calculată cu relaţia (173), are valoarea

$$\delta_p^I = \frac{0{,}867}{0{,}764} = 1{,}135. \tag{184}$$

Conform teoremelor 1 şi 2, densităţile mecanice ale secţiunilor critice 1, 2 şi 3 au valoarea comună

$$\delta_{p1} = \delta_{p2} = \delta_{p3} = \delta_p^I = 1{,}135, \tag{185}$$

iar momentele plastice ale acestor secţiuni, calculate cu relaţia (162), sînt următoarele:

$$\begin{aligned} m_{p1} &= 1{,}135 \times 0{,}0684\ g_n l^2 = 0{,}0776\ g_n l^2, \\ m_{p2} &= 1{,}135 \times 0{,}0590\ g_n\ l^2 = 0{,}0670\ g_n\ l^2, \\ m_{p3} &= 1{,}135 \times 0{,}1785\ g_n\ l^2 = 0{,}2025\ g_n\ l^2. \end{aligned} \tag{186}$$

4.4.3. Condiţiile calculului plastic al structurilor de beton armat

Teoria densităţilor mecanice maxime se bazează pe ipoteza transformării în mecanisme a structurilor static nedeterminate de beton armat pentru toate schemele defavorabile de încărcare formate de încărcările permanente şi temporare, luate cu valorile lor de calcul. Aceasta presupune că articulaţiile plastice formate în procesul creşterii încărcărilor de la valorile nominale la valorile lor de calcul au capacitatea de a dezvolta rotirile necesare pentru ca structurile să ajungă în stadiul de mecanism.

În realitate, deformaţia specifică de rupere la compresiune din încovoiere a betonului este relativ mică, ceea ce face ca articulaţiile plastice formate pe elementele de beton armat să aibă o capacitate de rotire limitată. În această situaţie este posibil ca în unele cazuri capacitatea de rotire a uneia sau a mai multor articulaţii plastice să fie depăşită înainte de transformarea structurii respective în mecanism, dînd astfel naştere la ruperi locale premature.

Pe de altă parte, este necesar ca în stadiul de exploatare armătura întinsă a secţiunilor critice să fie solicitată sub limita de curgere, pentru a se asigura comportarea elastică a structurilor în acest stadiu, iar deschiderile fisurilor produse de încărcările nominale să aibă mărimi inferioare celor admise prin prescripţiile oficiale de calcul, ca, de exemplu, standardul 8000—67 [3].

Prin urmare, la proiectarea structurilor de beton armat pe baza solicitărilor date de calculul plastic, apar, ca şi în cazul structurilor de oţel, condiţii de cedare şi de exploatare, care trebuie îndeplinite în procesul de determinare a momentelor plastice ale secţiunilor critice. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca pe baza unor studii speciale, fundamentate din punct de vedere teoretic şi experimental, să se stabilească valorile minime admise pentru densităţile mecanice ale secţiunilor critice (δ_{pi}^{min}).

Privită din punctul de vedere al condiţiilor de cedare şi de exploatare, teoria densităţilor mecanice maxime apare ca fiind cel mai favorabil punct de plecare pentru îndeplinirea acestor condiţii, întrucît ea conduce la valorile

cele mai mari posibile ale densităţilor mecanice în ipoteza transformării structurilor în mecanisme sub acţiunea încărcărilor permanente şi temporare de calcul.

În concluzie, dimensionarea secţiunilor critice ale unei structuri static nedeterminate de beton armat, calculate în domeniul plastic, trebuie făcută astfel încît densitatea mecanică a fiecărei secţiuni critice să fie cel puţin egală cu valoarea obţinută prin teoria densităţilor mecanice maxime, dar nu mai mică decît densitatea mecanică minimă admisă, rezultată din condiţiile de cedare şi de exploatare.

5. PROBLEME SPECIALE

5.1. TIPUL SOLICITĂRILOR

În această lucrare, conceptul densităţii mecanice a fost prezentat şi dezvoltat pentru structurile de oţel şi de beton armat ale căror secţiuni critice sînt solicitate în principal de momente încovoietoare, cum sînt, de exemplu, grinzile continue, cadrele, reţelele de grinzi, plăcile şi planşeele. Pentru astfel de structuri, densitatea mecanică a unei secţiuni critice este raportul dintre momentul capabil al secţiunii şi momentul elastic maxim produs în secţiunea critică respectivă de încărcările permanente şi temporare luate cu valorile lor nominale.

Conceptul densităţii mecanice poate fi extins însă şi la structuri static nedeterminate acţionate în principal de alte tipuri de solicitări. Ca exemplu se citează grinzile cu zăbrele static nedeterminate, la care solicitarea principală a barelor este forţa axială. Comportarea plastică a unor astfel de grinzi a putut fi urmărită cu ochiul liber pentru prima dată cu ajutorul cromoplasticităţii [22]. Cînd solicitarea dominantă este deci forţa axială, densitatea mecanică a secţiunilor unei bare este egală cu raportul dintre forţa axială pe care o poate suporta bara şi forţa axială maximă produsă de încărcările permanente şi temporare luate cu valorile lor nominale.

Se menţionează că, la structurile formate din bare solicitate în principal de forţe axiale, proiectarea trebuie astfel făcută încît comportarea plastică să aibă loc numai prin plastificarea barelor întinse, ca măsură principală pentru evitarea producerii fenomenelor de instabilitate a echilibrului înainte ca încărcările să atingă valorile lor de calcul [22].

5.2. EFECTE SUPLIMENTARE

Unul dintre factorii de care depinde mărimea densităţii mecanice a unei secţiuni critice solicitate în principal la încovoiere este momentul capabil al secţiunii critice respective. Mărimea acestui moment este influenţată defavorabil de solicitările secundare din secţiune, printre care se numără forţa tăietoare şi forţa axială. Cînd aceste solicitări secundare sînt mici, efectele lor pot fi practic neglijate, momentul capabil putînd fi luat egal cu cel corespunzător încovoierii pure a secţiunii. Există însă şi cazuri cînd mărimea solicitărilor secundare impune luarea în consideraţie a efectelor lor la stabilirea momentelor capabile ale secţiunilor critice pentru a se evita supraestimarea capacităţii de rezistenţă a structurilor. Ca exemplu se citează secţiunile critice formate pe stîlpii cadrelor, la care mărimea

momentului capabil este influențată de forța axială preluată de stîlpul respectiv.

Din cele de mai sus rezultă necesitatea determinării prin intermediul unor studii adecvate a efectului pe care solicitările secundare îl au asupra mărimii densităților mecanice ale secțiunilor critice atît pentru structurile din oțel, cît și pentru cele executate din beton armat.

5.3. POSIBILITĂȚI DE OPTIMIZARE

În calculul plastic al structurilor de oțel, mărimile densităților mecanice, determinate în ipoteza transformării structurilor în mecanisme sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul, sînt funcție de modulii de rigiditate ai secțiunilor barelor. Acești moduli se stabilesc în faza de predimensionare pe baza expresiilor adoptate pentru momentele plastice din secțiunile critice ale structurilor, folosind în acest scop formule practice care stabilesc legătura dintre momentele plastice și momentele de inerție ale secțiunilor. Este evident că fiecare soluție a modulilor de rigiditate ai barelor unei structuri conduce, în general, la o anumită soluție a valorilor densităților mecanice corespunzătoare secțiunilor critice ale structurii. Din punctul de vedere al comportării structurii în stadiul de exploatare, soluția optimă a densităților mecanice este aceea care conduce la maximizarea limitei inferioare a ansamblului format de aceste densități mecanice. Pentru structurile de oțel, această problemă de maximizare are un caracter special, soluționarea ei necesitînd efectuarea unor studii separate, orientate pe diferitele tipuri de structuri.

Ideea maximizării limitei inferioare a ansamblului format de densitățile mecanice ale secțiunilor critice a condus la stabilirea unei metode curente de calcul plastic al structurilor de beton armat, grație particularităților de comportare a acestora sub acțiunea încărcărilor. Suportul acestei metode îl constituie teoria densităților mecanice maxime.

Utilizarea teoriei densităților mecanice maxime se face în condițiile cunoașterii dimensiunilor geometrice ale secțiunilor critice, deci și a modulilor lor de rigiditate, ca urmare a operației de predimensionare. Întrucît predimensionarea poate fi făcută în diferite moduri, apare firească problema stabilirii dimensiunilor secțiunilor critice astfel încît densitățile mecanice ale tuturor acestor secțiuni să aibă aceeași valoare. Prin definiție, structurile de beton armat la care densitățile mecanice ale tuturor secțiunilor critice sînt egale între ele se numesc *structuri de egală densitate mecanică*. Determinarea caracteristicilor unor astfel de structuri necesită, de asemenea, efectuarea unor cercetări amănunțite, ale căror rezultate vor permite îmbunătățirea procesului de proiectare prin luarea în considerație a avantajelor prezentate de structurile de egală densitate mecanică.

6. ÎNCHEIERE

În cadrul acestei lucrări s-a introdus un concept nou de exprimare a gradului de siguranță pe care secțiunile critice ale structurilor static nedeterminate, precum și structurile în ansamblu, executate din materiale elasto-

plastice, îl prezintă în raport cu stadiul de atingere sau de epuizare a capacităţii lor de rezistenţă. Forma concretă pe care o îmbracă acest concept este cea a densităţii mecanice.

Densitatea mecanică apare în calculul de rezistenţă al secţiunilor critice şi al structurilor în ansamblu ca un factor de siguranţă general. Pe baza conceptului densităţii mecanice pot fi elaborate teorii noi ale siguranţei structurilor, precum şi metode practice de proiectare şi de verificare a capacităţii de rezistenţă a acestora. În acest sens, în lucrare se prezintă o metodă de calcul plastic al structurilor de oţel şi o teorie a calculului plastic al structurilor de beton armat.

Avantajul principal al metodei şi al teoriei dezvoltate în cuprinsul acestei lucrări constă în faptul că ele permit stabilirea în prealabil, pentru structurile din aceeaşi categorie, a soluţiei densităţilor mecanice corespunzătoare secţiunilor critice ale structurilor. În acest mod, *proiectarea structurilor se poate face direct, prin utilizarea densităţilor mecanice deja calculate, fără a mai fi necesară efectuarea calculului elastic sau a calculului plastic al solicitărilor*. Acest avantaj, deosebit de preţios din punctul de vedere al economiei de timp, deschide larg calea efectuării unor studii sistematice pentru investigarea tuturor posibilităţilor şi implicaţiilor de ordin teoretic şi practic pe care le poate genera conceptul densităţii mecanice în procesul de proiectare a structurilor.

Autorii îşi exprimă speranţa că noul concept de calcul al structurilor va găsi un sprijin larg din partea specialiştilor care se ocupă cu proiectarea şi cu cercetarea multiplelor aspecte ce derivă din comportarea construcţiilor sub acţiunea încărcărilor. Ei sînt conştienţi de faptul că numai un efort colectiv poate conduce la promovarea şi generalizarea conceptului densităţii mecanice ca factor de bază în proiectarea construcţiilor şi în verificarea capacităţii lor de rezistenţă.

Primită la redacţie la 17 martie 1970

BIBLIOGRAFIE

19. * * * *Manual pentru beton armat*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1949.
20. * * * *STAS 3599-52. Construcţii civile şi industriale. Planşee de beton armat monolite. Plăci, grinzi. Prescripţii de calcul şi alcătuire.*
21. V. Petcu, *Mecanisme de rupere exacte şi aproximative în calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **22**, *3*, 781–804 (1966).
22. Şt. Bălan, S. Răutu, V. Petcu, *Cromoplasticitatea*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1963.

STABILITATEA ARCULUI SIMPLU REZEMAT CU TIRANT SUSPENDAT FĂRĂ MOMENTE INIȚIALE

de DAN COȘA

Lucrarea conține prezentarea unui procedeu pentru determinarea încărcărilor critice la un arc simplu rezemat cu tirant suspendat supus la încercări verticale, arc pentru care axa geometrică și curba de presiune coincid (nu există momente inițiale). S-a aplicat la problema în discuție metoda micilor deplasări, iar ca instrument matematic a fost folosit calculul matriceal. După unele considerații privind fenomenul fizic, este stabilită ecuația de stabilitate împreună cu toate mărimile matriceale care intervin. În afara unor indicații de principiu privind conducerea calculelor pentru cele două categorii distincte de montanți, lucrarea conține în rezumat și aplicarea metodei pentru două cazuri concrete.

În cele ce urmează ne propunem să studiem flambajul elastic al arcului simplu rezemat cu tirant suspendat supus la încărcări verticale, arc pentru care axa geometrică și curba de presiune coincid (fig. 1).

Parametrii principali ai problemei sînt :

— modul de încărcare și, condiționată de acesta, forma arcului;

— legea de variație a secțiunii arcului;

— modul de dispunere al montanților;

— posibilitatea montanților de a fi solicitați axial în ambele sensuri sau numai într-un anumit sens (de exemplu numai la tensiune).

Găsirea încărcării critice pentru astfel de sisteme elastice prin metoda clasică a integrării ecuației diferențiale a fibrei medii deformate conduce la mari dificultăți de ordin matematic, chiar dacă în cazurile concrete survin simplificări sau limitări esențiale.

Din acest motiv apare ca rațională folosirea la cazul în discuție a metodei micilor deplasări, metodă care, fără a impune restricții privind forma arcului, secțiunea transversală sau modul de dispunere și tipul montanților, reduce găsirea celei mai mici încărcări critice la aflarea celei mai mari rădăcini a unei ecuații de tip caracteristic.

1. CONSIDERAȚII GENERALE ASUPRA PROBLEMEI

Studiul stabilității arcului cu tirant suspendat se încadrează în categoria de probleme în care elementul elastic susceptibil de a-și pierde stabilitatea este obligat să conlucreze cu un altul cu formă unică de echi-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 5, P. 1153 – 1176, 1970

libru stabil. Printre problemele rezolvate înrudite cu cea în discuție se pot enumera determinarea încărcării critice a barei pe reazeme elastice, a arcului dublu articulat simetric căruia i s-a asociat o grindă sau demonstrarea faptului că precomprimarea nu constituie un factor de instabilitate pentru bara dreaptă în cauză.

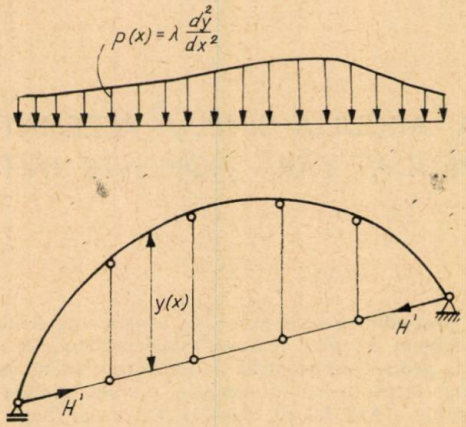


Fig. 1

În cazul arcului simplu rezemat cu tirant suspendat, montanții asigură în momentul pierderii stabilității conlucrarea între arcul comprimat și tirantul ce preia împingerea arcului. Tirantul întins, avînd forma liniară drept formă unică de echilibru stabil, se va opune oricărei încercări de modificare a acestei forme, modificare la care ar fi antrenat de către montanți prin trecerea arcului în poziție deplasată.

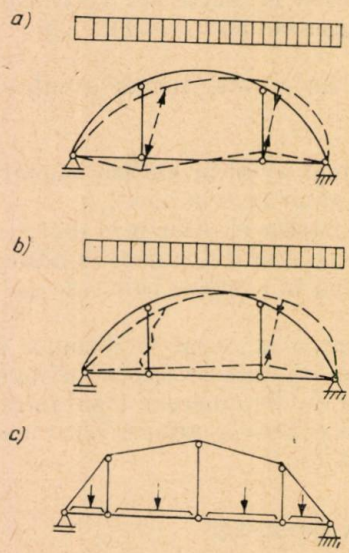


Fig. 2

Rezultă din aceasta că prin conlucrarea cu tirantul, arcul își îmbunătățește comportarea la flambaj, și, în virtutea unui principiu cunoscut, această îmbunătățire este cu atît mai acentuată, cu cît conlucrarea dintre cele două elemente este asigurată de un număr mai mare de montanți.

În ceea ce privește montanții, este esențial a aprecia de la caz la caz dacă modul lor de alcătuire le permite să preia atît eforturi de întindere, cît și de compresiune (fig. 2*a*) sau numai de întindere (fig. 2*b*). Acest lucru este cu atît mai important, cu cît, în cazul arcelor pleoștite cu montanți activi la orice solicitare, pierderea stabilității locale (între doi montanți) poate fi anterioară pierderii stabilității generale. În afară de cazul cînd zvelțeța montantului ne permite să-l încadrăm cu certitudine într-o categorie sau alta, există un caz în care montanții pot fi considerați activi independent de modul lor de alcătuire, este vorba de arce la care transmiterea

încărcărilor către arc se face prin intermediul montanților, eforturile de compresiune care pot lua naștere prin trecerea arcului în poziție deplasată manifestîndu-se prin diminuarea întinderii preexistente (fig. 2*c*).

Montanții care pot suporta solicitări axiale numai de întindere îi vom numi monoactivi, iar cei care pot fi solicitați axial în ambele sensuri îi vom numi biactivi.

În calculele ce urmează vom face o limitare prin aceea că vom considera montanții și tirantul alcătuiți din bare axial-indeformabile cu articulațiile în dreptul montanților de susținere.

Să vedem ce consecință are limitarea de mai sus.

Obligînd arcul la deformații infinit mici, prin intermediul montanților el va antrena după sine și tirantul, provocîndu-i deplasări transversale de același ordin de mărime. În aceste condiții, extremitățile tirantului vor suferi o apropiere relativă, al cărei ordin de mărime în comparație cu deplasările arcului și cele transversale ale tirantului va fi un infinit mic de ordinul doi, care poate fi neglijat.

Din acest motiv, studiul stabilității arcului articulat și simplu rezemat cu tirant suspendat din figura 1 poate fi înlocuit prin studiul stabilității arcului dublu articulat, căruia prin intermediul montanților i se asigură conlucrarea cu tirantul independent solicitat de o forță de tensiune H', ca în figura 3. Limitarea ar putea fi evitată dacă arcul, tirantul și montanții ar fi realizați de așa manieră, încît, evoluînd spre valoarea critică, sarcinile ar provoca arcului prin încovoiere și tirantului prin întindere deformații

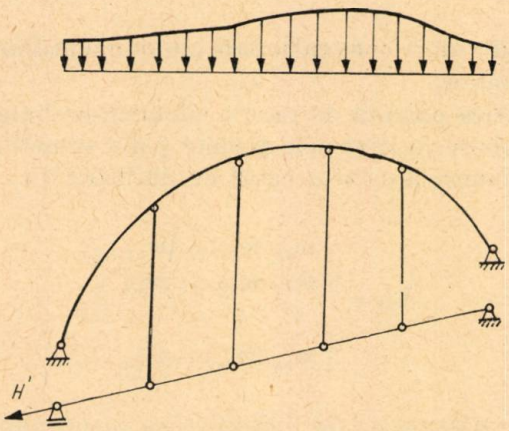


Fig. 3

care în momentul atingerii valorilor critice ar suprapune axa geometrică a arcului peste curba de presiune. Desigur că prin detașarea de arc a tirantului el nu poate înregistra variația împingerii datorită modificării formei arcului; acest efect însă influențează mărimea reacțiunilor în montanți ca infinit mic de ordinul doi și poate fi și el neglijat.

2. PRECIZĂRI ÎN LEGĂTURĂ CU MATRICEA DEPLASĂRILOR ε

Să presupunem un sistem elastic alcătuit din porțiuni drepte (sistemul poate fi și aproximarea printr-o linie poligonală a unei bare curbe). Fiind dată starea de solicitare la încovoiere prin diagrama de momente M, deplasările diverselor puncte după anumite direcții ε_k pot fi aflate integrînd diagrama M cu diagramele de momente m_k provocate de acțiunea unor forțe unitate în punctele și pe direcția deplasărilor care ne interesează. Alegînd pe structură un număr de n puncte prin ale căror deplasări vom caracteriza întreaga deformație a sistemului și reținînd din diagramele M și m valorile în aceste puncte, totalitatea deplasărilor celor n puncte scrise sintetic sub forma unei matrice-coloană ε poate fi exprimată sintetic cu ajutorul relației matriceale (1)

$$\varepsilon = \frac{S_0}{6EJ_0} L_M^* BM. \tag{1}$$

Semnificațiile elementelor care intervin în relația [1] sînt următoarele :

$$\varepsilon = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} \right\|, \qquad M = \left\| \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{matrix} \right\|, \tag{2}$$

I_0 și S_0 reprezintă valori convenționale ale momentului de inerție și, respectiv, ale lungimilor,

L_M^* — o matrice pătrată de rang n, elementele liniei k, m_{jk}, fiind momentele încovoietoare în diversele puncte j ale structurii cînd în k și pe direcția lui ε_k acționează o forță egală cu unitatea [1]) :

$$L_M^* = \left\| \begin{matrix} m_{11} & m_{21} \cdots & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} \cdots & m_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} \cdots & m_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

B o matrice pătrată de tip Jakobi, care, interpunîndu-se la înmulțire între matricele L_M^* și M, joacă rolul unui operator, permițînd exprimarea

[1]) În mod surprinzător în [1] elementele unei linii, spre exemplu k, a matricei L_M^* sînt momentele încovoietoare într-unul și același punct k pentru încărcări unitate în diversele puncte ale structurii m_{kj}. Dacă în cazul unei grinzi simplu rezemate și al încercărilor normale pe grindă $m_{jk} = m_{kj}$, în cazul barelor curbe și al diverselor direcții de încărcare de la punct inversiunea liniilor cu coloanele de același indice nu se mai poate face, $m_{jk} \neq m_{kj}$. Greșeala persistă în aplicațiile numerice, iar faptul că rezultatele sînt totuși acceptabile din punct de vedere cantitativ se explică prin aceea că în aplicațiile numerice arcele considerate erau simetrice și pleoștite.

în formă matriceală a întregii diagramei m_k cu diagrama M (integrala lui Maxwell-Mohr) prin procedeul Vereşceaghin :

$$B = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & & & & \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & & & \\ & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \beta_{n-1,n} & \beta_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

În cazul cînd diagrama M a fost aproximată între punctele considerate prin porţiuni liniare, coeficienţii β vor fi

$$\begin{aligned} \beta_{k-1,k} &= \rho_{k-1,k}, \\ \beta_{kk} &= 2(\rho_{k-1,k} + \rho_{k,k+1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ \beta_{k,k+1} &= \rho_{k,k+1}, \end{aligned} \tag{5}$$

în care

$$\rho_{k,k+1} = \frac{S_{k,k+1}}{I_{k,k+1}} \cdot \frac{I_0}{S_0}. \tag{6}$$

Pentru alte aproximaţii ale digramei M, de exemplu prin arce de parabolă, coeficienţii îşi au expresiile lor, calculate în [1] p. 108.

3. FORMAREA ECUAŢIEI DE STABILITATE

Potrivit cu precizia rezultatelor pe care dorim să le obţinem, alegem pe structură un număr de puncte n. Printre acestea trebuie să se afle în mod obligatoriu şi punctele în care se află montanţii pe care îi presupunem activi. Din motive care vor rezulta ulterior, alegem ca direcţii pentru deplasările în aceste puncte şi prin care vom caracteriza deformaţia arcului o direcţie unică, cea verticală. Vom utiliza deci în locul matricei-coloană ε (deplasări de direcţie oarecare) matricea-coloană v, alcătuită din proiecţiile deplasărilor pe verticală în punctele considerate.

Drept parametru al încărcării alegem împingerea orizontală din arc, H.

Arcul fiind static nedeterminat, matricea M va conţine momente static nedeterminate.

În ceea ce priveşte matricea L_M^*, elementele ei vor putea fi momente static determinate, cunoscută fiind proprietatea că deplasările sistemelor static nedeterminate pot rezulta prin integrarea diagramei de momente a sistemului static nedeterminat cu diagrame unitare calculate pe sistemul făcut static determinat.

Existînd coincidența dintre curba de presiune și forma arcului, nu avem momente inițiale ; ele apar abia în momentul în care o cauză oarecare abate arcul de la forma sa inițială. Tot atunci vor apărea în montanții activi forțe reacțiuni de tip elastic.

Dacă ne dăm deformația arcului prin matricea v, reacțiunile elastice exprimate prin matricea-coloană R cu n elemente (unele dintre ele pot fi nule), vor fi

$$R = - H \, \pi_R \, v. \tag{7}$$

Matricea π_R este o matrice pătrată și joacă rolul de factor de proporționalitate între matricea deplasărilor v și cea a reacțiunilor elastice R și pe care o vom stabili ulterior.

Momentele ce iau naștere în arc își datorează prezența atît încărcărilor preexistente, cît și reacțiunilor elastice nou apărute ; ele sînt rezultatul direct sau indirect al lui v.

Să numim (S) starea de eforturi a arcului în poziție deplasată aflat sub sarcini și conlucrînd cu tirantul și fie X_{P+R} momentul încovoietor într-un

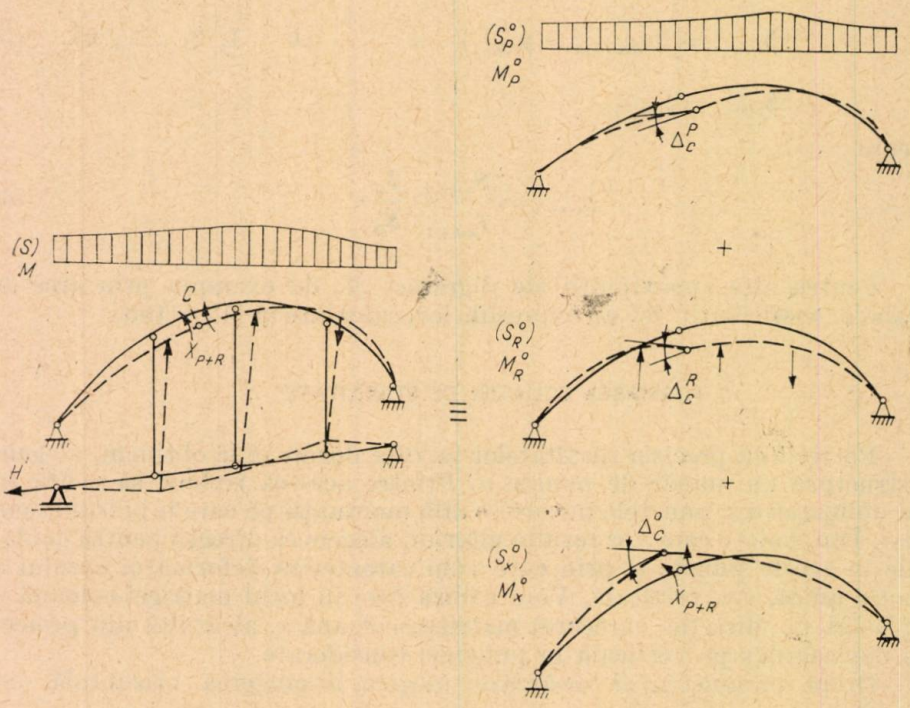


Fig. 4

punct c al arcului (c este și el unul din punctele alese inițial). În anumite condiții, starea (S) poate fi exprimată ca sumă a trei stări ale unui arc triplu articulat de formă $(y + v)$, aflat în diferite situații de solicitare (fig. 4).

Starea (S^0_P) este starea arcului triplu articulat suportînd sarcinile exterioare. Pentru momentele încovoietoare din această stare, M^0_P, depin-

zînd direct de deplasări, calculul lor se face ţinînd seama de ordonatele exacte ale arcului $(y + v)$.

Stările (S_R^0) şi (S_X^0) sînt stări ale arcului acţionat de către reacţiunile elastice R şi respectiv momentul static nedeterminat în c, X_{P+R}. Încărcările în aceste stări fiind ele însele infiniţi mici de ordinul întîi, momentele M_R^0 şi M_X^0 pot fi calculate pentru poziţia nedeplasată a arcului (modificările infinit mici ale formei arcului conduc la modificări infinit mici ale stării de eforturi, erorile fiind de ordinul doi).

Condiţia ca

$$(S) = (S_P^0) + (S_R^0) + (S_X^0)$$

este

$$\Delta_C^P + \Delta_C^R + \Delta_C^X = 0 \tag{8}$$

unde Δ_c^P, Δ_c^R şi Δ_c^x au semnificaţiile din figura 4.

Cu ajutorul diagramei de momente din starea (S_X^0) pentru $X = 1$, formăm o matrice coloană m şi o matrice linie $\overline{m}$:

$$m = \left\| \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{matrix} \right\| \qquad \overline{m} = \| m_1, m_2, \ldots, m_n \|. \tag{9}$$

Dacă este îndeplinită condiţia (8), atunci

$$M = M_P^0 + M_R^0 + M_X^0, \tag{10}$$

unde M_P^0, M_R^0 şi M_x^0 sînt vectori coloană,
iar Δ_c^p şi Δ_c^R rezultă prin integrarea diagramei m cu diagrama M_p^0 şi respectiv M_R^0 :

$$\begin{aligned} \Delta_C^P &= \nu \overline{m} B M_P^0, \\ \Delta_C^R &= \nu \overline{m} B M_R^0, \qquad \nu = \frac{S_0}{6EJ_0}, \\ \Delta_C^X &= \delta_{CC} X_{P+R}. \end{aligned} \tag{11}$$

Introducînd aceste expresii în (8) şi explicitînd pe X_{P+R} obţinem

$$X_{P+R} = -\frac{\nu}{\delta_{CC}} \overline{m} B (M_P^0 + M_R^0). \tag{12}$$

Exprimăm M_P^0 și M_R^0 în funcție de v, alegînd împingerea orizontală din arc, H, drept parametru al sistemului de forțe :

$$M_P^0 = H\ A^0 v, \tag{13}$$

$$M_R^0 = L_M^0\ R = -\ HL_M^0\ \pi_R v, \tag{14}$$

unde A^0 este o matrice pătrată ce depinde de modul de încărcare, de forma arcului și de direcțiile alese ale deplasărilor, iar L_M^c este matricea de influență a momentelor.

Ținînd seama de (13) și (14), relația (12) devine

$$X_{P+R} = -\ H \frac{\nu}{\delta_{cc}}\ \overline{m}B\,(A^0 - L_M^0\,\pi_R)\,v, \tag{12'}$$

$$M_X^0 \quad = m\,X_{P+R} = -\ H \frac{\nu}{\delta_{cc}}\ m\overline{m}B\ (A^0 - L_M^0\,\pi_R)\ v,$$

$$M \quad = H\left(E - \frac{\nu}{\delta_{cc}}\ m\overline{m}B\right)(A_0 - L_M^0\,\pi_R)v, \tag{10'}$$

unde prin E am notat matricea-unitate.
Știm, pe de altă parte, că

$$v = \nu L_M^*\,BM. \tag{15}$$

Introducînd în (15) expresia momentul M, obținem ecuația

$$v = H\nu L_M^*\,B\left(E - \frac{\nu}{\delta_{cc}}\ m\overline{m}B\right)(A^0 - L_M^0\,\pi)\,v_R. \tag{16}$$

Notăm cu C matricea

$$C = \nu L_M^* B\left(E - \frac{\nu}{\delta_{cc}}\ m\overline{m}B\right)(A^0 - L_M^0\,\pi_R). \tag{17}$$

Utilizînd notația (17), prin operații elementare ecuația (16) poate fi pusă sub forma

$$\left(C - \frac{1}{H}\,E\right)v = 0. \tag{18}$$

Această ecuație poate fi satisfăcută fie pentru v egal cu zero (soluție banală care nu interesează), fie dacă este îndeplinită condiția :

$$\left| C - \frac{1}{H_{cr}}\,E \right| = 0. \tag{18'}$$

Ecuația (18′) ne arată că găsirea celei mai mici împingeri critice se reduce la aflarea celei mai mari rădăcini a ecuației caracteristice a matricei C, rădăcina care poate fi aflată relativ ușor prin aproximații succesive.

4. DETERMINAREA MATRICEI A^0

În paragraful precedent s-a folosit pentru momentele încovoietoare din starea (S_p^0) — M_p^0 o relație matriceală de forma

$$M_p^0 = HA^0v.$$

Rămîne de stabilit care este expresia matricei A^0.

Să urmărim figura 5, în care am reprezentat starea (S_p^0) și unde sînt cotate și mărimile geometrice care ne interesează relativ la forma inițială și cea deformată a arcului.

Notăm cu $\mathcal{M}_x^0$ și $\mathcal{T}_x^0$ momentul încovoietor și forța tăietoare în grinda simplu rezemată de aceeași deschidere și supusă la aceleași încărcări ca și arcul. Existînd coincidența inițială între forma arcului și curba de presiune în orice punct este adevărată relația

$$\mathcal{M}_x^0 - Hy = 0. \tag{19}$$

Arcul nu poate fi obligat la deplasări v fără ca simultan să apară și deplasări orizontale u. Fie v_k și u_k, v_c și u_c deplasările verticale și

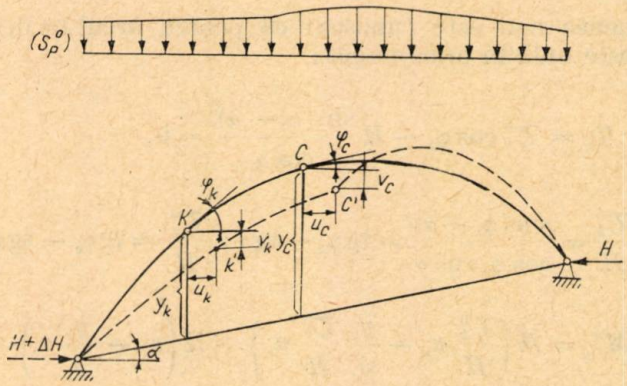


Fig. 5

orizontale în punctul k și, respectiv, în c, unde am suprimat continuitatea prin introducerea articulației.

Alegem pentru deplasări următoarea convenție de semne : u pozitiv de la stînga spre dreapta și v pozitiv de sus în jos.

O dată cu modificarea formei arcului, curba de presiune suferă și ea modificări, fiind obligată să treacă prin c'.

Momentul încovoietor în k va fi [2])

$$M^0_{P_k} = \mathcal{M}^0(x_k + u_k) - (H + \Delta H)(y_k - v_k), \tag{20}$$

$$M^0_{P_k} = \mathcal{M}^0(x_k) + \left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}^0_x}{\mathrm{d}x}\right|_{x_k} \cdot u_k - Hy_k + Hv_k - \Delta H y_k + \Delta H v_k. \tag{20'}$$

Făcînd reducerile și neglijînd infinitul mic de ordinul doi relația (20') devine

$$M^0_{P_k} = \mathcal{T}^0_k u_k + Hv_k - \Delta H y_k. \tag{20''}$$

Pentru determinarea lui ΔH, utilizăm tot relația (19), dar de data aceasta în c

$$H = \frac{\mathcal{M}^0(x_c)}{y_c}.$$

Procedînd în mod analog ca la relația (20') obținem,

$$H + \Delta H = \frac{\mathcal{M}^0(x_c + u_c)}{y_c - v_c}, \tag{21}$$

$$\Delta H = \frac{1}{y_c}(\mathcal{T}^0_c u_c + Hv_c). \tag{21'}$$

De asemenea mai este cunoscut că pentru arcul ne deplasat forța tăietoare $\mathcal{T}_k$ este nulă în orice punct:

$$T_k = \mathcal{T}^0_k \cos\varphi_k - H\frac{\sin(\varphi_k - \alpha)}{\cos\alpha} = 0,$$

$$\frac{\mathcal{T}^0_k}{H} = \frac{\sin(\varphi_k - \alpha)}{\cos\varphi_k \cos\alpha} = \operatorname{tg}\varphi_k - \operatorname{tg}\alpha;\quad \frac{\mathcal{T}^0_c}{H} = \operatorname{tg}\varphi_c - \operatorname{tg}\alpha, \tag{22}$$

$$M^0_{P_k} = H\left(\frac{\mathcal{T}^0_k}{H}u_k - \frac{y_k}{y_c}\frac{\mathcal{T}^0_c}{H}u_c\right) + H\left(v_k - \frac{y_k}{y_c}v_c\right).$$

Ultima expresie pentru $M^0_{P_k}$, ținînd seama și de relația (22), va fi

$$M^0_{P_k} = H\left[(\operatorname{tg}\varphi_k - \operatorname{tg}\alpha)u_k - \frac{y_k}{y_c}(\operatorname{tg}\varphi_c - \operatorname{tg}\alpha)u_c\right] + H\left[v_k - \frac{y_k}{y_c}v_c\right]. \tag{23}$$

[2]) Forțele exterioare se consideră acționînd în lungul unor suporturi veticale de poziție fixă.

Astfel de relații se pot scrie pentru toate punctele, cu excepția lui c', unde $M^0_{P_{c'}}$ este egal cu zero. Relațiile (23) pot fi exprimate sintetic astfel:

$$M_P^0 = H \underbrace{\begin{Vmatrix} (1) & (2) & & (c) & & (n) \\ \operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\alpha & 0 & \dots -\frac{y_1}{y_c}(\operatorname{tg}\varphi_c - \operatorname{tg}\alpha) \dots & & & 0 \\ 0 & \operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\alpha \dots & -\frac{y_2}{y_c}(\operatorname{tg}\varphi_c - \operatorname{tg}\alpha) \dots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots -\frac{y_n}{y_c}(\operatorname{tg}\varphi_c - \operatorname{tg}\alpha) \dots \operatorname{tg}\varphi_n - \operatorname{tg}\alpha & & & \end{Vmatrix}}_{A_x^0} \times \underbrace{\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_c \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix}}_{u} +$$

$$+ H \underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots -\frac{y_1}{y_c} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots -\frac{y_2}{y_c} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots -\frac{y_n}{y_c} & \dots & 1 \end{Vmatrix}}_{A_y^0} \times \underbrace{\begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_c \\ \vdots \\ v_n \end{Vmatrix}}_{v}, \quad (24)$$

$$M_P^0 = H(A_x^0 u + A_y^0 v). \quad (24')$$

Matricele A_x^0 și A_y^0 au forma din relația (24).

După cum am mai afirmat, deplasările u nu sînt independente de v. Fie G_x o matrice pătrată care realizează transformarea matricei v în matricea u

$$u = G_x v. \quad (25)$$

În condițiile unui sistem elastic de formă poligonală (sau schematizat în acest fel) fără deformații axiale, translațiile orizontale pot fi exprimate, în funcție de cele verticale, utilizînd analogia cu lanțul cinematic de aceeași formă (fig. 6) :

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \operatorname{tg}\varphi_{01}, \\ u_2 - u_1 &= (v_2 - v_1)\operatorname{tg}\varphi_{12}, \\ u_3 - u_2 &= (v_3 - v_2)\operatorname{tg}\varphi_{23}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{26}$$

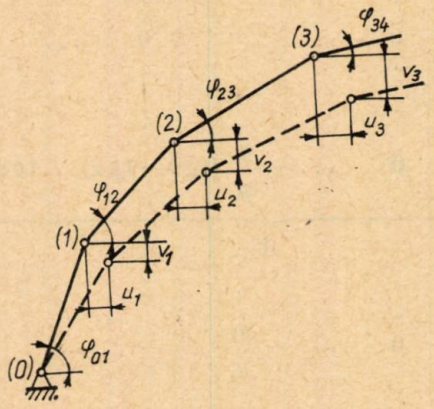


Fig. 6

Exprimăm din aproape în aproape mărimile u :

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \operatorname{tg}\varphi_{01}, \\ u_2 &= v_1(\operatorname{tg}\varphi_{01} - \operatorname{tg}\varphi_{12}) + v_2\operatorname{tg}\varphi_{12}, \\ u_3 &= v_1(\operatorname{tg}\varphi_{01} - \operatorname{tg}\varphi_{12}) + v_2(\operatorname{tg}\varphi_{12} - \operatorname{tg}\varphi_{23}) + v_3\operatorname{tg}\varphi_{23}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{26'}$$

$$G_x = \left\| \begin{array}{lll} \operatorname{tg}\varphi_{01} & & \\ \operatorname{tg}\varphi_{01} - \operatorname{tg}\varphi_{12} & \operatorname{tg}\varphi_{12} & \\ \operatorname{tg}\varphi_{01} - \operatorname{tg}\varphi_{12} & \operatorname{tg}\varphi_{12} - \operatorname{tg}\varphi_{23} & \operatorname{tg}\varphi_{23} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \operatorname{tg}\varphi_{01} - \operatorname{tg}\varphi_{12} & \operatorname{tg}\varphi_{12} - \operatorname{tg}\varphi_{23} & \operatorname{tg}\varphi_{23} - \operatorname{tg}\varphi_{34} \ldots \operatorname{tg}\varphi_{n-1,n} \end{array} \right\|. \tag{27}$$

În cazul cînd matricea G_x a fost dedusă prin scrierea relațiilor de recurență pornindu-se de la capătul din stînga al lanțului cinematic (0), toate elementele matricei situate deasupra diagonalei principale sînt

nule. La o matrice G_x dedusă în atare condiții, numărul elementelor nenule este egal cu $\frac{n(n+1)}{2}$. Pentru a micșora numărul elementelor diferite de zero, G_x poate fi dedusă pornindu-se simultan de la ambele capete ale lanțului cinematic. Pornindu-se de la capătul $(n+1)$ spre (0), relațiile de recurență vor fi

$$u_n = v_n \operatorname{tg}\varphi_{n+1,n},$$

$$u_{n-1} = v_n(\operatorname{tg}\varphi_{n+1,n} - \operatorname{tg}\varphi_{n,n-1}) + v_{n-1}\operatorname{tg}\varphi_{n,n-1},$$

$$u_{n-2} = v_n(\operatorname{tg}\varphi_{n+1,n} - \operatorname{tg}\varphi_{n,n-1}) + v_{n-1}(\operatorname{tg}\varphi_{n,n-1} - \operatorname{tg}\varphi_{n-1,n-2}) + v_{n-2}\operatorname{tg}\varphi_{n-1,n-2},$$

. . . . . .

O matrice G_x dedusă astfel arată ca matricea (28), în care am marcat elementele nenule prin semnul X:

$$G_x = \left\| \begin{array}{ccccccccccc} \times & & & & . & & & & & & \\ \times & \times & & \text{I} & . & & & & & & \\ \times & \times & \times & & . & & & & & & \\ \times & \times & \times & \times & . & & & & & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & . & \times & \times & \times & \times & & \\ & & & & . & & \times & \times & \times & & \\ & & \text{III} & & . & \text{II} & & \times & \times & & \\ & & & & . & & & & \times & & \end{array} \right\| . \qquad (28)$$

Simpla apreciere geometrică ne arată că, în timp ce în pătratele I și II numărul elementelor nenule rămîne neschimbat, toate cele din dreptunghiul III (poate fi și pătrat dacă n este un număr par) devin nule.

Ținînd seama de (24′) și (25), rezultă valoarea matricei A^0, în care A_x^0, A_y^0 și G_x au expresiile cunoscute:

$$A^0 = A_x^0 G_x + A_y^0. \qquad (29)$$

5. MATRICEA π_R

Prin relația (7), matricea π_R era definită ca matrice — factor de proporționalitate între matricele R și v:

$$R = -H\pi_R v.$$

Semnul minus a fost pus pentru a scoate în evidență faptul că reacțiunile elastice sînt de sens contrar deplasărilor.

Dintre punctele k în număr de n, numai la o parte din ele — să le zicem i și în număr de p — există reacțiuni elastice (montanți activi).

Matricea R fiind scrisă pentru toate cele n puncte ale arcului, va conține și elemente nule corespunzătoare punctelor în care nu există reacțiuni elastice.

Din elementele nenule ale matricei R formăm matricea R'. În numerotarea i avem

$$R' = \left\| \begin{matrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_p \end{matrix} \right\|, \qquad v' = \left\| \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_p \end{matrix} \right\|,$$

$$R' = -H\pi'_R v' \tag{30}$$

Urmărind figura 7, reacțiunea R_i care se dezvoltă în montantul i poate fi aflată cu ajutorul unei ecuații de echilibru static:

$$R_i = H' \sin(\alpha - \theta_{i-1}) - H' \sin(\alpha - \theta_{i+1}).$$

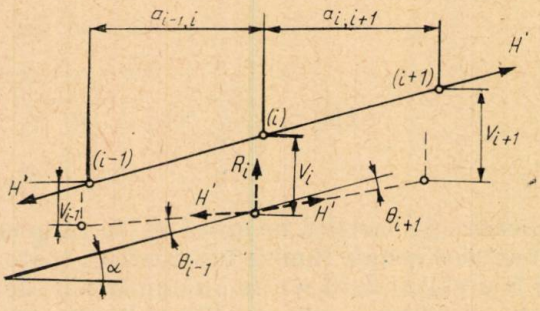


Fig. 7

Dezvoltînd și ținînd seama că θ_{i-1} și θ_{i+1} sînt infiniți mici, obținem

$$R_i = H' \cos\alpha(-\theta_{i-1} + \theta_{i+1}),$$

$$\theta_{i-1} = \frac{v_i - v_{i-1}}{a_{i-1,i}}; \quad \theta_{i+1} = \frac{v_{i+1} - v_i}{a_{i+1,i}}, \tag{31}$$

$$R_i = -H\left[-\frac{v_{i-1}}{a_{i-1,i}} + v_i\left(\frac{1}{a_{i-1,i}} + \frac{1}{a_{i,i+1}}\right) - \frac{v_{i+1}}{a_{i,i+1}}\right].$$

Sintetizînd cele p relaţii (31) sub forma matriceală, avem

$$R' = -H \underbrace{\begin{Vmatrix} \frac{1}{a_{01}}+\frac{1}{a_{12}} & -\frac{1}{a_{12}} & & & & \\ -\frac{1}{a_{12}} & \frac{1}{a_{12}}+\frac{1}{a_{23}} & -\frac{1}{a_{23}} & & & \\ & -\frac{1}{a_{23}} & \frac{1}{a_{23}}+\frac{1}{a_{34}} & -\frac{1}{a_{34}} & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & -\frac{1}{a_{p-1,p}} & \frac{1}{a_{p-1,p}}+\frac{1}{a_{p,p+1}} & \end{Vmatrix}}_{\pi'_R} \times \underbrace{\begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_p \end{Vmatrix}}_{v'} \quad (32)$$

Matricea π'_R este o matrice pătrată de tip Jakobi. π_R se obţine din π'_R, schimbînd baza de numărătoare din i în k şi adăugînd corespunzător punctelor k cărora nu le corespund puncte i, linii şi coloane nule.

Dacă arcul cu tirant suspendat se încadrează într-o structură elastică mai amplă, tensiunea de lucru a tirantului poate diferi de împingerea din arc. În acest caz, termenul $L^0_M \pi_R$ se va utiliza în calcule înmulţit cu un coeficient de reducere μ care să ţină seama de nedeterminarea sistemului tirant-restul structurii.

6. UNELE CONSIDERAŢII PRIVIND DESFĂŞURAREA CALCULULUI

Alegerea deplasărilor verticale (şi nu cele normale pe curba de presiune cum se obişnuieşte) drept parametru al deformaţiei prezintă o serie de avantaje, ca :

— elementele matricelor L^*_M şi L^0_M sînt aceleaşi (diferă poziţia); ele se calculează uşor făcîndu-se analogia cu o grindă simplu rezemată, mereu de aceeaşi deschidere (L^*_M este transpusa lui L^0_M);

— pentru stabilirea efectului tirantului sînt necesare deplasările verticale ale punctelor arcului situate la extremităţile montanţilor;

— chiar şi în studiul stabilităţii arcului fără tirant cu α diferit de zero, matricea A^0 nu poate fi stabilită fără luarea în consideraţie a deplasărilor pe două direcţii; dintre toate perechile de direcţii posibile într-un punct, relaţia de legătură cea mai comodă se scrie între deplasările u şi v.

Şi acum cîteva recomandări privind conducerea calculului.

Cazul I. Arce cu montanţi biactivi. Nu sînt necesare precauţii speciale în calcul, ci doar o recomandare privind arcele pleoştite : este indicat ca în afara punctelor în care există montanţi să se aleagă şi puncte supli-

mentare, cu ajutorul cărora să se poată pune în evidență și o eventuală pierdere locală a stabilității. Numai în acest caz poate fi utilizată simetria (dacă există), operînd pe un semiarc static determinat.

Cazul II. Arce cu montanți monoactivi. La această categorie de arce, pierderea stabilității locale nu prezintă nici un pericol în comparație cu pierderea stabilității generale. Din acest motiv, punctele în care există montanți (activi sau inactivi) sînt în general suficiente pentru a prinde fenomenul; sporirea numărului lor se face doar pentru mărirea exactității rezultatelor.

Trebuie observat că, după cum pierderea stabilității generale se face spre stînga sau spre dreapta, montanții activi diferă de la un caz la altul (nu este obligatoriu ca toți cei inactivi pentru o direcție să devină activi pentru cealaltă). Rezultă deci necesitatea utilizării în calcul a două matrice $\pi_R : \pi_{R_{st}}$ și $\pi_{R_{dr}}$. Pentru fiecare din matrice calculul se desfășoară obișnuit, cu precizarea în ceea ce privește deformația că factorul de proporționalitate al deplasărilor nu poate avea decît un singur semn, corespunzător direcției de pierdere a stabilității pentru care am scris matricea π_R.

Cele două rezultate obținute diferind între ele, se reține cea mai mică valoare a sarcinii critice.

Deoarece este esențial ca montanții pe care i-am considerat activi în calcul să fie activi și în realitate, o verificare a presupunerilor noastre inițiale se impune de la sine. Pentru $H = H_{cr}$, sistemul de ecuații (18), liniar și omogen în deplasările v, devine compatibil și nedeterminat. Soluțiile $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sînt proporționale cu minorii determinantului $\left| C - \frac{1}{H_{cr}} E \right|$, factor de proporționalitate fiind constanta arbitrară de care am amintit mai înainte. Reprezentăm deplasările tuturor punctelor față de o linie de referință și, dacă punctele de capăt ale tirantului și cele în care există montanți activi (și numai ele) alcătuie un contur poligonal convex cu concavitatea în jos, atunci alegerea montanților activi a fost bine făcută. Dacă linia obținută nu este convexă sau dacă mai există și alte deplasări ale extremităților unor montanți presupuși inactivi care s-ar putea înscrie și ele pe un contur convex, atunci calculele se reiau în altă ipoteză de montanți activi.

În mod deliberat putem conta în calcule pe un număr de montanți activi mai mic decît în realitate; încărcările critice aflate în aceste condiții sînt mai mici decît cele reale. Și rezultatele unui astfel de calcul, care are de partea lui avantajul considerării unui mai mic număr de puncte și deci mai puține operații, pot fi utilizate deseori, calculul la stabilitate avînd un caracter de verificare.

Dacă arcul este solicitat de forțe concentrate, în dreptul lor curba de presiune și implicit forma arcului vor suferi o frîngere. Tangenta în k, nefiind determinată, se află printr-un calcul la limită, privind forța concentrată ca pe o forță uniform distribuită de intensitate infinit mare, acționînd pe o lungime infinit mică (fig. 8):

$$\operatorname{tg}\varphi_k = \lim_{\substack{k' \to k \\ c \to o}} \operatorname{tg}\varphi_{k'} = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi_k^{st} + \operatorname{tg}\varphi_k^{dr}).$$

7. APLICAȚII NUMERICE

Aplicația 1. Să se determine sarcina critică pentru arcul parabolic de secțiune constantă din figura 9*a*. Montanții de susținere ai tirantului sînt monoactivi, iar pleoștirea f/l este 1/4 :

$$\operatorname{tg}\alpha = 0\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi_{01} = \frac{3}{4}\,,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi_{12} = \frac{1}{4}\,,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 0\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi_{23} = -\frac{1}{4}\,,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = -\frac{1}{2}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi_{34} = -\frac{3}{4}\,,$$

$$S_{01} = S_{34} = l\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2} = 0{,}312\, l\,,$$

$$S_{12} = S_{23} = l\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2} = 0{,}258\, l\,,$$

$$\delta_{cc} = \int_0^4 m^2 \frac{\mathrm{d}s}{EJ} = 3{,}092\frac{l}{6\,EJ}\,.$$

Matricea $(A^0 - L_M^0\,\pi_R)$ este

$$A_x^0 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}; \quad G_x = \begin{Vmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{Vmatrix}; \quad A_y^0 = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A^0 = A_x^0\, G_x + A_y^0 = \begin{Vmatrix} \frac{11}{8} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{11}{8} \end{Vmatrix}.$$

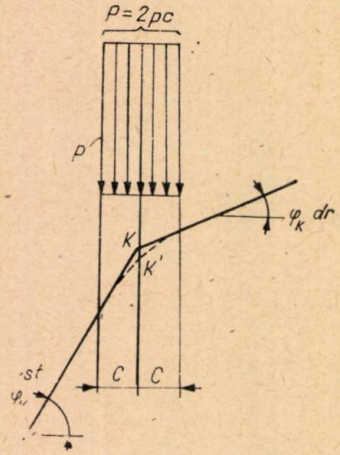

P=2pc
p
K
K'
φ_K dr
st
C
C

Fig. 8

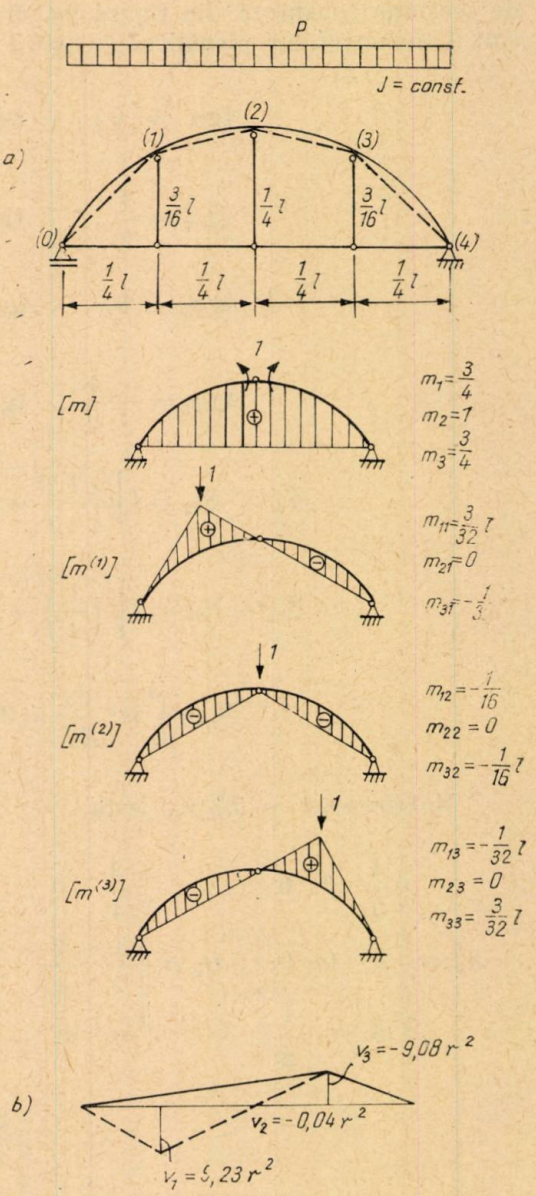

p
J = const.
a)
(0)
(1)
(2)
(3)
(4)
$\frac{3}{16}l$
$\frac{1}{4}l$
$\frac{1}{4}l$
$\frac{1}{4}l$
$\frac{1}{4}l$
$\frac{1}{4}l$
[m]
$m_1=\frac{3}{4}$
$m_2=1$
$m_3=\frac{3}{4}$
[m(1)]
$m_{11}=\frac{3}{32}l$
$m_{21}=0$
$m_{31}=-\frac{1}{3}$
[m(2)]
$m_{12}=-\frac{1}{16}$
$m_{22}=0$
$m_{32}=-\frac{1}{16}l$
[m(3)]
$m_{13}=-\frac{1}{32}l$
$m_{23}=0$
$m_{33}=\frac{3}{32}l$
b)
$v_3=-9{,}08\,r^2$
$v_2=-0{,}04\,r^2$
$v_1=9{,}23\,r^2$

Fig. 9

Presupunem că la pierderea stabilităţii prin deplasare spre dreapta lucrează numai montantul (3):

$$\pi'_{R_{dr}} = \left\| \frac{1}{\frac{3}{4}\,l} + \frac{1}{\frac{1}{4}\,l} \right\| = \left\| \frac{16}{3\,l} \right\|,$$

$$\pi_{Rdr} = \frac{16}{3\,l} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad L^0_M = \frac{l}{32} \begin{Vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{Vmatrix},$$

$$A^0 - L^0_M\,\pi_R = \begin{Vmatrix} \frac{11}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{29}{24} \end{Vmatrix}.$$

Matricea $L^*_M\,B$:

Alegem $J_0 = J$; $S_0 = l$,

$$\rho_{01} = \rho_{34} = \frac{0{,}312\,l}{J} \cdot \frac{J}{l} = 0{,}312,$$

$$\rho_{12} = \rho_{23} = \frac{0{,}258\,l}{J} \cdot \frac{J}{l} = 0{,}258,$$

$$\beta_{11} = \beta_{33} = 2\,(0{,}312 + 0{,}258) = 1{,}140,$$

$$\beta_{22} = 2\,(0{,}258 + 0{,}258) = 1{,}032,$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{32} = \beta_{23} = 0{,}258;$$

$$B = \begin{Vmatrix} 1{,}140 & 0{,}258 & 0 \\ 0{,}258 & 1{,}032 & 0{,}258 \\ 0 & 0{,}258 & 1{,}140 \end{Vmatrix}; \quad L^*_M = \frac{l}{32} \begin{Vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix},$$

$$L^*_M\,B = \frac{l}{32} \begin{Vmatrix} 3{,}420 & 0{,}516 & -1{,}140 \\ -2{,}280 & -1{,}032 & -2{,}280 \\ -1{,}140 & 0{,}516 & 3{,}420 \end{Vmatrix}.$$

Matricea $\left(E - \frac{\nu}{\delta_{cc}} m\overline{m}B\right)$:

$$\frac{\nu}{\delta_{cc}} = \frac{l}{6EJ}\,\frac{6EJ}{3{,}092\,l} = \frac{1}{3{,}092},$$

$$m = \left\| \begin{matrix} 0{,}75 \\ 1{,}00 \\ 0{,}75 \end{matrix} \right\|, \qquad \overline{m} = \| \; 0{,}75 \quad 1{,}00 \quad 0{,}75 \; \|,$$

$$\overline{m}B = \| \; 1{,}113, \quad 1{,}419 \quad 1{,}113 \; \|,$$

$$m\overline{m}B = \left\| \begin{matrix} 0{,}836 & 1{,}065 & 0{,}836 \\ 1{,}113 & 1{,}419 & 1{,}113 \\ 0{,}836 & 1{,}065 & 0{,}836 \end{matrix} \right\|; \quad E - \frac{\nu}{\delta_{cc}} m\overline{m}B = \left\| \begin{matrix} 0{,}729 & -0{,}345 & -0{,}271 \\ -0{,}361 & 0{,}541 & -0{,}361 \\ -0{,}271 & -0{,}345 & 0{,}729 \end{matrix} \right\|,$$

$$v = H\,\frac{l}{6EJ}\,\frac{l}{32} \left\| \begin{matrix} 3{,}420 & 0{,}516 & -1{,}140 \\ -2{,}280 & -1{,}032 & -2{,}280 \\ -1{,}140 & 0{,}516 & 3{,}420 \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \underbrace{\left\| \begin{matrix} 0{,}729 & -0{,}345 & -0{,}271 \\ -0{,}361 & 0{,}541 & -0{,}361 \\ -0{,}271 & -0{,}345 & 0{,}729 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} 1{,}375 & -0{,}750 & 0{,}167 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}750 & 1{,}208 \end{matrix} \right\|}_{C} v;$$

$$C = \left\| \begin{matrix} 3{,}600 & -0{,}511 & -1{,}911 \\ -0{,}925 & 1{,}010 & -0{,}925 \\ -2{,}670 & -0{,}511 & 2{,}841 \end{matrix} \right\|; \quad C^2 = \left\| \begin{matrix} 18{,}523 & -1{,}380 & -11{,}827 \\ -1{,}796 & 1{,}966 & -1{,}797 \\ -18{,}257 & -0{,}605 & 14{,}379 \end{matrix} \right\|,$$

$\frac{192\,EJ}{H_{cr}\,l^2}$ este rădăcina cea mai mare a ecuației caracteristice a matricei C. Vom căuta această rădăcină prin aproximații succesive. Notăm cu S_pC, S_pC^2, S_pC^4 urmele matricelor C, C^2, C^4.

$$S_pC = 7{,}451\,; \quad S_pC^2 = 34{,}87\,; \quad S_pC^4 = 967,$$

$$\frac{S_pC^2}{S_pC} = 4{,}68 < \lambda_{max} < \sqrt{S_pC^2} = 5{,}90\,,$$

$$\sqrt{\frac{S_pC^4}{S_pC^2}} = 5{,}26 < \lambda_{max} < \sqrt[4]{S_pC^4} = 5{,}57\,.$$

Întrucît intervalul este prea larg, utilizăm şi limitarea profesorului S. A. Bernstein :

$$\lambda_{max} > \sqrt{\frac{S_p C^2}{2}\left[1+\sqrt{\frac{2\,S_p C^4}{(S_p C^2)^2}-1}\right]} = 5{,}53\,,$$

$$\lambda_{max} = \frac{5{,}53+5{,}57}{2} = 5{,}55\,,$$

$$H_{cr} = \frac{192}{\lambda_{max}}\frac{EJ}{l^2} = 34{,}6\frac{EJ}{l^2},$$

$$p_{cr} = \frac{2\,H_{cr}}{l} = 69{,}2\frac{EJ}{l^3}.$$

Să vedem dacă presupunerile noastre, în care am considerat activ numai montantul (3), sînt corecte :

$$(3{,}600 - 5{,}550)\,v_1 - 0{,}511\,v_2 - 1{,}911\,v_3 = 0\,,$$

$$-0{,}925\,v_1 + (1{,}966 - 5{,}550)\,v_2 - 0{,}925\,v_3 = 0\,,$$

$$-2{,}670\,v_1 - 0{,}511\,v_2 + (2{,}841 - 5{,}550)\,v_3 = 0\,,$$

$$\frac{v_1}{\begin{vmatrix} -3{,}584 & -0{,}925 \\ -0{,}511 & -2{,}709 \end{vmatrix}} = \frac{-v_2}{\begin{vmatrix} -0{,}925 & -0{,}925 \\ -2{,}670 & -2{,}709 \end{vmatrix}} = \frac{v_3}{\begin{vmatrix} -0{,}925 & -3{,}584 \\ -2{,}670 & -0{,}511 \end{vmatrix}},$$

$$\frac{v_1}{9{,}23} = \frac{v_2}{-0{,}04} = \frac{v_3}{-9{,}08} = \gamma^2.$$

Urmărind figura 9*b*, se observă că cele presupuse de noi au fost exacte (lucrează un singur montant din margine). Comparînd cifra obţinută de către noi pentru arcul cu tirant cu cele obţinute de Dinnik pentru arcul fără tirant (45,4 pentru $f/l = 0{,}2$ 46,5 pentru $f/l = 0{,}3$), rezultă un spor de stabilitate de aproximativ 50 %.

Aplicaţia 2. Să se afle mărimea lui P_{cr} pentru structura cu tirant din figura 10. Momentul de inerţie este constant, iar montanţii sînt monoactivi :

$$\operatorname{tg}\varphi_{01} = 2\,; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}\,; \qquad S_{01} = 2{,}235\,a\,,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{12} = 0\,; \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = 1\,; \qquad S_{12} = \qquad a\,,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{23} = -1\,; \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{2}\,; \qquad S_{23} = 1{,}414\,a\,.$$

Alegem $J_0 = J$; $S_0 = a$; $\beta_{11} = 2(2{,}235 + 1) = 6{,}470$,

$\beta_{22} = 2(1{,}414 + 1) = 4{,}828$,

$\beta_{12} = \beta_{21} = 1$,

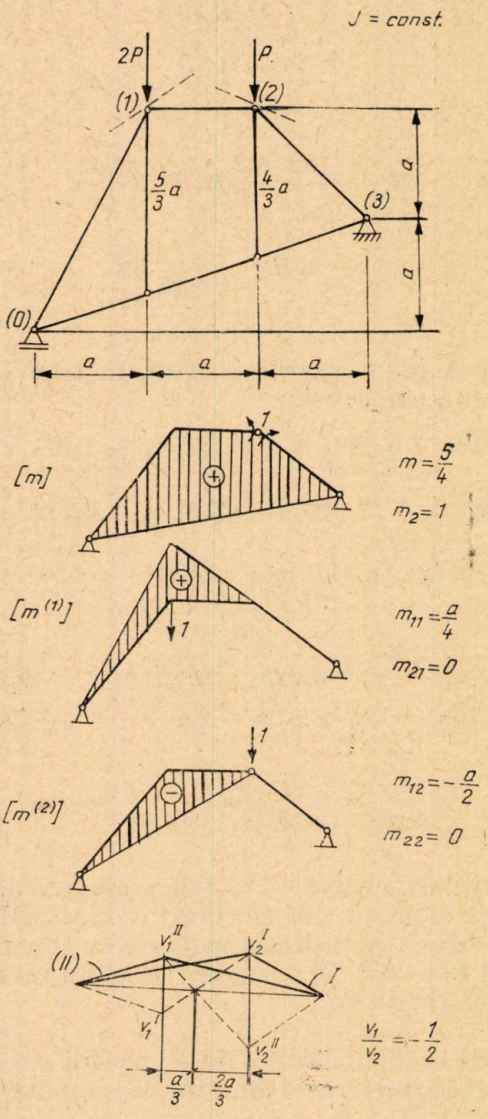


Fig. 10

$$B = \begin{Vmatrix} 6{,}470 & 1 \\ 1 & 4{,}828 \end{Vmatrix}; \quad L_M^* = a \begin{Vmatrix} 0{,}25 & 0 \\ -0{,}50 & 0 \end{Vmatrix}; \quad L_M^0 = a \begin{Vmatrix} 0{,}25 & -0{,}50 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\delta_{cc} = 17{,}48 \frac{a}{6EJ}; \quad m = \begin{Vmatrix} 1{,}25 \\ 1 \end{Vmatrix}; \quad \overline{m} = \| \, 1{,}25 \quad 1 \, \|.$$

Trecînd peste calcule, obţinem :

$$E - \frac{\nu}{\delta_{cc}} m\overline{m}B = \begin{Vmatrix} 0{,}349 & -0{,}435 \\ -0{,}521 & 0{,}652 \end{Vmatrix}; \quad L_M^* B = a \begin{Vmatrix} 1{,}618 & 0{,}25 \\ -3{,}235 & -0{,}50 \end{Vmatrix},$$

$$L_M^* B\left(E - \frac{\nu}{\delta_{cc}} m\overline{m}B\right) = a \begin{Vmatrix} 0{,}435 & X \\ -0{,}867 & X \end{Vmatrix},$$

$$A_x^0 = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{25}{24} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad G_x = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}; \quad A_y^0 = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A^0 = A_x^0 G_x + A_y^0 = \begin{Vmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{55}{24} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Matricele deduse pînă aici sînt valabile oricare ar fi direcţia de pierdere a stabilităţii.

1. Pierderea stabilităţii se face spre dreapta ; montantul activ va fi cel din (2) :

$$\pi'_{R_{dr}} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \end{Vmatrix} = \frac{3}{2a} \begin{Vmatrix} 1 \end{Vmatrix}; \quad \pi_{R_{dr}} = \frac{3}{2a} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$L_M^0 \pi_{R_{dr}} = \begin{Vmatrix} 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad A^0 - L_M^0 \pi_{R_{dr}} = \begin{Vmatrix} 2{,}333 & -1{,}543 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$v = H\frac{a^2}{6EJ} \begin{Vmatrix} 1{,}015 & -0{,}672 \\ -2{,}020 & 1{,}340 \end{Vmatrix} v; \quad \begin{vmatrix} 1{,}015-\lambda & -6{,}672 \\ -2{,}020 & 1{,}340-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda(\lambda - 2{,}355) = 0; \quad \lambda_{cr} = 2{,}355,$$

$$H_{cr}^{I} = P_{cr}^{I} = \frac{6}{2{,}355}\frac{EJ}{a^2} = 2{,}55\frac{EJ}{a^2}.$$

2. Pierderea stabilităţii se face spre stînga ; montantul activ va fi cel din (1) :

$$\pi'_{R_{st}} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} \end{Vmatrix} = \frac{3}{2a} \begin{Vmatrix} 1 \end{Vmatrix}; \quad \pi_{R_{st}} = \frac{3}{2a} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$L_M^0 \pi_{R_{st}} = \begin{Vmatrix} 0{,}375 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad A^0 - L_M^0 \pi_{R_{st}} = \begin{Vmatrix} 1{,}958 & -2{,}292 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$v = H\frac{a^2}{6EJ} \begin{Vmatrix} 0{,}852 & -0{,}995 \\ -1{,}696 & 1{,}990 \end{Vmatrix} v; \quad \begin{vmatrix} 0{,}852-\lambda & -0{,}995 \\ -1{,}696 & 1{,}990-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda(\lambda - 2{,}842) = 0 \qquad \lambda_{cr} = 2{,}842.$$

$$H_{cr}^{II} = P_{cr}^{II} = \frac{6}{2{,}842}\frac{EJ}{a^2} = 2{,}11\frac{EJ}{a^2}.$$

Deoarece $P_{cr}^{II} < P_{cr}^{I}$, rezultă că tendința de pierdere a stabilității spre stînga este mai periculoasă. Acest lucru era de așteptat dacă ținem seama că în condițiile problemei cei doi montanți acționează ca două reazeme elastice identice, dar eficacitatea montantului (2) este mai mare, întrucît din configurația structurii (în concordanță și cu sistemele de ecuații) rezultă că el este antrenat în deplasări verticale de două ori mai mari decît montantul (1):

$$\text{(I)} \quad (1{,}015 - 2{,}355)\, v_1 - 0{,}672\, v_2 = 0\,; \quad 1{,}340\, v_1 + 0{,}672\, v_2 = 0\,,$$

$$\text{(II)} \quad (0{,}852 - 2{,}842)\, v_1 - 0{,}995\, v^2 = 0\,; \quad 1{,}990\, v_1 + 0{,}995\, v_2 = 0\,,$$

. . . . . .

Materialul de față și-a propus drept scop studierea flambajului elastic al arcului simplu rezemat cu tirant suspendat fără momente inițiale și supus acțiunii unor forțe verticale.

Metoda utilizată a fost cea a micilor deplasări, singura operantă în astfel de cazuri. În acest scop, în lucrare au fost clarificate o serie de aspecte specifice problemei legate de conlucrarea sistemului arc-montanți-tirant și unele aspecte mai generale indispensabile studiului arcului de formă oarecare (chiar fără montanți și tirant).

Utilizarea ca instrument matematic a calculului matricial, condiționată de numărul mare de parametrii luați în considerare, face imposibilă finalizarea sub forma unor formule care din punctul de vedere al proiectantului ar fi fost de preferat.

În principiu, metoda prezentată este simplă, toate matricele care intervin în ecuația de stabilitate avînd expresii comode. Dificultățile în aplicarea metodei constă în volumul relativ mare al calculelor impus de operarea cu matrice; utilizarea unor calculatoare electronice programate în acest sens ar ușura foarte mult rezolvarea, permițînd totodată obținerea prin alegerea unui mare mai număr de puncte a unor rezultate de precizie ridicată.

Lucrarea de față nu a putut trata toate aspectele legate de efectul tiranților suspendați asupra stabilității arcelor. Ar mai fi interesant de studiat acest efect și în cazul arcelor cu momente inițiale, precum și unele aspecte cantitative, care ne-ar permite tragerea unor concluzii practice privitoare la alegerea numărului minim de puncte necesar prinderii cu suficientă precizie a fenomenului de instabilitate.

Asupra acestor aspecte, ca și a altora, vom reveni.

Primită la redacție la 4 august 1966

BIBLIOGRAFIE

1. A. F. Smirnov, *Stabilitatea statică și dinamică a construcțiilor*, trad. din l. rusă, București, Edit. tehnică a Transporturilor, 1951.
2. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, vol. I — II, E.S.C.A.1955 și E.T. 1959, București.

CALCULUL SEISMIC AL CADRELOR PLANE

de N. POSEA, I. RUIU, M. IONESCU-BUJOR
Institutul de petrol, gaze și geologie, București
Institutul de studii și cercetări energetice

Se prezintă un algoritm complet pentru determinarea sarcinilor statice și a eforturilor corespunzătoare în orice cadru multietajat supus unei acțiuni seismice.
Pornind de la cadrul cu masele concentrate la noduri, se stabilește o metodă adecvată pentru obținerea primelor trei pulsații și moduri proprii de oscilație. Pentru calculul acestora s-a adoptat un procedeu de aproximații succesive cu convergență corespunzătoare care poate asigura precizia dorită.
Pe baza caracteristicilor dinamice ale structurii se determină sarcinile statice echivalente acțiunii seismice și eforturile corespunzătoare pentru fiecare dintre cele trei moduri de oscilație precizate.
Algoritmul întocmit a fost concretizat într-un program pentru un calculator cifric. Programul realizat, denumit „CASE", a fost aplicat în practică și conduce, prin calculul dinamic exact și rapid efectuat, atît la reducerea timpului de proiectare, cît și la îmbunătățirea soluțiilor constructive.

Calculul construcțiilor la acțiuni seismice este o problemă complexă a cărei rezolvare necesită, pe lîngă clarificarea multor aspecte teoretice privind interacțiunea dintre pămînt și construcție în timpul unui seism, stabilirea unor metode de calcul ușor de aplicat care să oglindească cît mai fidel comportarea reală a construcțiilor.

Pentru structurile etajate, foarte frecvente în practica construcțiilor, care se descompun în cadre plane, se prezintă în lucrarea de față, atît o metodă de calcul a primelor trei pulsații și forme proprii de oscilație, cît și modul de calcul al forțelor seismice și al eforturilor corespunzătoare, cu respectarea prevederilor din *Normativul condiționat pentru proiectarea construcțiilor civile și industriale din regiuni seismice P 13—63.*

Pe baza algoritmului de calcul stabilit s-a întocmit un program aplicat la calculatorul numeric Elliott—4100 *). Prin folosirea acestui program, denumit CASE, care necesită puține date inițiale (cele de la calculul static, plus masele și coeficientul K_s dependent de gradul de cutremur), se pot obține direct primele trei pulsații proprii, formele proprii corespunză-

*) Acest calculator se află la Dispeceratul sistemului energetic, București.

toare şi sarcinile seismice repartizate pe nivele. Prin cuplarea acestui program cu programul pentru calculul sistemelor static nedeterminate [2], denumit CASTAN, care se face automat de către calculatorul cifric, se obţin direct eforturile produse de sarcinile seismice în toate secţiunile unei structuri plane.

1. MODELUL DINAMIC AL STRUCTURII

O structură alcătuită din bare are, teoretic, o infinitate de grade de libertate dinamică şi deci o infinitate de frecvenţe şi de vectori proprii. În calculul structurilor de orice fel interesează însă numai un număr limitat

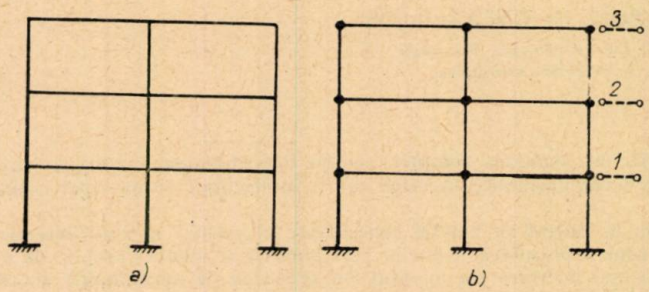


Fig. 1

de frecvenţe proprii, de regulă cele mai joase sau, în cazuri speciale, cele care se găsesc în vecinătatea frecvenţelor perturbatorilor externi.

În cazul acţiunii seismice asupra construcţiilor, pentru structurile obişnuite interesează numai frecvenţa fundamentală, iar pentru structurile înalte primele trei frecvenţe şi moduri proprii de oscilaţie. De aceea structura reală poate fi redusă la un model dinamic mai simplu. Pentru cadrele etajate (fig. 1*a*), modelul dinamic (fig. 1*b*) se obţine prin concentrarea maselor barelor la nodurile structurii. În acest fel, sistemul dinamic are un număr limitat de grade de libertate şi primele frecvenţe proprii sînt suficient de apropiate de cele ale structurii cu mase distribuite.

În general, la toate cadrele cu noduri deplasabile primele pulsaţii proprii pot fi determinate, cu aproximaţie satisfăcătoare din punct de vedere practic, prin concentrarea maselor la noduri. În aceste cazuri, numărul gradelor de libertate dinamică ale structurii este egal cu numărul parametrilor care definesc translaţiile nodurilor în iopteza că lungimile barelor rămîn neschimbate.

Astfel, cadrul din figura 1*b* comportă numai trei grade de libertate dinamică, caracterizate de parametri 1,2,3 (fig. 1*b*) care determină translaţiile nodurilor fiecărui etaj, şi, în consecinţă, trei pulsaţii proprii şi trei forme proprii de oscilaţie.

Pentru obţinerea unui număr mai mare de frecvenţe proprii, masele barelor pot fi concentrate atît la noduri, cît şi la mijlocul barelor respective. Modelul dinamic devine însă mult mai complicat, necesită un volum mult mai mare de calcule şi este neindicat, deoarece valorile îmbunătăţite ale primelor pulsaţii proprii diferă puţin de valorile obţinute pe

modelul anterior, mai simplu, şi, în plus, prin ipotezele admise la evaluarea acţiunii seismice se introduc erori mult mai mari decît cele ce ar rezulta din valorile aproximative ale pulsaţiilor proprii.

2. ECUAŢIA PULSAŢIILOR PROPRII

Se aleg ca parametri de oscilaţie deplasările nodurilor etajelor $Y_1, Y_2, \ldots, Y_i, Y_j, \ldots, Y_n$ (fig. 2*a*). Aceste deplasări se consideră drept componente ale vectorului Y. Se introduce o forţă unitară după direcţia parametrului j (fig. 2*b*) şi se determină deplasările δ_{ij} $(i = 1,2,\ldots, n)$ după direcţiile tuturor celorlalţi parametrii; pe direcţia j deplasarea va

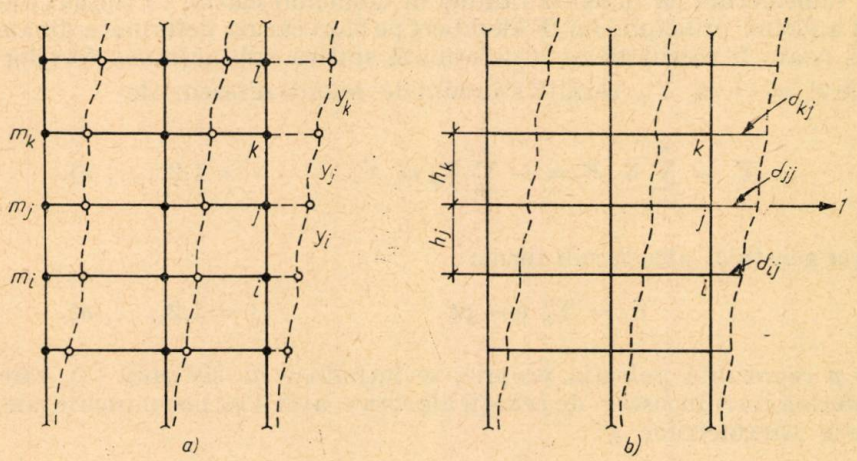


Fig. 2

fi δ_{jj}. Prin introducerea de forţe unitare în mod separat pentru fiecare parametru de oscilaţie şi prin calcularea deplasărilor corespunzătoare se obţine matricea de influenţă a deplasărilor:

$$\delta = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \ldots & \delta_{1i} & \delta_{1j} \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \ldots & \delta_{2i} & \delta_{2j} \ldots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} \ldots & \delta_{ii} & \delta_{ij} \ldots & \delta_{in} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} \ldots & \delta_{ji} & \delta_{jj} \ldots & \delta_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \ldots & \delta_{ni} & \delta_{nj} \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

care este o matrice simetrică.

Masele concentrate la noduri, notate cu m_i ($i = 1,2,\ldots,n$), pentru toate masele de la un etaj se consideră că formează o matrice diagonală:

$$m = [m_i] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & m_i & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & m_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Considerînd că sistemul rămîne în domeniul elastic în timpul oscilaţiei şi aplicînd principiul lui D'Alembert pe baza căruia deformata dinamică liberă poate fi calculată ca o deformată statică sub acţiunea forţelor de inerţie $F_j = -m_j \ddot{Y}_j$, rezultă sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} F_j = -\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} m_j \ddot{Y}_j \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{3}$$

Soluţia acestuia, aleasă sub forma

$$Y_j = Y_j^0 \cos pt \qquad (j = 1,2,\ldots,n), \tag{4}$$

unde p reprezintă pulsaţia proprie, se introduce în sistemul (3), care se transformă într-un sistem de ecuaţii algebrice avînd ca necunoscute amplitudinile parametrilor Y^0:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} m_j Y_j^0 - \frac{1}{p^2} Y_i^0 = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{5}$$

Dacă se notează

$$\lambda = \frac{1}{p^2}, \tag{6}$$

$$A = [\delta_{ij}]\,[m], \tag{7}$$

sistemul de ecuaţii (5), scris matriceal, devine

$$(A - \lambda I)\, Y^0 = 0, \tag{8}$$

unde I este matricea-unitate.

Pentru ca sistemul (8), care este omogen, să admită soluţii diferite de cea banală ($Y^0 \equiv 0$), trebuie îndeplinită condiţia ca determinantul coeficienţilor să fie nul:

$$|A - \lambda I| = 0. \tag{9}$$

Această condiție reprezintă o ecuație de gradul n în λ:

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \ldots + b_n = 0, \tag{9'}$$

denumită ecuația pulsațiilor proprii. Rădăcinile λ_α ale acestei ecuații, denumite valori caracteristice ale matricei A, alese în ordinea $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_\alpha > \ldots$, conduc cu ajutorul relației (6) la pulsațiile proprii p_α, care rezultă în ordinea $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n$; p_1 este pulsația fundamentală.

Înlocuind în sistemul (8) fiecare dintre valorile caracteristice și dînd uneia din componentele Y^0 o valoare arbitrară, se pot exprima în mod unic toate celelalte componente și se obține astfel o matrice-coloană, denumită vector caracteristic al matricei A. Deformata sistemului corespunzătoare unui vector caracteristic al matricei A reprezintă o formă proprie sau un mod propriu de oscilație.

Pentru fiecare pulsație proprie p_α se obține cîte o formă proprie de oscilație Y_α. Totalitatea formelor proprii sau a vectorilor caracteristici, care sînt ortogonali între ei, formează o matrice

$$\overline{Y} = [Y_1\ Y_2 \ldots Y_\alpha \ldots Y_n], \tag{10}$$

denumită matricea vectorilor caracteristici, sau matricea modurilor proprii. Totalitatea modurilor proprii este denumită spectrul formelor proprii, iar matricea diagonală a valorilor caracteristice este denumită matricea spectrală.

Precizări: 1. Deși matricea $[\delta_{ij}]$ este simetrică, matricea A este nesimetrică. Totdeauna însă această matrice se poate transforma într-o matrice simetrică, cu aceleași valori caracteristice ca matricea A. Pe această bază, întrucît toate elementele matricei A sînt numere reale, rezultă că toate valorile caracteristice sînt reale și distincte. În plus, vectorii caracteristici sînt ortogonali, matricea $\overline{Y}$ (10) fiind o matrice de transformare ortogonală.

2. Fiecare vector propriu Y_α corespunzător valorii λ_α satisface relația

$$AY_\alpha = \lambda_\alpha Y_\alpha. \tag{11}$$

Componentele vectorului Y_α vor fi $Y_{i\alpha}$, unde $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Procedeul expus mai sus pentru obținerea valorilor și a vectorilor proprii se încadrează în metoda generală de studiu a vibrațiilor proprii, denumită în dinamica construcțiilor metoda forțelor. În cazul de față a fost preferat acest procedeu, deoarece deplasările δ_{ij} se calculează cu ușurință la un calculator, folosindu-se programul CASTAN [2]. Pornindu-se de la valorile Z_g^j ale rotirilor de bare la nivelul g, din sarcina 1 la nivelul j, rezultă cu ușurință [2], [3] următoarea expresie pentru calculul deplasărilor δ_{ij} $(g < i)$:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{4E} \sum_{g=1}^{i} Z_g^j \cdot h_g \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Termenul $4E$ s-a introdus datorită faptului că programul CASTAN [2] dă valorile de calcul Z_g', care reprezintă rotirile reale multiplicate cu $4E$, unde E este modulul de elasticitate longitudinală al barelor și h_g reprezintă înălțimea etajului g (fig. 2*b*).

3. CALCULUL PULSAȚIILOR ȘI A FORMELOR PROPRII DE OSCILAȚIE

Deoarece pentru calculul seismic interesează cel mult primele trei pulsații și forme proprii $1 \leqslant N \leqslant 3$, se adoptă un procedeu de aproximații succesive, convergent suficient de rapid, folosind o extindere a metodei lui Willkinson.

Metoda este aplicabilă matricelor nesimetrice cu numere reale, ale căror valori proprii sînt reale și satisfac condiția $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$. Ea procură cea mai mare valoare proprie, simultan cu componentele vectorului propriu corespunzător. Precizia valorii proprii și a vectorului calculat sînt teoretic oricît de mari ; ea poate fi hotărîtă de analist sau de programator în funcție de necesitățile practice ale problemei prin fixarea valorii ε, procesul de iterații oprindu-se cînd $X_{K+1} - X_K \leqslant \varepsilon$.

Pentru valoarea proprie următoare se separă din matricea A vectorul corespunzător primei valori λ_1 și apoi se determină de asemenea valoarea proprie cea mai mare, care însă pentru matricea inițială este λ_2. Procesul poate continua pînă la obținerea oricărei pulsații proprii, avînd grijă deosebită pentru asigurarea preciziei necesare.

A. PRIMA VALOARE PROPRIE, λ_1

Fie $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ vectorii proprii ai matricei A. Ei formează o bază ortonormală în spațiul R^n. Deci orice vector X_0 se poate exprima unic ca o combinație liniară cu coeficienți reali a acestor vectori :

$$X_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_n Y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i'.$$

Aplicînd acestui vector matricea A și ținînd seama de (11), se obține

$$X_1 = AX_0 = A\left(\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i A Y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i' \lambda_i.$$

Continuînd să se aplice vectorului obținut matricea A, se obține șirul de iterații

$$X_2 = AX_1 = A^2 X_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i A^2 Y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^2 Y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i' \lambda_i^2,$$

. . . . . .

$$X_K = AX_{K-1} = A^K X_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i A^K Y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^K Y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i' \lambda_i^K,$$

$$X_{K+1} = AX_K = A^{K+1} X_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i A^{K+1} Y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^{K+1} Y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i' \lambda_i^{K+1}.$$

Făcînd raportul componentelor vectorului X din două iterații succesive;

$$\frac{X_{K+1}}{X_K} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i' \cdot \lambda_i^{K+1}}{\sum a_i' \cdot \lambda_i^K} = \frac{a_1' \lambda_1^{K+1}\left[1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_1'}{a_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{K+1}\right]}{a_1' \lambda_1^K\left[1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i'}{a_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{K}\right]},$$

și notînd

$$\frac{a_i'}{a_1} = a_{i1}^*; \quad \frac{\lambda_i}{\lambda_1} = \alpha_{i,1},$$

se obține

$$\frac{X_{K+1}}{X_K} = \lambda_1 \frac{1 + \sum_{i=2}^{n} a_{i,1}^* \alpha_{i,1}^{K+1}}{1 + \sum_{i=2}^{n} a_{i1}^* \alpha_{i,1}^K} = \lambda_1 \frac{\varepsilon_i^{K+1}}{\varepsilon_i^K}.$$

Deoarece rapoartele $\alpha_{i,1}$ sînt subunitare pentru $K \to \infty$, se obține

$$\alpha_{i,1}^K \to 0, \quad \varepsilon_i^K \to 1$$

și

$$\lim_{K\to\infty} \frac{X_{K+1}}{X_K} = \lambda_1 \tag{13}$$

sau

$$\lim_{K\to\infty} \frac{AX_K}{X_K} = \frac{\lim_{K\to\infty} AX_K}{\lim_{K\to\infty} X_K} = \frac{A \lim_{K\to\infty} X_K}{\lim_{K\to\infty} X_K} = \lambda_1.$$

Rezultă

$$\lim_{K\to\infty} X_K = Y_1$$

și deci

$$AY_1 = \lambda_1 Y_1. \tag{14}$$

S-a obținut în acest fel valoarea proprie cea mai mare λ_1 și vectorul propriu corespunzător $Y_1 \simeq X_{K_0}$, unde K_0 este numărul de cicluri efectuate.

Observații. 1. Algoritmul de mai sus prezintă neajunsul că la fiecare iterație, în funcție de componentele X_{K+1}^j, X_K^j ale vectorilor X_{K+1}, X_K, rezultă n valori pentru λ_1 și nu se poate ști care este cea mai apropiată de valoarea exactă. Acest neajuns se înlătură prin folosirea raportului normelor vectorilor X_{K+1} și X_K.

2. Considerăm norma euclidiană a vectorilor

$$\|X\| = (<X_1, X_1>)^{1/2} = (\sum_j X_j^2)^{1/2},$$

atunci rapoartele care tind la limită către λ_1 se înlocuiesc cu raportul normelor :

$$\frac{\| X_{K+1} \|}{\| X_K \|} = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} (X'_{K+1})^2}{\sum_{j=1}^{n} (X'_K)^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} (a'_{1j} \lambda_1^{K+1} \varepsilon_j^{K+1})^2}{\sum_{j=1}^{n} (a'_{1j} \lambda_1^K \varepsilon_j^K)^2} \right]^{1/2} = \lambda_1 \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} (a'_{1j} \varepsilon_j^{K+1})^2}{\sum_{j=1}^{n} (a'_{1j} \varepsilon_j^K)^2} \right]^{1/2}.$$

Trecînd la limită şi ţinînd seama că $\varepsilon_j^K \to 1$, rezultă valoarea unică

$$\lim \frac{\| X_{K+1} \|}{\| X_K \|} = \lambda_1 \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} (a'_{1j})^2}{\sum_{j=1}^{n} (a'_{1j})^2} \right]^{1/2} = \lambda_1.$$

B. A DOUA VALOARE PROPRIE, λ_2

După calculul primei valori proprii şi a vectorului corespunzător, pentru determinarea valorii proprii λ_2 şi a vectorului Y_2 se consideră mai întîi vectorul

$$\overline{X}_0 = AX_0 - \lambda_1 X_0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\, a_i Y_i = \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\, a_i Y_i =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\, a'_i,$$

care este o combinaţie liniară a vectorilor proprii ai matricei A în afară de vectorul corespunzător lui λ_1.

Aplicînd succesiv vectorului $\overline{X}_0$ matricea A, se obţin interaţiile

$$\overline{X}_1 = A\overline{X}_0 = A^2 X_0 - \lambda_1 A X_0 = \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\ \lambda_i a'_i,$$

$$\overline{X}_2 = A\overline{X}_1 = A^2 \overline{X}_0 = A^3 X_0 - \lambda_1 A^2 X_0 = AX_2 - \lambda_1 X_2 =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\ \lambda_i^2 a'_i,$$

. . . . . .

$$\overline{X}_K = A\overline{X}_{K-1} = A^K \overline{X}_0 = AX_K - \lambda_1 X_K = \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\ \lambda_i^K a'_i,$$

$$\overline{X}_{K-1} = A\overline{X}_K = A^{K+1} \overline{X}_0 = AX_{K+1} - \lambda_1 X_K = \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\ \lambda_i^{K+1} a'_i.$$

Făcînd raportul componentelor vectorilor $\overline{X}_{K+1}$, $\overline{X}_K$, se obține

$$\frac{\overline{X}_{K+1}^j}{\overline{X}_K^j} = \frac{\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\,\lambda_i^{K+1} a'_{ij}}{\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\,\lambda_i^{K} a'_{ij}} = \lambda_2 \frac{1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{\lambda_i - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{a'_{ij}}{a_{2j}} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_2}\right)^{K+1}}{1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{\lambda_i - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{a'_{ij}}{a_{2j}} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_2}\right)^{K}} =$$

$$= \lambda_2 \frac{1 + \sum_{i=3}^{n} \bar{a}_{ij}\,\alpha_i^{K+1}}{1 + \sum_{i=3}^{n} \bar{a}_{ij}\,\alpha_i^{K}} = \lambda_2 \frac{\varepsilon_j^{K+1}}{\varepsilon_j^{K}}.$$

Pentru a obține o singură valoare pentru λ_2 se folosește norma euclidiană a vectorilor în două iterații succesive, astfel încît

$$\lim_{K \to \infty} = \frac{\| \overline{X}_{K+1} \|}{\| \overline{X}_K \|} = \lambda_2. \tag{15}$$

Vectorul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$Y_2 = \overline{X}_{K1}, \tag{16}$$

unde K_1 este numărul de cicluri folosit pentru calculul valorii λ_2.

Precizia calculului valorii λ_2 depinde de ε și K_0 care au intervenit la calculul lui λ_1. Astfel, cu cît ε este mai mic și cu cît K_0 este mai mare, cu atît precizia la calculul lui λ_2 este mai bună. Se înțelege că numărul de cicluri K_1 este inferior lui K_0, deoarece pentru $K = K_0$, $\overline{X}_K \to 0$. De aici rezultă că vectorul X_0 pentru calculul primei valori λ_1 trebuie ales cît mai depărtat de forma reală pentru ca numărul de cicluri K_0 pentru obținerea valorii λ_1 să fie cît mai mare, ceea ce asigură o precizie corespunzătoare la calculul valorii λ_2 și, în continuare, a valorii λ_3.

C. A TREIA VALOARE PROPRIE, λ_3

Se pornește de la vectorul $\overline{X}_0$ luat ca o combinație liniară a vectorilor proprii ai matricei A în afară de Y_1 și Y_2. Folosind expresiile X_0, X_1, X_2, ... de la prima valoare proprie, se obține

$$\overline{X}_0 = A\overline{X}_0 - \lambda_2 \overline{X}_0 = (A^2 X_0 - \lambda_1 A X_0) - \lambda_2 (A X_0 - \lambda_1 X_0) =$$

$$= X_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) X_1 + \lambda_1 \lambda_2 X_0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\,\lambda_i + \lambda_1 \lambda_2)\, a_i Y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2)\, a_i Y_i = \sum_{i=3}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2)\, a'_i.$$

Iterînd şi efectuînd raportul pe componente a două iteraţii succesive, rezultă

$$\frac{\overline{\overline{X}}_{K+1}}{\overline{\overline{X}}_K^j} = \frac{\sum_{i=3}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) a'_{ij} \lambda_i^{K+1}}{\sum_{i=3}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) a'_{ij} \lambda_i^{K}} =$$

$$= \lambda_3 \frac{1 + \sum_{i=4}^{n} \frac{\lambda_i - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_i - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \cdot \frac{a'_{ij}}{a_{3j}} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_3}\right)^{K+1}}{1 + \sum_{i=4}^{n} \frac{\lambda_i - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_i - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \cdot \frac{a'_{ij}}{a_{3j}} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_3}\right)^{K}} = \lambda_3 \frac{1 + \sum_{i=4}^{n} a^*_{ij} \alpha_i^{K+1}}{1 + \sum_{i=4}^{n} a^*_{ij} \alpha_i^{K}} = \lambda_3 \frac{\varepsilon_j^{*K+1}}{\varepsilon_j^{*K}}.$$

Pentru obţinerea unei singure valori pentru λ_3 se foloseşte norma vectorilor $\overline{\overline{X}}$:

$$\lim \frac{\| \overline{\overline{X}}_{K+1} \|}{\| \overline{\overline{X}}_K \|} = \lambda_3 \tag{17}$$

şi procesul de iteraţie se opreşte după K_2 cicluri cînd

$$\overline{\overline{X}}_{K_2} \cong Y_3. \tag{18}$$

Precizia la calculul valorii λ_3 depinde de ε, K_0 şi K_1; trebuie ales ε cît mai mic şi valorile K_0 şi K_1 cît mai mari.

În legătură cu precizia determinării valorilor proprii se remarcă:

1. Rapiditatea convergenţei primului proces iterativ depinde de vectorul iniţial X_0 de la care se porneşte. Dacă X_0 se află în vecinătatea lui Y_1, atunci convergenţa este foarte rapidă şi K_0 este foarte mic. Această situaţie este avantajoasă atunci cînd se doreşte numai prima valoare proprie a matricei.

Pentru situaţiile cînd se urmăreşte determinarea a trei valori proprii, se caută ca X_0 să fie cît mai depărtat de Y_1 şi ε cît mai mic. În acest fel, după cele remarcate mai sus, se dă posibilitatea ca al doilea şi al treilea proces iterativ să conveargă mai bine şi valorile λ_2, λ_3 să fie calculate cu o precizie mai bună.

Dacă nu se cunoaşte nimic despre vectorul propriu Y_1, se alege X_0 arbitrar, de exemplu [1, 1, ..., 1].

2. Pentru a nu se ajunge la valori foarte mari, vectorii X_K, $\overline{X}_K$, $\overline{\overline{X}}_K$ se normează.

4. DETERMINAREA SARCINILOR SEISMICE

Acţiunea mişcării seismice asupra unei construcţii se introduce în calculele de rezistenţă după normativul P13—63 şi, în general, după normativele de calcul la cutremure din majoritatea ţărilor străine, sub forma unor sarcini statice echivalente aplicate în punctele de concentrare a maselor.

Valoarea sarcinii seismice totale pentru forma proprie de oscilație se calculează cu expresia

$$S_{t,\alpha} = c_\alpha \sum_{K=1}^{n} Q_K, \tag{19}$$

unde Q_K este greutatea maselor de la nivelul K, iar c_α coeficientul seismic total, determinat de relația

$$c_\alpha = K_s \cdot \psi \cdot \beta \cdot \varepsilon, \tag{20}$$

în care

K_s este coeficientul de intensitate seismică, dat în funcție de gradul de seismicitate,

ψ — coeficient constant, dat în norme, dependent de tipul structurii și al materialului folosit și care ține seama de amortizarea oscilațiilor;

β — coeficient dinamic, dependent de perioada proprie de oscilație a structurii T, care se calculează cu expresia

$$\beta = \frac{0{,}9}{T_\alpha} = \frac{0{,}45}{\pi\sqrt{\lambda_\alpha}} \tag{21}$$

dacă $0{,}6 < \beta < 3$, unde λ_α este valoarea caracteristică pentru forma proprie α,

ε — coeficient de echivalență între sistemul cu un singur grad de libertate și sistemul real, care se determină cu formula

$$\varepsilon = \frac{\left[\sum_{K=1}^{n} Q_K \cdot Y_{K,\alpha}\right]^2}{\left[\sum_{K=1}^{n} Q_K\right]\left[\sum_{K=1}^{n} Q_K Y_{K,\alpha}^2\right]}, \tag{22}$$

unde $Y_{K,\alpha}$ este ordonata în dreptul masei K pe forma proprie de oscilație α.

În funcție de terenul de fundație, valoarea β se multiplică cu un coeficient β_1, care după normativul P13—63 are valorile $\beta_1 = 1{,}25$ cînd $\sigma_a < 2$ kgf/cm^2; $\beta_1 = 1{,}5$ în cazul terenurilor moi, mîloase, îmbibate cu apă pînă la nivelul fundațiilor.

De asemenea coeficientul seismic total se ia $c = 0{,}02$, cînd, determinat cu formula (20), rezultă mai mic.

Sarcina seismică totală, calculată cu formula (19), se distribuie pe înălțimea construcției după forma proprie de oscilație pentru care a fost determinată, cu formula

$$S_{K,\alpha} = S_{t,\alpha} \frac{Q_K Y_{K,\alpha}}{\sum_{K=1}^{n} Q_K Y_{K,\alpha}}. \tag{23}$$

5. ALGORITMUL PENTRU CALCULUL EFORTURILOR DIN ACȚIUNEA SEISMICĂ

Calculul seismic al cadrelor se reduce la determinarea sarcinilor seismice și a eforturilor produse de acestea în toate barele sistemului. Obținerea acestor rezultate se realizează cu algoritmul următor :

a) se alcătuiește modelul dinamic al cadrului, se stabilesc gradele de libertate dinamică, se introduc forțe unitare după direcțiile parametrilor de oscilație și se determină eforturile și deplasările produse de acestea în mod separat, după care se obține matricea de influență a deplasărilor $\delta = [\delta_{ij}]$ (formula (1)) ;

b) cunoscînd matricea diagonală a maselor, se calculează matricea $A = [\delta_{ij}] \cdot [m]$ (formula (7)), după care, prin procedeul iterativ descris în paragraful 3, se determină primele trei valori proprii (cele mai mari) ale matricei A și vectorii proprii corespunzători. Valorile proprii ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$) cele mai mari ale matricei A corespund, de fapt, pulsațiilor proprii ($p_1 < p_2 < p_3$) celor mai mici ale sistemului elastic ;

c) se calculează factorii care definesc coeficientul seismic total (20) pentru fiecare din cele trei moduri proprii de oscilație, după care se determină sarcina seismică totală (19) și sarcinile seismice la fiecare nivel (23) ;

d) cu ajutorul forțelor seismice se determină eforturile în toate barele structurii pentru fiecare mod propriu de oscilație, după care se poate efectua orice combinare a acestora.

Pe baza acestui algoritm s-a întocmit un program de calcul denumit CASE (calcul seismic), care a fost aplicat la calculatorul cifric Elliott—4120 de la Dispeceratul sistemului energetic, București.

Schema-bloc a programului CASE este dată în figura 3. O parte din blocurile acestui program pînă la BLØ CK 1NT (fig. 3), care realizează matricea δ, sînt denumite CASTAN REDUS și au fost adaptate de la programul pentru calculul sistemelor static nedeterminate, CASTAN [2].

6. CARACTERISTICILE PROGRAMULUI CASE ȘI UTILIZAREA LUI

Întocmit pe baza algoritmului de mai sus, programul CASE prezintă următoarele caracteristici :

— necesită un număr redus de date inițiale, a căror completare se face cu ușurință ;

— realizează calculele după scheme optime cu folosirea rațională a memoriei calculatorului și într-un timp minim ;

— rezultatele se obțin într-o ordine logică, ușor de folosit și de interpretat de către proiectant ;

— are multe posibilități de verificare și de modificare a datelor introduse în calculator, direct de la pupitre sau de pe bandă ;

— manipularea programului este comodă și permite calculul seismic al cadrelor avînd pînă la 150 de noduri, ceea ce echivalează cu un cadru cu patru deschideri și 30 de etaje. Un astfel de cadru nu poate fi calculat manual (cu rigla de calcul) decît în baza unor ipoteze simplificatoare care introduc abateri de la comportarea reală a structurii ce nu mai pot fi admise în etapa actuală.

SCHEMA BLOC PROGRAM CASE

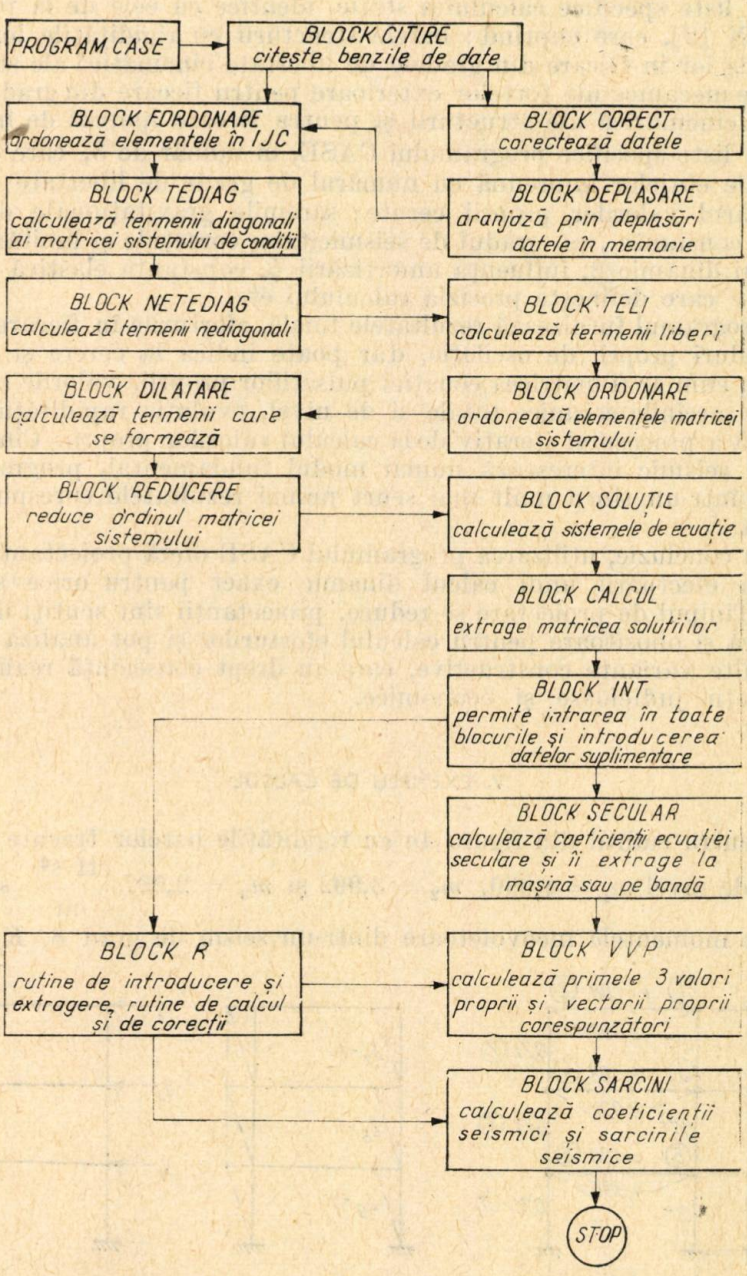


Fig. 3

Pentru calculul seismic al unei structuri cu programul CASE se completează mai multe liste de date, grupate în :

a) liste specifice calculului static, identice cu cele de la programul CASTAN [2], care cuprind : barele structurii cu rigiditățile lor ; barele și rotirile lor în fiecare din gradele de libertate cinematică ale structurii ; lucrurile mecanice ale forțelor exterioare pentru fiecare din gradele de libertate cinematică ale structurii și pentru fiecare ipoteză de încărcare ;

b) liste specifice programului CASE, în număr de 3, care cuprind : înălțimile etajelor împreună cu numărul de grade de libertate dinamice și numărul valorilor proprii cerute ; sarcinile gravitaționale de nivel ; diferite constante , ca gradul de seismicitate, corecțiile și limitările coeficientului dinamic β, influența amortizării ψ, constanta elastică E, coeficientul ε care definește precizia calculului etc.

Programul furnizează rezultatele finale, eforturile în fiecare din cele trei moduri proprii de oscilație, dar poate indica la cerere și rezultate parțiale, cum ar fi matricea ecuației pulsațiilor proprii, valorile și vectorii proprii, sarcinile seismice totale și de nivel, evoluția rapidității de convergență a procesului iterativ de la calculul valorilor proprii. Cînd pentru calculul seismic interesează numai modul fundamental, programul furnizează într-un timp mult mai scurt numai rezultatele corespunzătoare acestuia.

În concluzie, utilizarea programului CASE oferă proiectanților posibilitatea efectuării unui calcul dinamic exact pentru orice structură plană. Timpul de proiectare se reduce, proiectanții sînt scutiți de munca mecanică și obositoare pentru calculul eforturilor și pot analiza științific mai multe variante constructive, care au drept consecință realizarea de construcții judicioase și economice.

7. EXEMPLU DE CALCUL

Pentru cadrul din figura 4*a* cu rigiditățile barelor trecute direct și masele de nivel $m_1 = 4{,}990$, $m_2 = 3{,}992$ și $m_3 = 2{,}997$ $\frac{\text{tf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$ se vor determina momentele încovoietoare dintr-un seism de grad 8, $K_s = 0{,}05$;

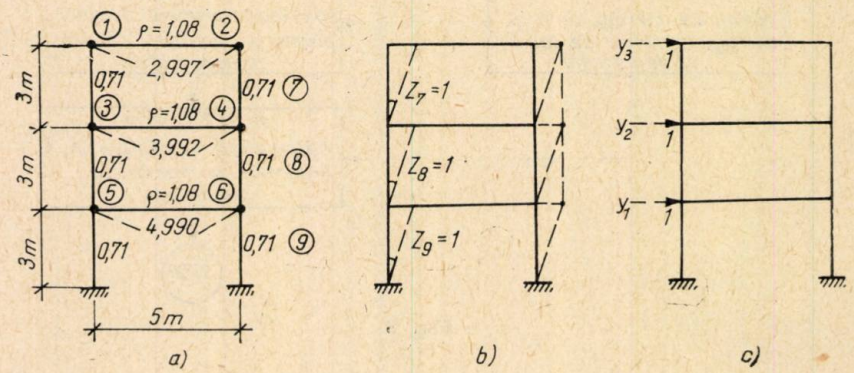


Fig. 4

$\psi = 1{,}2$ în fiecare din cele trei moduri proprii de oscilaţie (modulul de elasticitate al materialului $E = 2{,}0 \cdot 10^6$ tf/m^2).

Se notează nodurile elastice ale cadrului (1, 2, 3, 4, 5, 6) şi gradele de libertate cinematică (7, 8, 9) ca la programul CASTAN [2], după care se completează listele următoare:

— lista barelor, rigidităţilor şi coeficienţilor de transmitere:

1, 1, 3, 9, 3, 1, 2, 1.08, 1.08, 0.5, 0.5,
1, 3, 0.71, 0.71, 0.5, 0.5,
2, 4, 0.71, 0.71, 0.5, 0.5,
3, 4, 1.08, 1.08, 0.5, 0.5,
3, 5, 0.71, 0.71, 0.5, 0.5,
4, 6, 0.71, 0.71, 0.5, 0.5,
5, 6, 1.08, 1.08, 0.5, 0.5,
5, 10, 0.71, 0.71, 0.5, 0.5,
6, 11, 0.71, 0.71, 0.5, 0.5, 0;

— lista barelor care se rotesc în gradele de libertate cinematică şi rotirile lor (fig. 4*b*):

2, — 7, 1,3, 1.0, 2,4, 1.0,
— 8, 3,5, 1.0, 4,6, 1.0,
— 9, 5,10, 1.0, 6,11, 1.0, 0;

— lista lucrurilor mecanice din încărcările cu forţe unitare, succesiv după Y_1, Y_2. Y_3 (fig. 4*c*):

4, — 1, 9, 3,
— 2, 8, 3, 9, 3,
— 3, 7, 3, 8, 3, 9, 3, 0;

— lista înălţimilor etajelor, care cuprinde şi numărul necunoscutelor statice, numărul de nivele, numărul pulsaţiilor cerute:

7, 9, 3, 3, 3, 3, 3;

— lista maselor etajelor:

8, 4.990, 3.992, 2.997;

— lista de coeficienţi: precizie, influenţa terenului K_s, constanta elastică $\frac{10^5}{4E}$:

9, 0.000 000 01, 0, 0.05, 1.2, 0.012,

Se observă că aceste liste se completează uşor pornind numai de la datele iniţiale trecute în figura 4. Listele 3, 5, 6, care au fost sărite în prezentarea de mai sus, se completează numai la programul CASTAN.

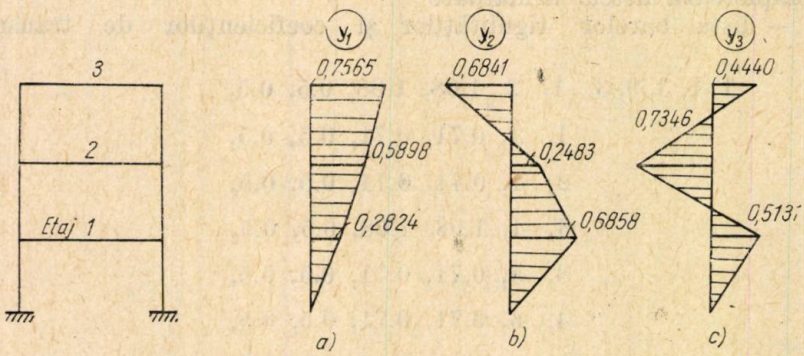


Fig. 5

Calculatorul furnizează:

— valorile caracteristice şi vectorii corespunzători reprezentaţi în figura 5:

$\lambda_1 = 0{,}00083286$; $Y_{1,1} = 0{,}2824$; $Y_{2,1} = 0{,}5898$; $Y_{3,1} = 0{,}7565$,

$\lambda_2 = 0{,}00009989$; $Y_{1,2} = +\,0{,}6858$; $Y_{2,2} = +\,0{,}2483$; $Y_{3,2} = -\,0{,}6841$,

$\lambda_3 = 0{,}00003748$; $Y_{1,3} = 0{,}5131$; $Y_{2,3} = -\,0{,}7346$; $Y_{3,3} = 0{,}4440$,

a căror ortogonalitate se verifică cu expresia $\sum_i m_i Y_{i,\alpha} \cdot Y_{i,\beta} = 0$;

— coeficientul seismic total:

$$C_1 = 0{,}0312\,;\ C_2 = 0{,}02\,;\ C_3 = 0{,}02\,;$$

În modurile 2 şi 3, coeficienţii seismici totali au rezultat mai mici, dar ei, conform normativului P13—63, au fost limitaţi la valoarea $c = 0{,}02$;

— sarcinile seismice totale şi sarcinile repartizate pe nivele (etajele s-au numerotat de jos în sus):

$S_{t,1} = 0{,}3740$ tf; $S_{1,1} = 0{,}0874$; $S_{2,1} = 0{,}1460$; $S_{3,1} = 0{,}1406$,

$S_{t,2} = 0{,}2396$ tf; $S_{1,2} = 0{,}3470$; $S_{2,2} = 0{,}1005$; $S_{3,2} = -\,0{,}2079$,

$S_{t,3} = 0{,}2396$; $S_{1,3} = 0{,}6401$; $S_{2,3} = -\,0{,}7331$; $S_{3,3} = 0{,}3326$.

Forţele de nivel au fost reprezentate cu sensurile lor în figura 6.

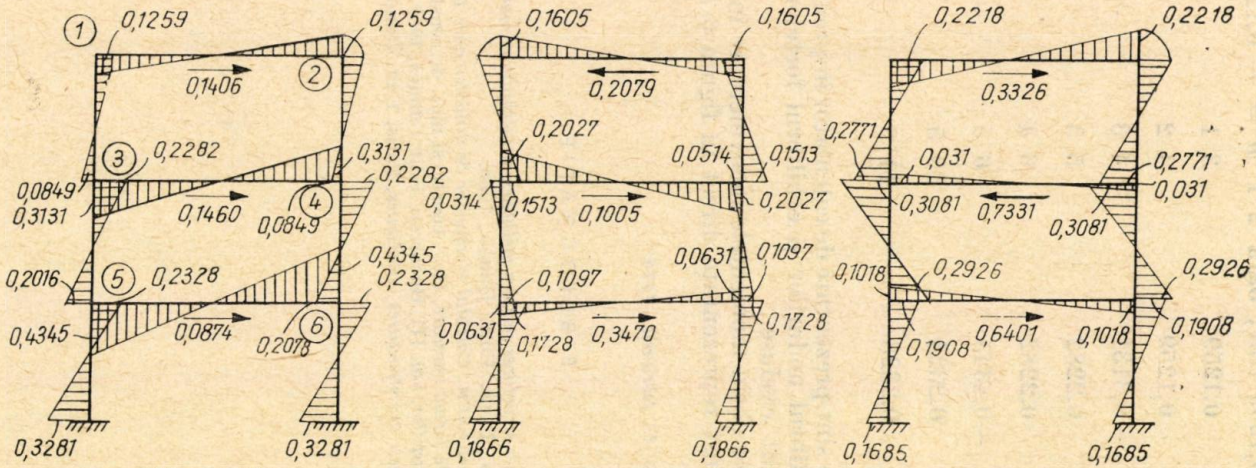

1
2
3
4
5
6
0,1259
0,1259
0,1406
0,2282
0,3131
0,2282
0,0849
0,3131
0,1460
0,0849
0,4345
0,2016
0,2328
0,2328
0,4345
0,0874
0,2078
0,3281
0,3281
(forma I)
a)
0,1605
0,1605
0,2079
0,2027
0,0514
0,1513
0,0314
0,1513
0,1005
0,2027
0,0631
0,1097
0,1097
0,0631
0,1728
0,3470
0,1728
0,1866
0,1866
(forma a II-a)
b)
0,2218
0,2218
0,3326
0,2771
0,031
0,2771
0,3081
0,7331
0,031
0,3081
0,2926
0,1018
0,2926
0,1908
0,6401
0,1018
0,1908
0,1685
0,1685
(forma a III-a)
c)

Fig. 6

— momentele încovoietoare la capetele barelor :

Modul I (fig. 6*a*)

bara 1 2 ; $M = -0{,}1259$ tfm ; bara 2 1 $M = -0{,}1259$ tfm

1	3	0,1259	3	1	0,0849
2	4	0,1259	4	2	0,0849
3	4	—0,3131	4	3	—0,3131
3	5	0,2282	5	3	0,2016
4	6	0,2282	6	4	0,2016
5	6	—0,4345	6	5	—0,4345
5	10	0,2328	10	5	0,3281
6	11	0,2328	11	6	0,3281

Aceste momente sînt prezentate de calculator împreună cu verificările necesare privind echilibrul nodurilor şi echilibrul forţelor la fiecare etaj, astfel încît erorile sînt excluse.

În mod similar se obţin momentele încovoietoare în modurile 2 şi 3 de oscilaţie, care au fost reprezentate direct în figura 6 *b*, respectiv 6 *c*.

Primită la redacţie la 27 februarie 1970

BIBLIOGRAFIE

1 Ping-chun Wong, *Calcul des structures par des méthodes numériques et matricielles, applications sur calculateurs*, Paris, Edit. Dunod, 1969.
2 N. Posea, I. Ruiu, V. Tetelbaum, *Calculul eforturilor de dimensionare în cadrele plane static nedeterminate de formă oarecare*, Rev. constr. şi mat. de constr., **8** (1968).
3 P. Mazilu, *Statica construcţiilor*, vol. III, Bucureşti, Edit. tehnică, 1959.
4 A. I. Roussopoulos, *Théorie des structures élastiques*, Paris, Edit. Dunod, 1967.

CERCETĂRI TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE ASUPRA UNIFORMIZĂRII REPARTIȚIEI DE VITEZE ÎN SECȚIUNEA DE CATALIZĂ A MACHETELOR UNUI REACTOR CHIMIC

de V. TOMA, ȘT. SĂVULESCU
Institutul de mecanică a fluidelor
și construcții aerospațiale

Autorii prezintă distribuții de viteze obținute în secțiunea unui reactor chimic axial-simetric pentru diverse forme ale distribuitoarelor de alimentare. Se expun de asemenea considerații teoretice asupra proiectării unui distribuitor care să asigure o distribuție uniformă de viteze în secțiunea de cataliză a reactorului.

INTRODUCERE

Reactoarele chimice care utilizează amestecuri de gaze prezintă numeroase probleme de mecanică a fluidelor, atît în ceea ce privește scurgerea la scară mare în interiorul lor, cît și relativ la structura fluctuantă a cîmpului de scurgere. În mod special se ridică o serie de chestiuni interesante în zona de scurgere unde are loc interacțiunea complexă cu stratul de granule solide care servește drept catalizator.

În ultimul timp există o tendință [1], [2], [3] de a se lua în considerație și efectele aerodinamice asupra procesului chimic, care, se pare, poate fi optimizat în mod sensibil din punctul de vedere al caracteristicilor tehnice-economice.

O astfel de situație s-a ivit cu ocazia montării reactorului chimic de la Borzești, proiectat de PETROCHIM, care a urmărit îmbunătățirea scurgerii aerodinamice în interiorul reactorului. În baza unei convenții de colaborare, PETROCHIM a construit o machetă care a fost experimentată la Institutul de mecanică a fluidelor, secția gazodinamica fizică, în vederea uniformizării distribuției vitezelor în secțiune de cataliză. Întrucît cercetările întreprinse depășesc cadrul restrîns al unui caz particular, prezentăm în cele ce urmează cîteva dintre rezultatele obținute, cu intenția de a atrage atenția proiectanților asupra unor aspecte de care ar trebui să țină seama în viitor.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 5, P. 1195–1207, 1970

În privinţa rezultatelor experimentale, problema centrală o constituie criteriile de similitudine între scurgerea din reactorul machetei şi reactorul-natură. Acest lucru apare limpede din raportul mare (1/50) între model şi natură, astfel că în secţiunea de intrare aplicarea similitudinii geometrice ar conduce la conducte de alimentare aşa de mici, încît experimentarea ar fi practic imposibilă. În acest sens, rezultatele experimentale obţinute pe model constituie indicaţii calitative asupra posibilităţilor de uniformizare a vitezei din scurgerea reală.

2. MONTAJUL EXPERIMENTAL

Montajul experimental a constat din adaptarea machetei la alimentarea prin ventilator şi prin compresor. Pentru aceasta au fost necesare conducte cu treceri de secţiune de la dreptunghiul gurii de refulare a ventilatoarelor (500×250) sau, în cazul al doilea, de la conducta de refulare (∅ 100 mm) a compresorului la conducta de alimentare (∅ 80 mm) a machetei. În figura 1 (1*A* foto; 1*B* schemă) este arătată schema instalaţiei.

Ea se compune din :

1 — un cap de alimentare, la care conducta de alimentare (∅ = 80 mm) intră tangenţial;

2 — un distribuitor, care constituie piesa principală pentru uniformizarea scurgerii. S-au utilizat două tipuri : cilindric (tip IRPOCHIM) şi conice (tip I.M.F.);

3 — reactorul propriu-zis, care este un corp cilindric (∅ 680 × h = 650) cu două segmente sferice : cel superior de alimentare, cel inferior de evacuare;

4 — conducta de evacuare de ∅ = 220 mm;

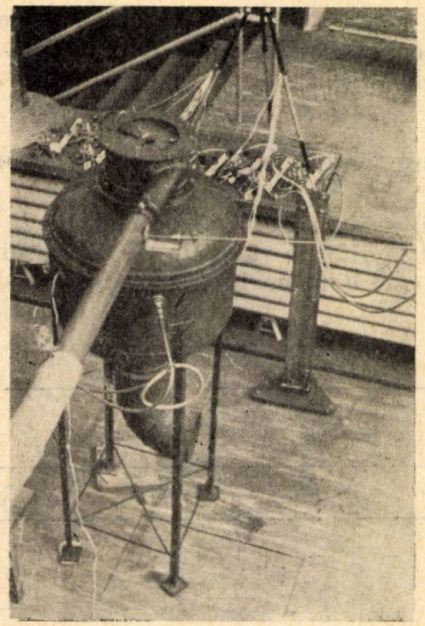
5 — tubul Pitot de măsură a distribuţiei de viteze şi presiuni într-o secţiune a reactorului, împreună cu cele două micromanometre de viteze (indicaţii h_p) şi presiune statică (h_{st});

6 — tubul Pitot montat pe tubul de alimentare (A) împreună cu micromanometrul respectiv de indicaţie h_A.

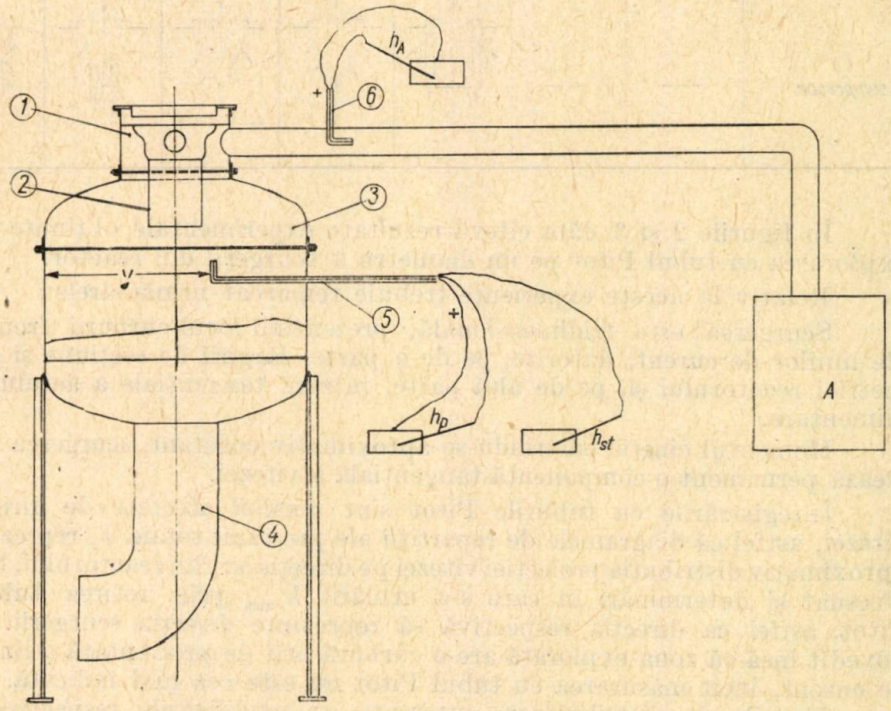
În privinţa funcţionării instalaţiei sînt de remarcat următoarele.

Din cauza variaţiilor mari de secţiune şi a rezistenţelor suplimentare în circuit (distribuitor), atît ventilatorul, cît şi compresorul au funcţionat în regimul lor de pompaj sau foarte aproape de el. Pentru a obţine o viteză uniformă de aproximativ 3 m/s, este nevoie de un debit a = = 1,08 m/s, ceea ce este perfect posibil pentru curba de funcţionare $\Delta p = \Delta p(Q)$ a ventilatorului. Însă viteza din conducta de alimentare devine aproximativ 100 m/s şi căderea de presiune la variaţia bruscă de secţiune $\Delta p \sim \frac{\rho}{2} v^2 = 625$ mm H_2O, ceea ce este în afara presiunii maxime a ventilatorului ($\Delta p_{max} \sim 130$ mm H_2O). Teoretic compresorul poate acoperi o astfel de pierdere, însă practic lungimea conductelor şi a furtunelor de alimentaţie îl aduc aproape de pompaj. Debitul mic a fost un impediment serios în realizarea experienţelor.

Distribuitorul trebuie astfel conceput şi executat încît să asigure o maximă răspîndire a fluidului fără a opune o rezistenţă apreciabilă.



a



b

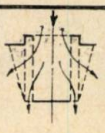
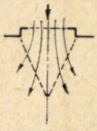
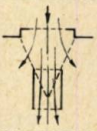
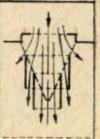
Fig. 1

Măsurătorile cu tubul Pitot trebuie efectuate cu deosebită îngrijire, deoarece scurgerile secundare din interior alternează funcţionarea corectă a prizei totale şi a celei statice.

3. PROGRAMUL ŞI REZULTATELE EXPERIMENTALE PRELIMINARE

Conform figurii 1 s-au determinat curbele $h_p = h_p(y)$, $h_{st} = h_{st}(y)$, pentru un $h_A = \text{const}$ şi diferite variante de distribuitor. Programul complet al experienţelor este cuprins în tabela de mai jos :

Tabela 1

Distribuitor şi catalizator / Alimentare	Fără catalizator (Varianta)				Cu catalizator (Varianta)		
	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
Cu ventilator				—	—	—	—
Cu compresor	—	—					

În figurile 2 şi 3 dăm cîteva rezultate experimentale obţinute prin explorarea cu tubul Pitot pe un diametru a scurgerii din reactor.

Relativ la aceste experienţe trebuie remarcat următoarele :

Scurgerea este tridimensională, prezentînd locul curburii frontale ale liniilor de curent, datorite, pe de o parte, lărgirii de secţiune şi geometriei reactorului şi, pe de altă parte, intrării tangenţiale a aerului de alimentare.

Momentul cinetic păstrîndu-se aproximativ constant, scurgerea păstrează permanent o componentă tangenţială a vitezei.

Înregistrările cu tuburile Pitot sînt sensibil afectate de direcţia vitezei, astfel că diagramele de repartiţii ale presiunii totale h_p reprezintă aproximativ distribuţia proiecţiei vitezei pe direcţia axului reactorului. S-au efectuat şi determinări în care s-a urmărit $h_{p\max}$ prin rotirea tubului Pitot, astfel ca direcţia respectivă să reprezinte direcţia scurgerii. S-a dovedit însă că zona explorată are o curbură atît de pronunţată a liniilor de curent, încît măsurarea cu tubul Pitot nu este cea mai indicată.

Tipurile de distribuitoare încercate cu modificările respective se referă la două tipuri : distribuitor cilindric şi distribuitor conic. Distri-

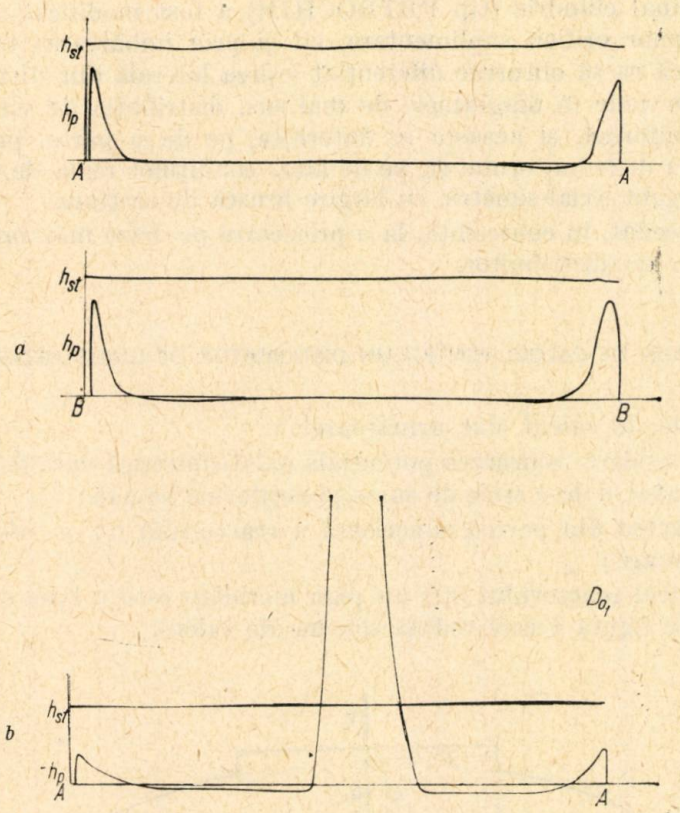


Fig. 2

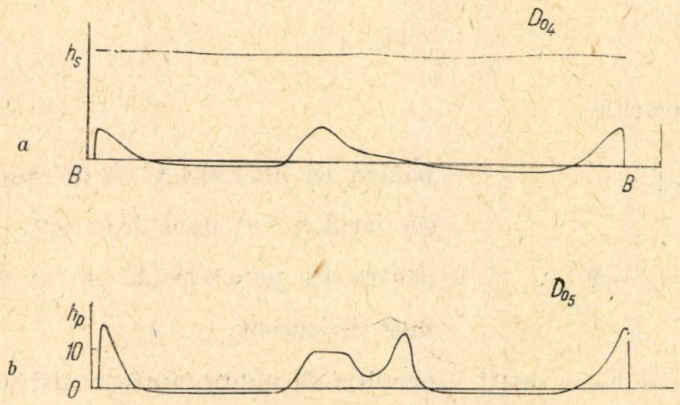


Fig. 3

buitorul original cilindric (tip PETROCHIM) a fost modificat atît prin practicarea unor orificii suplimentare, cît şi prin îmbărcarea lui într-o plasă de sîrmă ca să obtureze diferenţiat ieşirea laterală din distribuitor. După cum se vede în diagramele de mai sus, distribuţia de viteze este complet neuniformă, şi aceasta se datoreşte, pe de o parte, proiectării nejudicioase a distribuitorului şi, pe de alta, condiţiilor reale de scurgere într-un divergent axial-simetric cu lărgire bruscă de secţiune.

S-a procedat, în consecinţă, la o proiectare pe baze mai raţionale a unui nou tip de distribuitor.

4. SCHEMA DE CALCUL PENTRU UN DISTRIBUITOR DE UNIFORMIZARE

Ipotezele de calcul sînt următoarele :

a) se consideră scurgerea potenţială axial-simetrică dată de o viteză V_0 în lungul axei şi de o serie de surse punctiforme pe axă ;

b) scurgerea din partea superioară a reactorului nu e afectată de gura de evacuare ;

c) conturul reactorului într-un plan meridian este o linie de curent a scurgerii. În figura 4 este redată schema de calcul.

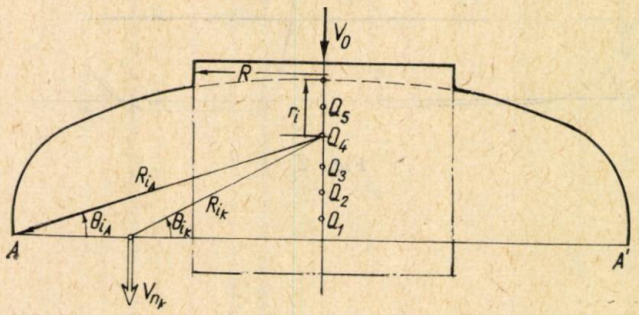


Fig. 4

Avem relaţiile

$$V_0 = \sum \frac{Q_i}{4\pi R_i^2}$$ — pentru ca linia OAA' să fie aproximativ (în jurul lui 0) linie de curent,

$$\sum \frac{Q_i}{4\pi R_{i_A}} \cos\theta_{i_A} \sim 0$$ — pentru ca punctele A, A' să fie pe o linie de curent,

$$\sum \frac{Q_i}{4\pi R_{i_k}^2} \sin\theta_{i_k} = V_{n_k} = \text{const}$$ — condiţia de uniformitate a distribuţiei de viteze în secţiunea AA'.

Alegînd patru puncte pe AA', $k = 1, 2, 3, 4$, se obține un sistem de ecuații algebrice care dau următoarele soluții :

$$\frac{Q_1}{Q_1} = 1\,;\, \frac{Q_2}{Q_1} = 13\,;\, \frac{Q_3}{Q_1} = -77\,;\, \frac{Q_4}{Q_1} = 144\,;\, \frac{Q_5}{Q_1} = -50.$$

A rezultat de asemenea viteza $\dfrac{V_0 4\pi r^2}{Q_1} = 10.$

Conform acestui model, s-au calculat vitezele pe periferia distribuitorului cilindric. S-a obținut diagrama din figura 5 și tabela de mai jos.

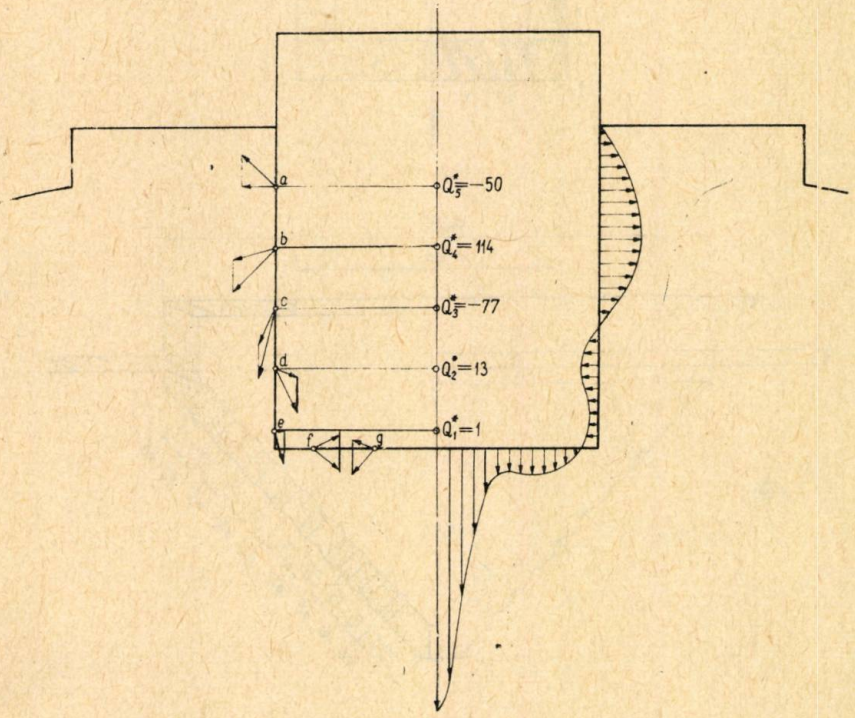


Fig. 5

Punctul	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
$\dfrac{V_{n_\alpha}}{Q_1/4\pi r^2}$	10,57	13,53	5,02	−7,4	−2,46	−8,2	7,12	0
$\dfrac{V_{t_\alpha}}{Q_1/4\pi r^2}$	10,70	− 3,33	−12,3	−2,6	0,24	4,35	2,53	−85

Conform acestei scheme de calcul se poate imagina constructiv un distribuitor care să aibă orificii-canale practicate după direcţiile şi conform valorilor vitezei în pereţii lui. Diametrul orificiilor rezultă din următoarele considerente simplificate ale fenomenului.

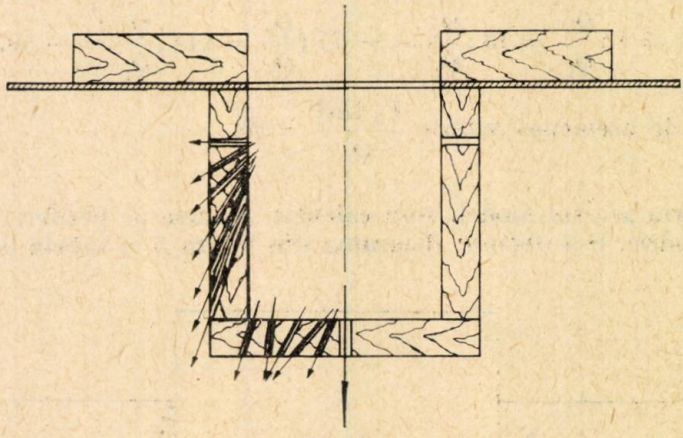


Fig. 6

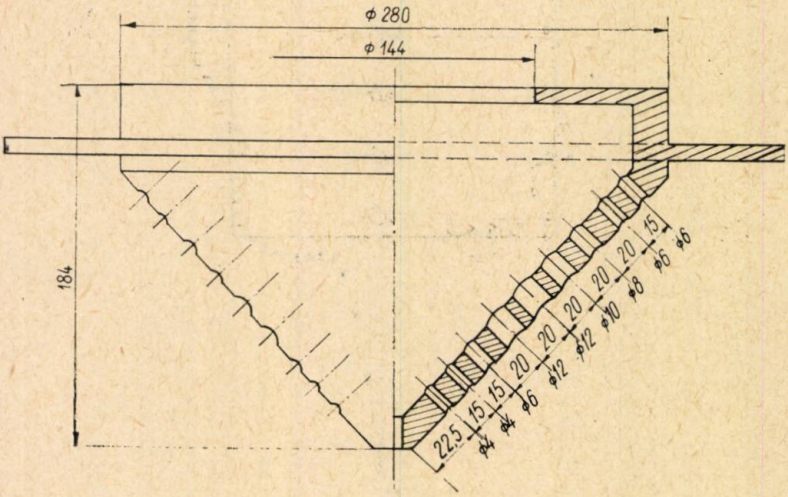


Fig. 7

Admiţînd că scurgerea în interior este aproximativ cea dintr-un rezervor de viteză $V_{\text{int}} \sim 0$ şi o presiune p_{int}, iar în exterior avem V_e şi p_e, ecuaţia conservării impulsului în canalul-orificiu se scrie $p_e + \frac{\rho}{2} V_e^2 = p_{\text{int}} - \frac{\rho}{2} V_e^2 C_f$, unde C_f este coeficientul de frecare în canal. Rezultă

$$V_e \approx 4 \sqrt{\frac{p_i - p_e}{1 + C_f}}; \quad \frac{V_{ei}}{V_{eh}} = \sqrt{\frac{1 + C_{fn}}{1 + C_{fi}}} \qquad (i = a, b, c, d, e, f, g).$$

Cum $C_{fi} = C_{fi}(V_{ei}, d_i, l_i)$, unde d_i e diametrul canalului orificiului de indice i, iar l_i lungimea lui, se poate deduce diametrul d_i; lungimea l_i se determină geometric din înclinarea vitezei V_{ei} și grosimea peretelui distribuitorului. În figura 6 se arată un model de distribuitor cilindric.

Întrucît practic este imposibilă realizarea unei astfel de distribuții periferice, avînd zone de absorbție a aerului, am considerat că este mai indicat un distribuitor conic pe care se pot monta niște dirijori de curent. În figura 7 este arătat modelul de distribuitor conic construit conform schemei de calcul arătată mai sus.

Dirijorii de curent sînt niște cilindri de tablă montați pe con, permițînd îndreptarea liniilor de curent către zonele „moarte" ale scurgerii într-o secțiune a reactorului.

5. REZULTATE EXPERIMENTALE PRIVITOARE LA REACTORUL ECHIPAT COMPLET

Din rezultatele preliminare obținute prin explorarea cu tubul Pitot s-a constatat ineficacitatea acestei metode în ciuda preciziei ei generale. În cazul de față însă, așa cum s-a arătat, explorarea cu tubul Pitot nu este concludentă din cauza curburii pronunțate a liniilor de curent și, în plus, este extrem de greoaie ca durată de lucru în condițiile funcționării intermitente a compresorului de alimentare.

S-a trecut atunci la elaborarea unui procedeu mai eficace sub forma unui cilindru montat pe un diametru al secțiunii reactorului, cilindrul prevăzut cu 10 orificii ca prize de presiune și cu fire de vizualizare conform schemei din figura 8. S-au practicat două orificii de urmărire vizuală în peretele reactorului și prin iluminare interioară s-au putut obține imediat imagini calitative ale scurgerii din interior, urmărindu-se direcția firelor. În interior a fost modelat stratul de catalizator printr-un cilindru turtit cu două capace circulare de plasă de sîrmă egale cu secțiunea reactorului. Cilindrul de măsură prevăzut cu orificii și cu firele indicatoare s-a montat deasupra acestor plase, conform figurii. Admițînd că în jurul fiecărui tronson de cilindru se realizează o scurgere bidimensională potențială, obținem, conform figurii 8,

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2} V_0^2 - \frac{\rho}{2} V^2 = \frac{\rho}{2} V_0^2 [1 - 4 \sin(\theta - \alpha)] = \frac{\rho}{2} V_0^2 [2 \cos 2(\theta - \alpha) - 1].$$

Prizele de pe cilindru au fost conectate la capătul (+) al unor micromanometre cu tub înclinat la 1/10, celălalt capăt (−) fiind lăsat liber la atmosferă, de presiune p_0. Avem deci indicația

$$p - p_a = p - p_0 + p_0 - p_a$$

sau

$$p - p_0 = h - h_0 = \frac{\rho}{2} V_0^2 [2 \cos 2(\theta - \alpha) - 1],$$

unde $h = p - p_a$ este citită la micromanometru, iar $h_0 = p_0 - p_a$ este necunoscut.

În general, $h > 0$ și $h_0 > 0$, deoarece presiunea din interiorul reactorului este mai mare decît cea atmosferică. Putem deci scrie

$$h = h_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 [2 \cos 2(\theta - \alpha) - 1] = h\ (V_0,\ \theta,\ \alpha).$$

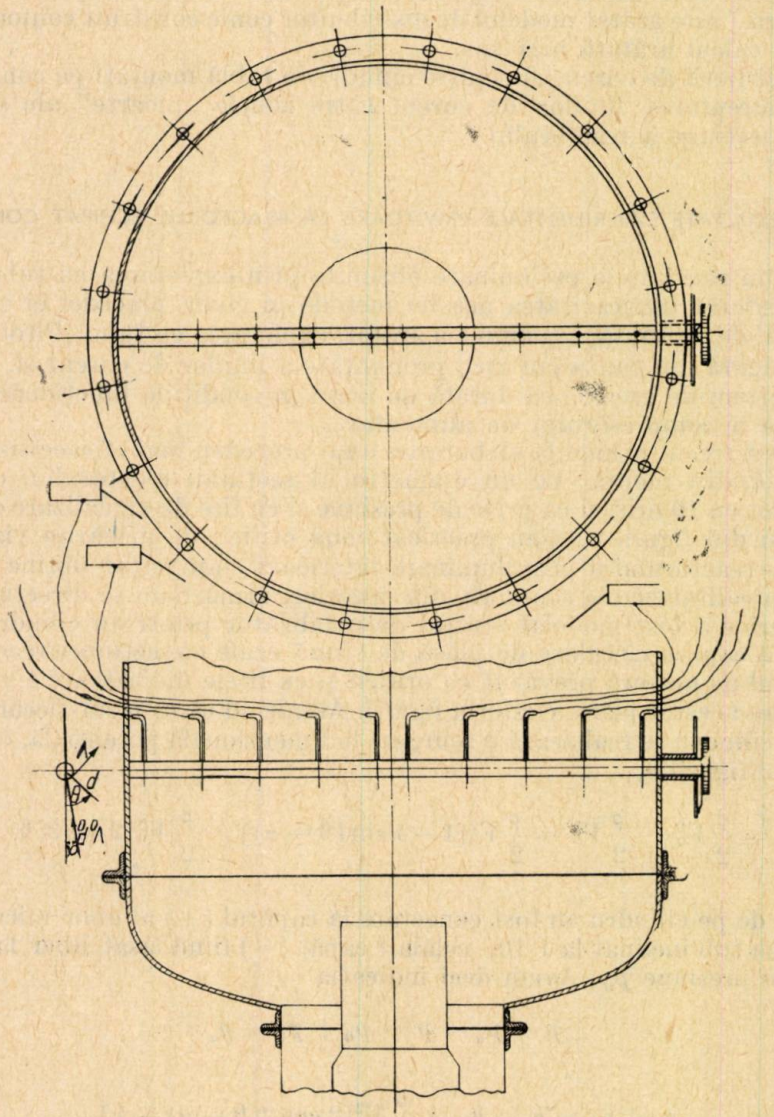


Fig. 8

Pentru un regim dat, controlat cu tubul Pitot în conducta de alimentare, s-au determinat h pentru unghiurile $\theta = 0°$, $\theta = \pm 30°$ și $\theta =$

$= \pm 60°$, în sensul indicat de figura 8. Este clar că vom avea

$$h_{\min} = h_0 - \frac{3}{2} V_0^2,$$

care corespunde valorii unghiului α:

$$2(\theta - \alpha) = \pi \text{ sau } \alpha = \theta - \frac{\pi}{2}.$$

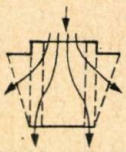
Trasînd deci $h(\theta)$, s-a determinat grafic $h_{\min}$ și deci α. Pentru determinarea vitezei V_0 avem

$$h_{30°} - h_{60°} = \frac{\rho}{2} V_0^2 \, 2[\cos 2(30 - \alpha) - \cos 2(60 - \alpha)],$$

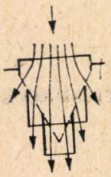
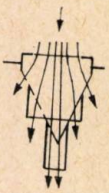
de unde deducem

$$V_0 = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{h_{30°} - h_{60°}}{\cos 2\alpha}} \approx 0{,}9\sqrt{\frac{h_{30°}^{1/10} - h_{60°}^{1/10}}{\cos 2\alpha}}.$$

În tabelele de mai jos dăm cîteva rezultate experimentale.

Distribuitor	Viteze unghiuri	Priza 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$v^{m/s}$	4	1,9	0,9	1,5	4,35	4	0,7	0,9	1,3	4,6
	$\alpha°$	71°	62°	51°	14°	17°	23°	38°	41°	61°	75°
	$v^{m/s}$	3,82	2,1	2,2	1,8	1,71	1,92	2,1	2,5	3	5,7
	$\alpha°$	60°	51°	41°	10°	15°	20°	25°	32°	36°	71°
	$v^{m/s}$	3	2,9	2,82	2	2,7	2	2,53	4	3	2
	$\alpha°$	50°	32°	15°	10°	55°	17°	23°	31°	49°	57°

(urmare)

Distribuitor	Viteze unghiuri	Priza 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$v^{m/s}$	4	4,1	4,33	4,5	5	4,1	5,85	3,9	3,5	3,1
	$\alpha°$	45°	36°	17°	20°	15°	10°	25°	36°	48°	60°
	$v^{m/s}$	4	4,1	4,95	5	4,85	4,2	4,1	3,7	3,8	3,5
	$\alpha°$	41°	35°	15°	10°	12°	15°	20°	35°	45°	50°

După cum se observă din rezultatele de mai sus, efectul dirijorilor cilindrici este important pentru uniformizarea distribuţiei de viteze în dreptul secţiunii de cataliză. De asemenea ei împiedică rotaţia curentului de alimentare, micşorînd viteza tangenţială din reactor.

6. CONCLUZII

Rezultatele experimentale prezentate mai sus permit strîngerea unor observaţii şi concluzii mai generale :

a) În primul rînd se cuvine subliniat faptul că dotarea unui reactor cu un dispozitiv de amestec, dirijarea şi uniformizarea curentului de alimentare nu se pot face numai după reţete practice. Este necesar o proiectare judicioasă pe baze teoretice şi experimentale, adaptată modelelor de reactor dorit. În lucrarea de faţă s-au indicat liniile de calcul şi metodele de experimentare pe model a unor astfel de dispozitive, dîndu-se în acelaşi timp soluţii constructive mai eficace decît cele existente.

b) Dispozitivul de uniformizare al vitezelor la care s-a ajuns în urma experienţelor comportă un corp conic prevăzut cu orificii de dimensiuni şi dispunere variabile şi nişte dirijori cilindrici coaxiali cu reactori. Această combinaţie pare cea mai potrivită atît constructiv, cît şi ca exploatare în dotarea reactoarelor chimice. Dispozitivul propus de noi realizează în interiorul reactorului o scurgere aproximativ uniformă, înlătură efectul lărgirii bruşte de secţiune şi diminuează componentele tangenţiale şi radiale ale vitezei. Cum pentru alimentare se dispune în general de ventilatoare cu presiune de refulare mare, randamentul global al instalaţiei poate

deveni favorabil, deşi pierderile de presiune în dispozitivul propus de noi s-ar putea să fie ceva mai mari.

c) Experienţele începute de noi se cer continuate pentru găsirea unor soluţii optime valabile pentru toate modelele de reactor. În plus există metode de a spori eficacitatea de amestec a gazelor prin crearea unor scurgeri cu grad ridicat de turbulenţă în interiorul reactorului. Un program experimental mai larg, urmărind liniile directoare ale cercetării prezentate în lucrarea de faţă, ar soluţiona astfel o problemă de mare interes tehnic.

Primită la redacţie la 2 aprilie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. H. S. Mickley, K. A. Smith, E.I. Korchak, *Fluid Flow in packed beds*, Chem, Eng. Sc. V. C., **20**, 237—246 (1965).
2. J. O, Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill, New York, 1959.
3. Şt. N. Săvulescu, *Tranziţia de la scurgerea laminară la cea turbulentă*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1968.

DEZLOCUIREA NECAPILARĂ A FLUIDELOR ÎN MEDII POROASE OMOGENE

de VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA
Institutul de cercetări hidraulice

Studiul dezlocuirii plane, negravitaţionale şi necapilare a fluidelor în medii poroase omogene constituie obiectul prezentei lucrări, în care se folosesc anumite rezultate obţinute de autori în alte studii consacrate fenomenelor de dezlocuire plană, integrală în medii poroase neomogene. Mişcarea în ansamblu este concepută ca o succesiune de dezlocuiri într-un mediu poros neomogen fictiv, cu permeabilitatea variabilă cu timpul. Pe linia de salt a saturaţiei care apare la un moment dat al evoluţiei fenomenului, se pun condiţii de egalitate a presiunilor şi a debitelor şi se formulează problema la limită corespunzătoare acestor condiţii.

1. INTRODUCERE

Într-o serie de lucrări anterioare ne-am ocupat de problema dezlocuirii cu front de separare între fluidul dezlocuit şi cel de dezlocuire [1], [2], [3] în medii poroase omogene şi neomogene. În lucrările citate am încercat să formulăm un punct de vedere unitar pentru rezolvarea problemei în condiţii mai generale decît cele pe care le cunoaştem din literatura de specialitate. Considerarea funcţiilor olomorfe pe porţiuni în studiul dezlocuirii integrale în medii omogene şi a funcţiilor analitice generalizate în studiul dezlocuirii în medii neomogene ne-a permis studierea şi exprimarea soluţiei mişcării atît în cazul cînd frontul de dezlocuire la un moment dat delimitează un domeniu simplu conex, cît şi în cazul cînd delimitează unul multiplu conex. În plus, metoda folosită în studiul dezlocuirii integrale poate fi aplicată şi la cazul dezlocuirii necapilare, de care ne ocupăm în lucrarea de faţă. Problema se reduce la o mişcare într-un mediu neomogen în care permeabilitatea variază cu timpul, după cum vom arăta la momentul potrivit.

Dezlocuirea cu saturaţie variabilă este mai puţin studiată decît cea integrală, întrucît problemele pe care le ridică sînt complexe şi dificile, modelul teoretic însuşi ţinînd seama de mai mulţi parametri decît celălalt.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 5, P. 1209–1222, 1970

Progrese mai însemnate s-au obținut în cazul dezlocuirii liniare sau radiale [4], [5], [6], care pune probleme matematice speciale, pe care le vom întîlni și noi în cazul dezlocuirii plane în lucrarea de față; ele se referă la multiformitatea soluției obținute. Mișcarea plană a fost studiată fie în anumite ipoteze simplificatoare [7], fie numeric [8], [9], [10]. Pentru o bibliografie mai amănunțită trimitem la lucrarea [11]. În sfîrșit, menționăm lucrarea de sinteză [12] și încercarea de aplicare a metodei caracteristicilor la integrarea ecuațiilor dezlocuirii bifazice plane [13], [14].

În lucrarea de față aplicăm metoda folosită în lucrările [1], [2], [3] la acest caz de mișcare și vom atrage atenția de cîte ori va fi necesar asupra apropierilor și diferențierilor în modul ei de aplicare la cele două fenomene.

2. CONDIȚII DE STUDIU. FORMULE FUNDAMENTALE

Limităm studiul nostru la cazul dezlocuirii plane a două fluide nemiscibile în mediu omogen, în care se neglijează efectul forțelor capilare și gravitaționale. Simplificările făcute nu sînt absolut necesare pentru rezolvarea problemei, ci au fost admise numai pentru a se degaja mai clar metoda de rezolvare pe un model simplificat, și pentru a atrage atenția asupra apariției triplei valori în cazul neglijării forțelor capilare. Intenționăm să ne ocupăm de fenomenul de dezlocuire complex în alte lucrări, unde vom considera influența elementelor neglijate acum ca efecte complementare ce se suprapun fenomenului de dezlocuire simplificat, considerat mai sus.

Deoarece natura fenomenului și relațiile fundamentale sînt discutate în majoritatea lucrărilor citate, noi le vom transcrie, dînd numai cîteva indicații absolut necesare. Ecuațiile generale ale mișcării sînt

$$\vec{V}_a = -k\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a}\nabla p\,;\quad \vec{V}_t = -k\frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}\nabla p, \tag{1}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_a + \vec{V}_t\,;\qquad \nabla\vec{V} = 0, \tag{2}$$

$$m\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla\vec{V}_a = 0 \tag{3}$$

(indicii a și t se referă, respectiv, la faza de apă și de țiței), unde $\vec{V}_a$, $\vec{V}_t$, $\vec{V}$ reprezintă, respectiv, viteza apei, a țițeiului și a vitezei totale,

p — presiunea în mediul ocupat de fluid,

S — saturația în apă,

k — permeabilitatea monofazică a mediului, presupusă constantă,

k_{ra} (S) și k_{rt} (S) — permeabilitățile relative ale celor două faze, funcții experimentale cunoscute de saturația S.

Dacă adunăm relațiile (1) și ținem seama de ambele relații (2), obținem

$$\Delta p + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S} \ln\left[\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}\right] \nabla S \, \nabla p = 0. \tag{4}$$

Introducem în (3) prima relație (1) și ținem seama de (4); deducem

$$\frac{m}{k}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{k_{ra}(S)}{\mu_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S} \ln \frac{\dfrac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \dfrac{k_{rt}(S)}{\mu_t}}{k_{ra}(S)} \nabla S \cdot \nabla p = 0. \tag{5}$$

Sistemul fundamental de ecuații (1) — (3) a fost redus la sistemul format de ecuațiile (4), (5). Dacă notăm pentru simplificare

$$\alpha(S) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S} \ln\left(\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}\right),$$

$$\beta(S) = \frac{k}{m}\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S} \ln \frac{\dfrac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \dfrac{k_{rt}(S)}{\mu_t}}{k_{ra}(S)},$$

el poate fi scris sub forma

$$\begin{aligned} &\Delta p(x, y, t) + \alpha(S) \, \nabla S(x, y, t) \nabla \, p(x, y, t) = 0, \\ &\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta(S) \, \nabla S(x, y, t) \nabla p(x, y, t) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

unde se vede din expresiile lor că funcțiile $\alpha(S)$ și $\beta(S)$ sînt continue de S. Datorită faptului că sistemul este neliniar, propunem pentru integrarea lui un procedeu iterativ de aproximații în care ținem seama de condițiile inițiale și la limită ale mișcării.

În privința condițiilor la limită facem de asemenea unele ipoteze restrictive, care însă nu înlătură dificultățile teoretice ale problemei. Presupunem anume că mișcarea are loc în planul complex nelimitat de frontiere impermeabile și că se datorește unei singure sonde de injecție, plasată în origine, de debit cunoscut; sonda de extracție este presupusă la infinit.

La momentul inițial este cunoscută distribuția de saturație $S_0(x, y) = S(x, y, 0)$. Funcția $S_0(x, y)$ trebuie să fie continuă și cu derivate parțiale continue în orice punct din plan.

Cazul general, mai apropiat de situația reală, al dezlocuirii într-un domeniu limitat de pereți impermeabili care conține un sistem arbitrar de

sonde de injecţie şi de extracţie, unde de asemenea este cunoscută saturaţia iniţială, poate fi studiat în mod analog. Problema poate fi rezolvată în acest caz aşa cum a fost rezolvată dezlocuirea integrală într-un domeniu finit de mediu poros neomogen, de care ne-am ocupat în lucrările citate şi în [15].

3. METODA APROXIMATIVĂ DE INTEGRARE

Saturaţia iniţială $S_0(x, y)$ o introducem în prima ecuaţie a sistemului (6); aceasta devine

$$\Delta p(x, y) + \nabla f(x,y)\, \nabla p(x, y) = 0, \tag{7}$$

unde funcţia

$$f(x, y) = \int_0^{S_0(x, y)} \alpha(S_0)\, \mathrm{d}S_0$$

este continuă de variabilele sale. Ecuaţia (7) se întîlneşte în studiul mişcării în mediile poroase neomogene [16]; în [15] noi am studiat această ecuaţie, în care funcţia $f(x, y)$ avea expresia

$$f(x, y) = \ln k(x, y)$$

($k(x, y)$ fiind permeabilitatea monofazică a mediului neomogen). Din cele pe mai sus se vede că în cazul dezlocuirii funcţia $f(x, y)$ depinde atît de k (constantă pentru mediul omogen în care am presupus că studiem dezlocuirea), cît şi de saturaţia iniţială $S_0(x, y)$. Acesta este motivul pentru care afirmam în introducere că problema se reduce la o mişcare într-un mediu neomogen în care permeabilitatea variază cu timpul. Putem anticipa încă de acum că dezlocuirea într-un mediu neomogen se reduce la o ecuaţie similară cu (7), în care $f(x, y)$ depinde de permeabilitatea monofazică variabilă a mediului.

În [17], [18], [19] sînt expuse mai multe metode de exprimare a soluţiei ecuaţiei obţinute, în condiţii destul de largi, chiar pentru domenii multiplu conexe. Pentru cazul particular de mişcare considerat, soluţia se scrie într-o formă destul de simplă (caz particular al unei formule mai generale obţinută în [15]), şi anume

$$U(z) = V(z)\, \mathrm{e}^{\omega(z)}. \tag{8}$$

Funcţia $U(z)$ este legată de $p(x, y)$ prin relaţiile

$$U(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), \tag{9}$$

$$u(x, y) = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{10}$$

iar $V(z)$ şi $\omega(z)$ au expresiile

$$V(z)=\frac{C}{z}+C\iint_E\left[\frac{\Gamma_1(z,\zeta)}{\zeta}+\frac{\Gamma_2(z,\zeta)}{\bar{\zeta}}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \tag{11}$$

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{A(\xi,\eta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \tag{12}$$

E fiind întregul plan complex. În relaţia (11), C este o constantă pe care urmează s-o determinăm, iar

$$A(z)=-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}},$$

$$\Gamma_1(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}K_{2j}(z,\zeta);\quad \Gamma_2(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}K_{2j-1}(z,\zeta),$$

unde s-a notat

$$K_1(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{e}^{\bar{\omega}-\omega},$$

. . . . . .

$$K_n(z,\zeta)=\iint_E K_1(z,\zeta_1)\,\overline{K_{n-1}(\zeta_1,\zeta)}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\eta_1.$$

Expresia (11) este soluţia ecuaţiei integrale echivalentă cu ecuaţia (7), căreia i s-a aplicat metoda aproximaţiilor succesive; funcţiile $\Gamma_1(z,\zeta)$ şi $\Gamma_2(z,\zeta)$ sînt rezolventele ei, iar $K_j(z,\zeta)$ nucleele iterate. Pentru detalii trimitem la [15], [18] sau [19].

Constanta arbitrară C va rezulta din următoarele consideraţii. Debitul total Q_0 care traversează o curbă simplă închisă C_0, trasată în jurul sondei din origine, trebuie să fie egal cu debitul de injecţie cunoscut Q al sondei. Vom avea

$$Q=\int_{C_0}\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\int_{C_0}V_x\,\mathrm{d}y-V_y\,\mathrm{d}x.$$

Din (1) şi (2) deducem

$$\vec{V}=-k\left[\frac{k_{ra}(S_0)}{\mu_a}+\frac{k_{rt}(S_0)}{\mu_t}\right]\nabla p=-kg(x,y)\,\nabla p,$$

unde expresia lui $g(x,y)$ este evidentă. Ţinînd seama de aceasta, în expresia debitului, obţinem

$$Q=-k\int_{C_0}g(x,y)\,(u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x).$$

După transformări simple, în care ținem seama de (9), se găsește

$$Q = -k \operatorname{Im} \int_{C_0} g(z)\, U(z)\, dz,$$

de unde rezultă valoarea lui C legată de $U(z)$ prin relațiile (8) și (11). În acest fel, soluția problemei este complet determinată și se cunoaște repartiția de presiuni la momentul inițial, corespunzătoare saturației inițiale.

Cîmpul de presiuni $p_0(x, y)$ la momentul inițial fiind determinat, se poate determina și familia liniilor de curent la momentul inițial, după care urmează să aibă loc dezlocuirea. Dacă ar fi să ne limităm la ipotezele făcute de D. A. Efros în [7], lucrurile s-ar opri la această primă aproximație, urmînd ca în continuare să se studieze dezlocuirea pe tuburile de curent determinate mai sus. De fapt D. A. Efros se referă la sistemul de linii de curent determinat de mișcarea unui singur fluid în mediul omogen, pe care îl consideră fix în tot timpul mișcării. Noi vom admite aproximația sa valabilă pînă la un moment t_1, arbitrar ales.

Repartiția de saturație $S_1(x, y) = S(x, y, t_1)$ va rezulta din integrarea ecuației a doua a sistemului (6):

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta[S(x, y, t)] \nabla p_0(x, y) \nabla S(x, y, t), \tag{13}$$

în care am introdus presiunea $p_0(x, y)$ determinată mai sus. Ecuația cvasiliniară (13) pentru $S(x, y, t)$, în care coeficienții sînt continui, poate fi integrată printr-una din metodele cunoscute, ținînd seama de condiția inițială, sau poate fi redusă la o ecuație cvasiliniară pentru o funcție $S(\sigma, t)$ pe fiecare tub de curent al mișcării, unde σ este lungimea arcului median al tubului, așa cum se arată în [7], ținîndu-se seama de grosimea variabilă cu arcul a tubului de curent cunoscut.

Cunoscînd distribuția de saturație la momentul t_1, se poate determina distribuția de presiuni $p_1(x, y) = p(x, y, t_1)$, așa cum $p_0(x, y)$ a fost determinată cunoscîndu-se $S_0(x, y)$. Avem de integrat pentru aceasta ecuația

$$\Delta p(x, y) + \alpha[S_1(x, y)] \nabla S_1(x, y) \nabla p(x, y) = 0, \tag{14}$$

dedusă din prima ecuație a sistemului (6), în care am înlocuit $S(x, y, t)$ cu $S_1(x, y)$, cunoscut din aproximația precedentă. Ea poate fi adusă la forma (7) printr-un procedeu identic și integrată. Soluția $p_1(x, y)$ obținută va fi introdusă în a doua ecuație a sistemului (6), care ne va da saturația $S_2(x, y) = S(x, y, t_2)$ la momentul t_2 ca soluție a ecuației

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta[S(x, y, t)] \nabla p_1(x, y) \nabla S(x, y, t) = 0, \tag{15}$$

similară cu (13), unde se consideră ca saturație inițială $S_1(x, y)$. În acest mod procedeul poate fi continuat oricît și din moment în moment pot fi determinate saturația și presiunea.

Din punct de vedere mecanic, algoritmul poate fi interpretat ca o succesiune de mișcări ale unui singur fluid într-un mediu neomogen. La momentul inițial, neomogenitatea este determinată de saturația variabilă $S_0(x, y)$, așa cum rezultă din ecuația (7), căreia îi corespunde $p_0(x, y)$. La momentul t_1, saturația va deveni $S_1(x, y)$, soluție a ecuației (13), care determină neomogenitatea mediului la acest moment, conform ecuației (14). Soluția ei, $p_1(x, y)$, ne dă posibilitatea să determinăm saturația la momentul t_2 ca soluție a ecuației (15), care va schimba aspectul neomogenității mediului la acest moment. În ansamblu, dezlocuirea este concepută ca o succesiune de mișcări ale unui singur fluid într-un mediu neomogen în care neomogenitatea variază cu timpul, așa cum afirmam în introducere.

Problema se complică însă datorită triplei valori care apare în expresia saturației începînd de la un anumit moment, fenomen cunoscut și în dezlocuirea unidimensională (liniară sau radială), de care trebuie neapărat ținut seama în dezlocuirea bidimensională datorită sistemului de aproximații succesive. Această circumstanță ridică probleme noi, pe care le vom analiza în cele ce urmează.

4. SALTUL DE SATURAȚIE

Așa cum am menționat în punctul precedent, Efros arată [7] că în studiul dezlocuirii pe un tub de curent cunoscut, presupus fix, apare de la un anumit moment înainte, o triplă valoare în expresia distribuției de saturație $S(\sigma)$, care se păstrează de la acel moment în tot cursul dezlocuirii. Evoluția saturației în timp poate fi reprezentată prin familia de curbe din figura 1 ; la momentul t_0 avem saturația inițială dată, care la momentele următoare $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ia formele arătate în figură, cu triplă valoare de la un

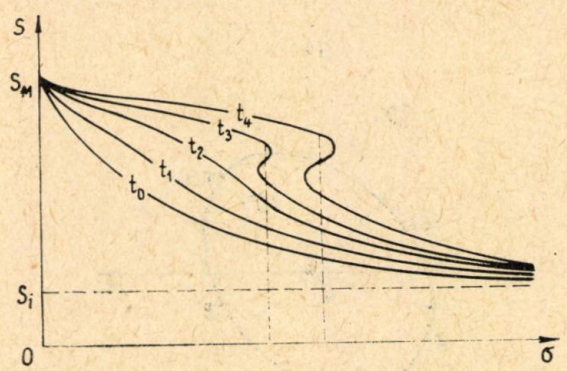


Fig. 1

moment critic t_c înainte. Deoarece din punct de vedere fizic acest rezultat este absurd, Buckley și Leverett [20], au propus înlocuirea unei astfel de soluții printr-o curbă secționată după principiul „balanței materiale", arătat în detaliu în figura 2. Conform acestui principiu, distribuția de saturație pentru $t > t_c$ nu este reprezentată de curbele reale care rezultă din soluția problemei, ci de curbele formate în modul următor : curba reală $S_M A$,

dreapta AC şi curba reală CD. Dreapta AC, care înlocuieşte curba ABC în regiunea de triplă valoare, a fost trasată astfel încît suprafaţa cuprinsă între ea şi curba AB să fie egală cu suprafaţa cuprinsă între aceeaşi dreaptă şi curba BC. Egalitatea celor două suprafeţe exprimă faptul că debitul de fluid injectat (care măreşte saturaţia) este acelaşi înainte şi după secţionare, de unde şi numele de „balanţă materială". Toate aceste chestiuni sînt amplu dezbătute în literatura de specialitate (mai ales în [4], [5] şi [7]), dar le-am amintit numai pentru a arăta cum se pot adapta la cazul dezlocuirii bidimensionale.

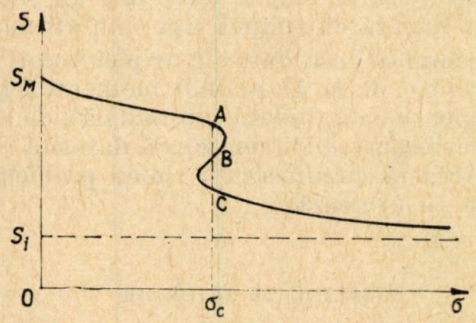


Fig. 2

Diferenţa fundamentală între cazul unidimensional şi bidimensional constă în faptul că în dezlocuirea unidimensională soluţia problemei se obţine riguros, fără aproximaţii; balanţa materială se poate face pe o familie de curbe bine determinate (ca în figura 1), şi această operaţie ne dă evoluţia în timp a saltului de saturaţie de la A la C (fig. 2). În cazul dezlocuirii bidimensionale, acest lucru nu este posibil, întrucît procesul

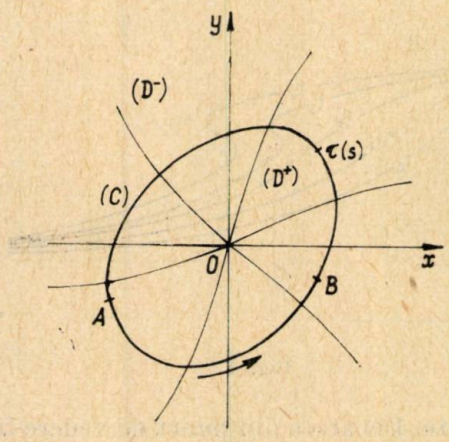


Fig. 3

este iterativ. Să presupunem că sîntem la iteraţia de ordin j, căreia îi corespunde la momentul t_j familia de linii de curent din figura 3. Urmărind dezlocuirea după tuburile de curent cunoscute, să presupunem că la mo-

mentul t_{j+1} apare tripla valoare în toate tuburile de curent, căreia îi corespunde saltul de saturație după linia C în urma aplicării principiului de balanță materială; în fiecare punct al curbei C, saltul de saturație este cunoscut.

La momentul t_{j+1} avem, așadar, o distribuție de saturație discontinuă după C. După procesul iterativ descris în punctul 2, pentru determinarea presiunii $p_{j+1}(x,y)$ avem de integrat ecuația

$$\Delta p(x, y) + \alpha[S_{j+1}(x, y)]\, \nabla S_{j+1}(x, y)\, \nabla p(x, y) = 0, \tag{16}$$

în care, spre deosebire de momentele anterioare, coeficienții sînt discontinui pe C cu discontinuități de prima speță. Datorită acestui fapt, nu mai sînt valabile teoremele de existență și de unicitate ale soluției care cer ca acești coeficienți să fie de clasă C^1.

Din punct de vedere mecanic avem de studiat o mișcare într-un mediu poros neomogen, discontinuu după C. Această problemă este întîlnită și în dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase neomogene, cu diferența că acolo saltul de saturație este constant și egal cu unitatea [2]. Remarcăm că în acest caz poate apărea o circumstanță deosebită de cazul dezlocuirii integrale; datorită distribuției inițiale a saturației, este posibil ca la momentul t_j saltul de saturație să aibă loc numai pe o curbă deschisă (să presupunem pentru simplificare pe porțiunea AB a lui C, urmărită în sensul săgeții). Prin faptul că atît $S_0(x, y)$, cît și $k(x, y)$ au fost presupuse continue în tot planul, saltul de saturație $\nu(s)$ va fi de asemenea o funcție continuă de s, cu proprietatea $\nu(A) = \nu(B) = 0$, unde s este abscisa curbilinie a punctului de afixă τ pe arcul AB. Datorită acestui fapt, se poate completa arbitrar arcul AB pînă la o curbă închisă, pe care să dă o condiție la limită de care vom vorbi mai jos, considerînd $\nu(s) \equiv 0$ pe BA.

5. CONDIȚIA LA LIMITĂ PE LINIA DE SALT

Am arătat că în aproximația de ordin $j + 1$ presiunea $p(x, y)$ este soluția ecuației (16), în care coeficienții sînt funcții discontinue pe C (pentru simplificarea scrierii am suprimat indicele). Se știe din teoria ecuațiilor de tip eliptic că ea poate fi integrată dacă se dau condiții suplimentare pe C, expresia matematică a condițiilor fizice la trecerea fluidului peste linia de salt. Deoarece, așa cum am arătat, fenomenul de dezlocuire necapilară este similar din punct de vedere matematic cu dezlocuirea integrală în mediu neomogen, condițiile pe linia de salt vor fi identice :

$$p^+(s) = p^-(s); \quad V_n^+(s) = V_n^-(s), \tag{17}$$

unde indicii $(\ )^+$ și $(\ )^-$ se referă la domeniile D^+ respectiv D^-, iar $V_n(s)$ este componenta normală a vitezei. Explicitînd termenii în cea de a doua relație (17), obținem

$$\left\{\frac{k_{ra}[S^+(s)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}[S^+(s)]}{\mu_t}\right\} \frac{\partial p^+}{\partial n} = \left\{\frac{k_{ra}[S^-(s)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}[S^-(s)]}{\mu_t}\right\} \frac{\partial p^-}{\partial n}. \tag{18}$$

Modul în care poate fi integrată ecuaţia (16) cu condiţia la limită (17) va fi arătat în punctul următor. Presupunînd că soluţia $p(x, y)$ a acestei ecuaţii este găsită, să ne ocupăm de ecuaţia

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta [S(x, y, t)] \nabla p(x, y) \nabla S(x, y, t) = 0, \tag{19}$$

care urmează să fie integrată conform procesului de aproximaţii expus. Remarcăm că $\nabla p(x, y)$ este un vector discontinuu la trecerea frontierei C, aşa cum rezultă din (18). Coeficienţii ecuaţiei (19) sînt, aşadar, discontinui şi, conform teoremelor generale de existenţă şi de unicitate, ecuaţia nu poate fi integrată ca atare. Pentru aceasta vom face anumite transformări în ecuaţia de dezlocuire, speculînd continuitatea unei expresii la trecerea lui C, dedusă din condiţia (17). Scriind ecuaţia (19) sub forma

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta [S(x, y, t)] \left[\frac{\partial p}{\partial s} \cdot \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{\partial S}{\partial n} \right] = 0, \tag{20}$$

pe linia de salt, observăm că derivata tangenţială a presiunii este continuă, conform primei relaţii (17). În expresia precedentă rămîne discontinuă derivata normală a presiunii, aşa cum se vede din (18). Scriind însă (20) sub forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta [S(x, y, t)] \frac{\partial p}{\partial s} \cdot \frac{\partial S}{\partial s} + \\ &+ \frac{\beta [S(x, y, t)]}{G [S(x, y, t)]} G [S(x, y, t)] \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{\partial S}{\partial n} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

unde am notat

$$G(S) = \frac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}, \tag{22}$$

observăm că s-a pus în evidenţă expresia

$$E(S) = G(S) \frac{\partial p}{\partial n},$$

continuă la trecerea lui C, conform relaţiei (18). Această proprietate a expresiei $E(S)$ poate fi folosită pentru a se da o soluţie ecuaţiei (20). O scriem pentru aceasta într-un sistem curbiliniu ortogonal, ales în aşa fel încît curba C să fie o curbă a familiei. Determinarea unui astfel de sistem ortogonal este întotdeauna posibilă şi nu ne ocupăm de această chestiune. În noul sistem de axe, ecuaţia (19) va avea în tot planul o formă similară cu (21), care trebuie înţeleasă ca fiind valabilă numai pe C. În această

ultimă formă a ecuației considerăm drept coeficient al ultimului termen expresia $E(S)$ calculată cu elementele aproximației anterioare. Cum această expresie este continuă pe C, în ecuația (21) toți coeficienții sînt continui și deci se încadrează în condițiile teoremei generale de existență și de unicitate.

Prin artificiul folosit observăm că de fapt am schimbat ecuația inițială (19) prin aceea că un factor al ultimului termen a fost considerat cunoscut, calculat cu elementele aproximației precedente. El însă evită dificultățile datorate discontinuității derivatei normale a presiunii și permite aplicarea procedeului iterativ la orice moment t_j. Într-o altă lucrare vom propune o altă condiție la limită pe C, care de asemenea schimbă coeficienții ecuației de dezlocuire, dar are avantajul că ne conduce la o problemă la limită mai simplă ca cea care se obține în acest caz, de care ne vom ocupa în punctul următor.

6. PROBLEMA LA LIMITĂ ÎN PREZENȚA LINIEI DE SALT

Alegem pe C sensul trigonometric de parcurs și notăm în (16) cu $S^+_{j+1}(x, y)$ saturația în domeniul din stînga curbei și cu $S^-_{j+1}(x, y)$ saturația din domeniul complementar. Aceste funcții sînt de clasă C^1 în domeniile de definiție. Integrarea ecuației (16) în tot planul revine la integrarea simultană a ecuațiilor

$$\begin{aligned} \Delta p^+ + \alpha(S^+) \nabla S^+ \nabla p^+ &= 0, \\ \Delta p^- + \alpha(S^-) \nabla S^- \nabla p^- &= 0, \end{aligned} \tag{23}$$

respectiv în D^+ și în D^-, unde am renunțat la indicele $j + 1$ pentru simplificare. La sistemul (23) trebuie adăugată condiția (17) pe C.

Făcînd notațiile

$$f^+(x, y) = \int \alpha(S^+)\, dS^+; \quad f^-(x, y) = \int \alpha(S^-) dS^-,$$

$$u^+ = \frac{\partial p^+}{\partial x}; \quad v^+ = -\frac{\partial p^+}{\partial y}; \quad u^- = \frac{\partial p^-}{\partial x}; \quad v^- = -\frac{\partial p^-}{\partial y}, \tag{24}$$

$$U^+(z) = u^+(x, y) + i\, v^+(x, y); \quad U^-(z) = u^-(x, y) + i\, v^-(x, y),$$

sistemul (23) devine

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^+}{\partial \bar{z}} &= A^+(z)\, U^+(z) + \overline{A^+(z)}\ \overline{U^+(z)} \qquad \text{în } D^+, \\ \frac{\partial U^-}{\partial \bar{z}} &= A^-(z)\, U^-(z) + \overline{A^-(z)}\ \overline{U^-(z)} \qquad \text{în } D^-, \end{aligned} \tag{25}$$

unde am notat

$$A^{\pm}(z) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f^{\pm}}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f^{\pm}}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial f^{\pm}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2}\alpha(S^{\pm})\frac{\partial S^{\pm}}{\partial \bar{z}}.$$

În expresiile de mai sus indicii plus şi minus se corespund, iar $f^{\pm}(x, y)$ trebuie interpretate ca primitive ale funcţiilor de sub integralele respective. $U^{\pm}(z)$ şi $A^{\pm}(z)$, deşi depind de z şi de $\bar{z}$ prin relaţiile

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2\,\mathrm{i}},$$

au păstrat ca argument numai pe z pentru simplificarea notaţiilor şi specificăm că nu sînt olomorfe.

În (25) facem schimbarea de funcţie

$$U^{\pm}(z) = V^{\pm}(z)\,\mathrm{e}^{\omega^{\pm}(z)}, \tag{25'}$$

respectiv în cele două domenii complementare, unde $\omega^{\pm}(z)$ au expresiile

$$\omega^{\pm}(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D^{\pm}} \frac{A^{\pm}(\xi, \eta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

iar $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$. Funcţiile $\omega^{\pm}(z)$ satisfac în D^{+} şi respectiv în D^{-} ecuaţiile [18]

$$\frac{\partial \omega^{\pm}(z)}{\partial \bar{z}} = A^{\pm}(z).$$

Cu această schimbare de funcţie, sistemul (25) devine

$$\frac{\partial V^{\pm}(z)}{\partial \bar{z}} = B^{\pm}(z)\,\overline{V^{\pm}(z)}, \tag{26}$$

cu notaţia

$$B^{\pm}(z) = \overline{A^{\pm}(z)}\,\mathrm{e}^{\overline{\omega^{\pm}(z)} - \omega^{\pm}(z)}.$$

Problema este redusă, aşadar, la integrarea sistemului (26) în D^{+} şi D^{-}, aşa încît valorile-limită $V^{+}(\tau)$ şi $V^{-}(\tau)$ să satisfacă pe C o relaţie ce va fi dedusă din condiţia (17). Dacă introducem notaţia

$$\rho(s) = \frac{G[S^{-}(s)]}{G[S^{+}(s)]},$$

relaţiile de condiţie pe C se scriu

$$\frac{\partial p^{+}}{\partial s} = \frac{\partial p^{-}}{\partial s}; \quad \frac{\partial p^{+}}{\partial n} = \rho(s)\frac{\partial p^{-}}{\partial n}. \tag{27}$$

Explicitînd derivatele tangențiale și normele în relațiile de mai sus și ținînd seama de substituțiile (24), obținem

$$(U^+ + \overline{U}^+)\frac{dx}{ds} - \frac{U^+ - \overline{U}^+}{i}\frac{dy}{ds} = (U^- + \overline{U}^-)\frac{dx}{ds} - \frac{U^- - \overline{U}^-}{i}\frac{dy}{ds},$$

$$(U^+ + \overline{U}^+)\frac{dy}{ds} + \frac{U^+ - \overline{U}^+}{i}\frac{dx}{ds} = \rho(s)\left[(U^- + \overline{U}^-)\frac{dy}{ds} + \frac{U^- - \overline{U}^-}{i}\frac{dx}{ds}\right].$$

Suma dintre prima relație și a doua înmulțită cu i este

$$U^+(\tau) - \frac{1}{2}[\rho(s)+1]\,U^-(\tau) + \frac{1}{2}[\rho(s)-1]\frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)}\,\overline{U^-(\tau)} = 0,$$

unde am notat

$$\tau(s) = x(s) + i\,y(s),$$

ecuația complexă a conturului C. Relația (25′) ne permite să scriem condiția pe C în funcție de valorile-limită ale lui $V(z)$;

$$V^+(\tau) - \frac{1}{2}[\rho(s)+1]e^{\omega^-(\tau)-\omega^+(\tau)}\,V^-(\tau) + \tag{28}$$

$$+\frac{1}{2}[\rho(s)-1]\frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)}\,e^{\overline{\omega^-(\tau)}-\omega^+(\tau)}\cdot\overline{V^-(\tau)} = 0.$$

Problema revine la determinarea funcțiilor analitice generalizate $V^+(z)$ și $V^-(z)$ în D^+ și D^-, soluții ale sistemului (26) ale căror valori-limită satisfac pe C condiția (28). Cu aceasta considerăm studiul încheiat, întrucît soluția problemei de mai sus este o chestiune rezolvată [21].

Cunoscîndu-se expresia lui $V(z)$ la momentul t_{j+1}, se cunoaște expresia lui $U(z)$ la același moment prin relația (25′) și tot cîmpul hidrodinamic al mișcării. Presiunea $p(x, y)$ se calculează cu formula

$$p(x,y) = \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy =$$

$$= \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} U(z)\,dz,$$

de unde rezultă expresia familiei liniilor de curent. Variația saturației la momentul următor se determină din studiul dezlocuirii pe fiecare tub de curent după ecuația (19), solubilă, așa cum am arătat în punctul precedent.

Saltul de saturație la acest moment se determină după legea de balanță materială. În acest fel, dezlocuirea se studiază din moment în moment la intervale arbitrare de timp.

Momentul t_c la care apare saltul de saturație este deosebit de important, căci atunci apare și linia C, pe care se dă condiția la limită caracteristică problemei lui Riemann. Înainte de momentul t_c, dezlocuirea are loc ca într-un mediu neomogen cu neomogenitate continuă, variabilă cu timpul, iar după momentul t_c ca într-un mediu neomogen cu neomogenitate discontinuă după C, de asemenea variabilă cu timpul.

Primită la redacție la 15 ianuarie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. V. Ionescu, C. Cozma, *Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase omogene*, St. cerc. mec. apl., **27**, *6* (1968).
2. — *Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase neomogene*, St. cerc. mec., apl., **28**, *6* (1969).
3. — *Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase pe domenii multiplu conexe*, St. cerc. mec. apl., **29**, *3* (1970).
4. J. W. Sheldon, B. Zondek, W. T. Jr. Cardwell, *One dimensional incompressible, noncapillary, two phase fluid flow in a porous medium*, Trans. AIME, **216**, 290 (1959).
5. W. T. Jr Cardwell, *The meaning of the triple value in noncapillary Buckely-Leverett theory*, Trans. AIME, **216**, 271 (1959).
6. S. A. Hovanessian, *Water flood calculating for multiple sets of producing wells*, Trans. AIME, **219**, 379 (1960).
7. D. A. Efros, *Issledovaniia filtrații neodnorodnih sistem*, Gostoptehizdat, Leningrad, 1963.
8. Jim Douglas Jr., D. W. Peaceman, H. H. Rachford, Jr., *A method for calculating multidimensional immiscible displacement*, Trans. AIME, **216**, 297 (1959).
9. E. L. Dougherty, J. W. Sheldon, *The use of fluid-fluid interfaces to predict the behaviour of oil recovery processes*, Trans. AIME, 171 (1964).
10. J. W. Sheldon, E. W. Dougherty, *A numerical method for computing the dynamical behaviour of fluid-fluid interfaces in permeable media*, Trans. AIME, 158 (1964).
11. Th. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, București, Edit. Academiei, 1966.
12. V. L. Danilov, *Ob uravneniah i kraevih zadaciah teorii dvuhfaznih filtraționnih tecenii v poristoi srede*, Dokl. AN SSSR., **183**, *2*, 307 (1968).
13. I. Seteanu, *Dezlocuirea plană negravitațională a două fluide nemiscibile într-un mediu poros*, partea I, St. cerc. mec. apl., **27**, *6* (1968).
14. — *Dezlocuirea plană negravitațională a două fluide nemiscibile într-un mediu poros*, partea a II-a, St. cerc. mec. apl., **28**, *1* (1969).
15. V. Ionescu, C. Cozma, *Mișcarea fluidelor într-un mediu poros neomogen determinată de un sistem arbitrar de sonde*, St. cerc. mec. apl., **28**, *5* (1969).
16. Th. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, București, Edit. Academiei, 1963.
17. N. I. Mushelișvili, *Singulearntie uravneniia*, Fizmatiz, Moskva, 1962.
18. F. D. Gahov, *Kraevie zadaci*, Moskva, 1963.
19. I. N. Vekua, *Obobșcionie analiticeskie funkții*, Moskva, 1959.
20. S. E. Buckley, M. C. Leverett, *Mechanism of fluid displacement in sands*, Trans. AIME, **195**, (1942).
21. V. Ionescu, C. Cozma, *Problema lui Riemann generalizată în clasa funcțiilor analitice generalizate*, St. cerc. mat. nr. 10, 1969.

CÎTEVA PROBLEME DE SCURGERE A FLUIDELOR INCOMPRESIBILE PRIN MEDII POROASE NEOMOGENE

de TEODOR OROVEANU
Institutul de petrol Ploieşti

Se reia problema găsirii unor soluţii pentru scurgerile prin medii poroase ale lichidelor incompresibile în cazul în care permeabilitatea este o funcţie de punct. Se consideră particular cazul în care permeabilitatea depinde de o singură variabilă spaţială şi se analizează posibilitatea de a se reduce problema la aceea a determinării unor funcţii armonic conjugate. În încheiere sînt date cîteva indicaţii asupra posibilităţilor de aplicare în studiul acestor probleme a teoriei funcţiilor pseudoanalitice.

1. INTRODUCERE

Dacă se consideră scurgerea unui lichid incompresibil printr-un mediu poros neomogen a cărui permeabilitate este o funcţie de punct, este necesar să se găsească funcţia

$$\varphi = -\frac{1}{\mu}(p + U), \tag{1}$$

în care p este presiunea, μ viscozitatea lichidului, presupusă constantă, şi

$$U = \pm \gamma z, \tag{2}$$

γ fiind greutatea specifică a lichidului şi semnul pozitiv corespunzînd cazului în care sensul pozitiv al coordonatei este acela al verticalei ascendente, iar semnul negativ situaţiei contrare. Funcţia (1) satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) = 0, \tag{3}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 5, P. 1223–1234, 1970

scrisă într-un sistem de coordonate carteziene rectangulare $Ox_1 x_2 x_3$. Permeabilitatea k este, la rîndul ei, o funcţie continuă şi derivabilă în domeniul D în care se produce scurgerea.

Schimbarea de funcţie [3]

$$\Phi = k^{\frac{1}{2}} \varphi \tag{4}$$

aduce ecuaţia (3) la forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_3^2} \right) \Phi = 0, \tag{5}$$

care prezintă cîteva proprietăţi interesante. Astfel, dacă funcţia $k^{\frac{1}{2}}$ satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_3^2} \pm f(x_1, x_2, x_3)\, k^{\frac{1}{2}} = 0, \tag{6}$$

Φ este soluţia unei ecuaţii de aceeaşi formă. Pînă în prezent, au fost investigate cazurile cele mai simple; astfel, dacă funcţia $f(x_1, x_2, x_3)$ este nulă, atît $k^{\frac{1}{2}}$, cît şi Φ sînt funcţii armonice [7], iar dacă $f(x_1, x_2, x_3)$ este o constantă, $k^{\frac{1}{2}}$ şi Φ sînt soluţii ale ecuaţiei lui Helmholtz [2]. Rezultatele cunoscute se referă îndeosebi la scurgerile plane, pentru care există şi posibilitatea de principiu de a se rezolva unele probleme la limită atunci cînd se trece la cazul general. Problemele studiate sînt mai ales acelea de scurgere spre o sondă sau spre un sistem de sonde în cazul celor două clase de legi de variaţie a permeabilităţii menţionate mai sus.

În cele ce urmează ne vom ocupa tot de scurgerea plană, mergînd pe linia unor preocupări anterioare care urmăresc obţinerea unor soluţii aproximative în anumite condiţii de variaţie a permeabilităţii. Luînd ca punct de plecare unele observaţii făcute în cadrul cercetărilor întreprinse cu mai mult timp în urmă [4], vom căuta să le dezvoltăm pentru a pune în evidenţă utilitatea lor reală.

2. CÎTEVA CONSIDERAŢII ASUPRA SCURGERII PLANE

În cazul cel mai frecvent studiat al scurgerii plane, ecuaţia (5) devine

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_2^2} \right) \Phi = 0, \tag{7}$$

care, pe lîngă proprietatea semnalată mai sus, mai are şi pe aceea, evidentă de altfel, de a-şi păstra forma în cazul în care se efectuează o reprezentare conformă a domeniului din planul Ox_1x_2, în care se produce scurgerea, pe un domeniu din alt plan.

Dacă introducem funcţia de curent ψ legată de funcţia φ prin relaţiile

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \tag{8}$$

se constată cu uşurinţă că ψ satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial (\ln k)}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial (\ln k)}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \tag{9}$$

ai cărei coeficienţi sînt analitici, deoarece, din motive de ordin fizic, în orice punct avem $k(x_1, x_2) > 0$, iar derivatele $\frac{\partial k}{\partial x_1}$, $\frac{\partial k}{\partial x_2}$ au numai valori finite.

Prin schimbarea de funcţie [3]

$$\Psi = k^{-\frac{1}{2}}\psi, \tag{10}$$

ecuaţia (9) ia forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{k^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial^2 k^{-\frac{1}{2}}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 k^{-\frac{1}{2}}}{\partial x_2^2}\right)\Psi = 0 \tag{11}$$

şi se observă imediat că are aceleaşi proprietăţi ca şi ecuaţia corespunzătoare a funcţiei Φ.

Luînd ca punct de plecare relaţiile (8) precum şi schimbările de funcţie (4) şi (10), cîteva calcule simple ne permit să stabilim între funcţiile Φ şi Ψ relaţiile [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= \frac{\partial (\ln k^{\frac{1}{2}})}{\partial x_1}\Phi + \frac{\partial (\ln k^{\frac{1}{2}})}{\partial x_2}\Psi, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} &= \frac{\partial (\ln k^{\frac{1}{2}})}{\partial x_2}\Phi - \frac{\partial (\ln k^{\frac{1}{2}})}{\partial x_1}\Psi. \end{aligned} \tag{12}$$

Acest sistem eliptic poate fi utilizat în studiul problemelor de scurgere plană, ca şi (8) de altfel, dat fiind că există în această direcţie cercetări destul de ample. El poate servi însă şi la dezvoltarea unor consideraţii asupra posibilităţilor de a se ajunge la soluţii aproximative atunci

cînd variația permeabilității este supusă la unele condiții restrictive. Prima încercare în acest sens ne-a condus la definirea mediilor poroase cu neomogenitatea redusă [3], [6], pentru care valorile extreme ale permeabilității în domeniul în care se produce scurgerea sînt foarte apropiate. În același timp, variația permeabilității este lentă, în sensul că ambele valori extreme nu sînt atinse într-un domeniu suficient de mic din jurul fiecărui punct al mediului poros. Dacă aceste condiții sînt îndeplinite, coeficienții $\frac{1}{2k}\frac{\partial k}{\partial x_1}$ și $\frac{1}{2k}\frac{\partial k}{\partial x_2}$ din sistemul (12) au valori mici, și acesta poate fi aproximat prin sistemul Cauchy-Riemann, ceea ce reprezintă o simplificare considerabilă. Determinarea funcțiilor Φ și Ψ se reduce, într-adevăr, cu aproximația pe care am precizat-o, la găsirea unor funcții armonic conjugate. În felul acesta pot fi adaptate soluțiile cunoscute pentru scurgerea prin medii poroase omogene după o modificare prealabilă a condițiilor la limită.

O a doua posibilitate de a obține soluții aproximative constă în slăbirea condițiilor impuse pentru variația permeabilității, în sensul de a nu mai neglija coeficienții din (12) care conțin permeabilitatea, ci de a le atribui valori constante. Acest procedeu este asemănător cu cel pe care l-am utilizat într-o lucrare anterioară [5]; astfel, dacă punem

$$\frac{\partial(\ln k^{\frac{1}{2}})}{\partial x_1} = m, \quad \frac{\partial(\ln k^{\frac{1}{2}})}{\partial x_2} = n, \tag{13}$$

obținem după cîteva calcule simple

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} - (m^2 + n^2)\,\Phi = 0, \tag{14}$$

respectiv

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2} - (m^2 + n^2)\,\Psi = 0, \tag{15}$$

ecuații de același tip cu cele introduse în lucrarea la care ne referim.

2.1. *Cazul variației unidimensionale a permeabilității.* În cele ce urmează vom considera în cadrul scurgerii plane numai situația particulară în care permeabilitatea depinde de o singură variabilă spațială, de exemplu de x_2. Sistemul (12) devine

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} &= \frac{\mathrm{d}(\ln k^{\frac{1}{2}})}{\mathrm{d}x_2}\Psi, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} &= \frac{\mathrm{d}(\ln k^{\frac{1}{2}})}{\mathrm{d}x_2}\Phi \end{aligned} \tag{16}$$

şi, bineînţeles, consideraţiile precedente i se aplică în întregime. Lăsîndu-le deci la o parte, vom observa că ecuaţia (7) se scrie

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}-\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}^2 k^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x_2^2}\Phi=0 \tag{17}$$

şi că Φ este o funcţie armonică dacă permeabilitatea variază după legea

$$k=(Ax_2+B)^2, \tag{18}$$

A şi B fiind constante.

Tot astfel, ecuaţia (11) devine

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}-\frac{1}{k^{-\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}^2 k^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x_2^2}\Psi=0 \tag{19}$$

şi Ψ este o funcţie armonică atunci cînd legea de variaţie a permeabilităţii are forma

$$k=\frac{1}{(Cx_2+D)^2}, \tag{20}$$

în care C şi D sînt constante.

Evident, nici în primul şi nici în al doilea caz funcţiile Φ şi Ψ nu sînt armonic conjugate. Dacă legea de variaţie a permeabilităţii este (18), sistemul (16) devine

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}-\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}&=\frac{A}{Ax_2+B}\Psi,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}&=\frac{A}{Ax_2+B}\Phi,\end{aligned} \tag{21}$$

în timp ce, atunci cînd permeabilitatea variază după legea (20), obţinem

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}-\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}&=-\frac{C}{Cx_2+D}\Psi,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}&=-\frac{C}{Cx_2+D}\Phi.\end{aligned} \tag{22}$$

Componentele vitezei de filtrare au, în cazul în care permeabilitatea depinde numai de x_2, expresiile

$$v_1 = k^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \qquad v_2 = k^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\mathrm{d}(\ln k^{\frac{1}{2}})}{\mathrm{d}x_2} \Phi \right], \tag{23}$$

care, pentru legea de variație (18), devin

$$v_1 = (Ax_2 + B) \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \qquad v_2 = (Ax_2 + B) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - A\Phi, \tag{24}$$

în timp ce pentru (20) iau forma

$$v_1 = \frac{1}{Cx_2 + D} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \qquad v_2 = \frac{1}{Cx_2 + D} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{C}{Cx_2 + D} \Phi \right). \tag{25}$$

Componentele vitezei de filtrare pot fi exprimate și cu ajutorul funcției Ψ. Astfel, dacă ținem seama de relațiile (8), (4), și (10), rezultă

$$v_1 = k^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{\mathrm{d}(\ln k^{\frac{1}{2}})}{\mathrm{d}x_2} \Psi \right], \qquad v_2 = - k^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \tag{26}$$

și pentru cazurile particulare de care ne ocupăm avem

$$v_1 = (Ax_2 + B) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{A}{Ax_2 + B} \Psi \right), \qquad v_2 = - (Ax_2 + B) \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \tag{27}$$

respectiv

$$v_1 = \frac{1}{Cx_2 + D} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - \frac{C}{Cx_2 + D} \Psi \right), \qquad v_2 = - \frac{1}{Cx_2 + D} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}. \tag{28}$$

În ceea ce privește condițiile la limită, dacă ne referim mai întîi la funcția Φ, reamintim că în general există două posibilități. Astfel, pe unele frontiere φ poate fi sau constantă, sau o funcție de punct; de aici rezultă că Φ este pe asemenea frontiere o funcție de punct, eventual proporțională cu $k^{\frac{1}{2}}$. Numai în cazul în care atît φ, cît și permeabilitatea sînt constante pe frontieră, Φ este tot constantă. Pe frontierele impermeabile, derivata normală a funcției φ este nulă; prin urmare, pentru Φ condiția este

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial (\ln k^{\frac{1}{2}})}{\partial n} \Phi = 0. \tag{29}$$

De obicei pe frontierele impermeabile se formulează condiția referitoare la funcția ψ, care este constantă; așadar, Ψ este proporțională cu $k^{\frac{1}{2}}$ și constantă numai atunci cînd și permeabilitatea este constantă.

Multe probleme de scurgere a lichidelor prin medii poroase sînt, din punctul de vedere al condițiilor la limită, mixte, pe anumite porțiuni ale frontierei domeniului în care se produce scurgerea fiind cunoscute valorile funcției φ, iar pe altele acelea ale derivației ei normale, sau, ceea ce este același lucru, valorile funcției de curent ψ. Funcția Φ din sistemul (21) este armonică și prin urmare, se poate defini o altă funcție armonică și conjugată cu ea. Din examinarea sistemului (21) se poate însă ușor constata că între conjugata armonică a funcției Φ și funcția Ψ din același sistem nu se poate stabili o relație destul de simplă. Din acest motiv este foarte dificil să se transpună pentru conjugata armonică a funcției Φ condițiile la limită cunoscute pentru funcția Ψ. O concluzie similară poate fi trasă în legătură cu sistemul (22), în care funcția Ψ este armonică. Și această ultimă funcție are, evident, o conjugată armonică, dar între acestea din urmă și funcția Φ din (22) de asemenea nu se poate stabili o relație convenabilă. Așadar, în ambele cazuri, rezolvarea exactă a problemei la limită mixte este foarte dificilă.

În anumite situații este însă posibil să se ajungă la soluții aproximative convenabile pentru legile de variație a permeabilității (18) și (20) sau altele apropiate de ele. Pentru a arăta acest lucru ne vom servi de asemenea de unele rezultate dintr-o lucrare anterioară [4], [6].

Să considerăm astfel un strat permeabil orizontal cu grosimea h, originea axelor de coordonate fiind situată pe frontiera superioară a stratului; pentru axa Ox_2 alegem ca sens pozitiv pe acela al verticalei descendente. Mai departe, considerăm legea de variație (18) a permeabilității și notăm cu k_0 permeabilitatea pentru $x_2 = 0$ și cu k_1, aceeași mărime pentru $x_2 = -h$. În acest fel, legea (18) capătă forma

$$k = k_0 \left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{k_1}{k_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{x_2}{h} \right\}^2, \tag{30}$$

în care am presupus $k_1 < k_0$.

Calculele numerice arată că valorile permeabilității date de formula precedentă nu diferă decît cu cel mult 3% de acelea care rezultă din legea de variație liniară

$$k = k_0 \left[1 + \left(1 - \frac{k_1}{k_0} \right) \frac{x_2}{h} \right] \tag{31}$$

în cazul în care avem $k_0 > k_1 \geqslant 0{,}5 k_0$. Prin urmare, atît timp cît permeabilitatea nu scade sub 50% din valoarea ei maximă, legea (30) aproximează foarte bine pe aceea de variație liniară a permeabilității (31).

Tot astfel, dacă ne referim la legea de variaţie (20) a permeabilităţii, o putem pune sub forma

$$k = \frac{k_0}{\left\{1 + \left[1 - \left(\frac{k_0}{k_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{x_2}{h}\right\}^2}, \tag{32}$$

k_0 şi k_1 avînd semnificaţiile precizate mai înainte. Comparaţia dintre (32) şi legea liniară de variaţie a permeabilităţii (31) arată că (32) dă pentru k valori care diferă cu cel mult 5% de acelea rezultate din (31), cu condiţia să avem $k_0 > k_1 \geqslant 0{,}6k_0$. Prin urmare, pentru valori ale raportului $\frac{k_1}{k_0}$ mai mici decît 0,6, ambele legi considerate, şi anume (30), respectiv (32), aproximează foarte bine legea liniară de variaţie a permeabilităţii.

Rezultă de aci că dacă permeabilitatea variază liniar, fără să scadă prea mult faţă de valoarea ei maximă, funcţiile Φ şi Ψ sînt, cu o precizie destul de bună, armonice. Această constatare este valabilă şi dacă permeabilitatea variază parabolic; în acest caz, funcţia Φ este armonică, dar, deoarece pentru valori ale raportului $\frac{k_1}{k_0}$ apropiate de unitate valorile date de (32) diferă foarte puţin de acelea obţinute din (30), funcţia Ψ poate fi aproximată printr-o funcţie armonică.

Pentru o mai bună precizare vom introduce variabilele adimensionale

$$\xi_1 = \frac{x_1}{h}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{h}, \tag{33}$$

precum şi funcţiile

$$\overline{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \overline{\Psi} = \frac{\Psi}{\Psi_0}, \tag{34}$$

Φ_0 şi Ψ_0 fiind valorile maxime ale lui Φ şi Ψ în domeniul în care se produce scurgerea. După cum este cunoscut, pentru funcţiile care satisfac ecuaţia (17), respectiv (19), aceste valori se găsesc pe frontiera domeniului.

În felul acesta, ecuaţia (17) ia forma

$$\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \xi_2^2} - \frac{1}{\varkappa^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}^2 \varkappa^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}\xi_2^2} \overline{\Phi} = 0, \tag{35}$$

unde am pus

$$\varkappa = \frac{k}{k_0}, \tag{36}$$

k_0 avînd semnificaţia precizată ; de asemenea, ecuaţia (19) devine

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \xi_2^2} - \frac{1}{\varkappa^{-\frac{1}{2}}} \frac{d^2 \varkappa^{-\frac{1}{2}}}{d \xi_2^2} \overline{\Psi} = 0. \tag{37}$$

Legea liniară de variaţie a permeabilităţii (31) se scrie

$$\varkappa = 1 + (1 - \varkappa_1)\xi_2, \tag{38}$$

cu

$$\varkappa_1 = \frac{k_1}{k_0}, \tag{39}$$

care ne dă

$$\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \xi_2^2} + \frac{(1 - \varkappa_1)^2}{4\varkappa^2} \overline{\Phi} = 0, \tag{40}$$

respectiv

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \xi_2^2} - \frac{3(1 - \varkappa_1)^2}{4\varkappa^2} \overline{\Psi} = 0. \tag{41}$$

Dacă punem $\varkappa_1 = \frac{2}{3}$ valoare apropiată de limita inferioară pe care am precizat-o mai sus ca fiind admisibilă pentru realizarea unei bune aproximări, rezultă

$$\frac{1}{36} \leqslant \frac{(1 - \varkappa_1)^2}{4\varkappa^2} \leqslant \frac{1}{16}, \qquad \frac{1}{12} \leqslant \frac{3(1 - \varkappa_1)^2}{4\varkappa^2} \leqslant \frac{3}{16}$$

şi, deoarece $\overline{\Phi}$ şi $\overline{\Psi}$ sînt în valoare absolută cel mult egale cu unitatea, rezultă că ecuaţia (40) se aproximează mai bine prin ecuaţia lui Laplace decît ecuaţia (41).

În ceea ce priveşte sistemul (16), acesta devine

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_0}{\Psi_0} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial \xi_2} &= \frac{d(\ln \varkappa^{\frac{1}{2}})}{d\xi_2} \overline{\Psi}, \\ \frac{\Phi_0}{\Psi_0} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial \xi_1} &= \frac{d(\ln \varkappa^{\frac{1}{2}})}{d\xi_2} \frac{\Phi_0}{\Psi_0} \overline{\Phi}, \end{aligned} \tag{42}$$

şi, dacă derivata $\frac{d(ln\, \varkappa^{\frac{1}{2}})}{d\xi_2}$ are numai valori care pot fi neglijate, funcţiile $\overline{\Phi}$ şi $\overline{\Psi}$ satisfac în mod aproximativ sistemul Cauchy-Riemann.

Considerînd din nou legea liniară de variaţie a permeabilităţii (38), obţinem

$$\frac{d\,(\ln \varkappa^{\frac{1}{2}})}{d\xi_2} = \frac{1-\varkappa_1}{2\varkappa} \tag{43}$$

şi pentru aceeaşi valoare a lui $\varkappa_1$ ca mai sus rezultă $\frac{1}{6} \leqslant \frac{1-\varkappa_1}{2\varkappa} \leqslant \frac{1}{4}$, ceea ce arată că în acest caz aproximarea sistemului (42) prin sistemul Cauchy-Riemann nu este prea bună.

Pe de altă parte însă, legea parabolică de variaţie a permeabilităţii (30), scrisă sub forma

$$\varkappa = [1 + (1-\varkappa_1)^{\frac{1}{2}}\, \xi_2]^2, \tag{44}$$

ne dă

$$\frac{d\,(\ln \varkappa^{\frac{1}{2}})}{d\xi_2} = \frac{1-\varkappa_1^{\frac{1}{2}}}{\varkappa^{\frac{1}{2}}}, \tag{45}$$

iar dacă dăm din nou lui $\varkappa_1$ valoarea $\frac{2}{3}$, obţinem $0{,}185 \leqslant \frac{1-\varkappa_1^{\frac{1}{2}}}{\varkappa^{\frac{1}{2}}} \leqslant$ $\leqslant 0{,}227$ ceea ce înseamnă că nici în acest caz rezultatul nu este mai bun decît cel precedent.

Considerarea legii de variaţie (32), transcrisă în mărimi adimensionale, ne conduce la concluzii asemănătoare.

Aşadar, pentru a obţine rezultate mai convenabile este necesar să restrîngem intervalul de variaţie posibilă a permabilităţii. Din calculele pe care le-am expus într-o lucrare anterioară [6] se ajunge la constatarea că aproximaţiile pe care le discutăm sînt acceptabile dacă avem $\varkappa_1 \geqslant 0{,}8$, respectiv dacă permeabilitatea variază cu cel mult 20%. În felul acesta obţinem cazul considerat o definiţie mai precisă a unui mediu poros cu neomogenitate redusă. Se poate constata însă numaidecît că nu este suficient să restrîngem intervalul de variaţie a permeabilităţii, ci trebuie să punem şi condiţia, menţionată şi mai înainte, ca variaţia locală a permeabilităţii, să nu fie prea importantă.

În concluzie, cele trei legi de variație a permeabilității considerate ne dau posibilitate ca în limitele precizate să admitem că funcțiile Φ și Ψ sînt armonic conjugate. Acest rezultat este interesant, deoarece permite rezolvarea aproximativă a unui număr relativ mare de probleme. Mai menționăm că și condiția la limită (29) poate fi aproximată în acest caz printr-una mai simplă, care constă în anularea derivatei normale a funcției Φ pe frontieră.

2.2. *Posibilități de aplicare a teoriei funcțiilor pseudoanalitice în cazul variației unidimensionale a permeabilității.* Cu mai mult timp în urmă [6], am arătat că în cazul în care permeabilitatea depinde de o singură variabilă spațială există posibilitatea de a se găsi soluții ale sistemului (8) prin utilizarea unor rezultate din teoria funcțiilor pseudoanalitice [1].

Astfel, dacă pentru sistemul (8) se consideră perechea generatoare

$$F = 1, \quad G = \frac{\mathrm{i}}{k(x_2)}, \tag{46}$$

funcția

$$f = \varphi + \mathrm{i}\psi \tag{47}$$

este (F, G) pseudoanalitică de specia a doua, iar integrala

$$f^{(1)}(x) = \int_C \varphi \, \mathrm{d}x_1 - \frac{\psi}{k} \mathrm{d}x_2 + \mathrm{i} \int_C \varphi \, \mathrm{d}x_1 + k\varphi \, \mathrm{d}x_2, \tag{48}$$

C fiind un arc de curbă rectificabil și

$$x = x_1 + \mathrm{i}x_2, \tag{49}$$

este tot (F, C) pseudoanalitică. Prin urmare, prin aplicarea repetată a formulei (48), care conține așa-numita Σ-integrală, pot fi găsite soluții ale sistemului (8). În acest scop este suficient să se cunoască o pereche de soluții și să se aleagă legea de variație a permeabilității. Astfel, dacă plecăm de la funcțiile

$$\varphi = A, \quad \psi = B, \tag{50}$$

A și B fiind constante, acestea sînt soluții ale sistemului (8). Aplicînd formula (48), obținem

$$\varphi^{(1)} = A(x_1 - x_1^{(0)}) - B \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x_2}{k} \tag{51}$$

și

$$\psi^{(1)} = B(x_1 - x_1^{(0)}) + A \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} k \, \mathrm{d}x_2, \tag{52}$$

care sînt de asemenea soluţii ale sistemului (8). În (51) şi (52) $x_1^{(0)}$ şi $x_2^{(0)}$ reprezintă coordonatele unui punct fix de pe curba C, iar x_1 şi x_2 coordonatele punctului curent. După alegerea legii de variaţie a permeabilităţii $k(x_2)$, integrarea se poate repeta. Inconvenientul acestui procedeu este acela că funcţiile φ şi ψ astfel găsite nu satisfac condiţii la limită date.

Primită la redacţie la 10 martie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bers, *An outline of theory of pseudoanalytic functions.* Bulletin of the American Mathematical Society, **62**, *4* (1956).
2. R. M. Nasirov, *K voprosu opredeleniia polia davlenii v plaste peremennoi proniţaemosti,* Ucenîe zapiski Kazanskogo Gosudarstvennogo Universiteta im V. I. Ulianova, Lenina, **116**, *1* (1956).
3. T. Oroveanu, *Scurgerea unui fluid printr-un mediu poros cu neomogeniiate redusă,* Com. Acad. R.P.R., **V**, *5* (1955).
4. — *Ctieva probleme de scurgere prinr-un mediu poros cu variaţie unidimensională a permeabilităţii,* St. cerc. mec. apl. **VII**, *4* (1956).
5. — *O metodă aproximativă pentru studiul scurgerii spre sonde în medii poroase neomogene,* St. apl., **X**, *1* (1959).
6. — *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene,* Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1963, p. 129—132, 187—190 şi 193—243.
7. G. S. Salehov, *K voprosu opredeleniia polia davlenii v plaste peremennoi proniţaemosti,* Dokl. AN SSSR, **CV**, *2* (1955).

GENERALIZAREA TEORIEI LUI BUCKLEY ŞI LEVERETT ASUPRA DEZLOCUIRII AMESTECULUI A DOUĂ FLUIDE IMISCIBILE OARECARE DE CĂTRE UN AL TREILEA IMISCIBIL CU ELE

de CONSTANTIN GH. POPA
Institutul de cercetări, Cîmpina

Lucrarea are ca scop prezentarea unei metode de rezolvare a problemei dezlocuirii a mai multor fluide imiscibile existente într-un mediu poros şi permeabil de către un alt fluid imiscibil cu ele. Metoda de rezolvare este cea a caracteristicilor, metodă care permite eliminarea apariţiei valorilor multiple de saturaţie în acelaşi fluid într-o secţiune a mediului poros. Fiind destul de laborioasă, metoda poate deveni mai accesibilă, iar rezultatele ei îmbunătăţite prin programarea executării acesteia la maşini automate de calcul. În lucrare se prezintă un exemplu de calcul prin descrierea unui proces de dezlocuire a amestecului apă-ţiţei, existent într-un mediu poros şi permeabil, de către gaze.

NOTAŢII

A — secţiunea mediului poros;
m — porozitatea;
K — permeabilitatea absolută;
k_i — permeabilitatea relativă pentru fluidul i,
μ — viscozitatea dinamică;
p — presiunea;
s — saturaţia;
q — debitul,
f — fracţia de fluid în curent;
x — direcţia de curgere;
t — timpul;
s_{aired} — saturaţia în apă interstiţială;
$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(s_1)_j}$ — viteza de deplasare a planului j de saturaţie $s_1 = (s_1)_j$;
$\left(\frac{\partial f_1}{\partial s_1}\right)^*$ — valoarea medie a derivatei fracţiei de fluid 1 în raport cu saturaţia s_1;
f_1^+ — valoarea fracţiei de fluid 1 pentru $s_1 = s_1^+$, $s_2 = s_2^+$, $s_3 = 1 - s_1^+ - s_2^+$.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 5, P. 1235–1246, 1970

INDICI

$i = 1, 2, 3$ — fluid 1 (gaze în aplicație), respectiv 2 și 3 (în aplicație apă și respectiv țiței);
T — total;
0 — inițial;
j — mărimi corespunzătoare valorilor de saturație din planul j;
$(s_i)_j$ — saturația constantă în fluid i existentă în secțiunea j;
t — timpul;
x — secțiunea existentă la distanța x de galeria de injecție;
a — apa;
g — gazele;
$ț$ — țițeiul.

1. INTRODUCERE

Scopul acestei lucrări este de a da o soluție exactă curgerii împreună și simultan prin mediul poros a trei fluide imiscibile oarecare. Această problemă a fost rezolvată [1], [2] pentru cazul practic în care unul dintre cele două fluide dezlocuite are o viscozitate mult mai mică decît a celuilalt fluid dezlocuit și decît a fluidului dezlocuitor. Astfel, făcîndu-se observația practică în cazul dezlocuirii amestecului gaze-țiței de către apă, că, datorită faptului că gazele au o viscozitate mult mai mică decît a țițeiului și decît a apei, practic la începutul procesului de dezlocuire se scot numai gaze, s-a dedus că în cadrul procesului de dezlocuire are loc aproximativ o dezlocuire-piston a gazelor de către țiței, iar mai în spate are loc o dezlocuire cu zonă de amestec, conform teoriei Buckley — Leverett [3], a țițeiului de către apă.

Soluția propusă în prezenta lucrare este o soluție generală pentru cazul curgerii prin mediul poros a trei fluide imiscibile oarecare, soluția propusă pentru cazul dezlocuirii amestecului gaze-țiței de către apă în lucrările [1], [2] fiind un caz particular al celei expuse aici.

Dezvoltarea teoriei a fost făcută după modelul teoriei clasice a lui Backley și Leverett pentru cazul a două fluide imiscibile [3], din acest punct de vedere fiind o generalizare a teoriei acestora pentru cazul a mai multor fluide imiscibile.

Pentru executarea calculelor de dezlocuire se propune folosirea metodei caracteristicilor ca o metodă simplă de rezolvare a problemei și care evită apariția valorilor multiple de saturație.

Generalitatea soluției permite studierea cazului, semnalat deja de Sheldon și Dougherty [4], în care fluidul injectat dezlocuiește în același timp ambele fluide imiscibile existente inițial în mediul poros, iar în spatele frontului de dezlocuire există o zonă de amestec a celor trei fluide. Un astfel de caz interesant de dezlocuire și care s-a rezolvat cu metoda expusă în prezenta lucrare este cel în care se injectează gaze într-un mediu poros saturat cu țiței și apă.

2. TEORIE

Se consideră un mediu poros, liniar, uniform, de porozitate m, saturat cu trei fluide imiscibile de viscozităţi μ_i $(i = 1, 2, 3)$ şi de saturaţii $s_i (i = 1, 2, 3)$. Pe la un capăt al mediului poros de secţiune A are loc o injecţie cu unul dintre cele trei fluide, iar pe la celălalt capăt al mediului poros se extrag cele trei fluide cu debitele $q_i (i = 1, 2, 3)$.

Din ecuaţia de bilanţ material, dacă q_T este debitul de injecţie, avem

$$q_T = \sum_{i=1}^{3} q_i. \tag{1}$$

Definim fracţia de fluid i în curent respectiv cu

$$f_i = \frac{q_i}{q_T}. \tag{2}$$

Debitul fluidului i în secţiunea x în cazul cînd efectul gravitaţional este nul şi neglijînd capilaritatea este

$$q_i = -A \cdot \frac{K \cdot k_i}{\mu_i} \cdot \frac{dp}{dx}. \tag{3}$$

După calcule simple, folosind ecuaţiile (1), (2) şi (3), se ajunge la ecuaţiile fracţiilor de fluid i în curentul total:

$$f_i = \frac{\dfrac{k_i}{\mu_i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{k_i}{\mu_i}} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Rezultă că pentru trei fluide date fracţiile f_i sînt funcţie numai de saturaţiile $s_i (i = 1, 2, 3)$ prin intermediul permeabilităţilor relative k_i $(i = 1, 2, 3)$.

Datorită faptului că avem trei fluide care curg împreună şi simultan prin mediul poros, permeabilităţile relative trebuie citite din diagramele ternare. Deoarece prin definiţie $\sum_{i=1}^{3} s_i = 1$ şi $\sum_{i=1}^{3} f_i = 1$, rezultă că este suficient să studiem cum variază f_1 şi f_2 cu s_1 şi s_2, deci avem

$$f_1 = f_1 (s_1, s_2) \quad \text{şi} \quad f_2 = f_2 (s_1, s_2). \tag{5}$$

Ecuaţia de continuitate este

$$\left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\right)_t = -m \cdot A \cdot \left(\frac{\partial s_i}{\partial t}\right)_x \tag{6}$$

sau, notînd cu $q_i = q_T \cdot f_i$, avem

$$\frac{q_T}{m \cdot A} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x} = -\frac{\partial s_i}{\partial t}. \tag{7}$$

Urmărind un plan j de saturaţie constantă, s_i, este evident că

$$\mathrm{d}(s_i)_j = 0 = \frac{\partial s_i}{\partial t} \cdot \mathrm{d}t + \frac{\partial s_i}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x. \tag{8}$$

Aşadar, urmează că

$$-\frac{\partial s_i}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial x} \tag{9}$$

şi rezultă

$$\frac{\partial s_i}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{q_T}{m \cdot A} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x}. \tag{10}$$

Fie s_3 saturaţie a cărei evoluţie vrem s-o urmărim. Deoarece $s_3 = 1 - s_1 - s_2$, conform ecuaţiilor (5) rezultă

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{(s_1)_j} = \frac{q_T}{m \cdot A} \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial s_1} + \frac{\partial f_1}{\partial s_2} \cdot \frac{\dfrac{\partial s_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x}} \right)_j, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{(s_2)_j} = \frac{q_T}{m \cdot A} \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial s_2} + \frac{\partial f_2}{\partial s_1} \cdot \frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial s_2}{\partial x}} \right)_j. \tag{12}$$

Avînd dată o distribuţie iniţială de saturaţii (fig. 1) în planul j (coordonată x), se citeşte $(s_1)_j$ şi $(s_2)_j$, precum şi $\left(\dfrac{\partial s_1}{\partial x}\right)_j$ şi $\left(\dfrac{\partial s_2}{\partial x}\right)_j$.

Calculul lui $\dfrac{\partial f_1}{\partial s_1}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial s_2}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial s_2}$, şi $\dfrac{\partial f_2}{\partial s_1}$ se face în planul j, deci corespunzător saturaţiilor $(s_1)_j$, $(s_2)_j$ şi $(s_3)_j = 1 - (s_1)_j - (s_2)_j$.

Înlocuind în ecuaţiile (11) şi (12), se obţin vitezele de deplasare ale saturaţiilor din planul j.

Deoarece $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{(s_1)_j} \neq \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{(s_2)_j}$, poziţia relativă a profilelor de saturaţie se modifică continuu în timp. Deci lui $(s_1)_j$ la un timp imediat

următor îi corespunde un alt $s_2 \neq (s_2)_j$. Rezultă că vitezele $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(s_1)_j}$ şi $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(s_2)_j}$ sînt viteze instantanee (depind de timp chiar la un debit de injecţie $q_T = \text{const.}$).

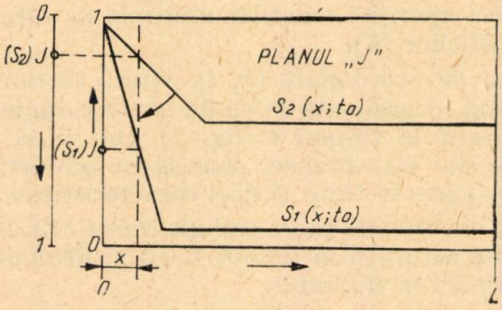


Fig. 1

Generalizarea teoriei lui Backley şi Leverett poate merge şi mai departe. Să presupunem astfel că mediul poros este saturat cu n fluide imiscibile a căror distribuţie iniţială este cunoscută. Dacă s-ar dispune de date de permeabilitate relativă pentru fiecare dintre cele n fluide în condiţiile în care mediul poros le conţine pe toate şi în acest mediu poros se injectează unul dintre cele n fluide pentru dezlocuirea celorlalte, se poate scrie ecuaţia fracţiei de fluid i în curent:

$$f_i = \frac{\frac{k_i}{\mu_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\mu_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Analog se poate deduce ecuaţia vitezei instantanee de avansare a unei saturaţii constante în fluid i date, existentă într-un plan j de coordonată x:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(s_i)_j} = \frac{q_T}{m \cdot A} \cdot \frac{1}{\frac{\partial s_i}{\partial x}} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial s_l}{\partial x},$$

în care, la fel ca în ecuaţia (11), $\frac{\partial s_l}{\partial x}$ este panta profilului de saturaţie l în fluid $i (l = 1, 2, 3, \ldots i, \ldots, n)$, existentă în secţiunea j de coordonată x, iar $\frac{\partial f_i}{\partial s_l}$ derivata fracţiei de fluid i calculată corespunzător saturaţiilor în cele n fluide existente în aceeaşi secţiune şi unde, evident, $\sum_{l=1}^{n} s_l = 1$.

Problema trebuie tratată în spaţiul n dimensional.

3. DESCRIEREA METODEI DE REZOLVARE A PROBLEMEI DEZLOCUIRII A DOUĂ FLUIDE IMISCIBILE PRIN INJECTAREA UNUI AL TREILEA IMISCIBIL CU ELE

În mediul poros liniar de secțiune constantă A există o distribuție inițială de saturații, redată în figura 1. În galeria de injecție se injectează fluidul 1 și vrem să urmărim evoluția saturației $s_3 = 1 - s_1 - s_2$.

Pentru evitarea apariției valorilor multiple de saturație facem apel la metoda caracteristicilor [5].

Într-un sistem de coordonate (x, t), viteza instantanee a planului de saturație constantă (coordonată x) va da panta caracteristicii corespunzătoare acelei saturații la timpul t (fig. 2). Dat fiind că chiar pentru $q_T = \text{const}$ vitezele sînt instantanee, pantele caracteristicilor saturațiilor corespunzătoare vor varia în timp și deci caracteristicile nu vor fi drepte.

În sistemul de coordonate (x, t) trebuie trasat atît drumul caracteristicilor pentru diferite saturații în fluidul 1, cît și drumul caracteristicilor pentru diferite saturații în fluidul 2.

Deoarece aceste caracteristici indirect se influențează reciproc (prin intermediul profilelor instantanee de saturație), este necesar să facem o aproximație, și anume să presupunem că fiecare din cele două viteze instantanee este constantă pe un interval de timp Δt destul de mic,

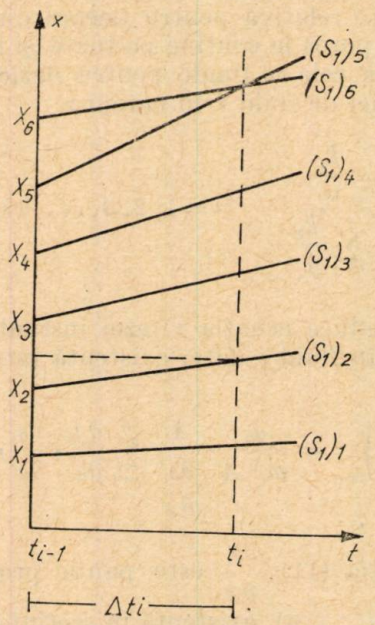


Fig. 2

pe care considerăm că și q_T este constant. Pe acest interval de timp, panta fiecărei caracteristici va fi deci o constantă egală cu viteza respectivă la începutul intervalului Δt. Caracteristica va fi astfel o dreaptă în intervalul Δt.

Plecînd, aşadar, de la o distribuţie iniţială de saturaţii (moment t_0) într-un sistem de coordonate (s, x), vom calcula cu relaţiile (11) şi (12) vitezele instantanee la momentul t_0, pentru diferite saturaţii. Mărimile acestor viteze vor da în sistemul (x, t) pantele caracteristicilor corespunzătoare acelor saturaţii la momentul t_0. Conform aproximaţiei făcute, aceste pante se păstrează într-un interval de timp Δt_1, ales destul de mic. În acest interval de timp, caracteristicile vor fi drepte.

Se trece în continuare la construirea în sistemul (s, x) a noilor profile de saturaţie corespunzătoare momentului $t_1 = t_0 + \Delta t_1$ [5]. Pentru aceste noi profile de saturaţie, se calculează pentru diferite valori de saturaţie vitezele instantanee corespunzătoare momentului t_1, care se presupun constante pe un interval de timp următor , Δt_2 etc.

După cum se vede în figura 2, la timpul $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$ saturaţia $(s_1)_2$ nu se va mai afla în secţiunea x_2, corespunzătoare lui t_{i-1}, ci în secţiunea $x_{2,5}$. Un punct al noului profil de saturaţie $s_1(x, t_i)$ va fi deci la coordonata $x = x_{2,5}$ de saturaţie $s_1(x_{2,5}; t_i) = s_1(x_2; t_{i-1})$.

Apariţia şocului atît pentru fluidul 1, cît şi pentru fluidul 2 are loc la momentul cînd se intersectează două caracteristici vecine de acelaşi fel (fig. 2).

Admiţînd, după Cardwell [6], existenţa unei zone a frontului, trebuie ca pentru zona frontului fluidului 1 şi pentru zona frontului fluidului 2 să se calculeze nişte viteze instantanee medii pe zonă (fig. 3*a*). La momentul t, ecuaţia (11) scrisă pentru fluidul 1 din zona frontului fluidului 1 devine

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{q_T}{m \cdot A} \cdot \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial s_1} \right)^* + \left(\frac{\partial f_1}{\partial s_2} \right)^* \cdot \frac{\dfrac{s_2^+ - s_2^-}{\Delta x}}{\dfrac{s_1^+ - s_1^-}{\Delta x}} \right], \tag{13}$$

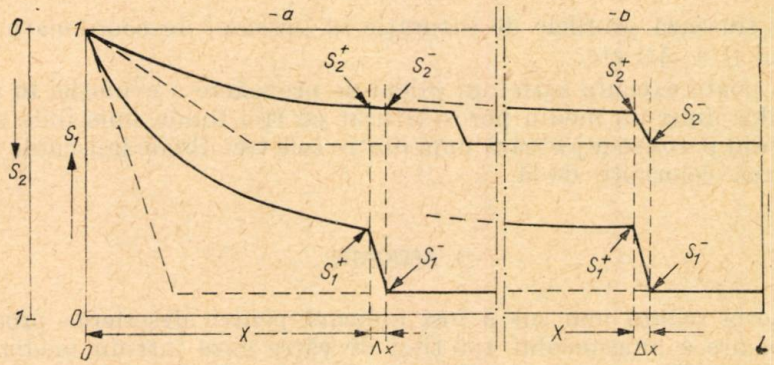


Fig. 3

admiţînd o pantă medie a profilelor de saturaţie în zona frontului fluidului 1 şi valori medii pentru $\frac{\partial f_1}{\partial s_1}$ şi $\frac{\partial f_1}{\partial s_2}$.

Dar, conform toremei mediei, avem

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial s_1}\right)^* = \frac{1}{s_1^+ - s_1^-} \cdot \int_{s_1^-}^{s_1^+} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \cdot \mathrm{d}s_1,$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial s_2}\right)^* = \frac{1}{s_2^+ - s_2^-} \cdot \int_{s_2^-}^{s_2^+} \frac{\partial f_1}{\partial s_2} \cdot \mathrm{d}s_2,$$

cu care din ecuaţia (13) deducem

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{q_T}{m \cdot A} \cdot \frac{f_1^+ - f_1^-}{s_1^+ - s_1^-}. \tag{14}$$

Din distribuţia saturaţiilor la momentul de calcul se citesc saturaţiile la front s_1^+ şi s_1^- şi corespunzător s_2^+ şi s_2^-, iar

$$f_1^+ = f_1(s_1^+ ; s_2^+),$$
$$f_1^- = f_1(s_1^- ; s_2^-).$$

Din ecuaţia (14) rezultă o viteză instantanee pentru fluidul 1 medie pe zona frontului fluidului 1, care o presupunem constantă pe un interval de timp Δt destul de mic.

Viteza de avansare a fuidului 2 din zona frontului fluidului 2 la momentul t este

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{q_T}{m \cdot A} \cdot \frac{f_2^+ - f_2^-}{s_2^+ - s_2^-}. \tag{15}$$

Se trasează profilele de saturaţie în sistemul de coordonate $(s\,;\ x)$ la timpul $(t + \Delta t)$ etc.

Se poate executa astfel un calcul de prevedere a evoluţiei în timp a saturaţiilor dintr-un mediu poros saturat cu trei fluide imiscibile cînd în acest mediu poros se injectează unul dintre cele trei fluide imiscibile pentru dezlocuirea celorlalte două.

4. APLICAŢIE

Teoria redată mai sus a fost aplicată pentru descrierea procesului de dezlocuire a amestecului apă-ţiţei de către gaze într-un mediu poros şi permeabil. Fie pentru aceasta un zăcămînt de lungime $L = 670$ m şi lăţime $l = 250$ m. Mediul poros şi permeabil, de grosime $h = 40$ m, se presupune uniform, alcătuit din nisip neconsolidat cu bobul bine sortat; porozitatea $m = 0{,}28$, permeabilitatea absolută $K = 465$ mD, saturaţia în apă interstiţială $s_{a\hat{\imath}red} = 0{,}236$, iar viscozităţile pentru apă, ţiţei şi gaze 0,5; 2,0; respectiv 0,01 Cp.

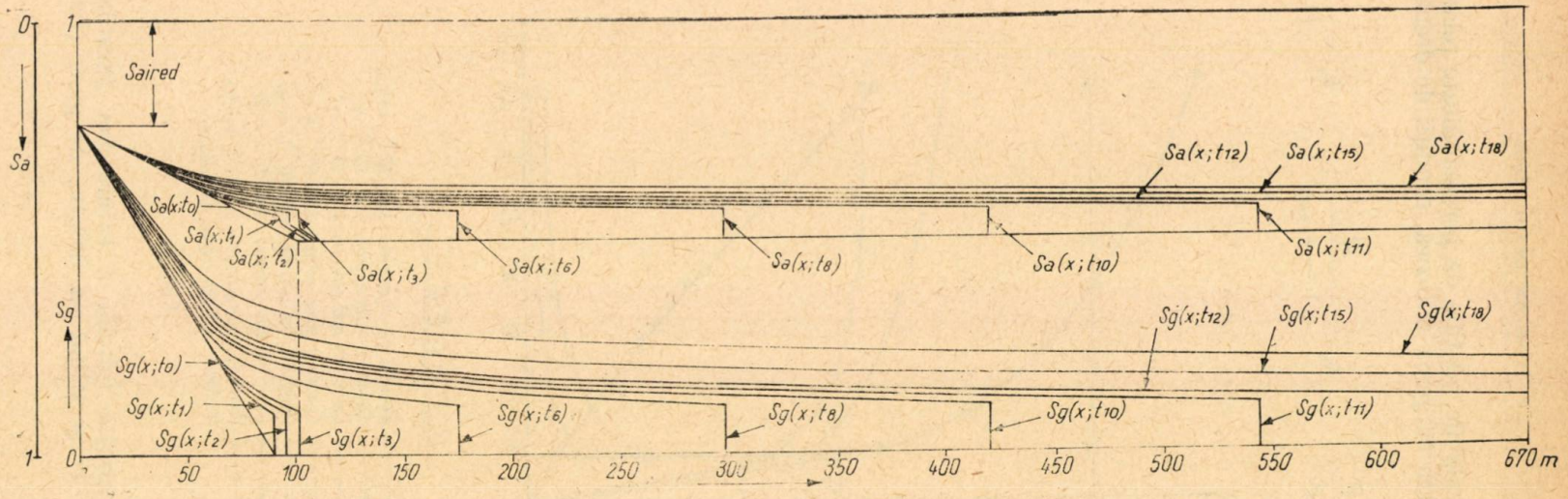

0
1
Sa
Saired
Sa(x;t0)
Sa(x;t1)
Sa(x;t2)
Sa(x;t3)
Sa(x;t6)
Sa(x;t8)
Sa(x;t10)
Sa(x;t11)
Sa(x;t12)
Sa(x;t15)
Sa(x;t18)
Sg
Sg(x;t0)
Sg(x;t1)
Sg(x;t2)
Sg(x;t3)
Sg(x;t6)
Sg(x;t8)
Sg(x;t10)
Sg(x;t11)
Sg(x;t12)
Sg(x;t15)
Sg(x;t18)
1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
670 m

Fig. 4

S-au admis valabile relaţiile de permeabilitate relativă de fază ale lui Wyllie [7] pentru curgerea trifazică, condiţii de drenaj

$$k_a = \frac{(s_a - s_{aired})^3}{(1 - s_{aired})^3}; \qquad k_t = \frac{s_t^3}{(1 - s_{aired})^3}; \qquad k_g = \frac{s_g^3}{(1 - s_{aired})^3}. \quad (16)$$

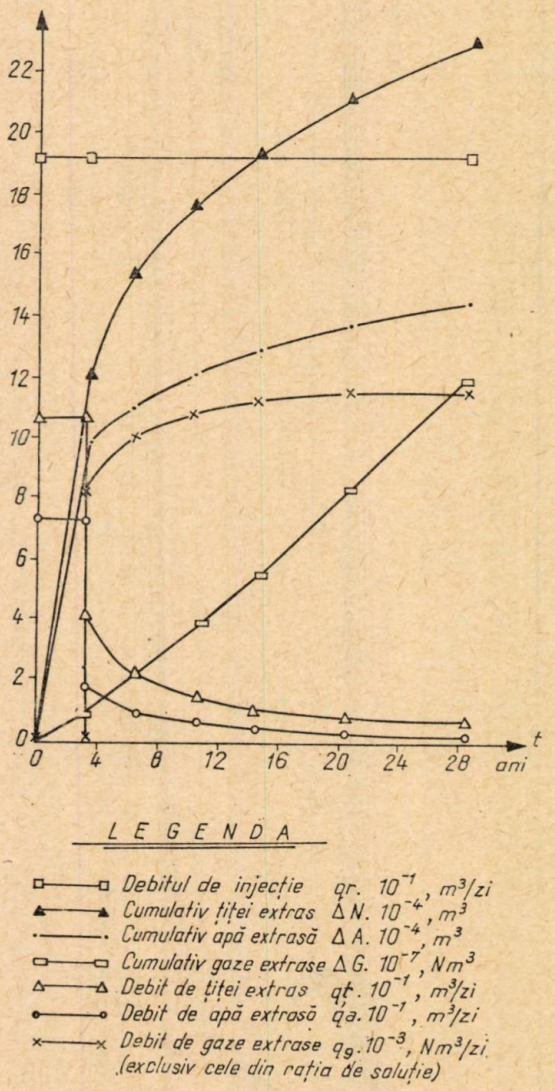


Fig. 5

Dîndu-se distribuţia iniţială a saturaţiilor (profilele $s_g(x; t_0)$ şi $s_a(x; t_0)$ din figura 4) şi ştiind că debitul de gaze (fluid 1) injectat

în galerie este $q_T/m \cdot A = 25$ m pe an, folosind relaţiile (4) şi (16), cu relaţiile

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{s_g} = \frac{q_T}{m \cdot A} \cdot \left(\frac{\partial f_g}{\partial s_g} + \frac{\partial f_g}{\partial s_a} \cdot \frac{\dfrac{\partial s_a}{\partial x}}{\dfrac{\partial s_g}{\partial x}} \right), \tag{17}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{s_a} = \frac{q_T}{m \cdot A} \cdot \left(\frac{\partial f_a}{\partial s_a} + \frac{\partial f_a}{\partial s_g} \cdot \frac{\dfrac{\partial s_g}{\partial x}}{\dfrac{\partial s_a}{\partial x}} \right). \tag{18}$$

s-au calculat vitezele instantanee de deplasare pentru saturaţiile în gaze cu relaţia (17) şi pentru saturaţiile în apă relaţia (18) existente în diferite secţiuni de coordonată x. Folosind metodologia indicată, s-au trasat caracteristicile atît pentru apă, cît şi pentru gaze. Apariţia şocului pentru gaze s-a produs după un interval de timp $\Delta t_1 = 0{,}024$ ani de la începutul injecţiei, mai mic decît cel necesar apariţiei şocului pentru apă. S-au construit deci profilele de saturaţie la $t_1 = t_0 + \Delta t_1 = 0{,}024$ ani (profilul $s_g(x;\ t_1)$, respectiv $s_a(x;\ t_1)$ din figura 4), unde s-a luat $t_0 = 0$.

Plecînd de la aceste noi profile de saturaţie, s-au calculat cu relaţiile (17) şi (18) vitezele instantanee corespunzătoare saturaţiilor existente la acest timp în diferite secţiuni de coordonată x. Viteza frontului de gaze s-a calculat cu relaţia (14). Reprezentînd caracteristicile în coordonate $(x;\ t)$, s-a găsit că pentru apă apariţia şocului este la un interval de timp $\Delta t_2 = 0{,}020$ ani. S-au construit deci noile profile de saturaţie la $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 0{,}044$ ani (profilele $s_g(x;\ t_2)$ şi $s_a(x;\ t_2)$ din figura 4).

Calculînd vitezele pentru aceste noi profile de saturaţie, s-a găsit că viteza frontului gaze-ţiţei a fost mai mare decît viteza frontului apă-ţiţei, ceea ce a făcut ca după $\Delta t_3 = 0{,}018$ ani frontul gaze-ţiţei să ajungă din urmă frontul ţiţei-apă. S-au construit deci profilele de saturaţie $s_g(x;\ t_3)$ şi $s_a(x;\ t_3)$, unde $t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 0{,}062$ ani, timp la care frontul gaze-ţiţei a ajuns din urmă frontul ţiţei-apă (fig. 4).

În continuare, frontul de dezlocuire gaze-(ţiţei + apă) se va deplasa cu o viteză dată tot de relaţia (14), dar în calculul acestei viteze se va ţine seama de noile saturaţii corespunzătoare din această situaţie (fig. 3 *b*).

Urmărind aceeaşi metodologie indicată, în continuare procesul de dezlocuire a urmat profilele de saturaţie ridicate în figura 4.

În galeria de extracţie s-au obţinut rezultatele redate în figura 5. Se observă că la timpul $t_{12} = 3{,}748$ ani a avut loc pătrunderea gazelor în galeria de extracţie. Din acest moment se obţine o scădere atît a debitului de ţiţei, cît şi a debitului de apă, urmată de o creştere corespunzătoare a debitului de gaze. Cumulativele de apă şi de ţiţei (şi deci $\Delta N/N$) au o alură liniară pînă la pătrunderea gazelor în galeria de extracţie. Făcînd raportul dintre debitul de gaze (condiţii de suprafaţă) şi cel de ţiţei, se obţine raţia gaze-ţiţei. După cum era de aşteptat, pînă la pătrunderea gazelor în galeria de extracţie, raţia gaze-ţiţei are o valoare con-

stantă şi egală cu raţia de soluţie $r_s = 65$ Nmc/mc, după care se înregistrează o creştere continuă.

Rezultatele obţinute sînt influenţate de condiţiile iniţiale, respectiv de profilele iniţiale de saturaţie de la care pornim. O alegere judicioasă a acestora permite obţinerea unor rezultate satisfăcătoare.

Metoda de lucru este destul de laborioasă. În prezent se lucrează la programarea executării ei la maşini automate de calcul ceea ce face metoda mai accesivă şi mai puţin aproximativă prin folosirea unor intervale de timp Δt foarte mici.

5. CONCLUZII

1. A fost elaborată o metodă de descriere a procesului de dezlocuire a două fluide imiscibile dintr-un mediu poros şi permeabil de către un al treilea imiscibil cu ele, cu posibilităţi de generalizare la descrierea procesului de curgere a mai multor fluide imiscibile.

2. Metoda propusă pentru aplicarea teoriei în cadrul unei prevederi este cea a caracteristicilor. Cu toate că se aproximează că vitezele instantanee rezultate sînt constante pe anumite intervale de timp, prin alegerea acestor intervale de timp destul de mici erorile pot fi neglijabile.

3. Teoria este generală şi a putut fi aplicată la descrierea procesului de dezlocuire a unui amestec ţiţei-apă, existent într-un mediu poros, de către gaze. Se mai poate aplica la descrierea procesului de dezlocuire a amestecului gaze-ţiţei de către apă (şi pînă la apariţia fronturilor de dezlocuire), precum şi la descrierea curgerii oricăror fluide imiscibile într-un mediu poros.

4. Metoda poate fi programată spre execuţie la maşini automate de calcul, ceea ce permite îmbunătăţirea substanţială a exactităţii rezultatelor.

Primită la redacţie la 23 aprilie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. D. A. Efros, *Isledovania filtraţii neodnorodnih sistem Vitesnenie dvuhkomponentnoi smesi pri maloi viazkosti odnoi iz vitesniaemih jidkostei*", Gastoptehizdat, Leningrad, 1963, p. 107.
2. J. R. Kyte, R. J. Stanclift, C. S. Stephan, L. A. Rapaport, *Mechanism of Water Flooding in the presence of Free-Gas*, Transactions AIMME, **207**, 215 (1956).
3. S. E. Buckley, M. C. Leverett, *Mechanism of Fluid Displacement in Sands*, Transactions AIMME, **146**, p. 107 (1942).
4. W. J. Sheldon, E. L. Dougherty, *The Use of Fluid-Fluid Interfaces to Predict The Behavior of Oil Recovery Processes*, Transactions AIMME, **231**, 171 (1964).
5. W. J. Sheldon, B. Zondek, T. W. Cardwell, *One Dimensional, Incompressible, Noncapillary, Two-Phase Fluid-Flow in a Porous Medium*, Transactions AIMME, **216**, 290 (1959).
6. W. T. Cardwell, *The Meaning of The Triple Value in a Noncapillary Buckley-Leverett Theory*, Transactions AIMME, **216**, 271 (1959).
7. M. R. J. Wyllie, *Relative Permeability*, în *Petroleum Production Handbook* „*Frick*", vol. II, chap. 25.

RECENZII

* * * *Proceedings of the fourth conference on Nonlinear oscillations*, Praga, 1967

Volumul conține majoritatea comunicărilor *) prezentate la a 4-a Conferință de vibrații neliniare, desfășurată la Praga între 5 și 9 septembrie 1967 **).

Conferința a trezit un viu interes în rindul specialiștilor din lumea întreagă, fapt atestat de larga participare internațională.

Articolele sînt grupate în trei secțiuni și sînt precedate de un grup de șapte referate, n care sînt tratate probleme de mare generalitate. De altfel, datorită acestui fapt, în cadrul lucrărilor conferinței materialele respective au fost prezentate în ședințe plenare.

Cele trei secțiuni grupează materialele conferinței în modul următor:

— în secția I, teoria matematică a oscilațiilor;

— în secția a II-a, aplicații în mecanică;

— în secția a III-a, aplicații în electricitate și de electronică inginerească.

Cele șapte referate care precedă diviziunile de mai sus sînt axate pe aspecte generale privind aplicarea stabilității în problemele inginerești (W. Bogusz, P. C. Parks), pe unele probleme de rezonanță (E. Mettler), pe metode privind construcția soluțiilor unor tipuri de ecuații diferențiale (Yu. A. Mitropolski) etc.

În secțiunea I sînt grupate o serie de lucrări consacrate unor metode folosite în teoria oscilațiilor neliniare pentru obținerea soluțiilor ecuațiilor diferențiale ale mișcării. În această direcție aduc contribuții D. Pehr și M. Schäfer pentru metodele iterative, G. Bayadjiev pentru cele numerice, S. Dubiel și J. Warzesien pentru cele asimtotice etc. Alte lucrări din aceeași secțiune sînt consacrate problemelor legate de existența, unicitatea și construcția soluțiilor periodice ale unor sisteme de ecuații diferențiale corespunzătoare unor sisteme oscilante. În această direcție remarcăm articolul lui O. Vejveda, consacrat soluțiilor periodice ale unor ecuații cu derivate parțiale, precum și pe cel al lui J. Havlova, în care sînt analizate soluțiile periodice ale unor ecuații de tip parabolic. Dintre problemele clasice ale teoriei vibrațiilor menționăm și unele studii de stabilitate datorate lui F. V. Atkinson, C. Dzaza ș.a.

Alături de preocupările ce se încadrează în problematica clasică a teoriei oscilațiilor există unele studii care aparțin tendințelor noi ale acestei teorii. Remarcăm în acest sens lucrările referitoare la aplicarea teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale în vibrații (B. M. Fomel, E. Kozakiewicz, W. Müller, M. Svee ș.a.), pe cele referitoare la teoria vibrațiilor aleatoare (H.

---

*) Comunicărilor neprimite la timp sau celor deja publicate le-au fost date numai rezumatele.

**) Primele trei conferințe au avut loc după cum urmează: Praga (I), Varșovia (I și Berlin (III).

Bunke şi V. G. Kolomiets) sau unele probleme privind optimizarea sistemelor oscilante (P. Brunovsky).

În secţiunile II şi III se regăsesc preocupările din secţia I în legătură cu unele modele oscilante mecanice sau din electricitate. Într-o enumerare succintă menţionăm : studii asupra oscilaţiilor barelor sau sistemelor de bare cu neliniarităţi fizice (I. Backova, I. Ballo, A. Muszynska) sau cu neliniarităţi geometrice (I. Ballo, S. Markus), studii asupra stabilităţii sistemelor oscilante plasate pe suporţi elastici (R. Bocacz), stabilitatea unor sisteme oscilante neliniare cu condiţii iniţiale arbitrare (J. Murin, A. Tondl) etc. Problemelor de rezonanţă cu multiplele lor aspecte le sînt consacrate lucrările lui V. M. Starzhinski, J. Tomas, W. Szemplinska -Stupinka. Unele probleme privind vibraţiile autovehiculelor sînt tratate de către P. von Bommel, A.D. de Peter, H. G. Stassen. O problemă de optimizare este tratată de către M. Z. Kulovski. O. Krpak şi J. Drexler studiază pe cale analogică o problemă de vibraţii aleatoare parametrice.

Ţara noastră a fost reprezentată la această conferinţă de către D. Mangeron şi G. Silaş, care au prezentat o lucrare în legătură cu vibraţiile sistemelor vibropercutante.

Remarcînd tematica bogată a conferinţei, precum şi larga reprezentare internaţională, recomandăm specialiştilor noştri atît consultarea materialului, cît şi participarea directă cu lucrări la viitoarea conferinţă.

F. Dincă

DAN COȘA

STABILITATEA ARCULUI SIMPLU REZEMAT CU TIRANT SUSPENDAT FĂRĂ MOMENTE INIȚIALE

Lucrarea conține expunerea unui procedeu pentru determinarea încărcării critice la un arc simplu rezemat cu tirant suspendat fără momente inițiale. Rezolvarea se bazează pe aplicarea la probleme în discuție a metodei micilor deplasări.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1153—1176
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

V. TOMA, ȘT. SĂVULESCU

CERCETĂRI TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE ASUPRA UNIFORMIZĂRII REPARTIȚIEI DE VITEZE ÎN SECȚIUNEA DE CATALIZĂ A MACHETELOR UNUI REACTOR CHIMIC

Autorii prezintă distribuții de viteze obținute în secțiunea unui reactor chimic axial-simetric pentru diverse forme ale distribuitoarelor de alimentare. Se expun de asemenea considerații teoretice asupra proiectării unui distribuitor care să asigure o distribuție uniformă de viteze în secțiunea de cataliză a reactorului.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1195—1207
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. POSEA, I. RUIU, M. IONESCU-BUJOR

CALCULUL SEISMIC AL CADRELOR PLANE

Se prezintă un algoritm complet pentru determinarea sarcinilor statice, echivalente unei acțiuni seismice de o anumită intensitate și a eforturilor corespunzătoare în orice cadru plan multietajat. Pe baza acestui algoritm s-a elaborat un program pentru un calculator numeric, care a fost aplicat în proiectarea construcțiilor cu rezultate bune.

St. cerc. mec. apl,. tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1177—1194
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA

DEZLOCUIREA NECAPILARĂ A FLUIDELOR ÎN MEDII POROASE OMOGENE

Se aplică în studiul dezlocuirii plane, negravitaționale și necapilare a fluidelor în medii poroase omogene metoda funcțiilor analitice generalizate. Prin transformarea condițiilor de egalitate a vitezelor și a debitelor pe linia de salt a saturației, se ajunge la o problemă de limită de tip Riemann cu valori conjugate. Rezolvarea ei se reduce la integrarea unei ecuații singulare cu nucleu de tip Cauchy.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1209—1222
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

TEODOR OROVEANU

CÎTEVA PROBLEME DE SCURGERE A FLUIDELOR INCOMPRESIBILE PRIN MEDII POROASE NEOMOGENE

Se studiază posibilitatea găsirii unor soluţii aproximative pentru scurgerea lichidelor incompresibile prin medii poroase neomogene cu permeabilitatea depinzînd de o singură variabilă spaţială.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1223—1234
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

CONSTANTIN GH. POPA

GENERALIZAREA TEORIEI LUI BUCKLEY ŞI LEVERETT ASUPRA DEZLOCUIRII AMESTECULUI A DOUĂ FLUIDE IMISCIBILE OARECARE DE CĂTRE UN AL TREILEA IMISCIBIL CU ELE

Lucrarea are ca scop prezentarea unei metode de rezolvare a problemei dezlocuirii a mai multor fluide imiscibile existente într-un mediu poros şi permeabil de către un alt fluid imiscibil cu ele. Metoda de rezolvare este cea a caracteristicilor, metodă care permite eliminarea apariţiei valorilor multiple de saturaţie în acelaşi fluid într-o secţiune a mediului poros. Fiind destul de laborioasă, metoda poate deveni mai accesibilă, iar rezultatele ei îmbunătăţite prin programarea executării acesteia la maşini automate de calcul. În lucrare se prezintă un exemplu de calcul prin descrierea unui proces de dezlocuire a amestecului apă-ţiţei, existent într-un mediu poros şi permeabil, de către gaze.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1235—1246
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

GORUN MANOLESCU

STUDIUL CONCENTRĂRII EFORTURILOR UNITARE ÎN JURUL GĂURILOR DE SONDE. II

În lucrare se determină relaţia de calcul a greutăţii specifice minime a noroiului de foraj cu care trebuie traversat un masiv de roci omogene şi izotrope în aşa fel încît să fie asigurată stabilitatea pereţilor găurii.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 997—1014
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

GH. SILAŞ, L. BRÎNDEU, A. HEGEDÜS

STUDIUL MIŞCĂRILOR VIBROPERCUTANTE ALE UNEI MASE LIBERE CU EXCITAŢIE PERIODICĂ

Se consideră un sistem vibropercutant format din masa m care se mişcă liber pe verticală şi se ciocneşte de un reper avînd mişcare periodică nearmonică. Se determină condiţiile în care există mişcări periodice (9). Se face apoi studiul stabilităţii mişcărilor periodice prin metoda perturbaţiilor (13). Stabilitatea se realizează dacă $R< 1$ şi valorile lui t_i din ecuaţia (9) satisfac inegalităţile (14). În continuare se consideră cazul cînd reperul mobil este acţionat de un mecanism bielă-manivelă avînd raportul $\frac{r}{b}$ mic. În acest caz se construiesc şi diagramele de stabilitate ale mişcărilor periodice.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1027—1035
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

A. HEGEDÜS

STUDIUL MIŞCĂRILOR PERIODICE ALE UNUI VIBROPERCUTOR ELECTROMAGNETIC

Se consideră sistemul vibropercutor electromecanic din figura 1, electromagnetul fiind alimentat cu tensiunea alternativă $U=U_0 \sin \omega t$ peste un redresor ideal. Armătura mobilă de masă m vibrează şi se ciocneşte de limitatorul fix A. Cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange se deduc ecuaţiile diferenţiale care descriu comportarea sistemului. Prin eliminarea curentului electric i se obţine ecuaţia diferenţială a mişcării armăturii (6), care se pune sub formă adimensională (8). Se determină legea mişcării între două ciocniri (9) şi condiţiile de existenţă a mişcărilor periodice (11) prin metoda transformărilor punctuale. Se studiază de asemenea stabilitatea mişcărilor periodice (17) şi se determină domeniile de stabilitate şi de instabilitate.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1015—1025
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

V. HANDRA-LUCA

SINTEZA MECANISMELOR PLANE CU $v>1$ PE BAZA FUNCŢIILOR DE TRANSMITERE

Se face sinteza geometrică a mecanismelor plane cu un număr de cicluri independente mai mare ca unu pe baza funcţiilor de transmitere de ordinul zero. Se trag concluzii privitor la alegerea unor scheme structurale de mecanisme optime.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1037—1052
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

CHR. PELECUDI

CUPLE MULTIAXE ÎN MECANISMELE MONO- ŞI BICONTURE TRIDIMENSIONALE

Lucrarea cuprinde o sistematizare a cuplelor cinematice simple sau compuse în raport cu posibilităţile lor de realizare şi de întrebuinţare, precum şi a mecanismelor de diferite familii în raport cu clasele contururilor şi cu varietatea cuplelor multiaxe. Ea este însoţită de calculul analitic pe baze vectoriale ale funcţiilor de poziţii în cazul general.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1053—1091
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

ŞTEFAN S. MIHĂIESCU

CONSIDERAŢII DE MECANICĂ ASUPRA SAPELOR CU CONURI PENTRU FORAJ. II

Forţele de frecare cu alunecare care se dezvoltă pe linia de contact a unui con oarecare al sapei cu terenul în timpul forajului au contribuţie importantă în dislocarea acestuia prin abraziune.
Considerînd practic ca sistem mecanic conservativ un con de rotaţie care execută o mişcare de precesie regulată, suprafaţa sa exterioară tîrîndu-se cu frecare pe o suprafaţă adecvată, se scrie minimul lucrului mecanic total executat de forţele de frecare.
Se stabileşte că acest lucru mecanic depinde de elementele geometrice ale conului, de viteza de rotaţie a sapei din care face parte conul, de apăsarea acestuia pe talpa găurii şi de momentele de frecare care se dezvoltă în lagărul său.
Rezultatele obţinute teoretic sînt verificate de uzura conurilor sapelor care au lucrat şi sînt în întrebuinţare curentă în proiectarea sapelor cu conuri pentru foraj şi în concordanţă cu parametrii de foraj.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1105—1124
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

I. SZÉKELY, T. MUREŞAN

CLASIFICAREA MECANISMELOR LOGICE CU ELEMENTE MECANICE

În lucrare se face o încercare de sistematizare a mecanismelor logice cu elemente mecanice în funcţie de mai multe criterii. Se dau cîteva scheme cinematice de mecanisme logice utilizate în diferite domenii.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1093—1103
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

ŞTEFAN BĂLAN, VALERIU PETCU

UN CONCEPT NOU DE EXPRIMARE A GRADULUI DE SIGURANŢĂ ÎN CALCULUL STRUCTURILOR ELASTO-PLASTICE. II

Se prezintă o teorie nouă a calculului structurilor continue de beton armat în domeniul plastic, bazată pe conceptul densităţii mecanice. O atenţie specială este acordată perspectivelor pe care le are din punct de vedere practic folosirea conceptului densităţii mecanice în procesul de proiectare a structurilor în domeniul plastic, limitărilor rezultate din condiţiile de cedare şi de exploatare ale structurilor, precum şi problemei optimizării soluţiilor stabilite pe baza acestui concept.

St. cerc. mec. apl,. tom. 29, nr. 5, 1970, p. 1125—1152
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

• Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

• Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

• Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

• Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

• Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

• Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

• Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

• Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

• Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).

• Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

• Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

• Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

• Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

A. MILLION şi C. MILLION, **Hidrogenul în oţeluri şi în îmbinări sudate**, 1968, 354 p., 27 lei.

GH. BUZDUGAN, **Dinamica fundaţiilor de maşini**, 1968, 368 p., 24 lei.

PAUL DIMO, **Analiza nodală a sistemelor electroenergetice**, 1968, 628 p., 44 lei.

I. S. GHEORGHIU şi AL. FRANSUA, **Tratat de maşini electrice**, vol. I, Maşini de curent continuu, 1968, 412 p., 27 lei.

R. C. BOGDAN şi DAN LARIONESCU, **Analiza armonică complexă şi mecanoelectrică a mecanismelor plane**, 1968, 432 p., 29 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, **Aplicaţii industriale ale lagărelor cu aer**, 1968 282 p., 16,50 lei.

MIRCEA SOARE, **Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri**, 1968, 622 p., 33 lei.

L. LIBRESCU, **Statica şi dinamica structurilor elastice anizotrope şi eterogene**, 1969, 320 p., 18,50 lei.

LUCIAN Z. DUMITRESCU, **Cercetări în tuburile de şoc**, 1969, 306 p., 21 lei.

F. DINCĂ şi C TEODOSIU, **Vibraţii neliniare şi aleatoare**, 1969, 462 p., 24 lei.

V. VISARION şi C. STĂNESCU, **Calculul stărilor de tensiune în teoria plăcilor curbe**, 1969, 714 p., 32 lei.

C. ŞORA, **Introducere în studiul generatorului Hall**, 1969, 310 p., 18,50 lei.

G. V. VASILIEV, **Torsiunea structurilor elastice cu pereţi subţiri**, 1970, 240 p., 11,50 lei.

AL. MARINESCU, **Metode, aparate şi instalaţii de măsură în aeromecanică**, 1970, 356 p., 24,50 lei.

I. S. GHEORGHIU, ALEXANDRU FRANSUA, **Tratat de maşini electrice**, vol. II, **Transformatoare**, 1970, 462 p,. 30 lei.

ALEXANDRU VAICUM, **Fundaţii încastrate**, 1970, 302 p., 21,50 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ŞI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
- SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
- SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
- SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 5, P. 993—1248, BUCUREŞTI, 1970

I.P. „Informaţia" — c. 5591

43832

Lei 40. —

F 2557
R
F 2557
Bo

6

TOMUL 29
1970

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

1970 MAR 19

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacţie

Acad. **E. CARAFOLI**, *redactor responsabil*,
Acad. **D. DUMITRESCU**, *redactor responsabil adjunct*,
Prof. **I. ANTON**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ŞTEFAN BĂLAN**,
Prof. **CR. MATEESCU**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU C. BOGDAN**,
Conf. **DAN PAVELESCU**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacţie*.

În ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Intreprinderea de comerţ exterior LIBRI, Căsuţa poştală 134 — 135 (Calea Victoriei 126), Bucureşti, România.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă, se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei.

EA

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacţia: Bucureşti,

Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ

Bucureşti, 23 — 27 iunie, 1969

Preliminary announcement

PROBLEMS OF PLASTICITY
INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF PLASTICITY
Warsaw, September 1972

AIM: Analysis of concepts of plasticity on the basis of recent developments in continuum mechanics, thermodynamics and adjoining branches of physics.

INTERNATIONAL SCIENTIFIC COMMITTEE : J. M. Alexander, D. C. Drucker, L. Finzi, A. E. Green, P. G. Hodge, H. C. Hopkins, A. A. Ilyushin, W. T. Koiter, J. Mandel, P. M. Naghdi, W. Nowacki, F. K. G. Odqvist, W. Olszak, E. T. Onat, W. Prager, Yu. N. Rabotnov, L. I. Siedov, V. V. Sokolovsky, T. Y. Thomas, C. T. Truesdell, H. Ziegler.

SCOPE : Theoretical and experimental discussion of constitutive equations of plasticity and their application to the solution of technologically important boundary value problems. Specifically the following topics will be studied

a. Physical foundations of plasticity (e.g. sub-microscopic aspects of plastic deformation)

b. Thermodynamical foundations of plasticity and viscoplasticity

c. Theories of constitutive equations of plasticity (e.g. axiomatics, mathematical concepts, choice of variables, etc.)

d. Experimental basis of theories (verification of new concepts, plasticity at high temperature and high strain rates, super-plasticity, etc.)

e. Methods of solution and solutions of technologically important problems, including novel computer techniques.

PAPERS : Selection of papers will be carried out with the assistance of the Symposium International Scientific Committee. Decisions regarding inclusion in the program will be made on the basis of the full text of the paper. Main contributions will be published in book form, the book will be available before the Symposium opening.

INFORMATION : Summaries of intended papers will be weloomed until November 30 1970. Final texts not exceeding 20 typewritten pages should be submitted by the end of August 1971. Further information will be forwarded to all persons interested by means of the Symposium Bulletins.

ADDRESS for correspondance and inquiries : Professor A. SAWCZUK, Polish Academy of Sciences, Świętokrzyska 21, WARSAW 1, Poland.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 29 nr. 6 1970

SUMAR

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ APLICATĂ
Bucureşti, 23—27 iunie 1969

TEORIA VIBRAŢIILOR

Pag.

GH. SILAŞ, A. HEGEDÜS, Contribuţii la studiul mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate 1253

TEORIA PLĂCILOR ŞI STRUCTURILOR CURBE

GR. STĂNESCU, V. VISARION, Calculul plăcilor curbe cilindrice circulare nesubţiri ... 1271

TEORIA MECANISMELOR ŞI DINAMICA MAŞINILOR

CHR. PELECUDI, Contribuţii la studiul matriceal al mecanismelor spaţiale 1291
V. HANDRA-LUCA, Sinteza mecanismului pentalater pe baza funcţiilor de transmitere 1315
CHR. PELECUDI, ANCA MATHEESCU, Matricele de transmisie ale multipolilor cinematici formaţi din diade 1327
O. RĂDULESCU, Studiu asupra stabilităţii regimurilor de mişcare a maşinilor..... 1357

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

AL. GHEORGHIU, C.PACOSTE, M.IORDĂNESCU, Privire de sinteză asupra căilor eficiente de rezolvare, prin etape succesive, a structurilor în domeniul elasto-plastic 1369
N.D. POPESCU, Folosirea modelelor cromoplastice la studiul formării presiunii miniere 1395

REZISTENŢA ŞI ÎNCĂRCAREA MATERIALELOR

E. BUGAJEWSKI, Asupra calculului cîrligelor de tracţiune în cazul general al încărcării asimetrice 1403

St. cerc. mec. apl., Tom 29, nr. 6, p. 1249—1452, 1970.

HIDRAULICĂ, MAŞINI HIDRAULICE, MEDII POROASE

T. OROVEANU, Influenţa variaţiei parametrilor termici asupra răcirii găurii de sondă prin circulaţie de lichid 1417

TRIBOLOGIE

RODICA DELCESCU, Model matematic pentru studiul modificării presiunii radiale a segmentului prin uzură de contact 1435

INDEX ALFABETIC 1449

CONTRIBUȚII LA STUDIUL MIȘCĂRILOR PERIODICE ALE UNUI SISTEM VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE LIBERTATE

de GH. SILAȘ, A. HEGEDÜS
Institutul politehnic, Timișoara

Studiul unor mașini și mecanisme în care apar organe ce execută mișcare vibratorie însoțită de ciocniri, cum ar fi unele ciocane mecanice, mașini de îndesare, vibrotransportoare, etc., conduce la un model mecanic format dintr-un corp de masă m și un limitator rigid fix (fig. 1) sau mobil (fig. 14).
În lucrare se studiază mișcările vibropercutante ale sistemului din figura 1 cînd asupra masei m acționează o forță periodică oarecare și a sistemului din figura 14 cînd limitatorul execută mișcare periodică. Se consideră ciocnirea instantanee și caracterizată prin coeficientul de restituire R. Se mai consideră că asupra masei m acționează în mișcarea ei liberă dintre ciocniri o forță de amortizare de natură viscoasă.
Se determină condițiile în care apar mișcări periodice avînd perioada egală cu un multiplu al forței de excitație și parametrii acestor mișcări. Se studiază apoi stabilitatea mișcărilor periodice. Prin particularizări se regăsesc unele rezultate cunoscute. Pentru cazul excitației armonice se determină efectiv domeniile mișcărilor periodice stabile (fig. 4, 5, 6, 15).
Unele din rezultatele teoretice au fost verficate experimental.

1. INTRODUCERE

Modelul mecanic al unui sistem vibropercutant, format dintr-un corp de masă m și un limitator rigid fix A, este arătat în figura 1. Masa m sub acțiunea unei forțe de excitație $F(t)$ efectuează mișcare vibratorie ciocnindu-se periodic de limitator. La asemenea model mecanic conduce studiul unor mașini de îndesare și a unor ciocane mecanice neprevăzute cu arcuri.

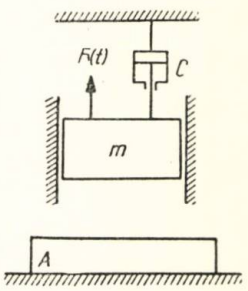


Fig. 1

Pentru cazul în care forța $F(t)$ este armonică și nu se disipează energie în sistem decît la ciocniri, studiul modelului din figura 1 a fost efectuat în lucrarea [2].

În prezenta lucrare ne propunem să studiem cazul în care $F(t)$ este o forță periodică oarecare, nearmonică, cum apare în multe aplicații, și masa m întîmpină în mișcarea sa liberă o forță rezi-

stentă de natură vîscoasă caracterizată prin coeficientul c. Ciocnirea dintre masă și limitator se va presupune instantanee și caracteristică prin coeficientul de restituire R.

2. DETERMINAREA LEGII MIȘCĂRII ÎNTRE DOUĂ CIOCNIRI SUCCESIVE

Coordonata x a masei m o vom măsura de la limitator, sensul pozitiv fiind în sus. Forța periodică $F(t)$ o scriem sub forma

$$F(t) = F_0 \cdot f(\omega t), \tag{1}$$

unde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T fiind perioada forței, F_0 este cea mai mare valoare a forței într-o perioadă, iar $f(\omega t)$ — o mărime adimensională.

Ecuația diferențială a mișcării masei m între două ciocniri consecutive este

$$m\ddot{X} + c\dot{X} = -mg + F_0 \cdot f(\omega t). \tag{2}$$

Introducem următoarele mărimi adimensionale :

$$\tau = \omega t; \quad z = \frac{m\omega^2}{F_0} X; \quad p = \frac{mg}{F_0}; \quad \lambda = \frac{c}{m\omega}. \tag{3}$$

Ecuația diferențială (2) devine

$$z'' + \lambda z' = -p + f(\tau). \tag{4}$$

Soluția acestei ecuații diferențiale se compune din soluția generală a ecuației omogene

$$z_1 = C_1 + C_2 e^{-\lambda\tau}, \tag{5}$$

în care C_1 și C_2 sînt constante de integrare și o soluție particulară z_p a ecuației neomogene pe care o determinăm prin metoda variației constantelor de integrare

$$z_p = -\frac{p}{\lambda}\tau + \frac{1}{\lambda}\int_{\tau_i}^{\tau} f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\int_{\tau_i}^{\tau} e^{\lambda\tau} f(\tau)\,d\tau, \tag{6}$$

unde τ_i reprezintă momentul în care are loc ciocnirea de ordinul i. Astfel legea mișcării între ciocnirile de ordinul i și $i+1$ este

$$z = C_1 + C_2 e^{-\lambda\tau} - \frac{p}{\lambda}\tau + \frac{1}{\lambda}\int_{\tau_i}^{\tau} f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\int_{\tau_i}^{\tau} e^{\lambda\tau} f(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Notăm cu $-u_i$ ($u_i>0$) viteza adimensională a masei percutante m la începutul ciocnirii de ordinul i. După ciocnire viteza ei va fi Ru_i. Astfel condiţiile iniţiale pentru determinarea constantelor de integrare C_1 şi C_2 sînt

$$\tau = \tau_i, \quad z = 0, \quad z' = Ru_i. \tag{8}$$

Pe baza condiţiilor (8) se determină constantele de integrare, iar legile mişcării şi vitezei devin:

$$z = \left(\frac{p}{\lambda} + Ru_i\right)\frac{1}{\lambda} - \left(\frac{p}{\lambda} + Ru_i\right)\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(\tau-\tau_i)} - \frac{p}{\lambda}(\tau - \tau_i) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\int_{\tau_i}^{\tau} f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\int_{\tau_i}^{\tau} e^{\lambda\tau} f(\tau)\,d\tau, \tag{9}$$

$$z' = \left(\frac{p}{\lambda} + Ru_i\right)e^{-\lambda(\tau-\tau_i)} - \frac{p}{\lambda} + e^{-\lambda\tau}\int_{\tau_i}^{\tau} e^{\lambda\tau} f(\tau)\,d\tau.$$

Fie τ_{i+1} valoarea lui τ la începutul ciocnirii de ordinul $i+1$ şi $-u_{i+1}$ ($u_{i+1}>0$) viteza în acest moment. Cum ciocnirea se face în poziţia $z=0$, din (9) obţinem ecuaţiile de trecere de la ciocnirea de ordinul i la ciocnirea de ordinul $i+1$:

$$\left(\frac{p}{\lambda} + Ru_i\right)\frac{1}{\lambda} - \left(\frac{p}{\lambda} + Ru_i\right)\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(\tau_{i+1}-\tau_i)} - \frac{p}{\lambda}(\tau_{i+1} - \tau_i) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau_{i+1}}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{\lambda\tau} f(\tau)\,dt = 0, \tag{10}$$

$$u_{i+1} + \left(\frac{p}{\lambda} + Ru_i\right)e^{-\lambda(\tau_{i+1}-\tau_i)} - \frac{p}{\lambda} + e^{-\lambda\tau_{i+1}}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{\lambda\tau} f(\tau)\,dt = 0.$$

3. DETERMINAREA MIŞCĂRILOR PERIODICE

Dacă se urmăreşte mişcarea în planul fazelor (z, u) (fig. 2), ciocnirii de ordinul i îi corespunde un punct M_i situat pe axa Ou, iar ciocnirii de ordinul $i+1$ punctul M_{i+1} situat pe aceeaşi axă. Transformarea punctelor M_i în M_{i+1} este dată de ecuaţiile (10). Cu ajutorul lor putem studia mişcări tranzitorii şi periodice. Pentru ca mişcarea masei m să fie periodică trebuie ca punctele M_i şi M_{i+1} să se confunde, adică M_i să se transforme în el însuşi constitutind astfel punctul fix al transformării. Pentru aceasta va trebui să avem

$$u_{i+1} = u_i \quad \text{şi} \quad \tau_{i+1} = \tau_i + 2\pi n. \tag{8'}$$

Ultima condiţie înseamnă că perioada mişcării masei percutante trebuie să fie un multiplu al perioadei 2π a forţei perturbatoare. Înlocuind condiţiile de mai sus în ecuaţiile (10) şi rezolvînd sistemul de ecuaţii astfel obţinut, rezultă

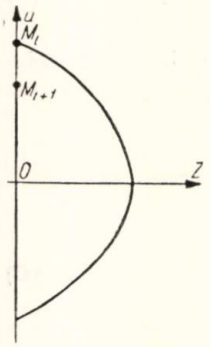


Fig. 2.

$$e^{-\lambda\tau_i}\int_{\tau_i}^{\tau_i+2\pi n} e^{\lambda\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{p}{\lambda}(e^{2\pi n\lambda}-1) -$$

$$-\frac{e^{2\pi n\lambda}+R}{1+R}\left[2\pi np - \int_0^{2\pi n} f(\tau)\,d\tau\right] = 0, \qquad (11)$$

$$u_i = \frac{1}{1+R}\left[2\pi np - \int_0^{2\pi n} f(\tau)\,d\tau\right].$$

Ecuaţiile (11) determină momentele τ_i şi viteza de ciocnire u_i corespunzătoare mişcării periodice. Această mişcare se realizează numai dacă prima ecuaţie admite rădăcini reale în τ_i şi dacă din a doua rezultă pentru u_i valoare pozitivă. Se constată că valoarea vitezei u_i nu depinde de amortizare şi dacă valoarea medie a forţei $f(\tau)$ este nulă, ea este o constantă independentă de forma funcţiei $f(\tau)$.

4. STUDIUL STABILITĂŢII MIŞCĂRILOR PERIODICE

În continuare vom studia stabilitatea mişcărilor periodice determinate anterior. Scriind ecuaţiile (10) sub forma

$$\varphi_j(\tau_{i+1},\ \tau_i,\ u_{i+1}) = 0, \qquad j = 1, 2, \qquad (12)$$

ecuaţia caracteristică în β este [10]

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_{i+1}}\beta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_i} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_{i+1}}\beta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_i} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_{i+1}}\beta + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_i} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_{i+1}}\beta + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_i} \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Menţionăm că toate derivatele se calculează pentru valorile parametrilor corespunzătoare punctului fix. Pentru ca punctul fix să fie stabil, adică mişcarea periodică să fie stabilă, este necesar ca rădăcinile ecuaţiei caracteristice să fie în modul subunitare.

După efectuarea calculelor ecuaţia (13) devine

$$\beta^2 + \left[R(1+e^{-2\pi n\lambda}) - \frac{p - f(\tau_i)}{\lambda u_i}(1-e^{-2\pi n\lambda})(1+R)\right]\beta + R^2 e^{-2\pi n\lambda} = 0. \qquad (14)$$

Această ecuație are rădăcini în modul subunitare dacă sînt îndeplinite condițiile lui Schur:

$$R^2 e^{-2\pi n\lambda} < 1,$$

$$-1 < \frac{R(1 + e^{-2\pi n\tau}) - \frac{p - f(\tau_i)}{\lambda u_i}(1 - e^{-2\pi n\lambda})(1 + R)}{1 + R^2 e^{-2\pi n\lambda}} < 1$$

sau

$$R < e^{\pi n\lambda},$$

$$p - \frac{\lambda u_i(1 + Re^{-2\pi n\lambda})}{1 - e^{-2\pi n\lambda}} < f(\tau_i) < p + \frac{\lambda u_i(1 - R)(1 - Re^{-2\pi n\lambda})}{(1 + R)(1 - R^{-2\pi n\lambda})}. \quad (15)$$

Dacă $\lambda \neq 0$ prima condiție este verificată chiar și în cazul ciocnirii perfect elastice ($R = 1$). Urmează să se cerceteze condiția a doua. Acest studiu îl vom face pentru cazul forței de excitare armonică.

5. CAZUL EXCITAȚIEI ARMONICE

Dacă $f(\tau) = \cos \tau$, legile mișcării și vitezei (9) vor fi

$$z = \left(\frac{p}{\lambda} + Ru_i\right)\frac{1}{\lambda}[1 - e^{-\lambda(\tau-\tau_i)}] - \frac{p}{\lambda}(\tau - \tau_i) + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\sin\tau -$$

$$- \frac{1}{1 + \lambda^2}\cos\tau + \frac{1}{\lambda(1 + \lambda^2)}(\sin\tau_i + \lambda\cos\tau_i)\, e^{-\lambda(\tau-\tau_i)} - \frac{1}{\lambda}\sin\tau_i,$$

$$z' = \left(\frac{p}{\lambda} + Ru_i\right)e^{-\lambda(\tau-\tau_i)} - \frac{p}{\lambda} + \frac{1}{1 + \lambda^2}(\sin\tau + \lambda\cos\tau) - \quad (9')$$

$$- \frac{1}{1 + \lambda^2}(\sin\tau_i + \lambda\cos\tau_i)\, e^{-\lambda(\tau-\tau_i)},$$

iar ecuațiile (11) devin:

$$\sin\tau_i + \lambda\cos\tau_i = (1 + \lambda^2)\left[\frac{p}{\lambda} - \frac{2\pi np}{1 + R}\cdot\frac{1 + Re^{-2\pi n\lambda}}{1 - e^{-2\pi n\lambda}}\right], \quad (11')$$

$$u_i = \frac{2\pi np}{1 + R}.$$

În acest caz valoarea vitezei în momentul ciocnirii în mișcarea periodică nu depinde de forma funcției $F(t)$, fiind egală cu cea găsită în lucrarea [2].

Condițiile de stabilitate (15) pentru cazul excitării armonice devin :

$$R < e^{\pi n \lambda}$$

$$p\left(1 - \frac{2\pi n \lambda}{1+R} \frac{1 + Re^{-2\pi n\lambda}}{1 - e^{-2\pi n\lambda}}\right) < \cos \tau_i < \tag{15'}$$

$$< p\left[1 + 2\pi n \lambda \frac{1-R}{(1+R)^2} \frac{1 - Re^{-2\pi n\lambda}}{1 - e^{-2\pi n\lambda}}\right].$$

De aici putem regăsi și cazul particular studiat în [2], cînd lipsește amortizarea. Calculînd limitele expresiilor (11′) și (15′) cînd λ tinde către zero, rezultă :

$$\sin \tau_i = -\pi n p \frac{1-R}{1+R}, \quad u_i = \frac{2\pi n p}{1+R}, \tag{11''}$$

$$0 < \cos \tau_i < 2p \frac{1+R^2}{(1+R)^2}. \tag{15''}$$

Din (11″) și (15″) se obține

$$\frac{(1+R)^2}{\sqrt{4(1+R^2)^2 + \pi^2 n^2 (1-R^2)^2}} < p \leqslant \frac{1}{\pi n} \frac{1+R}{1-R}, \tag{16}$$

rezultat identic cu cel obținut în [2].

Pe baza ecuațiilor (11′) și (15′) se determină domeniile mișcărilor periodice stabile. Ecuația (11′) determină în planul (τ_i, p) o curbă corespunzătoare mișcărilor periodice. Inegalitățile (15′) determină, la limită luînd egalități în loc de inegalități, alte două curbe care intersectează prima și astfel determină limitele între care poate să varieze parametrul p, parametrii n, λ, R avînd anumite valori date. Curbele acestea fiind periodice, este suficient să se considere numai porțiuni ale lor corespunzătoare unei perioade. În figura 3 ele sînt reprezentate pentru $n = 1$, $\lambda = 0{,}4$, $R = 0{,}6$. Zonele în care nu pot să apară mișcări stabile sînt hașurate. Se vede din figură că în acest caz pentru a avea mișcări periodice stabile parametrul p poate lua valori între 0,31 și 0,47.

Analog se pot determina intervalele în care poate să ia valori parametrul p pentru alte valori ale coeficientului de restituire R, iar apoi se pot determina domeniile de stabilitate în planul (p, R). Calculele au fost efectuate cu calculatorul electronic MECIPT-1.

În figura 4 sînt reprezentate domeniile de stabilitate pentru $n = 1$ și $\lambda = 0$; 0,1; 0,4; 0,8, în figura 5 pentru $n = 2$, $\lambda = 0$; 0,1; 0,2; 0,4; 0,8 și în figura 6 pentru $n = 3$, $\lambda = 0$; 0,1; 0,2; 0,4; 0,8. Domeniile de stabilitate obținute pentru $\lambda = 0$ sînt identice cu cele din [2]. Din diagramele obținute se vede că valoarea coeficientului de amortizare λ influențează esențial domeniile de stabilitate și anume cu creșterea lui λ limitele între care poate să varieze valoarea parametrului p pentru un R dat, se deplasează spre valori mai mici. Acest lucru se datorește faptului că o dată cu creșterea lui λ crește și disiparea de energie în sistem. O altă deosebire față de cazul ideal $\lambda = 0$, este că în cazul $\lambda \neq 0$ și pentru $R = 1$ există mișcări periodice stabile pentru anumite valori ale lui p.

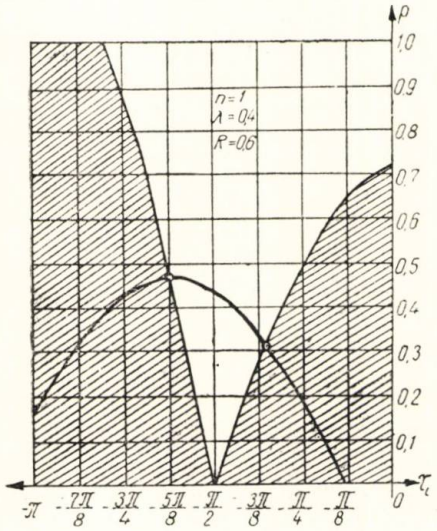


Fig. 3.

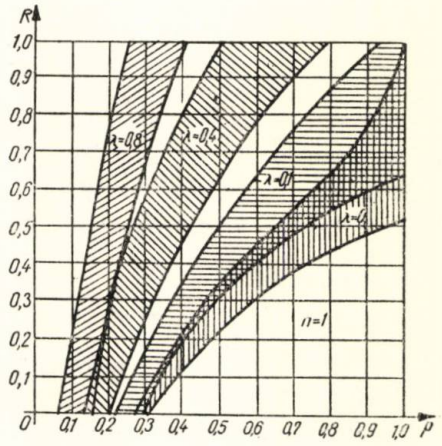


Fig. 4.

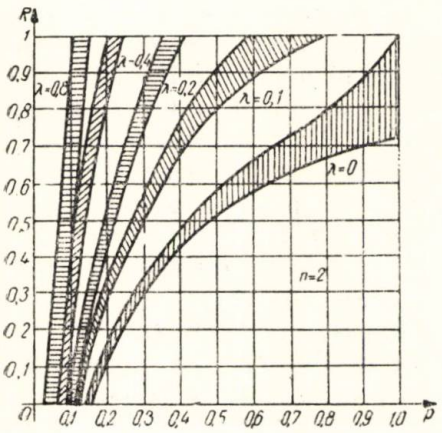


Fig. 5.

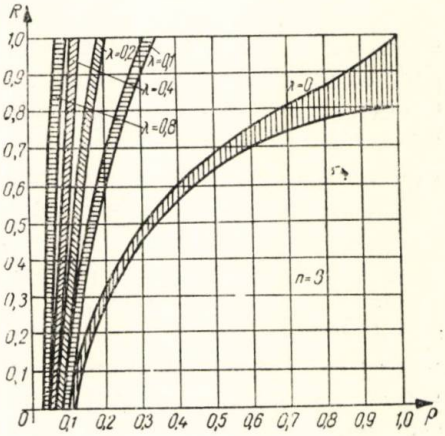


Fig. 6.

În figurile 7, 8 și 9 s-au reprezentat diagramele mișcării între două ciocniri calculate pe baza ecuațiilor (9′) și (11′) pentru $n = 1, 2, 3$ parametrii λ, R și p fiind aleși în așa fel încît mișcarea periodică să fie stabilă.

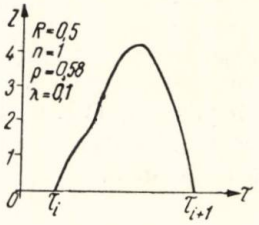


Fig. 7.

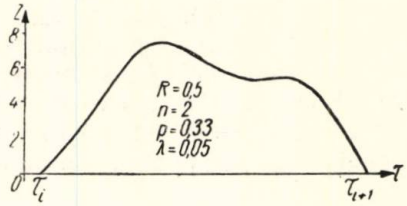


Fig. 8.

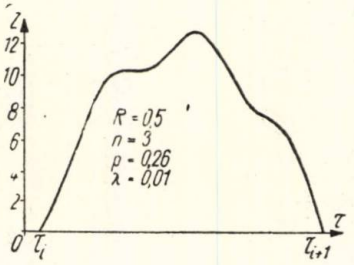


Fig. 9.

6. ÎNCERCĂRI EXPERIMENTALE

Pentru a verifica rezultatele teoretice s-au făcut încercări experimentale cu un vibrator liber de masă $m = 7,12$ kg, ghidat să se deplaseze numai pe verticală. Forța de excitație este creată inerțial, momentul excentricului fiind $m_0 r = 9,32$ kgmm, iar forța maximă de excitare $F_0 = m_0 r\omega^2$.

Antrenarea vibratorului se face de la un motor electric cu turație variabilă. Prin modificarea vitezei unghiulare de rotație se modifică amplitudinea F_0 a forței de excitație, deci parametrul p și în același timp și λ. Coeficientul de restituire determinat experimental este $R \approx 0,5$. Experiențele au arătat că numai pentru anumite valori ale vitezei unghiulare (respectiv ale parametrilor p și λ) apar mișcări periodice stabile, și anume pentru valorile cuprinse în domeniile de stabilitate. S-au pus în evidență mișcări periodice cu $n = 1$, $n = 2$ și $n = 3$. În figurile 10, 11 și 12 sînt redate vibrogramele experimentale pentru trei viteze unghiulare diferite, corespunzătoare frecvențelor 18, 24, 27 Hz, la care s-au obținut mișcări periodice stabile cu $n = 1, 2, 3$. Pentru parametrul p rezultă valori egale cu cele pentru care s-au trasat curbele teoretice din figurile 7, 8 și 9, iar pentru λ valori apropiate. Se constată asemănarea vibrogramelor experimentale cu cele teoretice. În încheiere menționăm că am studiat teoretic numai cazul cînd există o singură ciocnire într-o perioadă a mișcării. Experiența arată

Fig. 10.

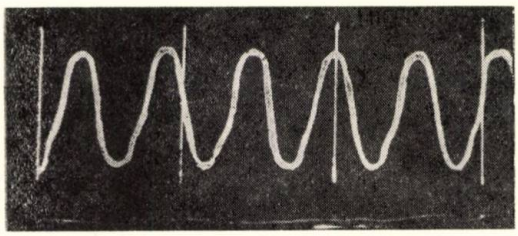


Fig. 11.

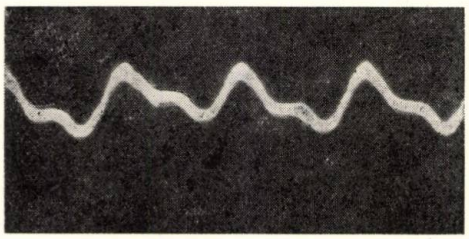


Fig. 12.

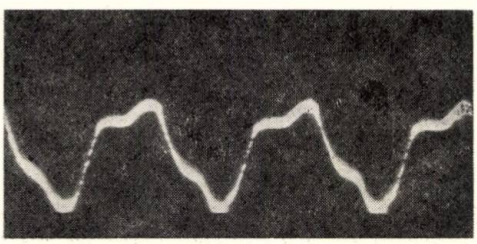
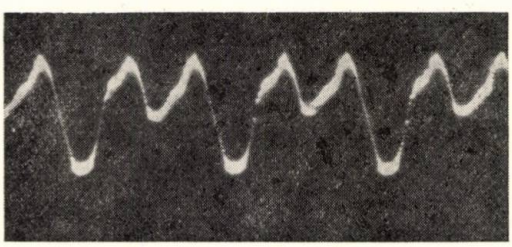


Fig. 13.



că pot să apară mișcări periodice cu mai multe ciocniri într-o perioadă. Astfel, în figura 13 este redată o vibrogramă experimentală din care se vede că o perioadă a mișcării conține două ciocniri, mișcările între cele două ciocniri nefiind identice.

7. MIȘCĂRI VIBROPERCUTANTE ÎN CAZUL UNUI LIMITATOR MOBIL

În figura 14 este reprezentat un alt model de sistem vibropercutant cu un grad de libertate format dintr-un corp liber de masă m și un limitator rigid mobil A. Limitatorul A avînd mișcare periodică produce mișcări vibropercutante ale masei m. Asemenea modele mecanice apar în cazul vibrotransportoarelor, a vibroseparatoarelor [5], [6] și amortizoarelor de vibrații prin ciocniri [9]. În ultimul caz limitatorul este suspendat elastic și se urmărește amortizarea vibrațiilor limitatorului prin vibropercuții. Probleme asemănătoare au mai fost studiate în lucrările [4], [8].

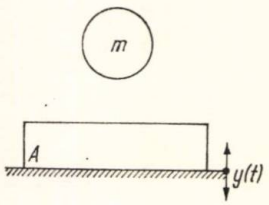


Fig. 14.

Modelul mecanic din figura 14, în ipoteza că mișcarea limitatorului este impusă și neinfluențată de ciocniri, a fost studiat în lucrările [5], [6], [7] fără să se țină seama de forțele de amortizare.

În cadrul prezentei lucrări vom studia mișcările vibropercutante ale modelului din figura 14, considerînd că limitatorul A execută o mișcare periodică oarecare după o lege $y(t)$ dată. Se admite că funcția $y(t)$ are perioada $T = \frac{2\pi}{\omega}$ și că este derivabilă de două ori și derivatele sînt tot funcții periodice cu aceeași perioadă. Ciocnirea dintre masa m și limitator este instantanee fiind caracterizată prin coeficientul de restituire R ($0 < R \leqslant 1$). Limitatorul are masă mare și mișcarea lui nu este influențată de ciocniri. Masa m se mișcă într-un mediu rezistent, forța rezistentă fiind de natură vîscoasă, caracterizată prin coeficientul c. Se va studia influența amortizării asupra mișcărilor vibropercutante periodice.

În studiul mișcării masei m va trebui că considerăm două cazuri. Dacă mișcarea limitatorului nu influențează starea mediului, forța rezistentă este proporțională cu viteza absolută de mișcare. Dacă mediul este antrenat de limitator forța rezistentă este proporțională cu viteza relativă. Vom studia separat cele două cazuri.

8. DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE STABILE CÎND FORȚA REZISTENTĂ ESTE PROPORȚIONALĂ CU VITEZA ABSOLUTĂ

Vom studia mișcarea relativă a masei m față de limitator. Notăm cu x deplasarea relativă măsurată pozitiv de la limitator în sus. Funcția $y(t)$ o punem sub forma

$$y(t) = b \cdot r(\omega t), \tag{17}$$

unde b este cea mai mare valoare a funcției $y(t)$ dintr-o perioadă, iar $r(\omega t)$ o funcție adimensională de perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ecuația diferențială a mișcării relative a masei m între două ciocniri consecutive este

$$m\ddot{x} = -mg - c(\dot{x} + \dot{y}) - m\ddot{y}$$

sau

$$m\ddot{x} + c\dot{x} = mg - cb\dot{r}(\omega t) - mb\ddot{r}(\omega t). \tag{18}$$

Introducem următoarele mărimi adimensionale

$$\tau = \omega t;\ z = \frac{x}{b};\quad \lambda = \frac{c}{m\omega};\quad p = \frac{g}{b\omega^2}, \tag{19}$$

cu care ecuația (18) devine

$$z'' + \lambda z' = -p - \lambda r'(\tau) - r''(\tau). \tag{20}$$

Ecuația diferențială (20) este de forma ecuației (4). Deoarece condițiile inițiale, precum și condițiile de periodicitate sînt identice în cele două cazuri, legea mișcării relative a masei m față de platformă, parametrii mișcărilor periodice și condițiile de stabilitate ale acestor mișcări se pot deduce din rezultatele obținute pe baza ecuației (4) dacă se ia

$$f(\tau) = -\lambda r'(\tau) - r''(\tau). \tag{21}$$

Astfel legea mișcării relative și viteza sînt:

$$z = -\frac{p}{\lambda}(\tau - \tau_i) - [r(\tau) - r(\tau_i)] + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p}{\lambda} + RU_i + r'(\tau_i)\right] \times$$

$$\times [1 - e^{-\lambda(\tau - \tau_i)}],$$

$$z' = -\frac{p}{\lambda} - r'(\tau) + \left[\frac{p}{\lambda} + Ru_i + r'(\tau_i)\right] e^{-\lambda(\tau - \tau_i)}, \tag{22}$$

iar ecuațiile de trecere de la ciocnirea de ordinul i la ciocnirea de ordinul $i + 1$ devin

$$-\frac{p}{\lambda}(\tau_{i+1} - \tau_i) - [r(\tau_{i+1}) - r(\tau_i)] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p}{\lambda} + Ru_i + r'(\tau_i)\right]\left[1 - e^{-\lambda(\tau_{i+1} - \tau_i)}\right] = 0, \tag{23}$$

$$u_{i+1} - \frac{p}{\lambda} - r'(\tau_{i+1}) + \left[\frac{p}{\lambda} + RU_i + r'(\tau_i)\, e^{-\lambda(\tau_{i+1} - \tau_i)}\right] = 0.$$

Înlocuind condițiile de periodicitate (8′) în ecuațiile (23) se obține un sistem de două ecuații cu necunoscutele τ_i și u_i

$$\begin{aligned} -\frac{p}{\lambda}\, s + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p}{\lambda} + Ru_i + r'(\tau_i)\right](1 - e^{-\lambda s}) = 0, \\ u_i - \frac{p}{\lambda} - r'(\tau_i) + \left[\frac{p}{\lambda} + RU_i + r'(\tau_i)\right] e^{-\lambda s} = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

unde s-a notat $s = 2\pi n$.

Din acest sistem rezultă

$$u_i = \frac{ps}{1 + R}, \tag{25}$$

$$r'(\tau_i) = p\left(\frac{s}{1 + R} \cdot \frac{1 + Re^{-\lambda s}}{1 - e^{-\lambda s}}\right). \tag{26}$$

Se vede din (25) că viteza de ciocnire nu depinde de forma funcției de excitație, numai de valoarea ei maximă și de perioada ei și de asemenea este independentă de amortizare. Ecuația (26) determină momentele τ_i ale ciocnirilor periodice.

Studiul stabilității mișcărilor periodice se face ca în cazul precedent. Ecuația caracteristică poate fi determinată direct din (14) ținînd seama de (21) și (26)

$$\beta^2 - \left[1 + R^2 e^{-\lambda s} + \frac{(1 + R)^2 (1 - e^{-\lambda s})}{p\lambda s} r''(\tau_i)\right]\beta + R^2 e^{-\lambda s} = 0. \tag{27}$$

Pentru ca această ecuație să admită rădăcini în modul subunitare, pe baza criteriului lui Schur [1] rezultă următoarele condiții:

$$R^2 e^{-\lambda s} < 1, \tag{28}$$

$$-\frac{2p\lambda s (1 + R^2 e^{-\lambda s})}{(1 + R)^2 (1 - e^{-\lambda s})} < r''(\tau_i) < 0. \tag{29}$$

Dacă $\lambda \neq 0$ condiția (28) este întotdeauna verificată, chiar și în cazul ciocnirii perfect elastice ($R = 1$). Va trebui să cercetăm condițiile (29). Dintre valorile parametrului τ_i determinate din ecuația (26) se vor considera numai acelea care satisfac și condițiile (29).

În continuare vom cerceta cîteva cazuri particulare.

a). Forța de rezistență a mediului este neglijabilă, deci $\lambda = 0$.

În acest caz ecuațiile (25), (26) și condițiile (28), (29) devin

$$u_i = \frac{ps}{1+R}, \tag{25'}$$

$$r'(\tau_i) = \frac{1-R}{2(1+R)} \cdot ps, \tag{26'}$$

$$R^2 < 1, \tag{28'}$$

$$-\frac{2(1+R^2)}{(1+R)^2} p < r''(\tau) < 0. \tag{29'}$$

Aceste rezultate sînt identice cu cele găsite în [6].

b). Excitație armonică este

$$r(\tau) = \cos \tau. \tag{30}$$

Ecuațiile (25), (26) și condițiile (28), (29) se scriu în acest caz :

$$u_i = \frac{ps}{1+R}, \tag{25''}$$

$$\sin \tau_i = -p\left(\frac{s}{1+R} \cdot \frac{1+R\,e^{-\lambda s}}{1-e^{-\lambda s}} - \frac{1}{\lambda}\right), \tag{26''}$$

$$R^2 e^{-\lambda s} < 1, \tag{28''}$$

$$\frac{2p\lambda s(1+R^2 e^{-\lambda s})}{(1+R)^2(1-e^{\lambda s})} > \cos \tau_i > 0. \tag{29''}$$

c). Excitație armonică (30) și forță de amortizare neglijabilă ($\lambda = 0$). Pentru acest caz se obțin rezultatele :

$$u_i = \frac{ps}{1+R}, \tag{25'''}$$

$$\sin \tau_i = -\frac{1-R}{2(1+R)} ps, \tag{26'''}$$

$$R^2 < 1, \tag{28'''}$$

$$\frac{2(1+R^2)}{(1+R)^2} p > \cos \tau_i > 0, \tag{29'''}$$

care sînt identice cu cele găsite în [5].

Relaţiile (26″) şi (29″) se pot restrînge în următoarea condiţie de existenţă şi de stabilitate a mişcărilor periodice :

$$\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{2\lambda s(1+R^2\,e^{-\lambda s})}{(1+R)^2(1-e^{-\lambda s})}\right]^2+\left[\frac{s}{1+R}\cdot\frac{1+R\,e^{-\lambda s}}{1-e^{-\lambda s}}-\frac{1}{\lambda}\right]^2}}<p\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{\frac{s}{1+R}\,\frac{1+R\,e^{-\lambda s}}{1-e^{-\lambda s}}-\frac{1}{\lambda}}\cdot \tag{31}$$

În cazul cînd forţa de amortizare este neglijabilă ($\lambda = 0$), prin trecere la limită relaţia (31) se transformă în

$$\frac{2(1+R)^2}{\sqrt{16(1+R^2)^2+s^2(1-R^2)^2}}<p\leqq\frac{2}{s}\cdot\frac{1+R}{1-R}, \tag{31'}$$

care se putea găsi direct din (26‴) şi (29″), şi care este identică cu (16).

Domeniile mişcărilor periodice stabile în planul (p, R) se pot determina pe baza dublei inegalităţi (31′) pentru $\lambda = 0$ şi (31) pentru $\lambda \neq 0$.

În figura 15 sînt reprezentate domeniile de stabilitate ale mişcărilor periodice avînd perioada egală cu perioada forţei de excitaţie ($n = 1$, $s = 2\pi$) pentru cîteva valori ale parametrului λ : 0 ; 0,1 ; 0,4 ; 0.8. Se vede din

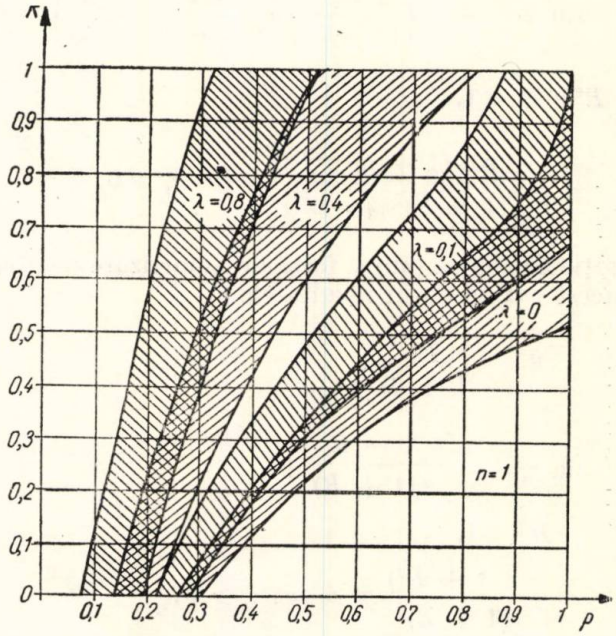


Fig. 15.

diagramă că și în acest caz domeniile de stabilitate depind în mare măsură de valoarea coeficientului λ. Pentru $\lambda = 0$ se obține același domeniu de stabilitate ca în cazul precedent (fig. 4).

9. DETERMINAREA MIȘCĂRILOR PERIODICE STABILE CÎND FORȚA DE REZISTENȚĂ ESTE PROPORȚIONALĂ CU VITEZA RELATIVĂ

Dacă forța de rezistență este proporțională cu viteza relativă, atunci, folosind aceleași mărimi și notații (19), ecuația diferențială a mișcării este

$$z'' + \lambda z' = -p - r''(\tau). \tag{32}$$

Ecuația (32) este de aceeași formă cu ecuația (4). Deoarece și condițiile inițiale și de periodicitate sînt identice în cele două cazuri, ne putem folosi de rezultatele obținute în prima parte a lucrării pe baza ecuației (4) considerînd

$$f(\tau) = -r''(\tau). \tag{33}$$

Legea mișcării și a vitezei sînt în acest caz

$$z = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p}{\lambda} + r'(\tau_i) + R\,u_i\right][1 - e^{-\lambda(\tau-\tau_i)}] - \frac{p}{\lambda}(\tau - \tau_i) -$$

$$- r(\tau) + r(\tau_i)\,e^{-\lambda(\tau-\tau_i)} + \lambda\,e^{-\lambda\tau}\int_{\tau_i}^{\tau} e^{\lambda\tau} r(\tau)\,d\tau, \tag{34}$$

$$z' = \left[\frac{p}{\lambda} + r'(\tau_i) + R\,u_i\right] e^{-\lambda(\tau-\tau_i)} - \frac{p}{\lambda} - r'(\tau) -$$

$$- \lambda\,r(\tau_i)\,e^{-\lambda(\tau-\tau_i)}\,\lambda^2\,e^{-\lambda\tau}\int_{\tau_i}^{\tau} e^{\lambda\tau}\,r(\tau)\,dt. \tag{35}$$

Pentru mișcările periodice se obține

$$u_i = \frac{ps}{1+R}, \tag{36}$$

$$r'(\tau_i) - \lambda r(\tau_i) + \lambda^2 \frac{e^{-\lambda(\tau_i+s)}}{1-e^{-\lambda s}}\int_{\tau_i}^{\tau_i+s} e^{\lambda\tau} r(\tau)\,d\tau =$$

$$= p\left(\frac{s}{1+R}\,\frac{1+R\,e^{-\lambda s}}{1-e^{-\lambda s}} - \frac{1}{\lambda}\right). \tag{37}$$

Viteza de ciocnire este aceeași ca în cazul precedent (25), însă ecuația (37) pentru determinarea lui τ_i diferă mult de ecuația (26) găsită în cazul precedent.

Ecuația caracteristică se deduce direct din (14) ținînd seama de (33) :

$$\beta^2 + \left[R(1 + e^{-\lambda s}) - \frac{p + r''\tau_i}{\lambda p}(1 + R)^2(1 - \right.$$

$$\left. - e^{-\lambda s})\right]\beta + R^2 e^{-\lambda s} = 0. \tag{38}$$

Condițiile de stabilitate în acest caz vor fi :

$$R^2 e^{-\lambda s} < 1, \tag{39}$$

$$p\left[1 - \frac{\lambda s}{1 - e^{-\lambda s}}\frac{1 + R e^{-\lambda s}}{1 + R}\right] < -r''(\tau_i) < p\left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda s}{1 - e^{-\lambda s}}\frac{(1 - R)(1 - R e^{-\lambda s})}{(1 + R)^2}\right]. \tag{40}$$

Dacă determinăm limitele expresiilor obținute cînd λ tinde către zero, se obțin aceleași rezultate care s-au obținut și în cazul anterior în ipoteza frecării neglijabile.

În cazul excitației armonice (30) ecuația (37) și condițiile (40) devin :

$$\sin\tau_i + \lambda\cos\tau_i = (1 + \lambda^2)p\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{s}{1 + R}\frac{1 + R e^{-\lambda s}}{1 - e^{-\lambda s}}\right], \tag{37'}$$

$$p\left(1 - \frac{\lambda s}{1 - e^{-\lambda s}}\frac{1 + R e^{-\lambda s}}{1 + R}\right) < \cos\tau_i < p\left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda s}{1 - e^{-\lambda s}}\frac{(1 - R)(1 - R e^{-\lambda s})}{(1 + R)^2}\right], \tag{40'}$$

care sînt identice cu relațiile (11') și (15') găsite în prima parte a lucrării.

În consecință diagramele de stabilitate din figurile 4, 5, 6, precum și concluziile în legătură cu domeniile mișcărilor periodice, stabile sînt valabile și în acest caz.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. А. Е. Кобринский,, *Механизмы с упругими связями*, Изд. Наука, Москва, 1964 г.
2. М. И. Быховский, А. Д. Дорохова, Л. В. Зарецкий, С. И. Лукомский, *О некоторых периодических движениях и структуре фазового пространства ударно-колебательной системы с постоянной восстанавливающей силой*, Изв. АН СССР, ОТН, *2* (1964).
3. В. А. Остапенко, *Механические виброударыные системы*, ,,Наукова Думка'', Киев, 1966.
4. Sinlaş Gh., L. Brîndeu, A. Hegedüs, *Mişcări periodice cu ciocniri ale vibratorului liber.* Buletinul Ştiinţific şi Tehnic al Institutului Politehnic Timişoara, **12 (26)**, *1*, (1967).
5. М. И. Блехманн, Г. Ю. Джанелидзе, *Вибрационное перемещение*, Изд. ,,Наука'', Москва, 1964.
6. Э. Э. Лавендел, *Оптимальный закон движения лотка с заданными пределами ускорения при вибротранспортировке в режиме с подрасыванием*, Известия АН СССР, Механика и Машиностроение, 6 (1964).
7. В. Л. Рагульскене, *Области захвата виброударных систем*, Вибротехника, Изд. ,,Минтис'', Вильнюс, *I*, (1967).
8. F. Peterka, *Periodické kmitání mechanické soustavy s vnitřnimi razy*, Stroinicky Casopis, *3*, (1965).
9. K. Kuphal, *Über die Beeinflussung von Schwingungen durch einen Stosskörper II, Das Vertikal-System*, ZAMM, Band 45, 1965, Heft 6.
10. Ю. И. Неймарк, *Метод точечных отображений в теории нелинеарных колебаний*, Известия высших учебных заведений. Радиофизика, **I**, *1*, *2* (1958).

CALCULUL PLĂCILOR CURBE CILINDRICE CIRCULARE NESUBȚIRI

de Cr. STĂNESCU, V. VISARION

În lucrare se particularizează la cazul plăcii curbe cilindrice circulare nesubțiri teoria plăcilor curbe nesubțiri, bazată pe scindarea stării de tensiune, fără utilizarea metodei integrării asimptotice propusă în lucrarea [1].

1. INTRODUCERE

În lucrarea [1] a fost propusă o teorie a plăcilor curbe nesubțiri bazată pe scindarea stării de tensiune fără utilizarea metodei integrării asimptotice.

Dacă suprafața mediană este închisă atunci fiecare stare în parte este o soluție exactă a sistemului de ecuații al teoriei spațiale a elasticității, suma lor satisfăcînd exact și condițiile pe suprafețele limită superioară S_+ și inferioară S_- a plăcii curbe considerate.

Prima stare de tensiune, caracterizată printr-o variație liniară a deplasărilor în raport cu variabila θ_3 și printr-o formulare bidimensională, este denumită „problema liniară pe grosime". Soluția corespunzătoare respectă condițiile limită pe S_+ și S_- și forțele masice în torsor, iar sistemul de ecuații cu derivate parțiale are ordinul zece.

Cea de a doua stare de tensiune, denumită „problemă de pseudostrat-limită", este caracterizată prin condiția ca în orice element de secțiune normală la suprafața mediană, rezultanta și momentul rezultant ale tensiunilor să fie nule.

Dacă suprafața mediană este deschisă, problema liniară permite satisfacerea a cinci condiții marginale în lungul suprafeței S_L laterale, iar problema de pseudostrat-limită constă în determinarea unei soluții particulare, fără satisfacerea de condiții marginale. În acest caz, pentru satisfacerea condițiilor punctuale pe S_L, este necesară suprapunerea unei soluții de strat-limită, cu un caracter simplu, caracterizat prin cinci condiții integrale, toate tensiunile fiind autoechilibrate pe grosime.

În lucrarea de față teoria amintită este particularizată la cazul plăcii curbe cilindrice circulare nesubțiri.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970, P. 1271 – 1289

Notaţiile folosite sînt cele din lucrarea [1]. Menţionăm că sînt utilizate pentru tensiune, deformaţii şi deplasări dezvoltari de forma :

$$\sigma^{ij} = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \sigma_{(u)}^{ij} P_n(x),$$

$$\gamma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{ij}^{(n)} P_n(x),$$

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} u_i^{(n)} P_n(x),$$

unde

$x = \theta_3/h$,
$2h$ = grosimea constantă a plăcii,
$P_n(x)$ = polinoame Legendre de grad n.

2. ELEMENTE GEOMETRICE

Considerăm suprafaţa mediană referită la liniile de curbură θ_1, θ_2, astfel încît $\theta_1 = \text{const.}$, reprezintă generatoarele cilindrului circular, iar $\theta_2 = \text{const.}$, curbele directoare circulare. Metrica suprafeţei mediane este caracterizată prin următoarele componente :

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a = 1. \tag{2.1}$$

Componentele tensorului de curbură sînt

$$b_{11} = -\frac{1}{R}, \quad b_{22} = 0, \quad b_{12} = b_{21} = 0,$$

$$b_1^1 = -\frac{1}{R}, \quad b_2^2 = 0, \quad b_1^2 = b_2^1 = 0, \tag{2.2}$$

unde R este raza cilindrului circular, suprafaţă mediană a plăcii studiate.

Metrica tridimensională corespunzînd variabilelor θ_1, θ_2 şi θ_3 este caracterizată prin următorii coeficienţi ai lui Lamé :

$$H_1 = 1 + \frac{h}{R}x; \quad H_2 = 1; \quad H_3 = 1, \tag{2.3}$$

determinantul primei forme fundamentale fiind

$$g = \left(1 + \frac{h}{R}x\right)^2. \tag{2.4}$$

Cu aceasta rezultă

$$\sqrt{\frac{g}{a}} = 1 + \frac{h}{R}x \tag{2.5}$$

și

$$G^{11} = 1, \quad G^{22} = G^{33} = \left(1 + \frac{h}{R}x\right)^2, \quad G^{12} = G^{21} = 0, \tag{2.6}$$

G^{ij} reprezentînd complimenții algebrici ai lui g_{ij} din $g = |g_{ij}|$.

3. ECUAȚIILE PROBLEMEI LINIARE PE GROSIME

Pentru problema liniară pe grosime componentele vectorului deplasării elastice au forma

$$u_\alpha = u_\alpha^{(0)} + x u_\alpha^{(1)}; \quad u_3 = u_3^{(0)}, \tag{3.1}$$

unde $u_i^{(0)}$, $u_\alpha^{(1)}$ sînt funcții de θ_1, θ_2.

Din lucrarea [1], în cazul cilindrului circular rezultă, pentru problema liniară pe grosime, următoarele relații geometrice:

$$\gamma_{11}^{(0)} = \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \theta_1} + \frac{u_3^{(0)}}{R} + \frac{h}{3R}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta_1}; \quad \gamma_{22}^{(0)} = \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \theta_2},$$

$$2\gamma_{12}^{(0)} = \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \theta_1} + \frac{h}{3R}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta_2},$$

$$\gamma_{11}^{(1)} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta_1} + \frac{h}{R}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \theta_1} + \frac{h}{R^2}u_3^{(0)}; \quad \gamma_{22}^{(2)} = 0,$$

$$\gamma_{22}^{(1)} = \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta_2}; \quad \gamma_{12}^{(2)} = \frac{h}{3R}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta_2}, \tag{3.2}$$

$$2\gamma_{12}^{(1)} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta_1} + \frac{h}{R}\cdot\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \theta_2}; \quad 2\gamma_{13}^{(0)} = \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{R}u_1^{(0)} + \frac{1}{h}u_1^{(1)},$$

$$\gamma_{11}^{(2)} = \frac{2h}{3R}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta_1}; \quad 2\gamma_{23}^{(0)} = \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \theta_2} + \frac{1}{h}u_2^{(1)}.$$

Relațiile constitutive sînt

$$\begin{aligned}
\sigma^{11} &= E^{1111}\gamma_{11} + E^{1122}\gamma_{22},\\
\sigma^{22} &= E^{2211}\gamma_{11} + E^{2222}\gamma_{22},\\
\sigma^{12} &= 2E^{1212}\gamma_{12}; \quad \sigma^{21} = 2E^{2112}\gamma_{12},\\
\sigma^{13} &= E^{1313}\gamma_{13}; \quad \sigma^{23} = E^{2323}\gamma_{23},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

în care, pentru cilindru circular, avem

$$E^{1111} = \frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}x\right)^2}; \qquad E^{1122} = \frac{2\mu\eta}{1-2\eta},$$

$$E^{2211} = \frac{2\mu\eta}{1-2\eta} \cdot \frac{1}{1+\frac{h}{R}x}; \qquad E^{2222} = \frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\left(1+\frac{h}{R}x\right), \tag{3.4}$$

$$E^{1212} = E^{1221} = \frac{\mu}{1+\frac{h}{R}x}; \qquad E^{2112} = E^{2121} = \mu,$$

$$E^{1313} = \frac{2\mu}{1+\frac{h}{R}x}; \qquad E^{2323} = 2\mu\left(1+\frac{h}{R}x\right),$$

unde

$$\mu = \frac{E}{2(1+\eta)},$$

În problema liniară pe grosime, după cum s-a arătat în lucrarea [1], intervin componentele

$$\sigma^{\alpha\beta}_{(0)} = \sum_{q=0}^{2} E^{\alpha\beta\lambda\mu}_{(q),(0)}\, \gamma^{(q)}_{\lambda\mu},$$

$$\sigma^{\alpha\beta}_{(1)} = \sum_{q=0}^{2} E^{\alpha\beta\lambda\mu}_{(q),(1)}\, \gamma^{(q)}_{\lambda\mu}, \tag{3.5}$$

$$\sigma^{\alpha 3}_{(0)} = E^{\alpha 3\lambda 3}_{(0),(0)}\, \gamma^{(0)}_{\lambda 3},$$

în care

$$E^{\omega\varphi\alpha\beta}_{(n),(m)} = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, E^{\omega\varphi\alpha\beta}\, \mathrm{d}x,$$

$$E^{\omega 3\alpha 3}_{(n),(m)} = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, E^{\alpha 3\omega 3}\, \mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

Folosind (2.10), (2.12), obținem

$$E^{1111}_{(0),(0)} = \frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\cdot\frac{1}{1-(h/R)^2},$$

$$E^{1111}_{(1),(0)} = \frac{\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\,\frac{R}{h}\left(\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R} - \frac{2}{1-(h/R)^2}\right),$$

$$E^{1111}_{(2),(0)} = \frac{\mu(1-\eta)}{2(1-2\eta)}\left[\frac{6R^2}{h^2}\left(1-\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}+\frac{1}{1-(h/R)^2}\right)-\frac{2}{1-(h/R)^2}\right],$$

$$E^{1122}_{(0),(0)} = \frac{2\mu\eta}{1-2\eta};\quad E^{1122}_{(1),(0)} = 0\ ;\quad E^{1122}_{(2),(0)} = 0,$$

$$E^{2211}_{(0),(0)} = \frac{\mu\eta}{1-2\eta}\cdot\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\ ;\quad E^{2211}_{(1),(0)} =$$

$$= \frac{\mu\eta}{1-2\eta}\,\frac{R}{h}\left(2-\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right),$$

$$E^{2211}_{(2),(0)} = \frac{\mu\eta}{2(1-2\eta)}\left[3\,\frac{R^2}{h^2}\left(-2+\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right)-\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right],$$

$$E^{2222}_{(0),(0)} = \frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\ ;\ E^{2222}_{(1),(0)} = \frac{2\mu(1-\eta)}{3(1-2\eta)}\cdot\frac{h}{R}\ ;\ E^{2222}_{(2),(0)} = 0,$$

$$E^{1212}_{(0),(0)} = \frac{\mu}{2}\,\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R};\ E^{1212}_{(1),(0)} = \frac{\mu}{2}\cdot\frac{R}{h}\left(2-\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right),$$

$$E^{1212}_{(2),(0)} = \frac{\mu}{4}\,\frac{R}{h}\left[\frac{3R}{h}\left(-2+\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right)-\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right],$$

$$E^{2112}_{(0),(0)} = \mu\ ;\quad E^{2112}_{(1),(0)} = 0\ ;\quad E^{2112}_{(2),(0)} = 0,$$

$$E^{1111}_{(0),(1)} = \frac{3\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\,\frac{R}{h}\left(\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}-\frac{2}{1-(h/R)^2}\right),$$

$$E^{1111}_{(1),(1)} = \frac{6\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\,\frac{R^2}{h^2}\left(1-\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}+\frac{1}{1-(h/R)^2}\right),$$

$$E^{1111}_{(2),(1)} = \frac{3\mu(1-\eta)}{2(1-2\eta)}\,\frac{R}{h}\left[-\frac{12R^2}{h^2}+\frac{R}{h}\left(\frac{9R^2}{h^2}-1\right)\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\left(1-\dfrac{3R^2}{h^2}\right)}{1-(h/R)^2}\right],$$

$$E^{1122}_{(0),(1)} = 0\ ;\quad E^{1122}_{(1),(1)} = \frac{2\mu\eta}{1-2\eta}\ ;\quad E^{1122}_{(2),(1)} = 0\,; \tag{3.7}$$

$$E^{2211}_{(0),(1)} = \frac{3\mu\eta}{1-2\eta}\,\frac{R}{h}\left(2 - \frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right);\quad E^{2211}_{(1),(1)} =$$

$$= \frac{3\mu\eta}{1-2\eta}\,\frac{R^2}{h^2}\left(-2 + \frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right),$$

$$E^{2211}_{(2),(1)} = \frac{3\mu\eta}{2(1-2\eta)}\,\frac{R^2}{h^2}\left[\frac{6R}{h} + \left(1 - \frac{3R^2}{h^2}\right)\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right],$$

$$E^{2222}_{(0),(1)} = \frac{2\mu\,(1-\eta)}{1-2\eta}\,\frac{h}{R};\quad E^{2222}_{(1),(1)} = \frac{2\mu\,(1-\eta)}{1-2\eta};\quad E^{2222}_{(2),(1)} = \frac{4\mu(1-\eta)}{5(1-2\eta)}\,\frac{h}{R},$$

$$E^{1212}_{(0),(1)} = \frac{3\mu}{2}\,\frac{R}{h}\left(2 - \frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right);\quad E^{1212}_{(1),(1)} =$$

$$= \frac{3\mu}{2}\,\frac{R^2}{h^2}\left(-2 + \frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right),$$

$$E^{1212}_{(2),(1)} = \frac{3\mu}{4}\,\frac{R}{h}\left[\frac{3R^2}{h^2}\left(2 + \frac{2h^2}{3R^2} - \frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(2 - \frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\right)\right],$$

$$E^{2112}_{(0),(1)} = 0\ ;\quad E^{2112}_{(1),(1)} = \mu\ ;\quad E^{2112}_{(2),(1)} = 0,$$

$$E^{1313}_{(0),(0)} = \mu\,\frac{R}{h}\ln\frac{1+h/R}{1-h/R}\quad E^{2323}_{(0),(0)} = 2\mu.$$

Cu aceasta rezultă din (3.2) și (3.5):

$$\sigma^{11}_{(0)} = \left(E^{1111}_{(0),(0)} + \frac{h}{R}\,E^{1111}_{(1),(0)}\right)\frac{\partial u^{(0)}_1}{\partial\theta_1} + E^{1122}_{(0),(0)}\,\frac{\partial u^{(0)}_2}{\partial\theta_2} +$$

$$+ \frac{1}{R}\left(E^{1111}_{(0),(0)} + \frac{h}{R}\,E^{1111}_{(1),(0)}\right)u^{(0)}_3 + \left(E^{1111}_{(1),(0)} +\right.$$

$$\left. + \frac{h}{3R}\,E^{1111}_{(0),(0)} + \frac{2h}{3R}\,E^{1111}_{(2),(0)}\right)\frac{\partial u^{(1)}_1}{\partial\theta_1},$$

$$\sigma^{22}_{(0)} = \left(E^{2211}_{(0),(0)} + \frac{h}{R}\,E^{2211}_{(1),(0)}\right)\frac{\partial u^{(0)}_1}{\partial\theta_1} + E^{2222}_{(0),(0)}\,\frac{\partial u^{(0)}_2}{\partial\theta_2} + \frac{1}{R}\left(E^{2211}_{(0),(0)} +\right.$$

$$+\frac{h}{R}E^{2211}_{(1),(0)}\Big)u^{(0)}_3+\Big(E^{2211}_{(1),(0)}+\frac{h}{3R}E^{2211}_{(0),(0)}+$$

$$+\frac{2h}{3R}E^{2211}_{(2),(0)}\Big)\frac{\partial u^{(1)}_1}{\partial\theta_1}+E^{2222}_{(1),(0)}\frac{\partial u^{(1)}_2}{\partial\theta_2},$$

$$\sigma^{12}_{(0)}=\Big(E^{1212}_{(0),(0)}+\frac{h}{R}E^{1212}_{(1),(0)}\Big)\frac{\partial u^{(0)}_1}{\partial\theta_2}+E^{1212}_{(0),(0)}\frac{\partial u^{(0)}_2}{\partial\theta_1}+\Big(E^{1212}_{(1),(0)}+\frac{h}{3R}E^{1212}_{(0),(0)}+$$

$$+\frac{2h}{3R}E^{1212}_{(2),(0)}\Big)\frac{\partial u^{(1)}_1}{\partial\theta_2}+E^{1212}_{(1),(0)}\frac{\partial u^{(1)}_2}{\partial\theta_1}, \tag{3.8}$$

$$\sigma^{13}_{(0)}=\frac{1}{2}E^{1313}_{(0),(0)}\Big(\frac{\partial u^{(0)}_3}{\partial\theta_1}-\frac{u^{(0)}_1}{R}+\frac{u^{(1)}_1}{h}\Big);\ \sigma^{23}_{(0)}=\frac{1}{2}E^{2323}_{(0),(0)}\Big(\frac{\partial u^{(0)}_3}{\partial\theta_2}+\frac{u^{(1)}_2}{h}\Big),$$

$$\sigma^{11}_{(1)}=\Big(E^{1111}_{(0),(1)}+\frac{h}{R}E^{1111}_{(1),(1)}\Big)\frac{\partial u^{(0)}_1}{\partial\theta_1}+\frac{1}{R}\Big(E^{1111}_{(0),(1)}+\frac{h}{R}E^{1111}_{(1),(1)}\Big)u^{(0)}_3+$$

$$+\Big(E^{1111}_{(1),(1)}+\frac{h}{3R}E^{1111}_{(0),(1)}+\frac{2h}{3R}E^{1111}_{(2),(1)}\Big)\frac{\partial u^{(1)}_1}{\partial\theta_1}+E^{1122}_{(1),(1)}\frac{\partial u^{(1)}_2}{\partial\theta_2},$$

$$\sigma^{22}_{(1)}=\Big(E^{2211}_{(0),(1)}+\frac{h}{R}E^{2211}_{(1),(1)}\Big)\frac{\partial u^{(0)}_1}{\partial\theta_1}+E^{2222}_{(0),(1)}\frac{\partial u^{(0)}_2}{\partial\theta_2}+\frac{1}{R}\Big(E^{2211}_{(0),(1)}+$$

$$+\frac{h}{R}E^{2211}_{(1),(1)}\Big)u^{(0)}_3+\Big(E^{2211}_{(1),(1)}+\frac{h}{3R}E^{2211}_{(0),(1)}+$$

$$+\frac{2h}{3R}E^{2211}_{(2),(1)}\Big)\frac{\partial u^{(1)}_1}{\partial\theta_1}+E^{2222}_{(1),(1)}\frac{\partial u^{(1)}_2}{\partial\theta_2},$$

$$\sigma^{12}_{(1)}=\Big(E^{1212}_{(0),(1)}+\frac{h}{R}E^{1212}_{(1),(1)}\Big)\frac{\partial u^{(0)}_1}{\partial\theta_2}+E^{1212}_{(0),(1)}\frac{\partial u^{(0)}_2}{\partial\theta_1}+\Big(E^{1212}_{(1),(1)}+$$

$$+\frac{h}{3R}E^{1212}_{(0),(1)}+\frac{2h}{3R}E^{1212}_{(2),(1)}\Big)\frac{\partial u^{(1)}_1}{\partial\theta_2}+E^{1212}_{(1),(1)}\frac{\partial u^{(1)}_2}{\partial\theta_1},$$

$$\sigma^{21}_{(1)}=E^{2112}_{(1),(1)}\Big(\frac{\partial u^{(1)}_1}{\partial\theta_2}+\frac{\partial u^{(1)}_2}{\partial\theta_1}+\frac{h}{R}\frac{\partial u^{(0)}_1}{\partial\theta_2}\Big),$$

care sînt relațiile exacte tensiuni-deformații.

Transcriind ecuaţiile de echilibru ale problemei liniare pe grosime

$$\frac{\partial \sigma^{11}_{(0)}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \sigma^{21}_{(0)}}{\partial \theta_2} + \frac{1}{R}\,\sigma^{13}_{(0)} + \frac{1}{2h}\,R^{(1)} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma^{12}_{(0)}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \sigma^{22}_{(0)}}{\partial \theta_2} + \frac{1}{2h}\,R^{(2)} = 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial \sigma^{13}_{(0)}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \sigma^{23}_{(0)}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{R}\,\sigma^{11}_{(0)} + \frac{1}{2h}\,R^{(3)} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma^{11}_{(1)}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \sigma^{21}_{(1)}}{\partial \theta_2} - \frac{3}{h}\,\sigma^{13}_{(0)} + \frac{3}{2h^2}\,C^{(1)} = 0\,;\quad \frac{\partial \sigma^{12}_{(1)}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \sigma^{22}_{(1)}}{\partial \theta_2} - \frac{3}{h}\,\sigma^{23}_{(0)} + \frac{3}{2h^2}\,C^{(2)} = 0,$$

în deplasări, cu ajutorul relaţiilor (3.8), rezultă

$$\left[\left(E^{1111}_{(0),(0)} + \frac{h}{R}\,E^{1111}_{(1),(0)}\right)\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + E^{2112}_{(0),(0)}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} - \frac{1}{2R^2}\,E^{1313}_{(0),(0)}\right] u_1^{(0)} +$$

$$(E^{1122}_{(0),(0)} + E^{2112}_{(0),(0)})\,\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial \theta_1\,\partial \theta_2} + \frac{1}{R}\left(E^{1111}_{(0),(0)} + \frac{h}{R}\,E^{1111}_{(1),(0)} + \frac{1}{2}\,E^{1313}_{(0),(0)}\right)\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \theta_1} +$$

$$+ \left[\left(E^{1111}_{(1),(0)} + \frac{h}{3R}\,E^{1111}_{(0),(0)} + \frac{2h}{3R}\,E^{1111}_{(2),(0)}\right)\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \frac{h}{3R}\,E^{2112}_{(0),(0)}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2hR}\,E^{1313}_{(0),(0)}\right] u_1^{(1)} + \frac{1}{2h}\,R^{(1)} = 0,$$

$$\left(E^{1212}_{(0),(0)} + \frac{h}{R}\,E^{1212}_{(1),(0)} + E^{2211}_{(0),(0)} + \frac{h}{R}\,E^{2211}_{(1),(0)}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial \theta_1\,\partial \theta_2} +$$

$$+ \left(E^{1212}_{(0),(0)}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + E^{2222}_{(0),(0)}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2}\right) u_2^{(0)} + \frac{1}{R}\left(E^{2211}_{(0),(0)} + \frac{h}{R}\,E^{2211}_{(1),(0)}\right)\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \theta_2} +$$

$$+ \left(E^{1212}_{(1),(0)}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + E^{2222}_{(1),(0)}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2}\right) u_2^{(1)} + \frac{1}{2h}\,R^{(2)} = 0,$$

$$- \frac{1}{R}\left(E^{1111}_{(0),(0)} + \frac{h}{R}\,E^{1111}_{(1)\,(0)} + \frac{1}{2}\,E^{1313}_{(0),(0)}\right)\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{R}\,E^{1122}_{(0),(0)}\,\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \theta_2} +$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\,E^{1313}_{(0),(0)}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \frac{1}{2}\,E^{2323}_{(0),(0)}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} - \frac{1}{R^2}\left(E^{1111}_{(0),(0)} + \frac{h}{R}\,E^{1111}_{(1),(0)}\right)\right] u_3^{(0)} +$$

$$+\left[\frac{1}{2h}E^{1313}_{(0),(0)}-\frac{1}{R}\left(E^{1111}_{(1),(0)}+\frac{h}{R}E^{1111}_{(0),(0)}+\frac{2h}{3R}E^{1111}_{(2),(0)}\right)\right]\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial\theta_1}+$$

$$+\frac{1}{2h}E^{2323}_{(0),(0)}\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial\theta_2}+\frac{1}{2h}R^{(3)}=0,$$

$$\left[\left(E^{1111}_{(0),(1)}+\frac{h}{R}E^{1111}_{(1),(1)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+\frac{h}{R}E^{2112}_{(1),(1)}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}+\frac{3}{2hR}E^{1313}_{(0),(0)}\right]u_1^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{h}\left[\frac{h}{R}\left(E^{1111}_{(0),(1)}+\frac{h}{R}E^{1111}_{(1),(1)}\right)-\frac{3}{2}E^{1313}_{(0),(0)}\right]\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\theta_1}+$$

$$+\left[\left(E^{1111}_{(1),(1)}+\frac{h}{R}E^{1111}_{(0),(1)}+\frac{2h}{3R}E^{1111}_{(2),(1)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+E^{2112}_{(1),(1)}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2h^2}E^{1313}_{(0),(0)}\right]u_1^{(1)}+(E^{1122}_{(1),(1)}+E^{2112}_{(1),(1)})\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial\theta_1\partial\theta_2}+\frac{3}{2h^2}C^{(1)}=0,$$

$$\left(E^{1212}_{(0),(1)}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+E^{2222}_{(0),(1)}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\right)u_2^{(0)}-\frac{3}{2h}E^{2323}_{(0),(0)}\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\theta_2}+ \tag{3.10}$$

$$+\left(E^{1212}_{(1),(1)}+\frac{h}{3R}E^{1212}_{(0),(1)}+\frac{2h}{3R}E^{1212}_{(2),(1)}+E^{2211}_{(1),(1)}+\frac{h}{3R}E^{2211}_{(0),(1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2h}{3R}E^{2211}_{(2),(1)}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial\theta_1\partial\theta_2}+\left(E^{1212}_{(1),(1)}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+E^{2222}_{(1),(1)}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2h^2}E^{2323}_{(0),(0)}\right)u_2^{(1)}+\frac{3}{2h^2}C^{(2)}=0,$$

care sînt ecuațiile exacte de echilibru în deplasări.

Folosind (3. 7), relațiile (3.8) și ecuațiile (3.10) pot fi exprimate în funcțiune de constantele elastice, h, R și derivatele componentelor deplasărilor.

Aceste relații și ecuații, pot fi dezvoltate după puterile parametrului h/R. Renunțînd la puterile lui h/R mai mari sau egale cu 2, în comparație cu unitatea în aceste dezvoltări, obținem următoarele relații tensiuni-deplasări

$$\sigma^{11}_{(0)}=\frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial\theta_1}+\frac{\eta}{1-\eta}\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial\theta_2}+\frac{u_3^{(0)}}{R}-\frac{h}{3R}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial\theta_1}\right), \tag{3.11}$$

$$\sigma_{(0)}^{22} = \frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\left(\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial\theta_2} + \frac{\eta}{1-\eta}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial\theta_1} + \frac{\eta}{1-\eta}\frac{u_3^{(0)}}{R} + \frac{h}{3R}\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial\theta_2}\right), \tag{3.12}$$

$$\sigma_{(0)}^{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial\theta_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial\theta_1} - \frac{h}{3R}\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial\theta_1}\right), \tag{3.13}$$

$$\sigma_{(0)}^{21} = \mu\left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial\theta_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial\theta_1} + \frac{h}{3R}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial\theta_2}\right), \tag{3.14}$$

$$\sigma_{(0)}^{13} = \mu\left(\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\theta_1} - \frac{u_1^{(0)}}{R} + \frac{u_1^{(1)}}{h}\right), \tag{3.15}$$

$$\sigma_{(0)}^{23} = \mu\left(\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\theta_2} + \frac{1}{h}u_2^{(1)}\right), \tag{3.16}$$

$$\sigma_{(1)}^{11} = \frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial\theta_1} + \frac{\eta}{1-\eta}\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial\theta_2} - \frac{h}{R}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial\theta_1} - \frac{h}{R^2}u_3^{(0)}\right), \tag{3.17}$$

$$\sigma_{(1)}^{22} = \frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial\theta_2} + \frac{\eta}{1-\eta}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial\theta_1} + \frac{h}{R}\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial\theta_2}\right), \tag{3.18}$$

$$\sigma_{(1)}^{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial\theta_2} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial\theta_1} - \frac{h}{R}\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial\theta_1}\right), \tag{3.19}$$

$$\sigma_{(1)}^{21} = \mu\left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial\theta_2} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial\theta_1} + \frac{h}{R}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial\theta_2}\right), \tag{3.20}$$

precum și următoarele ecuații aproximative de echilibru exprimate în componentele deplasărilor

$$\left[\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2} - \frac{1}{R^2}\right]u_1^{(0)} + \frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial\theta_1\partial\theta_2} + \frac{3-4\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\theta_1} +$$

$$+ \frac{h}{R}\left[-\frac{2(1-\eta)}{3(1-2\eta)}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2} + \frac{1}{h^2}\right]u_1^{(1)} + \frac{1}{2h\mu}R^{(1)} = 0, \tag{3.21}$$

$$\frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial\theta_1\partial\theta_2} + \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\right]u_2^{(0)} + \frac{2\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\theta_2} +$$

$$+ \frac{h}{3R}\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\right]u_2^{(1)} + \frac{1}{2h\mu}R^{(2)} = 0, \tag{3.22}$$

$$-\frac{3-4\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial\theta_1}-\frac{2\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial\theta_2}+\left(\Delta-\frac{2(1-\eta)}{R^2(1-2\eta)}\right)u_3^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{h}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial\theta_1}+\frac{1}{h}\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial\theta_2}+\frac{1}{2h\mu}R^{(3)}=0, \tag{3.23}$$

$$-\frac{3\mu}{h}\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\theta_1}+\left[\frac{[2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+\mu\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}-\frac{3\mu}{h^2}\right]u_1^{(1)}+$$

$$+\frac{\mu}{1-2\eta}\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial\theta_1\partial\theta_2}+\frac{3}{2h^2}C^{(1)}=0, \tag{3.24}$$

$$\left[-\mu\frac{h}{R}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+\frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{h}{R}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\right]u_2^{(0)}-\frac{3\mu}{h}\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial\theta_2}+\frac{\mu}{1-2\eta}\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial\theta_1\partial\theta_2}+$$

$$+\left[\mu\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+\frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}-\frac{3\mu}{h^2}\right]u_2^{(1)}+\frac{3}{2h^2}C^{(2)}=0. \tag{3.25}$$

4. Prima etapă a problemei de pseudostrat-limită

În această primă etapă a problemei de pseudostrat-limită se construiește o soluție particulară cu date precizate pe S_+, S_-. Forțele masice sînt supuse numai condiției de a forma cu tensiunile pe S_+, S_- un sistem de forțe în echilibru pentru orice element normal al plăcii curbe.

Cu notațiile din lucrarea [1], diferite pentru această etapă de cele ale problemei liniare pe grosimi, datele pe S_+, S_- au aspectul

$$\tau_{13}(\pm h)=\frac{(1\mp h/R)\,t_1^{\pm}(\theta_1,\theta_2)}{\left(1-\frac{h^2}{R^2}\right)^{1/2}}\qquad(1\leftarrow\rightarrow 2),$$

$$\tau_{33}(\pm h)=\frac{(1\mp h/R)\,s^{\pm}(\theta_1,\theta_2)}{\left(1-\frac{h^2}{R^2}\right)^{1/2}}, \tag{4.1}$$

unde $\tau_{i3}(\pm h)$ sînt funcții cunoscute, reprezentînd corecțiile care trebuie aduse soluției problemei liniare pe grosime în fiecare punct al suprafețelor limită S_+, S_-, astfel încît să fie satisfăcute condițiile limită pe aceste fețe.

Reamintim conform cu lucrarea [1], că orice tip de condiții limită poate fi descompus în cazurile

$$\text{a)}\quad t_1^{\pm}(\theta_1,\theta_2)=t_1(\theta_1,\theta_2)\qquad(1\leftarrow\rightarrow 2),$$

$$s^{\pm}(\theta_1,\theta_2)=\pm s(\theta_1,\theta_2); \tag{4.2}$$

$$\text{b) } t_1^{\pm}(\theta_1, \theta_2) = \pm t_1(\theta_1, \theta_2) \qquad (1 \leftarrow \rightarrow 2),$$
$$s^{\pm}(\theta_1, \theta_2) = s(\theta_1, \theta_2). \tag{4.3}$$

Prin particularizare din lucrarea [1] rezultă următoarele componente ale deplasărilor:

$$v_1 = \left(1 + \frac{h}{R}x\right)^2 [C_{v_1}(\theta_1, \theta_2)\,(P_9(x) - P_7(x)) + D_{v_1}(\theta_1, \theta_2)\,(P_8(x) - P_6(x))]. \tag{4.4}$$
$$(1 \leftarrow \rightarrow 2),$$
$$v_3 = \left(1 + \frac{h}{R}x\right)^2 [\Lambda_1(\theta_1, \theta_2)\,(P_9(x) - P_7(x)) + \Lambda_2(\theta_1, \theta_2)\,(P_8(x) - P_6(x))].$$

Funcţiunile astfel introduse pot fi astfel determinate din sistemul

$$17\,C_{v_1} + 15\,D_{v_1} = \frac{2(1+\eta)}{E} h\, t_1(\theta_1, \theta_2) \cdot \frac{(1 - h/R)^{1/2}}{(1 + h/R)^{5/2}}, \qquad (1 \leftarrow \rightarrow 2) \tag{4.5}$$
$$17\,C_{v_1} - 15\,D_{v_1} = \frac{2(1+\eta)}{E}(-1)^k h\, t_1(\theta_1, \theta_2) \cdot \frac{(1 + h/R)^{1/2}}{(1 - h/R)^{5/2}},$$

precum şi

$$17\,\Lambda_1 + 15\,\Lambda_2 = \frac{h(1+\eta)(1-2\eta)}{E(1-\eta)} s(\theta_1, \theta_2) \cdot \frac{(1 - h/R)^{1/2}}{(1 + h/R)^{5/2}}, \tag{4.6}$$
$$17\,\Lambda_1 - 15\,\Lambda_2 = \frac{h(1+\eta)(1-2\eta)}{E(1-\eta)}(-1)^q s(\theta_1, \theta_2) \cdot \frac{(1 + h/R)^{1/2}}{(1 - h/R)^{5/2}},$$

unde k este par şi q impar pentru condiţiile de forma (4.2) şi invers pentru condiţiile de forma (4.3).

Cunoscînd deplasările pot fi deduse deformaţiile şi tensiunile primei etape a problemei de pseudostrat-limită.

Suma soluţiei problemei liniare pe grosime cu soluţia primei etape a problemei de pseudostrat-limită constituie o soluţie a ecuaţiilor elasticităţii spaţiale.

Această soluţie satisface condiţiile pe S_+, S_-, şi corespunde unor forţe masice care diferă de cele reale printr-un sistem de forţe masice parazite avînd torsor nul, corespunzător fiecărui element normal al plăcii curbe.

Eliminarea acestui sistem de forţe masice parazite autoechilibrate, revine celei de a doua etape a problemei de pseudostrat-limită. Soluţia acestei probleme satisface deci condiţii omogene pe S_+, S_- şi are, de asemenea, caracter particular deoarece nu i se impun condiţii de margine pe S_L.

5. CALCULUL APROXIMATIV AL PLĂCILOR CURBE CILINDRICE NESUBȚIRI

Deoarece pentru cea de a doua etapă a problemei de pseudostrat-limită nu s-a dat soluția efectivă decît în cazul plăcii plane [1], în cele ce urmează vom remarca că soluțiile deja găsite pentru cilindru circular pot fi interpretate ca aproximații succesive în procesul deducerii soluției.

Astfel sistemul de ecuații al problemei liniare pe grosime permite deducerea unei soluții satisfăcînd ecuațiile teoriei elasticității spațiale, presupunînd însă forțele masice și de suprafață afectate unui element de placă înlocuite cu un sistem avînd aceeași rezultantă și moment rezultant. Permițînd în plus satisfacerea a cinci condiții marginale și deci considerarea efectului de strat-limită de tip Reissner, soluția problemei liniare pe grosime se prezintă astfel ca fiind mai exactă decît soluția obținută cu ajutorul teoriei clasice, bazată pe cunoscutele ipoteze Love-Kirchhoff.

Mai mult după cum se va vedea din ecuațiile problemei liniare pe grosime pot fi deduse stările de tensiune ce caracterizează formularea Love-Kirchhoff, precum și starea cu indici mari de variație care este stratul-limită de tip Reissner.

Adăugarea soluției corespunzătoare primei etape a efectului de pseudostrat-limită îmbunătățește precizia soluției obligînd-o să satisfacă, în plus, condițiile pe suprafețele limită S_+ și S_-. La această etapă vor fi satisfăcute în torsor condițiile pe suprafața normală marginală a plăcii curbe.

Adăugarea unei soluții corespunzătoare de strat-limită permite, desigur, satisfacerea chiar punctuală a acestor condiții.

6. STĂRI DE TENSIUNE ÎN PROBLEMA LINIARĂ PE GROSIME

În sensul celor remarcate în paragraful anterior, vom analiza stările de tensiune care apar în cadrul problemei liniare pe grosime.

Se remarcă existența tuturor stărilor de tensiune care apar și în cadrul formulării clasice (Love-Kirchhoff). În plus, vom pune în evidență și stratul limită de tip Reissner corespunzător.

Stările de tensiune vor fi deduse pe baza procedeului de integrare asimptotică fundamentat în [2].

Pentru simplitate, în raport cu lucrarea [1] vor fi făcute următoarele modificări de notații:

$$u_1^{(0)} = u\,;\ u_2^{(0)} = v\,;\ u_3^{(0)} = w\,;\ u_1^{(0)} = \gamma_1\,;\ u_2^{(1)} = \gamma_2. \tag{6.1}$$

În determinarea stărilor de tensiune spectrul indicilor de intensitate se verifică de fiecare dată că este cel obținut în cazul formulării clasice în lucrarea [2].

6.1. STAREA DE TENSIUNE (0, 0)

Considerăm conform cu [2] dezvoltări asimptotice de forma:

$$\begin{aligned} &u = h^Q(u^{(0)} + hu^{(1)} + \ldots)\,;\quad v = h^Q(v^{(0)} + hv^{(1)} + \ldots),\\ &w = h^Q(w^{(0)} + hw^{(1)} + \ldots),\\ &\gamma_1 = h^{Q+1}(\gamma_1^{(0)} + h\gamma_1^{(1)} + \ldots)\,;\quad \gamma_2 = h^{Q+1}(\gamma_2^{(0)} + h\gamma_2^{(1)} + \ldots). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Luînd $Q = -1$ şi introducînd expresiile (6.2) ale deplasărilor în sistemul (3.21) — (3.25) rezultă sistemul de ecuaţii corespunzător primei iteraţii a stării de tensiune (0,0)

$$\left[\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}-\frac{1}{R^2}\right]u^{(0)}+\frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial\theta_1\partial\theta_2}+\frac{3-4\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta_1}+$$

$$+\frac{1}{R}\gamma_1^{(0)}+\frac{1}{2\mu}R^{(1)}=0,$$

$$\frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial\theta_1\partial\theta_2}+\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\right]v^{(0)}+$$

$$+\frac{2\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta_2}+\frac{1}{2\mu}R^{(2)}=0,$$

$$-\frac{3-4\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\theta_1}-\frac{2\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\theta_2}+\left[\Delta-\frac{2(1-\eta)}{R^2(1-2\eta)}\right]w^{(0)}+$$

$$+\frac{\partial\gamma_1^{(0)}}{\partial\theta_1}+\frac{\partial\gamma_2^{(0)}}{\partial\theta_2}+\frac{1}{2\mu}R^{(3)}=0, \qquad (6.3)$$

$$\frac{u^{(0)}}{R}-\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta_1}-\gamma_1^{(0)}+\frac{1}{2\mu}C^{(1)}=0\,;\quad -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta_2}-\gamma_2^{(0)}+\frac{1}{2\mu}C^{(2)}=0.$$

Se observă că indicii de intensitate au fost corect determinaţi, sistemul (6.3) fiind compatibil. Considerînd pentru tensiuni dezvoltări de tipul (6.2), rezultă în cazul stării de tensiune (0, 0) pentru ele următorul spectru de indici de intensitate

Element	$\sigma^{11}_{(0)}$	$\sigma^{22}_{(0)}$	$\sigma^{12}_{(0)}$; $\sigma^{21}_{(0)}$	$\sigma^{11}_{(1)}$	$\sigma^{22}_{(1)}$	$\sigma^{12}_{(1)}$; $\sigma^{21}_{(1)}$	$\sigma^{13}_{(0)}$	$\sigma^{23}_{(0)}$
Indice intensitate	Q	Q	Q	$Q+1$	$Q+1$	$Q+1$	Q	Q

În cadrul acestei iteraţii din relaţiile (3.11) — (3.20) care leagă tensiunile problemei liniare pe grosime de deplasările corespunzătoare scrise dezvoltat, rezultă

$$\sigma^{11}_{(0);(0)}=\frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\theta_1}+\frac{\eta}{1-\eta}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\theta_2}+\frac{w^{(0)}}{R}\right),$$

$$\sigma^{22}_{(0);(0)}=\frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\theta_2}+\frac{\eta}{1-\eta}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\theta_1}+\frac{\eta}{1-\eta}\frac{w^{(0)}}{R}\right),$$

$$\sigma^{12}_{(0);(0)} = \sigma^{21}_{(0);(0)} = \mu\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\theta_2} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial\theta_1}\right),$$

$$\sigma^{11}_{(1);(0)} = \frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\left(\frac{\partial\gamma_1^{(0)}}{\partial\theta_1} + \frac{\eta}{1-\eta}\frac{\partial\gamma_2^{(0)}}{\partial\theta_2} - \frac{1}{R}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\theta_1} - \frac{w^{(0)}}{R^2}\right),$$

$$\sigma^{22}_{(1);(0)} = \frac{2\mu(1-\eta)}{1-2\eta}\left(\frac{\partial\gamma_2^{(0)}}{\partial\theta_2} + \frac{\eta}{1-\eta}\frac{\partial\gamma_1^{(0)}}{\partial\theta_1} + \frac{1}{R}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\theta_2}\right), \tag{6.4}$$

$$\sigma^{12}_{(1);(0)} = \mu\left(\frac{\partial\gamma_1^{(0)}}{\partial\theta_2} + \frac{\partial\gamma_2^{(0)}}{\partial\theta_1} - \frac{1}{R}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\theta_1}\right),$$

$$\sigma^{21}_{(1);(0)} = \mu\left(\frac{\partial\gamma_1^{(0)}}{\partial\theta_2} + \frac{\partial\gamma_2^{(0)}}{\partial\theta_1} + \frac{1}{R}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\theta_2}\right),$$

$$\sigma^{13}_{(0);(0)} = \mu\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta_1} - \frac{u^{(0)}}{R} + \gamma_1^{(0)}\right) = \frac{1}{2}C^{(1)},$$

$$\sigma^{23}_{(0);(9)} = \mu\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta_2} + \gamma_2^{(0)}\right) = \frac{1}{2}C^{(2)},$$

în deducerea expresiilor $\sigma^{13}_{(0);(0)}$ și $\sigma^{23}_{(0);(0)}$ am ținut seama de a patra și a cincea ecuație a sistemului (6.3).

Eliminarea lui $\gamma_1^{(0)}$, $\gamma_2^{(0)}$ conduce la sistemul

$$\left[\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\right]u^{(0)} + \frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial\theta_1\partial\theta_2} + \frac{2(1-\eta)}{R(1-2\eta)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta_1} +$$

$$+\frac{1}{2\mu}\left(R^{(1)} + \frac{1}{R}C^{(1)}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial\theta_1\partial\theta_2} + \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\right]v^{(0)} +$$

$$+\frac{2\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta_2} + \frac{1}{2\mu}R^{(2)} = 0, \tag{6.5}$$

$$\frac{2(1-\eta)}{R(1-2\eta)}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\theta_1} + \frac{2\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\theta_2} + \frac{2(1-\eta)}{R^2(1-2\eta)}w^{(0)} -$$

$$-\frac{1}{2\mu}\left(R^{(3)} + \frac{\partial C^{(1)}}{\partial\theta_1} + \frac{\partial C^{(2)}}{\partial\theta_2}\right) = 0.$$

Se observă că acest sistem are aceeaşi formă cu cel obţinut de exemplu în [3] pentru starea fără momente, prin particularizare la cilindrul circular.

6.2. STAREA DE TENSIUNE (0, 1/2)

Această stare de tensiune este caracterizată în [2] prin

$$q_u = Q + 1; \quad q_v = Q + \frac{1}{2}; \quad q_w = Q, \qquad q_{\gamma_1} = Q + 1; \quad q_{\gamma_2} = Q + \frac{1}{2}. \tag{6.6}$$

Variabilele proprii acestei stări sînt

$$\theta_1 = \alpha; \qquad \theta_2 = h^{1/2}\beta. \tag{6.7}$$

Considerăm în cadrul acestei stări de tensiune pentru funcţiile necunoscute dezvoltări de forma

$$F = h^{q_F}(F^{(0)} + h^{1/2}F^{(1)} + h^{2/2}F^{(2)} + \ldots). \tag{6.8}$$

Introducînd în sistemul de ecuaţii (3.21) — (3.25) şi identificînd deducem sistemul de ecuaţii care caracterizează prima iteraţie a stării de tensiune (0, 1/2)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial\beta^2} + \frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{3-4\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\alpha} + \frac{1}{R}\gamma_1^{(0)} = 0, \\
\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial\beta^2} + \frac{\eta}{R(1-\eta)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\beta} = 0; \qquad -\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\beta^2} - \frac{\partial\gamma_2^{(0)}}{\partial\beta} = 0, \\
-\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\alpha} - \gamma_1^{(0)} = 0; \qquad -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\beta} - \gamma_2^{(0)} = 0,
\end{gathered} \tag{6.9}$$

care este un sistem compatibil dar nedeterminat dacă se observă că cea de a treia şi cea de a cincea ecuaţie coincid dacă sînt eliminate soluţiile care nu corespund acestei stări de tensiune.

Alte două identificări dau însă

$$\frac{2\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\beta} + \frac{2(1-\eta)}{R^2(1-2\eta)}w^{(0)} - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\beta} + \gamma_2^{(2)}\right) = 0, \tag{6.10}$$

$$-\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\beta} + \frac{2(1-\eta)}{3(1-2\eta)}\frac{\partial^2\gamma_2^{(0)}}{\partial\beta^2} - \gamma_2^{(2)} = 0. \tag{6.11}$$

Eliminînd termenul $\partial w^{(2)}/\partial\beta + \gamma_2^{(2)}$ între aceste două ecuaţii rezultă cea de a cincea ecuaţie

$$\frac{3\eta}{R(1-\eta)}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\beta} + \frac{3}{R^2}w^{(0)} - \frac{\partial^3\gamma_2^{(0)}}{\partial\beta^3} = 0, \tag{6.12}$$

cu care sistemul (6.9) devine determinat.

Eliminînd succesiv necunoscutele, obținem binecunoscuta ecuație a efectului de contur simplu [3], dedusă și prin metoda dată în [2] în cazul stării de tensiune (0, 1/2)

$$\frac{\partial^4 w^{(0)}}{\partial \beta^4} + \frac{3(1-2\eta)}{R^2(1-\eta)^2} w^{(0)} = 0. \tag{6.13}$$

În cazul acesta conform cu (6.6) pentru tensiuni rezultă următorul spectru al indicilor de intensitate

Element	$\sigma^{11}_{(0)}$	$\sigma^{22}_{(0)}$	$\sigma^{12}_{(0)}$; $\sigma^{21}_{(0)}$	$\sigma^{11}_{(1)}$	$\sigma^{22}_{(1)}$	$\sigma^{12}_{(1)}$; $\sigma^{21}_{(1)}$	$\sigma^{13}_{(0)}$	$\sigma^{23}_{(0)}$
Indice intensitate	Q	$Q+1$	$Q+\frac{1}{2}$	Q	Q	$Q+\frac{1}{2}$	$Q+1$	$Q+\frac{1}{2}$

6.3. STAREA DE TENSIUNE CU INDICI DE VARIAȚIE (1/4,0)

În acest caz în [2] este dedus următorul spectru pentru indicii de intensitate ai deplasărilor

$$q_u = Q + 1/4, \quad q_v = Q + 1/2; \quad q_w = Q,$$
$$q_{\gamma_1} = Q + 3/4; \quad q_{\gamma_2} = Q + 1. \tag{6.14}$$

Variabilele proprii sînt

$$\theta_1 = h^{1/4}\ \alpha\ , \quad \theta_2 = \beta. \tag{6.15}$$

Pentru funcțiile necunoscute se consideră dezvoltări de forma

$$F = h^{q_F}(F^{(0)} + h^{1/4} F^{(1)} + h^{2/4} F^{(2)} + \ldots). \tag{6.16}$$

Înlocuind dezvoltările de tipul (6.16) în sistemul de ecuații (3.21) — (3.25) și identificînd, deducem sistemul

$$\begin{aligned}
&\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \alpha^2} + \frac{3-4\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R}\gamma_1^{(0)} = 0,\\
&\frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \alpha^2} + \frac{2\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \beta} = 0,\\
&\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \gamma_1^{(0)}}{\partial \alpha} = 0,\\
&\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \alpha} + \gamma_1^{(0)} = 0; \quad \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \beta} + \gamma_2^{(0)} = 0,
\end{aligned} \tag{6.17}$$

care, de asemenea, este compatibil dar nedeterminat, cea de a treia ecuaţie coincizînd cu cea de a cincea dacă se elimină stările de tensiune străine.

Se observă că aproximaţia celei de a treia ecuaţii (3.23) care nu este o identitate în raport cu aproximaţiile superioare ale celorlalte ecuaţii (3.21), (3.22), (3.24), (3.25), este tocmai cea de a şaptea ei iteraţie.

Aceasta are aspectul următor:

$$-\frac{3-4\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial u^{(4)}}{\partial\alpha}-\frac{2\eta}{R(1-2\eta)}\frac{\partial v^{(2)}}{\partial\beta}+\frac{\partial^2 w^{(6)}}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 w^{(4)}}{\partial\beta^2}- \tag{6.18}$$

$$-\frac{2(1-\eta)}{R^2(1-2\eta)}w^{(4)}+\frac{\partial\gamma_1^{(6)}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\gamma_2^{(4)}}{\partial\beta}=0.$$

Scriind însă aproximaţiile următoare ale ecuaţiilor (3.21), (3.22), (3.24), (3.25) poate fi extras dintre ele un sistem care permite eliminarea necunoscutelor $u^{(4)}$, $v^{(2)}$, $w^{(6)}$, $w^{(4)}$ $\gamma_2^{(4)}$, obţinîndu-se ecuaţia

$$\frac{\partial^3 v^{(0)}}{\partial\beta^3}-\frac{R(1-\eta)^2}{3(1-2\eta)}\frac{\partial^5\gamma_1^{(0)}}{\partial\alpha^5}=0. \tag{6.19}$$

Cu aceasta sistemul obţinut este determinat. Eliminarea succesivă din el a necunoscutelor generează ecuaţia corespunzătoare stării de tensiune (1/4, 0).

$$\frac{\partial^8 v^{(0)}}{\partial\alpha^8}+\frac{3(1-2\eta)}{R^2(1-\eta)^2}\frac{\partial^4 v^{(0)}}{\partial\beta^4}=0. \tag{6.20}$$

Cu aceasta stările de tensiune care apar şi în formularea clasică au fost puse în evidenţă.

6.4. STAREA DE TENSIUNE (1,0)

În acest caz, starea de tensiune (1, 0), fiind de fapt o stare de tip strat-limită, este normal să se adopte indicii de intensitate din cazul plăcii plane

$$q_u=Q+1;\ q_v=Q\ ;\ q_w=Q+1;\ q_{\gamma_1}=Q;\ q_{\gamma_2}=Q-1. \tag{6.21}$$

Variabilele proprii sînt

$$\theta_1=h\alpha\ ,\quad \theta_2=\beta, \tag{6.22}$$

iar funcţiile necunoscute se caută sub forma

$$F=h^{q_F}(F^{(0)}+hF^{(1)}+h^2F^{(2)}+\ldots) \tag{6.23}$$

Sistemul corespunzător primei iterații este

$$\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{2(1-\eta)}{3R(1-2\eta)}\cdot\frac{\partial^2\gamma_1^{(0)}}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R}\gamma_1^{(0)}=0,$$

$$\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial\alpha^2}-\frac{1}{3R}\frac{\partial^2\gamma_2^{(0)}}{\partial\alpha^2}=0,$$

$$\frac{\partial\gamma_1^{(0)}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\gamma_2^{(0)}}{\partial\beta}=0, \tag{6.24}$$

$$\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}\frac{\partial^2\gamma_1^{(0)}}{\partial\alpha^2}-3\gamma_1^{(0)}+\frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial^2\gamma_2^{(0)}}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0,$$

$$\frac{\partial^2\gamma_2^{(0)}}{\partial\alpha^2}-3\gamma_2^{(0)}=0.$$

Se observă că una dintre aceste ecuații este o consecință a celorlalte.

Reducerea acestui sistem conduce la ecuații de tip Helmholtz. Rezultă următoarea soluție:

$$u^{(0)}=\frac{1}{3\sqrt{3}\,R(1-\eta)}C'(\beta)\,e^{-\alpha\sqrt{3}},$$

$$v^{(0)}=\frac{1}{3R}\gamma_2^{(0)}=\frac{1}{3R}C(\beta)\,e^{-\alpha\sqrt{3}}, \tag{6.25}$$

$$\gamma_1^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{3}}C'(\beta)\,e^{-\alpha\sqrt{3}}.$$

Soluția astfel obținută, depinzînd de funcția arbitrară $C(\beta)$, are într-adevăr un caracter de strat-limită cu posibilitatea satisfacerii unei singure condiții de margine.

6.5. Se observă în definitiv pe această cale, că într-adevăr formularea problemei liniare pe grosime permite satisfacerea a cinci condiții marginale, patru provenind din stările de tensiune ce apar și în formularea clasică, cea de a cincea fiind oferită de starea de tensiune (1,0) sau (0,1), de tip Reissner.

Primită la redacție la 6 octombrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. В. Висарион. К. Стэнеску, *Расчет нетонких оболочек*, П. М. М., **32**, 6 (1968).
2. V. Visarion, C. Stănescu, *Calculul stărilor de tensiune în teoria plăcilor curbe*, Edit. Academiei, 1969.
3. А. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек*, Москва, 1953.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL MATRICEAL AL MECANISMELOR SPAȚIALE

de CHR. PELECUDI

Se aduc modificări metodei matriceale pentru analiza și sinteza mecanismelor spațiale, prin utilizarea unor noi triedre de referință oblice, deformabile sau nedeformabile, formate cu axele naturale ale elementelor. Se obțin matrice de transformare cu forme reduse, iar operațiile de multiplicare sînt simplificate prin simetrizarea calculelor. Sînt determinate ecuațiile independente ale rotațiilor și translațiilor în lanțurile spațiale simple închise.

Analiza sau sinteza matriceală a pozițiilor în mecanismele spațiale se bazează pe faptul că ataşînd fiecărui element din mecanism un sistem de coordonate rectangulare se utilizează matricele de transformare ale vectorilor de bază și ale vectorilor de poziții dintr-un sistem T_{i+1} față de sistemul anterior T_i (Mangeron—Drăgan) [1] — [4].

De regulă, parcurgînd lanțul cinematic închis în sens trigonometric, vom considera elementul E_i cuprins între axele cuplelor de versori $\overline{e}_i$ și $\overline{e}_{i+1}$ fiind caracterizat totodată și prin normala de versor $\overline{n}_i$ dintre axele mai sus indicate. Solidare cu elementul E_i se pot considera două feluri de triedre T_{i+1} și T^*_{i+1} față de care elementul E_{i+1} are mișcare relativă.

Astfel triedrul T^*_{i+1} al elementului E_i are originea în punctul A^*_i (fig. 1), axa x_{i+1} îndreptată după axa cuplei $\overline{e}_i$, axa Z_{i+1} îndreptată după normala $\overline{n}_i$ și axa y_{i+1} perpendiculară pe primele două în sensul rotației pozitive $\overline{n}_i \times \overline{e}_i$.

Mai generalizat în utilizare [1], [5], [6] este triedrul T^0_{i+1} tot al elementului E_i cu originea în punctul B^0_{i+1} și cu axa x_{i+1} după normala $\overline{n}_i$, axa Z_{i+1} îndreptată după axa $\overline{e}_{i+1}$ și axa y_{i+1} după versorul $\overline{e}_{i+1} \times \overline{n}_i$ (fig. 1).

Ambele triedre au originea pe aceeași normală $\overline{n}_i$ în puncte diferite A^*_i și B^0_{i+1} pe axe diferite $\overline{e}_i$ și $\overline{e}_{i+1}$, unul fiind așezat la capătul din dreapta, celălalt la capătul din stînga ale elementului respectiv E_i.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970, P. 1291 — 1313

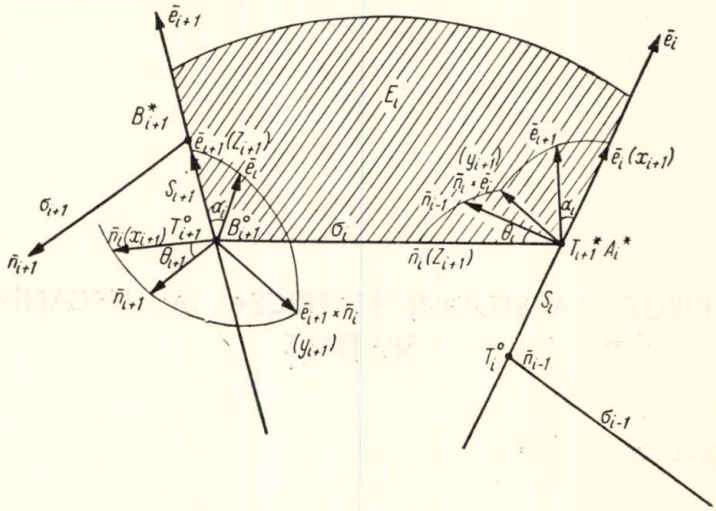

$\bar{e}_{i+1}$
$\bar{e}_i$
B^*_{i+1}
Σ_i
$\bar{e}_{i+1}(Z_{i+1})$
$\bar{e}_i$
(y_{i+1})
$\bar{e}_{i+1}$
$\bar{e}_i(x_{i+1})$
$\bar{n}_i \times \bar{e}_i$
$\bar{n}_{i-1}$
σ_{i+1}
S_{i+1}
α_i
$\bar{n}_i(x_{i+1})$
T°_{i+1}
B°_{i+1}
σ_i
θ_i
T^*_{i+1} A^*_i
θ_{i+1}
$\bar{n}_i(Z_{i+1})$
$\bar{n}_{i+1}$
S_i
$\bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i$
(y_{i+1})
T°_i
$\bar{n}_{i-1}$
σ_{i-1}

Fig. 1

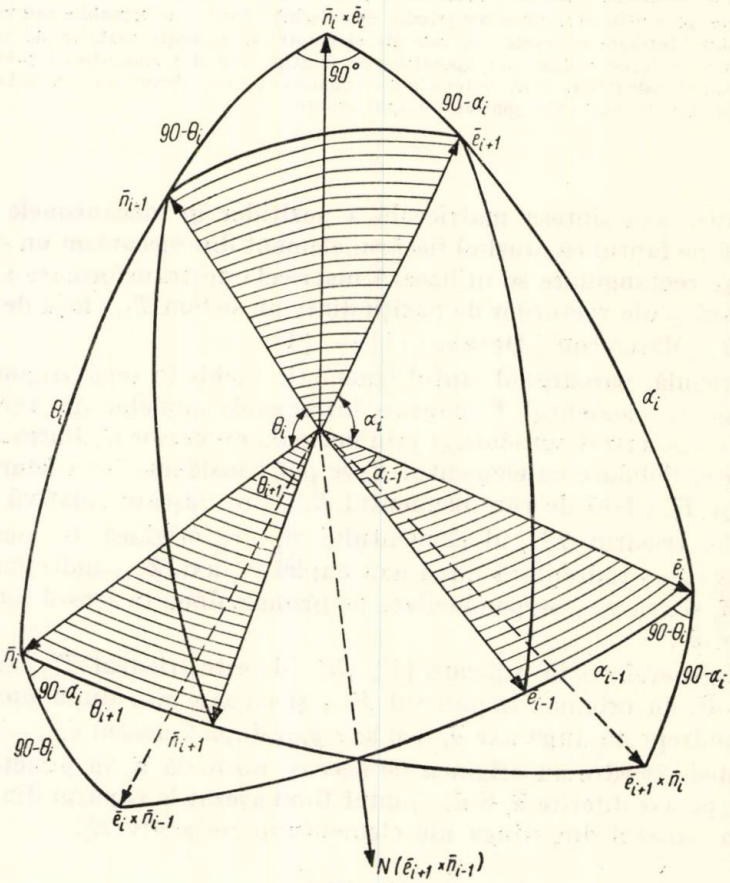

$\bar{n}_i \times \bar{e}_i$
$90°$
$90-\alpha_i$
$90-\theta_i$
$\bar{e}_{i+1}$
$\bar{n}_{i-1}$
θ_i
α_i
α_i
θ_{i+1}
α_{i-1}
$\bar{e}_i$
$\bar{n}_i$
$90-\theta_i$
$90-\alpha_i$
α_{i-1}
$90-\alpha_i$
θ_{i+1}
$90-\theta_i$
$\bar{n}_{i+1}$
$\bar{e}_{i-1}$
$\bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i$
$\bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1}$
$N(\bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_{i-1})$

Fig. 2

Utilizînd notațiile θ pentru unghiul de rotație și α pentru unghiul de încrucișare (fig. 2), avem

$$\cos \alpha_i = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_{i+1}, \qquad \sin \alpha_i \bar{n}_i = \bar{e}_i \times \bar{e}_{i+1}, \tag{1}$$

$$\cos \theta_i = \bar{n}_{i-1} \cdot \bar{n}_i, \qquad \sin \theta_i \bar{e}_i = \bar{n}_{i-1} \times \bar{n}_i \tag{2}$$

și deci

$$\begin{aligned} \bar{e}_{i+1} &= \cos \alpha_i \bar{e}_i + \sin \alpha_i \bar{n}_i \times \bar{e}_i, \\ \bar{e}_i &= \cos \alpha_i \bar{e}_{i+1} + \sin \alpha_i \bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i ; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \bar{n}_i &= \cos \theta_i \bar{n}_{i-1} + \sin \theta_i \bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_{i-1}, \\ \bar{n}_{i-1} &= \cos \theta_i \bar{n}_i + \sin \theta_i \bar{n}_i \times \bar{e}_i ; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\bar{e}_{i-1} \cdot \bar{e}_{i+1} = \cos \alpha_{i-1} \cos \alpha_i - \sin \alpha_{i-1} \sin \alpha_i \cos \theta_i,$$

$$\bar{n}_{i-1} \cdot \bar{n}_{i+1} = \cos \theta_i \cos \theta_{i+1} - \sin \theta_i \sin \theta_{i+1} \cos \alpha_i . \tag{5}$$

Deplasarea de translație s_i și lungimea normalei σ_i se măsoară pozitiv după direcțiile și sensurile $\bar{e}_i$ și $\bar{n}_i$ între picioarele perpendicularelor respective (fig. 1).

Dar în locul triedrelor drepte se pot utiliza triedrele oblice formate cu axele naturale ale elementelor. De exemplu în primul caz se poate lua axa y de pe axa de versor $\bar{e}_{i+1}$ sau de pe normala de versor $\bar{n}_{i-1}$. În mod similar în al doilea caz axa y poate fi aleasă de pe normala $\bar{n}_i$ sau de pe axa $\bar{e}_{i-1}$. Cele două feluri de triedre drepte

$$T^*_{i+1} E_i [\bar{e}_i, \bar{n}_i \times \bar{e}_i, \bar{n}_i]; \; T^0_{i+1} E_i [\bar{n}_i, \bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i, \bar{e}_{i+1}], \tag{6}$$

se înlocuiesc cu triedrele oblice

$$T^*_{n(i+1)} E_i [\bar{e}_i, \bar{e}_{i+1}, \bar{n}_i]; \; T^*_{d(i+1)} E_i [\bar{e}_i, \bar{n}_{i-1}, \bar{n}_i], \tag{7}$$

$$T^0_{d(i+1)} E_i [\bar{n}_i, \bar{n}_{i+1}, \bar{e}_{i+1}]; \; T^0_{n(i+1)} E_i [\bar{n}_i, \bar{e}_i, \bar{e}_{i+1}]. \tag{8}$$

Triedrele oblice însemnate prin n sînt triedre nedeformabile, cuprinzînd două axe de cuple între care se află unghiul α constant. Cele însemnate prin d sînt triedre deformabile formate cu două normale între care se află unghiul θ variabil. Triedrele oblice consecutive au cîte două axe paralele și rezolvările diverselor probleme se pot simplifica. Se mai observă că triedrele oblice nedeformabile T^*_n și T^0_n sau deformabile T^*_d și T^0_d sînt formate din aceleași axe dar cu ordinea lor permutată.

Schimbarea sistemelor de referință [1]. Două triedre de referință sînt reciproce dacă sînt constituite din două baze de vectori reciproci. Aceste

baze reciproce contravariante $T_e\,(\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)$ şi covariante $T^e\,(\bar{e}^1\ \bar{e}^2\ \bar{e}^3)$ sînt legate prin relaţiile

$$E\bar{e}^1 = \bar{e}_2 \times \bar{e}_3,\ E\bar{e}^2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1,\ E\bar{e}^3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2,$$

$$E^{-1}\,\bar{e}_1 = \bar{e}^2 \times \bar{e}^3,\ E^{-1}\,\bar{e}_2 = \bar{e}^3 \times \bar{e}^1,\ E^{-1}\,\bar{e}_3 = \bar{e}^1 \times \bar{e}^2, \tag{9}$$

în care

$$E = \bar{e}_1\,\bar{e}_2\,\bar{e}_3 \neq 0,\quad E^{-1} = \bar{e}^1\,\bar{e}^2\,\bar{e}^3 \neq 0,$$

$$EE^{-1} = 1,\ \bar{e}_1 \times \bar{e}^1 + \bar{e}_2 \times \bar{e}^2 + \bar{e}_3 \times \bar{e}^3 = 0. \tag{10}$$

Produsele scalare între vectorii bazelor reciproce conduc la coeficienţii Kronecker δ_i^j

$$\bar{e}_i\,\bar{e}^j = \delta_i^j = 0,\ \text{pentru } i \neq j,$$

$$\bar{e}_i\,\bar{e}^i = \delta_i^i = 1,\ \text{pentru } i = j. \tag{11}$$

Acestea arată că vectorii de indici diferiţi ai bazelor reciproce sînt ortogonali. Totodată, în general nu sînt unitari, căci depind de unghiurile α, β, γ dintre vectorii de aceeaşi indici.

Schimbările bazelor contravariante $T_e(\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)$ în $T_f\ (f_1 f_2 \bar{f}_3)$ sau covariante $T^e(\bar{e}^1\ \bar{e}^2\ \bar{e}^3)$ în $T^f[\bar{f}^1\ \bar{f}^2\ \bar{f}^3]$ a două sisteme de referinţă TE şi TF se fac prin transformări liniare inverse de matrice nesingulare A şi B ale căror elemente

$$a_i^j = \bar{f}_i\,\bar{e}^j \qquad b_i^j = \bar{e}_i \cdot \bar{f}^j, \tag{12}$$

satisfac relaţiile $a_i^\gamma\, b_\gamma^j = \delta_i^j$ adică $A \cdot B = 1$.

La schimbările bazelor contravariante avem sub formă vectorială expresiile:

$$\bar{f}_1 = a_1^1\,\bar{e}_1 + a_1^2\,\bar{e}_2 + a_1^3\,\bar{e}_3,\ \bar{e}_1 = b_1^1\,\bar{f}_1 + b_1^2\,\bar{f}_2 + b_1^3\,f_3,$$

$$\bar{f}_2 = a_2^1\,\bar{e}_1 + a_2^2\,\bar{e}_2 + a_2^3\,\bar{e}_3,\ \bar{e}_2 = b_2^1\,\bar{f}_1 + b_2^2\,\bar{f}_2 + b_2^3\,\bar{f}_3, \tag{13}$$

$$\bar{f}_3 = a_3^1\,\bar{e}_1 + a_3^2\,\bar{e}_2 + a_3^3\,\bar{e}_3,\ \bar{e}_3 = b_3^1\,\bar{f}_1 + b_3^2\,\bar{f}_2 + b_3^3\,\bar{f}_3$$

sau matriceală

$$|\,T_f\,| = A\,|\,T_e\,|;\quad |\,T_e\,| = B\,|\,T_f\,|, \tag{14}$$

unde

$$|T_f| = \begin{vmatrix} f_1 \\ \bar{f}_2 \\ f_3 \end{vmatrix}, \quad |T_e| = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{vmatrix} \tag{15}$$

reprezintă matricele unicoloană ale bazelor de vectori contravarianți, iar

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{vmatrix} \tag{16}$$

sînt matricele de transformare.

În același mod la schimbarea bazelor covariante avem în exprimare vectorială următoarele expresii :

$$\begin{aligned} \bar{f}^1 &= b_1^1 \bar{e}^1 + b_2^1 \bar{e}^2 + b_3^1 \bar{e}^3, \quad \bar{e}^1 = a_1^1 \bar{f}^1 + a_2^1 \bar{f}^2 + a_3^1 \bar{f}^3, \\ \bar{f}^2 &= b_1^2 \bar{e}^1 + b_2^2 \bar{e}^2 + b_3^2 \bar{e}^3, \quad \bar{e}^2 = a_1^2 \bar{f}^1 + a_2^2 \bar{f}^2 + a_3^2 \bar{f}^3, \\ \bar{f}^3 &= b_1^3 \bar{e}^1 + b_2^3 \bar{e}^2 + b_3^3 \bar{e}^3, \quad \bar{e}^3 = a_1^3 \bar{f}^1 + a_2^3 \bar{f}^2 + a_3^3 \bar{f}^3 \end{aligned} \tag{17}$$

sau matriceală

$$\underline{\overline{T^f}} = \underline{\overline{T^e}}\, B; \quad \underline{\overline{T^e}} = \underline{\overline{T^f}}\, A, \tag{18}$$

în care

$$\underline{\overline{T^f}} = \underline{\overline{\bar{f}^1 \bar{f}^2 \bar{f}^3}}, \quad \underline{\overline{T^e}} = \underline{\overline{\bar{e}^1 \bar{e}^2 \bar{e}^3}} \tag{19}$$

reprezintă matricele unilinie ale bazelor de vectori covarianți.

Calculul elementelor matricelor a sau b se face cu ajutorul unghiurilor dintre vectorii de bază ai sistemelor de referință (fig. 2).

a) Pentru transformarea bazelor triedrelor oblice nedeformabile

$T^*_{n(i+1)}[\bar{e}_1 = \bar{e}_i, \ \bar{e}_2 = \bar{e}_{i+1}, \ \bar{e}_3 = \bar{n}_i]$ în $T^*_{ni}[\bar{f}_1 = \bar{e}_{i-1}, \ \bar{f}_2 = \bar{e}_i, \ \bar{f}_3 = \bar{n}_{i-1}$

se calculează mai întîi vectorii bazelor reciproce :

$$E = \bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) = \bar{e}_i(\bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i) = \sin \alpha_i, \tag{20}$$

$$E\bar{e}^1 = \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i = \frac{\bar{e}_i - \cos \alpha_i \bar{e}_{i+1}}{\sin \alpha_i} = \frac{\bar{n}_{i+1} - \cos \theta_{i+1} \bar{n}_i}{\sin \theta_{i+1}},$$

$$E\bar{e}^2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 = \bar{n}_i \times \bar{e}_i = \frac{\bar{e}_{i+1} - \cos \alpha_i \bar{e}_i}{\sin \alpha_i} = \frac{\bar{n}_{i-1} - \cos \theta_i \bar{n}_i}{\sin \theta_i},$$

$$E\bar{e}^3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_i \times \bar{e}_{i+1} = \sin \alpha_i \bar{n}_i,$$

$$F = \bar{f}_1(\bar{f}_2 \times \bar{f}_3) = \bar{e}_{i-1}(\bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1}) = \sin \alpha_{i-1}, \tag{21}$$

$$F\bar{f}^1 = \bar{f}_2 \times \bar{f}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{n}_{1-1} = \frac{\bar{e}_{i-1} - \cos \alpha_{i-1} \bar{e}_i}{\sin \alpha_{1-1}} = \frac{\bar{n}_i - \cos \theta_i \bar{n}_{i-1}}{\sin \theta_i},$$

$$F\bar{f}^2 = \bar{f}_3 \times \bar{f}_1 = \bar{n}_{i-1} \times \bar{e}_{i-1} = \frac{\bar{e}_i - \cos \alpha_{i-1} \bar{e}_{i-1}}{\sin \alpha_{i-1}} = \frac{\bar{n}_{i-2} - \cos \theta_{i-1} \bar{n}_{i-1}}{\sin \theta_{i-1}},$$

$$F\bar{f}^3 = \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \bar{e}_{i-1} \times \bar{e}_i = \sin \alpha_{i-1} \bar{n}_{i-1}.$$

Apoi se determină elementele matricelor de transformare A şi B, adică

$$a_1^1 = \bar{f}_1 \bar{e}^1 = \bar{e}_{i-1}\left(\frac{\bar{e}_i - \cos \alpha_i \bar{e}_{i+1}}{\sin^2 \alpha_i}\right) = (\cos \alpha_{i-1} \sin \alpha_i +$$

$$+ \sin \alpha_{i-1} \cos \alpha_i \cos \theta_i) \frac{1}{\sin \alpha_i},$$

$$a_1^2 = \bar{f}_1 \bar{e}^2 = \bar{e}_{i-1} \frac{\bar{n}_i \times \bar{e}_i}{\sin \alpha_i} = -\frac{\sin \alpha_{i-1} \cos \theta_i}{\sin \alpha_i},$$

$$a_1^3 = \bar{f}_1 \bar{e}^3 = \bar{e}_{i-1} \cdot \bar{n}_i = \bar{e}_{i-1}(\cos \theta_i \bar{n}_{i-1} + \sin \theta_i \bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1}) = \tag{22}$$

$$= \sin \alpha_{i-1} \sin \theta_i,$$

$$a_2^1 = \bar{f}_2 \bar{e}^1 = \bar{e}_i\left(\frac{\bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i}{\sin \alpha_i}\right) = 1,$$

$$a_2^2 = \bar{f}_2\,\bar{e}^2 = \bar{e}_i\left(\frac{\bar{n}_i \times \bar{e}_i}{\sin\alpha_i}\right) = 0,$$

$$a_2^3 = \bar{f}_2\,\bar{e}^3 = \bar{e}_i\left(\frac{\bar{e}_i \times \bar{e}_{i+1}}{\sin\alpha_i}\right) = 0,$$

$$a_3^1 = \bar{f}_3\,\bar{e}^1 = \bar{n}_{i-1}\left(\frac{\bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i}{\sin\alpha_i}\right) = -\frac{\sin\theta_i \cos\alpha_i}{\sin\alpha_i},$$

$$a_3^2 = \bar{f}_3\,\bar{e}^2 = \bar{n}_{i-1}\,\frac{\bar{n}_i \times \bar{e}_i}{\sin\alpha_i} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\alpha_i},$$

$$a_3^3 = \bar{f}_3\bar{e}^3 = \bar{n}_{i-1} \cdot \bar{n}_i = \cos\theta_i,$$

$$b_1^1 = \bar{e}_1\,\bar{f}^1 = \bar{e}_i\left(\frac{\bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}}\right) = 0,$$

$$b_1^2 = \bar{e}_1\,\bar{f}^2 = \bar{e}_i\left(\frac{\bar{n}_{i-1} \times \bar{e}_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}}\right) = 1,$$

$$b_1^3 = \bar{e}_1\,\bar{f}^3 = \bar{e}_i\left(\frac{\bar{e}_{i-1} \times \bar{e}_i}{\sin\alpha_{i-1}}\right) = 0,$$

$$b_2^1 = \bar{e}_2\,\bar{f}^1 = \bar{e}_{i+1}\left(\frac{\bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}}\right) = -\frac{\sin\alpha_i \cos\theta_i}{\sin\alpha_{i-1}},$$

$$b_2^2 = \bar{e}_2\,\bar{f}^2 = \bar{e}_{i+1}\left(\frac{\bar{e}_i - \cos\alpha_{i-1}\,\bar{e}_{i-1}}{\sin^2\alpha_{i-1}}\right) =$$

$$= \frac{\sin\alpha_{i-1}\cos\alpha_i + \sin\alpha_i \cos\alpha_{i-1}\cos\theta_i}{\sin\alpha_{i-1}}, \qquad (23)$$

$$b_2^3 = \bar{e}_2\,\bar{f}_3 = \bar{e}_{i+1} \cdot \bar{n}_{i-1} = \sin\alpha_i \sin\theta_i,$$

$$b_3^1 = \bar{e}_3\,\bar{f}^1 = \bar{n}_i \cdot \frac{\bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\alpha_{i-1}},$$

$$b_3^2 = \bar{e}_3\,\bar{f}^2 = \bar{n}_i \cdot \frac{\bar{n}_{i-1} \times \bar{e}_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}} = -\frac{\sin\theta_i \cos\alpha_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}},$$

$$b_3^3 = \bar{e}_3\,\bar{f}^3 = \bar{n}_i \cdot \bar{n}_{i-1} = \cos\theta_i.$$

Se obţin deci transformările matriceale

$$\left|\begin{array}{l} \bar{f}_1 = \bar{e}_{i-1} \\ \bar{f}_2 = \bar{e}_i \\ \bar{f}_3 = \bar{n}_{i-1} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} \cos\alpha_{i-1} + & & \\ + \dfrac{\sin\alpha_{i-1}\cos\alpha_i\cos\theta_i}{\sin\alpha_i} & - \dfrac{\sin\alpha_{i-1}\cos\theta_i}{\sin\alpha_i} & \sin\alpha_{i-1}\sin\theta_i \\ 1 & 0 & 0 \\ - \dfrac{\sin\theta_i\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i} & \dfrac{\sin\theta_i}{\sin\alpha_i} & \cos\theta_i \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} \bar{e}_1 = \bar{e}_i \\ \bar{e}_2 = \bar{e}_{i+1} \\ \bar{e}_3 = \bar{n}_i \end{array}\right| \tag{24}$$

şi

$$\left|\begin{array}{l} \bar{e}_1 = \bar{e}_i \\ \bar{e}_2 = \bar{e}_{i+1} \\ \bar{e}_3 = \bar{n}_i \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ - \dfrac{\sin\alpha_i\cos\theta_i}{\sin\alpha_{i-1}} & \cos\alpha_i + \dfrac{\sin\alpha_i\cos\alpha_{i-1}\cos\theta_i}{\sin\alpha_{i-1}} & \sin\alpha_i\sin\theta_i \\ \dfrac{\sin\theta_i}{\sin\alpha_{i-1}} & - \dfrac{\sin\theta_i\cos\alpha_{i-1}}{\sin\alpha_{i-1}} & \cos\theta_i \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} \bar{f}_1 = \bar{e}_{i-1} \\ \bar{f}_2 = \bar{e}_i \\ \bar{f}_3 = \bar{n}_{i-1} \end{array}\right| \tag{25}$$

sau

$$\begin{aligned} T^*_{ni} &= A^*_i\, T^*_{n(i+1)}, \\ T^*_{n(i+1)} &= B^*_i\, T^*_{ni}. \end{aligned} \tag{26}$$

Prin explicitarea produselor matriceale obţinem legăturile vectoriale :

$$\begin{aligned} \bar{e}_{i-1} &= a^1_1\,\bar{e}_i + a^2_1\,\bar{e}_{i+1} + a^3_1\,\bar{n}_i, \\ \bar{n}_{i-1} &= a^1_3\,\bar{e}_i + a^2_3\,\bar{e}_{i+1} + a^3_3\,\bar{n}_i \end{aligned} \tag{27}$$

şi

$$\begin{aligned} \bar{e}_{i+1} &= b^1_2\,\bar{e}_{i-1} + b^2_2\,\bar{e}_i + b^3_2\,\bar{n}_{i-1}, \\ \bar{n}_i &= b^1_3\,\bar{e}_{i-1} + b^2_3\,\bar{e}_i + b^3_3\,\bar{n}_{i-1}, \end{aligned} \tag{28}$$

astfel că metoda matriceală are avantajul că redă dintr-o dată componentele a doi versori faţă de versorii bazei anterioare.

b) Transformarea bazelor triedrelor oblice deformabile

$T^0_{a(i+1)}[\bar{e}_1 = \bar{n}_i,\ \bar{e}_2 = \bar{n}_{i+1},\ \bar{e}_3 = \bar{e}_{i+1}]$ în $T^0_{ai}[\bar{f}_1 = \bar{n}_{i-1},\ \bar{f}_2 = \bar{n}_i,\ \bar{f}_3 = \bar{e}_i]$,

se obține după același procedeu:

$$E = \bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) = \bar{n}_i(\bar{n}_{i+1} \times \bar{e}_{i+1}) = \sin\theta_{i+1},$$

$$E\bar{e}^1 = \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \bar{n}_{i+1} \times \bar{e}_{i+1} = \frac{\bar{n}_i - \cos\theta_{i+1}\,\bar{n}_{i+1}}{\sin\theta_{i+1}} = \frac{\bar{e}_{i+2} - \cos\alpha_{i+1}\bar{e}_{i+1}}{\sin\alpha_{i+1}},$$

$$E\bar{e}^2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 = \bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i = \frac{\bar{e}_i - \cos\alpha_i\,\bar{e}_{i+1}}{\sin\alpha_i} = \frac{\bar{n}_{i+1} - \cos\theta_{i+1}\,\bar{n}_i}{\sin\theta_{i+1}},$$

$$E\bar{e}^3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \bar{n}_i \times \bar{n}_{i+1} = \sin\theta_{i+1}\,\bar{e}_{i+1}; \tag{29}$$

$$F = \bar{f}_1(\bar{f}_2 \times \bar{f}_3) = \bar{n}_{i-1}(\bar{n}_i \times \bar{e}_i) = \sin\theta_i,$$

$$F\bar{f}^1 = \bar{n}_i \times \bar{e}_i = \frac{\bar{n}_{i-1} - \cos\theta_i\,\bar{n}_i}{\sin\theta_i} = \frac{\bar{e}_{i+1} - \cos\alpha_i\,\bar{e}_i}{\sin\alpha_i}, \tag{30}$$

$$F\bar{f}^2 = \bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1} = \frac{\bar{e}_{i-1} - \cos\alpha_{i-1}\,\bar{e}_i}{\sin\alpha_{i-1}} = \frac{\bar{n}_i - \cos\theta_i\,\bar{n}_{i-1}}{\sin\theta_i},$$

$$F\bar{f}^3 = \bar{n}_{i-1} \times \bar{n}_i = \sin\theta_i\,\bar{e}_i;$$

$$a_1^1 = \bar{f}_1\,\bar{e}^1 = \bar{n}_{i-1}\left(\frac{\bar{n}_i - \cos\theta_{i+1}\,\bar{n}_{i+1}}{\sin\theta_{i+1}}\right) = \cos\theta_i + \frac{\cos\alpha_i \sin\theta_i \cos\theta_{i+1}}{\sin\theta_{i+1}},$$

$$a_1^2 = \bar{f}_1\,\bar{e}^2 = \bar{n}_{i-1}\,\frac{\bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i}{\sin\theta_{i+1}} = -\frac{\cos\alpha_i \sin\theta_i}{\sin\theta_{i+1}},$$

$$a_1^3 = \bar{f}_1\,\bar{e}^3 = \bar{n}_{i-1} \cdot \bar{e}_{i+1} = \sin\alpha_i \sin\theta_i,$$

$$a_2^1 = \bar{f}_2\,\bar{e}^1 = \bar{n}_i \cdot \frac{\bar{n}_{i+1} \times \bar{e}_{i+1}}{\sin\theta_{i+1}} = 1,$$

$$a_2^2 = \bar{f}_2\,\bar{e}^2 = \bar{n}_i \cdot \frac{\bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i}{\sin\theta_{i+1}} = 0, \tag{31}$$

$$a_2^3 = \bar{f}_2\,\bar{e}^3 = \bar{n}_i\,\frac{\bar{n}_i \times \bar{n}_{i+1}}{\sin\theta_{i+1}} = 0,$$

$$a_3^1 = \bar{f}_3\,\bar{e}^1 = \bar{e}_i\,\frac{\bar{n}_{i+1}\times\bar{e}_{i+1}}{\sin\theta_{i+1}} = -\,\frac{\sin\alpha_i\cos\theta_{i+1}}{\sin\theta_{i+1}}\,,$$

$$a_3^2 = \bar{f}_3\,\bar{e}^2 = \bar{e}_i\,\frac{\bar{e}_{i+1}\times\bar{n}_i}{\sin\theta_{i+1}} = \frac{\sin\alpha_i}{\sin\theta_{i+1}}\,,$$

$$a_3^3 = \bar{f}_3\,\bar{e}^3 = \bar{e}_i\cdot\bar{e}_{i+1} = \cos\alpha_i\,,$$

$$b_1^1 = \bar{e}_1\,\bar{f}^1 = \bar{n}_i\,\frac{\bar{n}_i\times\bar{e}_i}{\sin\theta_i} = 0, \tag{32}$$

$$b_1^2 = \bar{e}_1\,\bar{f}^2 = \bar{n}_i\cdot\frac{\bar{e}_i\times\bar{n}_{i-1}}{\sin\theta_i} = 1,$$

$$b_1^3 = \bar{e}_1\,\bar{f}^3 = \bar{n}_i\cdot\bar{e}_i = 0,$$

$$b_2^1 = \bar{e}_2\,\bar{f}^1 = \bar{n}_{i+1}\,\frac{\bar{n}_i\times\bar{e}_i}{\sin\theta_i} = -\,\frac{\cos\alpha_i\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i}\,,$$

$$b_2^2 = \bar{e}_2\,\bar{f}^2 = \bar{n}_{i+1}\,\frac{\bar{n}_i - \cos\theta_i\cdot\bar{n}_{i-1}}{\sin^2\theta_i} = \cos\theta_{i+1} + \frac{\cos\alpha_i\cos\theta_i\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i}\,,$$

$$b_2^3 = \bar{e}_2\,\bar{f}^3 = \bar{n}_{i+1}\cdot\bar{e}_i = \sin\alpha_i\sin\theta_{i+1}\,,$$

$$b_3^1 = \bar{e}_3\,\bar{f}^1 = \bar{e}_{i+1}\,\frac{\bar{n}_i\times\bar{e}_i}{\sin\theta_i} = \frac{\sin\alpha_i}{\sin\theta_i}\,,$$

$$b_3^2 = \bar{e}_3\,\bar{f}^2 = \bar{e}_{i+1}\,\frac{\bar{e}_i\times\bar{n}_{i-1}}{\sin\theta_i} = -\,\frac{\sin\alpha_i\cos\theta_i}{\sin\theta_i}\,,$$

$$b_3^3 = \bar{e}_3\,\bar{f}^3 = \bar{e}_{i+1}\cdot\bar{e}_i = \cos\alpha_i.$$

Deci

$$T_{di}^0 = A_i^0\,T_{d(i+1)}^0\,,$$
$$T_{d(i+1)}^0 = B_i^0\,T_{di}^0\,, \tag{33}$$

unde

$$|\,T_{di}^0| = \begin{vmatrix} \bar{f}_1 = \bar{n}_{i-1} \\ \bar{f}_2 = \bar{n}_i \\ \bar{f}_3 = \bar{e}_i \end{vmatrix}, \quad |\,T_{d(i+1)}^0| = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 = \bar{n}_i \\ \bar{e}_2 = \bar{n}_{i+1} \\ \bar{e}_3 = \bar{e}_{i+1} \end{vmatrix} \tag{34}$$

și

$$A_i^0 = \begin{vmatrix} \cos\theta_i + & & \\ + \dfrac{\cos\alpha_i \sin\theta_i \cos\theta_{i+1}}{\sin\theta_{i+1}} & - \dfrac{\cos\alpha_i \sin\theta_i}{\sin\theta_{i+1}} & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ 1 & 0 & 0 \\ - \dfrac{\sin\alpha_i \cos\theta_{i+1}}{\sin\theta_{i+1}} & \dfrac{\sin\alpha_i}{\sin\theta_{i+1}} & \cos\alpha_i \end{vmatrix}, \tag{35}$$

$$B_i^0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \cos\theta_{i+1} + & \\ - \dfrac{\cos\alpha_i \sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i} & + \dfrac{\cos\alpha_i \cos\theta_i \sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i} & \sin\alpha_i \sin\theta_{i+1} \\ \dfrac{\sin\alpha_i}{\sin\theta_i} & - \dfrac{\sin\alpha_i \cos\theta_i}{\sin\theta_i} & \cos\alpha_i \end{vmatrix}. \tag{36}$$

De asemenea vectorial avem

$$\begin{aligned} \overline{n}_{i-1} &= a_1^1 \overline{n}_i + a_1^2 \overline{n}_{i+1} + a_1^3 \overline{e}_{i+1}, \\ \overline{e}_i &= a_3^1 \overline{n}_i + a_3^2 \overline{n}_{i+1} + a_3^3 \overline{e}_{i+1} \end{aligned} \tag{37}$$

și invers

$$\begin{aligned} \overline{n}_{i+1} &= b_2^1 \overline{n}_{i-1} + b_2^2 \overline{n}_i + b_2^3 \overline{e}_i, \\ \overline{e}_{i+1} &= b_3^1 \overline{n}_{i-1} + b_3^2 \overline{n}_i + b_3^3 \overline{e}_i. \end{aligned} \tag{38}$$

c) Transformarea bazelor triedrelor drepte este mai simplă deoarece bazele reciproce, contra și covariante, se confundă.

Astfel, pentru triedrele $T_{i+1}^* [\overline{e}_i, \overline{n}_i \times \overline{e}_i; \overline{n}_i]$ și $T_i^* [\overline{e}_{i-1}; \overline{n}_{i-1} \times \times \overline{e}_{i-1}, \overline{e}_{i-1}]$ obținem:

$$\begin{aligned} a_1^1 &= b_1^1 = \overline{f}_1 \overline{e}_1 = \overline{e}_{i-1} \overline{e}_i = \cos\alpha_{i-1}, \\ a_1^2 &= b_2^1 = \overline{f}_1 \overline{e}_2 = \overline{e}_{i-1} \cdot (\overline{n}_i \times \overline{e}_i) = -\sin\alpha_{i-1} \cos\theta_i, \\ a_1^3 &= b_3^1 = \overline{f}_1 \overline{e}_3 = \overline{e}_{i-1} \cdot \overline{n}_i = \sin\alpha_{i-1} \sin\theta_i, \\ a_2^1 &= b_1^2 = \overline{f}_2 \overline{e}_1 = (\overline{n}_{i-1} \times \overline{e}_{i-1}) \overline{e}_i = \sin\alpha_{i-1}, \\ a_2^2 &= b_2^2 = \overline{f}_2 \overline{e}_2 = (\overline{n}_{i-1} \times \overline{e}_{i-1}) (\overline{n}_i \times \overline{e}_i) = \cos\alpha_{i-1} \cos\theta_i, \end{aligned} \tag{39}$$

$$a_2^3 = b_3^2 = \bar{f}_2\,\bar{e}_3 = (\bar{n}_{i-1}\times\bar{e}_{i-1})\,\bar{n}_i = -\cos\alpha_{i-1}\sin\theta_i,$$

$$a_3^1 = b_1^3 = \bar{f}_3\,\bar{e}_1 = \bar{n}_{i-1}\,\bar{e}_i = 0,$$

$$a_3^2 = b_2^3 = \bar{f}_3\cdot\bar{e}_2 = \bar{n}_{i-1}\,(\bar{n}_i\times\bar{e}_i) = \sin\theta_i,$$

$$a_3^3 = b_3^3 = \bar{f}_3\,\bar{e}_3 = \bar{n}_{i-1}\cdot\bar{n}_i = \cos\theta_i.$$

Deci

$$A_i^* = \begin{vmatrix} \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1}\cos\theta_i & \sin\alpha_{i-1}\sin\theta_i \\ \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}\cos\theta_i & -\cos\alpha_{i-1}\sin\theta_i \\ 0 & \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{vmatrix} = B_{ii}^* \tag{40}$$

și

$$B_i^* = \begin{vmatrix} \cos\alpha_{i-1} & \sin\alpha_{i-1} & 0 \\ -\sin\alpha_{i-1}\cos\theta_i & \cos\alpha_{i-1}\cos\theta_i & \sin\theta_i \\ \sin\alpha_{i-1}\sin\theta_i & -\cos\alpha_{i-1}\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{vmatrix} = A_{ii}^*, \tag{41}$$

cu

$$\begin{aligned} T_i^* &= A_i^*\,T_{i+1}^*, \\ T_{i+1}^* &= B_i^*\,T_i^*. \end{aligned} \tag{42}$$

Pentru triedrele $T_{i+1}^0\,[\bar{n}_i,\ \bar{e}_{i+1}\times\bar{n}_i,\ \bar{e}_{i+1}]$ și $T_i^0\,[\bar{n}_{i-1},\ \bar{e}_i\times\bar{n}_{i-1},\ \bar{e}_i]$ se obțin

$$a_1^1 = b_1^1 = \bar{n}_{i-1}\cdot\bar{n}_i = \cos\theta_i,$$

$$a_1^2 = b_2^1 = \bar{n}_{i-1}\,(\bar{e}_{i+1}\times\bar{n}_i) = -\cos\alpha_i\sin\theta_i,$$

$$a_1^3 = b_3^1 = \bar{n}_{i-1}\,\bar{e}_{i+1} = \sin\alpha_i\sin\theta_i,$$

$$a_2^1 = b_1^2 = (\bar{e}_i\times\bar{n}_{i-1})\cdot\bar{n}_i = \sin\theta_i,$$

$$a_2^2 = b_2^2 = (\bar{e}_i\times\bar{n}_{i-1})\,(\bar{e}_{i+1}\times\bar{n}_i) = \cos\alpha_i\cos\theta_i, \tag{43}$$

$$a_2^3 = b_3^2 = (\bar{e}_i\times\bar{n}_{i-1})\,\bar{e}_{i+1} = -\sin\alpha_i\cos\theta_i,$$

$$a_3^1 = b_1^3 = \bar{e}_i\cdot\bar{n}_i = 0,$$

$$a_3^2 = b_2^3 = \bar{e}_i\,(\bar{e}_{i+1}\times\bar{n}_i) = \sin\alpha_i,$$

$$a_3^3 = b_3^3 = \bar{e}_i\cdot\bar{e}_{i+1} = \cos\alpha_i,$$

astfel că

$$A_i^0 = \begin{vmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{vmatrix} = B_{ii}^0, \qquad (44)$$

$$B_i^0 = \begin{vmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & \sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i \sin\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & \cos\alpha_i \end{vmatrix} = A_{ii}^0$$

și

$$T_i^0 = A_i^0\, T_{i+1}^0, \qquad T_{i+1}^0 = B_i^0\, T_i^0. \qquad (45)$$

Transformarea componentelor vectoriale. Componentele contravariante $F^1F^2F^3$ față de triedrul T_f și $E^1\,E^2\,E^3$ față de triedrul T_e ale aceluiași vector $\overline{V}$ sînt legate între ele cu ajutorul matricelor de transformare transpuse $A_i = \mathcal{A}$ și $B_i = \mathcal{B}$. Astfel, vectorial avem:

$$\overline{V} = F^1\overline{f}_1 + F^2\overline{f}_2 + F^3\overline{f}_3 = E^1\overline{e}_1 + E^2\overline{e}_2 + E^3\overline{e}_3, \qquad (46)$$

$$F^1 = b_1^1E_1 + b_2^1E^2 + b_3^1E^3, \quad E^1 = a_1^1F^1 + a_2^1F^2 + a_3^1F^3,$$

$$F^2 = b_1^2E^1 + b_2^2E^2 + b_3^2E^3; \quad E^2 = a_1^2F^1 + a_2^2F^2 + a_3^2F^3, \qquad (47)$$

$$F^3 = b_1^3E^1 + b_2^3E^2 + b_3^3E^3, \quad E^3 = a_1^3F^1 + a_2^3F^2 + a_3^3F^3$$

sau matriceal

$$|V^f| = \mathcal{B}|V^e|; \qquad |V^e| = \mathcal{A}|V^f|, \qquad (48)$$

unde

$$|V^f| = \begin{vmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{vmatrix}; \qquad |V^e| = \begin{vmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{vmatrix}, \qquad (49)$$

iar

$$\overline{V} = \underline{T_f}\,|V^f| = \underline{T_e}\,|V^e| \qquad (50)$$

sau

$$\overline{V} = \underline{\overline{V^f}}\,|T_f| = \underline{\overline{V^e}}\,|T_e|. \tag{51}$$

Pentru transformarea componentelor covariante $F_1F_2F_3$ din triedrul T^f, în $E_1E_2E_3$ din triedrul T^e ale vectorului $\overline{V}$,

$$\overline{V} = F_1\bar{f}^1 + F_2\bar{f}^2 + F_3\bar{f}^3 = E_1\bar{e}^1 + E_2\bar{e}^2 + E_3\bar{e}^3, \tag{52}$$

avem

$$\begin{aligned} F_1 &= a_1^1E_1 + a_1^2E_2 + a_1^3E_3, & E_1 &= b_1^1F_1 + b_1^2F_2 + b_1^3F_3, \\ F_2 &= a_2^1E_1 + a_2^2E_2 + a_2^3E_3, & E_2 &= b_2^1F_1 + b_2^2F_2 + b_2^3F_3, \\ F_3 &= a_3^1E_1 + a_3^2E_2 + a_3^3E_3, & E_3 &= b_3^1F_1 + b_3^2F_2 + b_3^3F_3 \end{aligned} \tag{53}$$

sau

$$\underline{\overline{V_f}} = \underline{\overline{V_e}}\,\mathcal{A}; \qquad \underline{\overline{V_e}} = \underline{\overline{V_f}}\,\mathcal{B}, \tag{54}$$

cu

$$\underline{\overline{V_f}} = \underline{\overline{F_1F_2F_3}}, \qquad \underline{\overline{V_e}} = \underline{\overline{E_1E_2E_3}} \tag{55}$$

şi

$$\overline{V} = \underline{\overline{T^f}}\,|V_f| = \underline{\overline{T^e}}\,|V_e| \tag{56}$$

sau

$$\overline{V} = \underline{\overline{V_f}}\,|T^f| = \underline{\overline{V_e}}\,|T^e|. \tag{57}$$

Transformarea coordonatelor unui punct, respectiv componentele vectorului de poziţie (contravariant) $x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}$ faţă de triedrul T_{i+1} şi x_i, y_i, z_i faţă de triedrul T_i, ţinînd seama de coordonatele $x_i^{\oplus}\ y_i^{\oplus}\ z_i^{\oplus}$ ale originii triedrului T_{i+1} faţă de T_i se face prin relaţia vectorială (fig. 3)

$$\overline{R}_i = \overline{\mathcal{R}}_i^{\oplus} + \overline{R}_{i+1}; \qquad \overline{\mathcal{R}}_i^{\oplus} = \overline{\mathcal{R}}_{i,\,i+1}^{\odot} = \overline{T_iT_{i+1}} \tag{58}$$

sau analitic

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^{\oplus} + b_1^1x_{i+1} + b_2^1y_{i+1} + b_3^1z_{i+1}, \\ y_i &= y_i^{\oplus} + b_1^2x_{i+1} + b_2^2y_{i+1} + b_3^2z_{i+1}, \\ z_i &= z_i^{\oplus} + b_1^3x_{i+1} + b_2^3y_{i+1} + b_3^3z_{i+1}. \end{aligned} \tag{59}$$

Matriceal avem

$$|R_i - \mathcal{R}_i^{\oplus}| = \mathcal{B}|R_{i+1}|, \tag{60}$$

unde

$$|R_i - \mathcal{R}_i^{\oplus}| = \begin{vmatrix} x_i - x_i^{\oplus} \\ y_i - y_i^{\oplus} \\ z_i - z_i^{\oplus} \end{vmatrix}, \qquad |R_{i+1}| = \begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{vmatrix}. \tag{61}$$

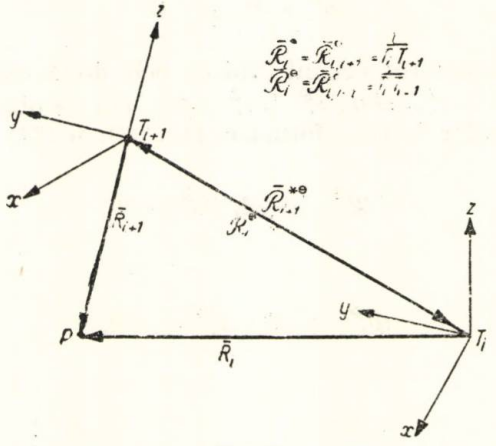


Fig. 3

Invers, considerînd coordonatele $x_{i+1}^{\ominus}$, $y_{i+1}^{\ominus}$, $z_{i+1}^{\ominus}$ ale originii triedrului T_i față de T_{i+1} avem :

$$\overline{R}_i + \overline{\mathcal{R}}_{i+1}^{\ominus} = \overline{R}_{i+1}; \qquad \overline{\mathcal{R}}_{i+1}^{\ominus} = \overline{\mathcal{R}}_{i+1,i}^{\ominus} = \overline{T_{i+1}T_i}, \tag{62}$$

adică

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_{i+1}^{\ominus} &= a_1^1 x_i + a_2^1 y_i + a_3^1 z_i, \\ y_{i+1} - y_{i+1}^{\ominus} &= a_1^2 x_i + a_2^2 y_i + a_3^2 z_i, \\ z_{i+1} - z_{i+1}^{\ominus} &= a_1^3 x_i + a_2^3 y_i + a_3^3 z_i \end{aligned} \tag{63}$$

sau

$$|R_{i+1} - \mathcal{R}_{i+1}^{\ominus}| = \mathcal{A}_i |R_i|, \tag{64}$$

unde

$$|R_{i+1} - \mathcal{R}^{\ominus}_{i+1}| = \begin{vmatrix} x_{i+1} - x^{\ominus}_{i+1} \\ y_{i+1} - y^{\ominus}_{i+1} \\ z_{i+1} - z^{\ominus}_{i+1} \end{vmatrix}, \qquad |R_i| = \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{vmatrix}. \tag{65}$$

Vectorii de poziție $\overline{\mathcal{R}}^{\oplus}_i$ și $\overline{\mathcal{R}}^{\ominus}_{i+1}$ sînt egali și direct opuși reprezentînd poziționarea originei triedrului T_{i+1} față de T_i sau a originii triedrului T_i față de T_{i+1} adică

$$\overline{\mathcal{R}}^{\oplus}_i + \overline{\mathcal{R}}^{\ominus}_{i+1} = 0. \tag{66}$$

Coordonatele acestor origini față de cele două triedre nu sînt egale $x^{\oplus}_i + x^{\ominus}_{i+1} \neq 0$; $y^{\oplus}_i + y^{\ominus}_{i+1} \neq 0$; $z^{\oplus}_i + z^{\ominus}_{i+1} \neq 0$, dar se obțin unele din altele cu ajutorul matricelor de transformare. Din (60) și (64) rezultă

$$|\mathcal{R}^{\ominus}_{i+1}| + \mathcal{A}_i |\mathcal{R}^{\oplus}_i| = 0 \tag{67}$$

sau

$$|\mathcal{R}^{\oplus}_i| + \mathcal{B}_i |\mathcal{R}^{\ominus}_{i+1}| = 0, \tag{68}$$

unde

$$|\mathcal{R}^{\oplus}_i| = \begin{vmatrix} x^{\oplus}_i \\ y^{\oplus}_i \\ z^{\oplus}_i \end{vmatrix}; \qquad |\mathcal{R}^{\ominus}_{i+1}| = \begin{vmatrix} x^{\ominus}_{i+1} \\ y^{\ominus}_{i+1} \\ z^{\ominus}_{i+1} \end{vmatrix}, \tag{69}$$

adică

$$\begin{aligned} x^{\ominus}_{i+1} + a^1_1 x^{\oplus}_i + a^1_2 y^{\oplus}_i + a^1_3 z^{\oplus}_i &= 0, \\ y^{\ominus}_{i+1} + a^2_1 x^{\oplus}_i + a^2_2 y^{\oplus}_i + a^2_3 z^{\oplus}_i &= 0, \\ z^{\ominus}_{i+1} + a^3_1 x^{\oplus}_i + a^3_2 y^{\oplus}_i + a^3_3 z^{\oplus}_i &= 0 \end{aligned} \tag{70}$$

sau

$$\begin{aligned} x^{\oplus}_i + b^1_1 x^{\ominus}_{i+1} + b^1_2 y^{\ominus}_{i+1} + b^1_3 z^{\ominus}_{i+1} &= 0, \\ y^{\oplus}_i + b^2_1 x^{\ominus}_{i+1} + b^2_2 y^{\ominus}_{i+1} + b^2_3 z^{\ominus}_{i+1} &= 0, \\ z^{\oplus}_i + b^3_1 x^{\ominus}_{i+1} + b^3_2 y^{\ominus}_{i+1} + b^3_3 z^{\ominus}_{i+1} &= 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Pentru transformarea diverselor triedre, coordonatele anterioare sînt următoarele :

— Triedrele oblice nedeformabile $T^{*}_{i+1}[\bar{e}_i, \bar{e}_{i+1}, \bar{n}_i]$ și $T^{*}_{i}[\bar{e}_{i-1}, \bar{e}_i, \bar{n}_{i-1}]$:

$$x_i^{\oplus} = 0, \qquad y_i^{\oplus} = s_i, \qquad z_i^{\oplus} = \sigma_{i-1}. \tag{72}$$

— Triedrele oblice deformabile $T^{*}_{i+1}[\bar{e}_i, \bar{n}_{i-1}, \bar{n}_i]$ și $T^{*}_{i}[\bar{e}_{i-1}, \bar{n}_{i-2}, \bar{n}_{i-1}]$:

$$x^{\ominus}_{i+1} = -s_i, \qquad y^{\ominus}_{i+1} = -\sigma_{i-1}, \qquad z^{\ominus}_{i+1} = 0. \tag{73}$$

— Triedrele oblice nedeformabile $T^{\ominus}_{i+1}[\bar{n}_i, \bar{e}_i, \bar{e}_{i+1}]$ și $T^{\ominus}_{i}[\bar{n}_{i-1}, \bar{e}_{i-1}, \bar{e}_i]$:

$$x^{\ominus}_{i+1} = \sigma_i, \qquad y^{\ominus}_{i+1} = -s_i, \qquad z^{\ominus}_{i+1} = 0. \tag{74}$$

— Triedrele oblice deformabile $T^{\circ}_{i+1}[\bar{n}_i, \bar{n}_{i+1}, \bar{e}_{i+1}]$ și $T^{\ominus}_{i}[\bar{n}_{i-1}, \bar{n}_i, \bar{e}_i]$:

$$x_i^{\oplus} = 0, \qquad y_i^{\oplus} = \sigma_i, \qquad z_i^{\oplus} = s_i. \tag{75}$$

— Triedrele drepte $T^{*}_{i+1}[\bar{e}_i, \bar{n}_i \times \bar{e}_i, \bar{n}_i]$ și $T^{*}_{i}[\bar{e}_{i-1}, \bar{n}_{i-1} \times \bar{e}_{i-1}, \bar{n}_{i-1}]$:

$$\begin{aligned} &x_i^{\oplus} = s_i \cos \alpha_{i-1}, \qquad y_i^{\oplus} = s_i \sin \alpha_{i-1}, \qquad z_i^{\oplus} = \sigma_{i-1}, \\ &x^{\ominus}_{i+1} = -s_i, \qquad y^{\ominus}_{i+1} = -\sigma_{i-1} \sin \theta_i, \qquad z^{\ominus}_{i+1} = -\sigma_{i-1} \cos \theta_i. \end{aligned} \tag{76}$$

— Triedrele drepte $T^{\ominus}_{i+1}[\bar{n}_i, \bar{e}_{i+1} \times \bar{n}_i, \bar{e}_{i+1}]$ și $T^{\ominus}_{i}[\bar{n}_{i-1}, \bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1}, \bar{e}_i]$:

$$\begin{aligned} &x_i^{\oplus} = \sigma_i \cos \theta_i, \qquad y_i^{\oplus} = \sigma_i \sin \theta_i, \qquad z_i^{\oplus} = s_i, \\ &x^{\ominus}_{i+1} = -\sigma_i, \qquad y^{\ominus}_{i+1} = -s_i \sin \alpha_i, \qquad z^{\ominus}_{i+1} = -s_i \cos \alpha_i. \end{aligned} \tag{77}$$

Ecuațiile matriceale ale lanțurilor cinematice se obțin din transformările bazelor de versori ale triedrelor și din transformările componentelor vectorilor de poziție în diverse triedre succesive corespunzătoare lanțurilor de elemente.

Astfel din transformarea triedrelor succesive (matriceal) avem :

$$\begin{aligned} &T_1 = A_1 T_2, && T_2 = B_1 T_1, \\ &T_2 = A_2 T_3, \quad \text{sau} && T_3 = B_2 T_2, \\ &\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots \\ &T_n = A_n T_{n+1}, && T_{n+1} = B_n T_n, \end{aligned} \tag{78}$$

care prin înlocuire succesivă conduc la

$$T_1 = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n T_{n+1},$$
$$T_{n+1} = B_n B_{n-1} \dots B_2 B_1 T_1. \tag{79}$$

La transformarea componentelor vectorilor de poziție în triedre succesive (matriceal) avem :

$$R_1 = \mathcal{R}_1^{\oplus} + \mathcal{B}_1 R_2, \qquad R_2 = \mathcal{R}_2^{\ominus} + \mathcal{A}_1 R_1,$$

s u

$$R_2 = \mathcal{R}_2^{\oplus} + \mathcal{B}_2 R_3, \qquad R_3 = \mathcal{R}_3^{\ominus} + \mathcal{A}_2 R_2,$$

$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

$$R_n = \mathcal{R}_n^{\oplus} + \mathcal{B}_n R_{n+1} \qquad R_{n+1} = \mathcal{R}_{n+1}^{\ominus} + \mathcal{A}_n R_n, \tag{80}$$

unde din nou prin înlocuiri succesive se obține :

$$R_1 = \mathcal{R}_1^{\oplus} + \mathcal{B}_1 \mathcal{R}_2^{\oplus} + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{R}_3^{\oplus} + \dots +$$
$$+ \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \dots \mathcal{B}_{n-1} \mathcal{R}_n^{\oplus} + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \dots \mathcal{B}_{n-1} \mathcal{B}_n R_{n+1} \tag{81}$$

sau

$$R_{n+1} = \mathcal{R}_{n+1}^{\ominus} + \mathcal{A}_n \mathcal{R}_n^{\ominus} + \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \mathcal{R}_{n-1}^{\ominus} + \dots +$$
$$+ \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_2 \mathcal{R}_2^{\ominus} + \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 R_1.$$

Dacă lanțul cinematic este simplu închis, a ică $T_{n+1} = T_1$ și $\overline{R}_{n+1} = \overline{R}_1$ se găsesc :

— ecuația matriceală a rotațiilor :

$$A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n = I \text{ (matricea unitate)} \tag{82}$$

sau

$$B_n B_{n-1} \dots B_2 B_1 = I,$$

— ecuația matriceală a translațiilor (și rotațiilor)

$$\mathcal{R}_1^{\oplus} + \mathcal{B}_1 \mathcal{R}_2^{\oplus} + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{R}_3^{\oplus} + \dots + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \dots \mathcal{B}_{n-1} \mathcal{R}_n^{\oplus} = 0 \tag{83}$$

sau

$$\mathcal{R}_{n+1}^{\ominus} + \mathcal{A}_n \mathcal{R}_n^{\ominus} + \dots + \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_2 \mathcal{R}^{\ominus} = 0.$$

Folosirea coordonatelor omogene permite strîngerea ecuațiilor matriceale de rotație și translații într-o singură ecuație. Se consideră transformările de coordonate :

$$\begin{aligned} t_i &= t_{i+1} = 1, \\ x_i &= x_i^{\oplus}\, t_{i+1} + b_1^1\, x_{i+1} + b_2^1\, y_{i+1} + b_3^1\, z_{i+1}, \\ y_i &= y_i^{\oplus}\, t_{i+1} + b_1^2\, x_{i+1} + b_2^2\, y_{i+1} + b_3^2\, z_{i+1}, \\ z_i &= z_i^{\oplus}\, t_{i+1} + b_1^3\, x_{i+1} + b_2^3\, y_{i+1} + b_3^3\, z_{i+1}, \end{aligned} \tag{84}$$

identice cu cele din (59) și care se pot pune sub forma matriceală

$$\left|\begin{array}{c} t_i \\ \hline R_i \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathcal{R}_i^{\oplus} & \mathcal{B}_i \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} t_{i+1} \\ \hline R_{i+1} \end{array}\right|. \tag{85}$$

Invers, conform cu (63) avem

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i = 1, \\ x_{i+1} &= x_{i+1}^{\ominus}\, t_i + a_1^1\, x_i + a_2^1\, y_i + a_3^1\, z_i, \\ y_{i+1} &= y_{i+1}^{\ominus}\, t_i + a_1^2\, x_i + a_2^2\, y_i + a_3^2\, z_i, \\ z_{i+1} &= z_{i+1}^{\ominus}\, t_i + a_1^3\, x_i + a_2^3\, y_i + a_3^3\, z_i \end{aligned} \tag{86}$$

sau matriceal

$$\left|\begin{array}{c} t_{i+1} \\ \hline R_{i+1} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathcal{R}_{i+1}^{\ominus} & \mathcal{A}_i \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} t_i \\ \hline R_i \end{array}\right|. \tag{87}$$

Notînd matricele de transformare ale componentelor omogene cu

$$\mathcal{C}_i = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathcal{R}_{i+1}^{\ominus} & \mathcal{A}_i \end{array}\right| \quad \text{și} \quad \mathcal{D}_i = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathcal{R}_i^{\oplus} & \mathcal{B}_i \end{array}\right|, \tag{88}$$

cu

$$\mathcal{C}_i\, \mathcal{D}_i = 1$$

se aplică din aproape în aproape relaţiile (85) sau (87) şi se găseşte ecuaţia matriceală unică sub formele

$$\mathcal{C}_n\, \mathcal{C}_{n-1} \cdots \mathcal{C}_1 = I$$

sau (89)

$$\mathcal{D}_1\, \mathcal{D}_2 \cdots \mathcal{D}_n = I.$$

Se verifică descompunerea acestei singure ecuaţii matriceale în cele două anterioare, dacă se explicitează fiecare matrice faţă de cele patru submatrice componente, obţinîndu-se din (89)

$$\left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline E_e\,83 & E_e\,82 \end{array}\right| = I, \tag{90}$$

ecuaţiile (82) sau (83).

Simetrizarea calculelor şi notaţiilor permite simplificări mari în rezolvarea diverselor probleme. Astfel ecuaţia matriceală a rotaţiilor (82) înmulţită la dreapta cu $B_n\ B_{n-1} \cdots$ devine :

$$A_1 A_2 \cdots A_i = B_n\ B_{n-1} \cdots B_{i+1}. \tag{91}$$

În această ecuaţie elementele matriceale rezultate din produsul matricelor au forme reduse faţă de cele ale ecuaţiei iniţiale. Produsul de n matrice se înlocuieşte cu două produse de cîte i şi respectiv $n - i$ matrice. Pe de altă parte indicele i de secţionare a matricei produs poate fi ales arbitrar pentru a obţine ecuaţiile cele mai avantajoase calculelor.

Ţinînd seama de forma anterioară a ecuaţiei rotaţiilor se transformă şi ecuaţia translaţiilor (83) în

$$\mathcal{R}_1^{\oplus} + \mathcal{B}_1 \mathcal{R}_2^{\oplus} + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{R}_3^{\oplus} + \cdots + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \cdots \mathcal{B}_{i-2} \mathcal{R}_{i-1}^{\oplus} +$$

$$+ \mathcal{A}_n\, \mathcal{A}_{n-1} \cdots \mathcal{A}_i \mathcal{R}_i^{\oplus} + \cdots + \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \mathcal{R}_{n-1}^{\oplus n} + \mathcal{A}_n \mathcal{R}_n^{\oplus} = 0 \tag{92}$$

sau

$$\mathcal{R}_1^{\oplus} + \mathcal{B}_1 \mathcal{R}_2^{\oplus} + \cdots + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \cdots \mathcal{B}_{i-2} \mathcal{R}_{i-1}^{\oplus} =$$

$$= \mathcal{A}_n\, \mathcal{A}_{n-1} \cdots \mathcal{A}_{i+1} \mathcal{R}_{i+1}^{\ominus} + \cdots + \mathcal{A}_n\, \mathcal{A}_{n-1} \mathcal{R}_{n-1}^{\ominus} + \mathcal{A}_n \mathcal{R}_n^{\ominus} + \mathcal{R}_{n+1}^{\ominus}$$

dacă se are în vedere ecuaţiile de forma (82).

Urmărind acelaşi fel de rezolvare, în loc să se facă transformările de triedre şi coordonate într-un singur sens de parcurgere al lanţului cinematic închis, se poate secţiona lanţul cinematic pentru parcurgerea conturului în cele două sensuri direct şi invers, întrebuinţînd două sisteme de notaţii,

simple și marcate. Astfel în figura 4 notația în sens direct pozitiv este simplă, iar notația în sens invers este stelată. Triedrele T_1 și T_1^* se găsesc pe normala elementului fix $\bar{n}_0 + \bar{n}_0^* = 0$ iar secționarea lanțului cinematic se face pe axa cuplei $\bar{e}_i$ sau $\bar{e}_j^*$ deoarece $e_i + e_j^* = 0$ iar $i + j = n + 1$ (n numărul de elemente ale lanțului cinematic). Pe această axă se află triedrele T_i și T_j^*.

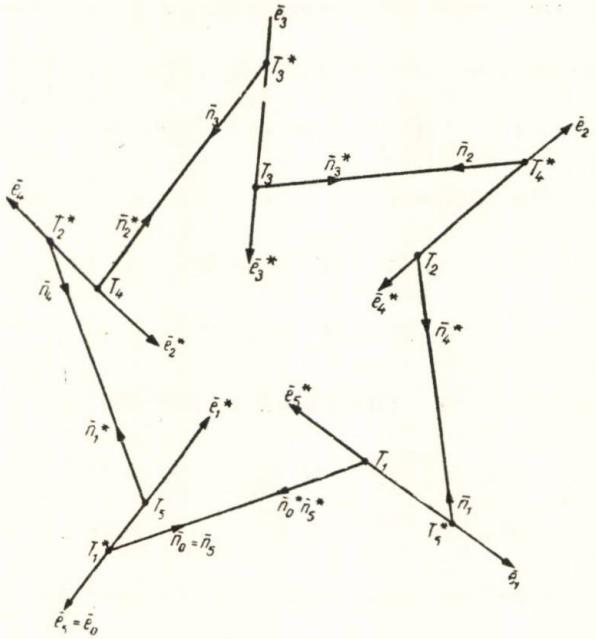


Fig. 4

În cele două parcurgeri ale lanțului se obțin formule simetrice de transformarea triedrelor

$$T_i = B_{i-1}\, B_{i-2} \cdots B_2\, B_1\, T_1,$$

$$T_j^* = B_{j-1}^*\, B_{j-2}^* \cdots B_2^*\, B_1^*\, T_1^*, \tag{93}$$

precum și pentru transformarea coordonatelor :

$$R_1 = \mathcal{R}_1^0 + \mathcal{B}_1^0\, \mathcal{R}_2^0 + \mathcal{B}_1^0\, \mathcal{B}_2^0\, \mathcal{R}_3^0 + \cdots + \mathcal{B}_1^0\, \mathcal{B}_2^0 \cdots \mathcal{B}_{i-1}^0 R_i,$$

$$R_1^* = \mathcal{R}_1^* + \mathcal{B}_1^*\, \mathcal{R}_2^* + \mathcal{B}_1^*\, \mathcal{B}_2^*\, \mathcal{R}_3^* + \cdots + \mathcal{B}_1^*\, \mathcal{B}_2^* \cdots \mathcal{B}_{j-1}^*\, R_j^*. \tag{94}$$

Pe de altă parte transformarea versorilor triadelor T_1 și T_1^* sau T_i și T_j^* se face prin relațiile matriceale :

$$\begin{aligned} T_1^* &= G T_1, \\ T_j^* &= H T_i, \end{aligned} \tag{95}$$

ceea ce, în conformitate cu (93), conduce la ecuația matriceală a rotațiilor

$$\begin{aligned} H\, B_{i-1}\, B_{i-2} \ldots B_2\, B_1 &= B_{j-1}^*\, B_{j-2}^* \ldots B_1^*\, G, \\ G A_1\, A_2 \ldots A_{i-1} &= A_1^*\, A_2^* \ldots A_{j-1}^*\, H. \end{aligned} \tag{96}$$

Deoarece vectorial avem

$$\begin{aligned} \overline{R_1} &= \overline{T_1\, T_1^*} + \overline{R_1^*}, \\ \overline{R_i} &= \overline{T_i\, T_j^*} + \overline{R_j^*}, \end{aligned} \tag{97}$$

componentele vectoriale se transformă matriceal prin

$$\begin{aligned} R_1 &= T_1\, T_1^* + \mathcal{G}\, R_1^*, \qquad \mathcal{G} = G_i, \\ R_i &= T_i\, T_j^* + \mathcal{H}\, R_j^*, \qquad \mathcal{H} = H_i, \end{aligned} \tag{98}$$

astfel că din (94), ecuația matriceală a translațiilor (și rotațiilor) este

$$\begin{aligned} T_1\, T_1^* + \mathcal{G}\,(\mathcal{R}_1^* + \mathcal{B}_1^*\, \mathcal{R}_2^* + \ldots + \mathcal{B}_1^*\, \mathcal{B}_2^* \ldots \mathcal{B}_{j-2}^*\, \mathcal{R}_{j-1}^*) = \\ = \mathcal{R}_1^0 + \mathcal{B}_1^0\, \mathcal{R}_2^0 + \ldots + \mathcal{B}_1^0\, \mathcal{B}_2^0 \ldots \mathcal{B}_{i-2}^0\, \mathcal{R}_{i-1}^0 + \mathcal{B}_1^0\, \mathcal{B}_2^0 \ldots \mathcal{B}_{i-1}^0\, T_i\, T_j^*. \end{aligned} \tag{99}$$

Ecuația matriceală a rotațiilor (96) reprezintă egalitatea componentelor versorilor triedrelor T_i sau T_j^* față de triedrul T_1, dacă transformările succesive se fac în cele două sensuri, simple și stelate. Dintre ecuațiile analitice obținute este de ajuns să se considere numai acelea care reprezintă transformările versorului comun triedrelor T_i, și T_j^* adică $\bar{e}_i$ și $\bar{e}_j^*$, ceea ce livrează numai două ecuații, cea de a treia verificîndu-se identic pe baza condiției că versorul are mărimea egală cu unitatea.

Ecuația matricială a translațiilor (99) reprezintă egalitatea componentelor față de triedrul T_1 a vectorilor de poziție $\overline{T_1\, T_j^*}$ reprezentînd însumările contururilor vectoriale deschise corespunzătoare celor două sensuri de parcurgere a lanțului cinematic. Acestea livrează deci trei ecuații. Pentru lanțul cinematic spațial general se verifică obținerea numărului de cinci ecuații independente.

Primită la redacție la 27 octombrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Bazele analizei mecanismelor*, Edit. Academiei, București, 1967.
2. P.A. Lebedev, *Kinematika prostranstvenih mehanizmov*, Mașinostroenie, 1966.
3. D. Mangeron, C. Dragan, *Asupra unei noi metode tensoriale de studiu a mecanismelor*, Bul. Inst. Politehnic Iași, 1957,III, Nr. 1—2.
4. J.S., Beggs, *Advanced Mechanisms* The Macmillan Company, 1966.
5. R.S. Hartenberg, J. Denavit, *A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices*, J. Appl. Mech., 1954.
6. R.S. Hartenberg, J. Denavit, *Kinematic Synthesis of linkages*, Mc. Graw-Hill Book Company, 1964.

SINTEZA MECANISMULUI PENTALATER PE BAZA FUNCȚIILOR DE TRANSMITERE

de V. HANDRA-LUCA
Institutul politehnic, Cluj

În lucrare se face sinteza geometrică-cinematică a mecanismului pentalater pe baza funcțiilor de transmitere de ordinul zero, unu și doi. Se fac aprecieri asupra degenerării acestui mecanism la mecanisme cu un singur grad de mobilitate.

1. Numărul maxim de poziții relative asociate ce se pot lua la un mecanism pentalater atunci cînd se impun, în aceste poziții, funcțiile de transmitere de ordinul zero [1] este $P_0 = 7$. Se consideră că AB și BC (fig. 1) sînt elemente conducătoare iar DE este element condus.

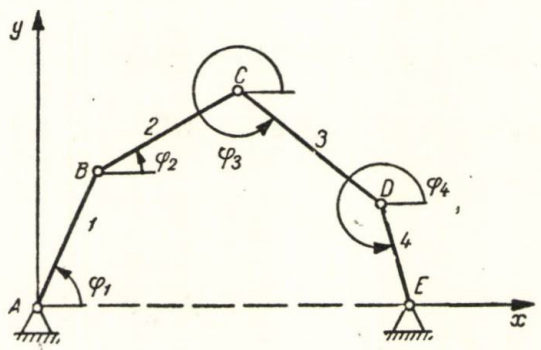


Fig. 1

Din condiția de închidere a lanțului cinematic $ABCDE$ în cele 7 poziții, atașînd fiecărui element cîte un număr complex $\bar{\lambda}$ în poziție inițială, se poate scrie sistemul

$$\begin{aligned} &\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 = 1, \\ &\bar{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \bar{\lambda}_2 e^{i\varphi_j^2} + \bar{\lambda}_3 e^{i\varphi_j^3} + \bar{\lambda}_4 e^{i\varphi_j^4} = 1, \\ &j = 1, 2, \ldots, 6, \end{aligned} \tag{1}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970, P. 1315–1325

unde

φ_j^4 şi φ_j^1, $\varphi_j^2 (j = 1, 2, \ldots 6)$ sînt date prin temă şi reprezintă funcţiile de transmitere de ordinul zero, funcţii de poziţie [2].

Din primele patru ecuaţii ale sistemului (1) se obţine

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{d_1}{d}; \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{d_2}{d}; \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{d_3}{d}; \quad \bar{\lambda}_4 = \frac{d_4}{d}, \tag{2}$$

unde

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^3} & e^{i\varphi_1^4} \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^3} & e^{i\varphi_2^4} \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^3} & e^{i\varphi_3^4} \end{vmatrix}, \qquad d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^3} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^3} & e^{i\varphi_2^4} \\ 1 & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^3} & e^{i\varphi_3^4} \end{vmatrix},$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & 1 & e^{i\varphi_1^3} & e^{i\varphi_1^4} \\ e^{i\varphi_2^1} & 1 & e^{i\varphi_2^3} & e^{i\varphi_2^4} \\ e^{i\varphi_3^1} & 1 & e^{i\varphi_3^3} & e^{i\varphi_3^4} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & 1 & e^{i\varphi_1^4} \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & 1 & e^{i\varphi_2^4} \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & 1 & e^{i\varphi_3^4} \end{vmatrix}, \quad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^3} & 1 \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^3} & 1 \\ e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^3} & 1 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Din (1), ţinînd seama de (2) şi (3), se obţine

$$A_j^1 e^{i\varphi_1^3} + A_j^2 e^{i\varphi_2^3} + A_j^3 e^{i\varphi_3^3} + A e^{i\varphi_j^3} + B_j = 0, \tag{4}$$

$j = 4, 5, 6.$

$$B_j = u_j + iv_j = -\begin{vmatrix} 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix},$$

$$A_j^1 = u_j^1 + iv_j^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix},$$

$$A_j^2 = u_j^2 + \mathrm{i}v_j^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix},$$

$$A_j^3 = u_j^3 + \mathrm{i}v_j^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 1 & e^{i\varphi_j^1} & e^{i\varphi_j^2} & e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$j = 4, 5, 6,$

$$A = u + \mathrm{i}v = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} \end{vmatrix}.$$

Cu notaţiile

$$C_j = \sum_{m=1}^{3} [(u_j^m)^2 + (v_j^m)^2] + (u_j)^2 + (v_j)^2 - (u)^2 - (v)^2,$$

$$D_j^m = 2(u_j^m u_j + v_j^m v_j),$$

$$E_j^m = 2(v_j^m u_j - u_j^m v_j), \tag{6}$$

$$F_j^{m,p} = 2(u_j^m u_j^p + v_j^m v_j^p),$$

$$G_j^{m,p} = 2(v_j^m u_j^p - u_j^m v_j^p);\ m = 1, 2, 3;\ p = 2, 3;\ p > m;\ j = 4, 5, 6,$$

după eliminarea necunoscutelor $\varphi_j^3 (j = 4, 5, 6)$ sistemul (4) devine

$$f_j(\varphi_1^3, \varphi_2^3, \varphi_3^3) = \sum_{m=1}^{3} (D_j^m \cos\varphi_m^3 - E_j^m \sin\varphi_m^3) +$$

$$+ \sum_{\substack{m=1;\ p=2 \\ p>m}}^{3} [F_j^{m,p} \cos(\varphi_m^3 - \varphi_p^3) - G_j^{m,p} \sin(\varphi_m^3 - \varphi_p^3)] + C_j = 0, \tag{7}$$

$j = 4, 5, 6.$

Acest sistem se rezolvă pe cale aproximativă folosind metoda lui Newton, [3] după care din (3) și (2) se determină $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4$ și sinteza mecanismului este făcută. Dacă $\varphi_j^1 = \varphi_j^2$ atunci cele două elemente conducătoare nu au o mișcare relativă între ele și mecanismul nu mai este pentalater (se transformă în patrulater). Cînd $\varphi_j^1 = \varphi_j^4$ între elementele 1 și 4 nu este o mișcare relativă în cele j poziții, mecanismul pentalater se transformă într-un alt mecanism cu un singur grad de mobilitate (fig. 2). În sfîrșit, dacă $\varphi_j^2 = \varphi_j^4$ mecanismul pentalater se transformă într-un mecanism cu un grad de mobilitate (fig. 3).

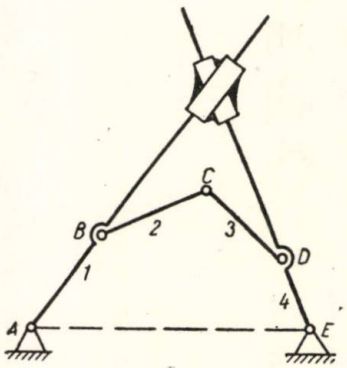


Fig. 2

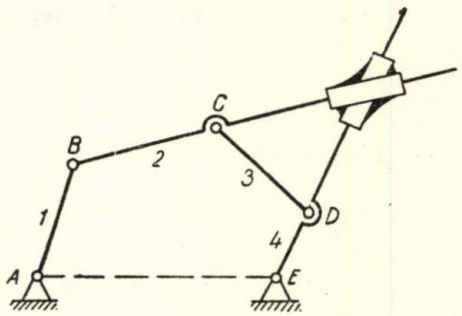


Fig. 3

2. Numărul maxim de poziții relative asociate ce se pot lua la un mecanism pentalater atunci cînd se impun, în aceste poziții, funcțiile de transmitere de ordinul zero și unu [1] este $P_{01} = 3{,}5$, care se rotunjește la $\overline{P}_{01} = 3$. Această rotunjire inferioară permite alegerea unui număr de poziții suplimentare [1] $P_0^* = 1$ în care se cunosc funcțiile de transmitere de ordinul zero.

Considerînd poziția inițială fără cunoașterea funcției de transmitere de ordinul unu se poate scrie sistemul:

$$\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 = 1,$$

$$\bar{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \bar{\lambda}_2 e^{i\varphi_j^2} + \bar{\lambda}_3 e^{i\varphi_j^3} + \bar{\lambda}_4 e^{i\varphi_j^4} = 1, \tag{8}$$

$$\bar{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \bar{\lambda}_2 \mu_j^2 e^{i\varphi_j^2} + \bar{\lambda}_3 \nu_j e^{i\varphi_j^3} + \bar{\lambda}_4 \dot{R}_j e^{i\varphi_j^4} = 0,$$

$j = 1, 2, 3,$

unde

$\mu_j^2 = \dfrac{\dot{\varphi}_j^2}{\dot{\varphi}_j^1}$; $\dot{R}_j = \dfrac{\dot{\varphi}_j^4}{\dot{\varphi}_j^1}$ sînt cunoscute, $\dot{R}_j$ reprezentînd funcția de transmitere de ordinul unu a elementului condus DE,

$\nu_j = \dfrac{\dot{\varphi}_j^3}{\dot{\varphi}_j^1}$ sînt necunoscute și reprezintă funcțiile de transmitere de ordinul întîi a elementului CD.

Din primele patru ecuații ale sistemului (8) se obține

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{d_1}{d}; \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{d_2}{d}; \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{d_3}{d}; \quad \bar{\lambda}_4 = \frac{d_4}{d}, \tag{9}$$

unde d, d_1, d_2, d_3, d_4 au aceleași expresii ca și în (3).

Ținînd seama de (9) și (3) ultima relație din (8) conduce la sistemul

$$A_j^1 e^{i\varphi_1^3} + A_j^2 e^{i\varphi_2^3} + A_j^3 e^{i\varphi_3^3} + A\dot{\nu}_j e^{i\varphi_j^3} + B_j = 0, \tag{10}$$

$j = 1, 2, 3,$

unde s-au folosit notațiile următoare:

$$B_j = u_j + iv_j = -\begin{vmatrix} 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} \\ 0 & e^{i\varphi_j^1} & \mu_j^2 e^{i\varphi_j^2} & \dot{R}_j e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix},$$

$$A_j^1 = u_j^1 + iv_j^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} \\ 0 & e^{i\varphi_j^1} & \mu_j^2 e^{i\varphi_j^2} & \dot{R}_j e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix},$$

$$A_j^2 = u_j^2 + iv_j^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} \\ 0 & e^{i\varphi_j^1} & \mu_j^2 e^{i\varphi_j^2} & \dot{R}_j e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$$A_j^3 = u_j^3 + iv_j^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 0 & e^{i\varphi_j^1} & \mu_j^2 e^{i\varphi_j^2} & \dot{R}_j e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix},$$

$j = 1, 2, 3,$

$$A = u + iv = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 1 & e^{i\varphi_3^1} & e^{i\varphi_3^2} & e^{i\varphi_3^4} \end{vmatrix}.$$

Introducînd sistemul complex conjugat al sistemului (10), eliminînd necunoscutele $\dot{v}_j (j = 1, 2, 3)$ şi folosind notaţiile

$$\operatorname{tg}\theta_j^m = \frac{uv_j^m - vu_j^m}{u_j^m u + v_j^m v}; \quad \operatorname{tg}\theta_j = \frac{u_j v - uv_j}{u_j u + v_j v},$$

$$|A_j^m \overline{A}| = \sqrt{(u_j^m u + v_j^m v)^2 + (uv_j^m - vu_j^m)^2},$$

$$|A\overline{B}_j| = \sqrt{(u_j u + v_j v)^2 + (u_j v_j - uv_j)^2},$$

$m = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3,$

sistemul (10) devine

$$f_j(\varphi_1^3, \varphi_2^3, \varphi_3^3) = \sum_{m=1}^{3} |A_j^m \overline{A}| \sin(\theta_j^m + \varphi_m^3 - \varphi_j^3) - |\overline{B}_j A| \sin(\theta_j + \varphi_r^3) = 0,$$

$$j = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Sistemul de trei ecuaţii (12) se rezolvă pe cale aproximativă după care din (3) şi (9) se determină $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_3, \overline{\lambda}_4$ şi sinteza mecanismului pentalater pe baza funcţiilor de transmitere de ordinul zero şi unu este făcută.

3. Numărul maxim de poziţii relative asociate ce se pot lua la un mecanism pentalater atunci cînd se impun, în aceste poziţii, funcţiile de transmitere de ordinul zero, unu şi doi [1] este $P_{012} = 2{,}33$ care se rotunjeşte la $\overline{P}_{012} = 2$. Această rotunjire inferioară permite alegerea unui număr de poziţii suplimentare $P_0^* = 1$ în care se cunosc funcţiile de transmitere de ordinul zero.

Deci se vor alege trei poziţii relative asociate între elementul condus DE şi elementele conducătoare AB şi BC (fig. 1) din care în ultimele două se pot impune şi funcţiile de transmitere de ordinul unu şi doi.

Sistemul de ecuaţii ce se poate scrie va fi :

$$\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2 + \overline{\lambda}_3 + \overline{\lambda}_4 = 1,$$

$$\overline{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \overline{\lambda}_2 e^{i\varphi_j^2} + \overline{\lambda}_3 e^{i\varphi_j^3} + \overline{\lambda}_4 e^{i\varphi_j^4} = 1,$$

$$\overline{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1} + \overline{\lambda}_2 \mu_j^2 e^{i\varphi_j^2} + \overline{\lambda}_3 \dot{v}_j e^{i\varphi_j^3} + \overline{\lambda}_4 \dot{R}_j e^{i\varphi_j^4} = 0, \tag{13}$$

$$\overline{\lambda}_1 e^{i\varphi_j^1}(\eta_j^1 + i) + \overline{\lambda}_2 e^{i\varphi_j^2}[\eta_j^2 + i(\mu_j^2)^2] +$$

$$+ \overline{\lambda}_3 e^{i\varphi_j^3}[\ddot{v}_j + i(\dot{v}_j)^2] + \overline{\lambda}_4 e^{i\varphi_j^4}[\ddot{R}_j + i(\dot{R}_j)^2] = 0,$$

$j = 1, 2,$

unde

$\eta_j^1 = \dfrac{\ddot{\varphi}_j^1}{(\dot{\varphi}_j^1)^2}$; $\eta_j^2 = \dfrac{\ddot{\varphi}_j^2}{(\dot{\varphi}_j^1)^2}$; $\ddot{R}_j = \dfrac{\ddot{\varphi}_j^4}{(\dot{\varphi}_j^1)^2}$ sînt cunoscute, $\ddot{R}_j$ reprezentînd funcția de transmitere de ordinul doi a elementului condus DE,

$\ddot{\nu}_j = \dfrac{\ddot{\varphi}_j^3}{(\dot{\varphi}_j^1)^2}$ sînt necunoscute și reprezintă funcția de transmitere de ordinul doi a elementului CD.

Din primele patru relații ale sistemului (13) se determină

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{d_1}{d}; \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{d_2}{d}; \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{d_3}{d}; \quad \bar{\lambda}_4 = \frac{d_4}{d}, \tag{14}$$

unde

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^3} & e^{i\varphi_1^4} \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^3} & e^{i\varphi_2^4} \\ e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{\nu}_1 e^{i\varphi_1^3} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \end{vmatrix}, \quad d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^3} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^3} & e^{i\varphi_2^4} \\ 0 & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{\nu}_1 e^{i\varphi_1^3} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \end{vmatrix},$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & 1 & e^{i\varphi_1^3} & e^{i\varphi_1^4} \\ e^{i\varphi_2^1} & 1 & e^{i\varphi_2^3} & e^{i\varphi_2^4} \\ e^{i\varphi_1^1} & 0 & \dot{\nu}_1 e^{i\varphi_1^3} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & 1 & e^{i\varphi_1^4} \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & 1 & e^{i\varphi_2^4} \\ e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & 0 & \dot{R}_1 e^{i\varphi_2^4} \end{vmatrix},$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^3} & 1 \\ e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^3} & 1 \\ e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{\nu}_1 e^{i\varphi_1^3} & 0 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Introducînd (14) în (13) și luînd în considerare notațiile (15) sistemul (13) devine

$$A_2^1 e^{i\varphi_1^3} + A_2^2 e^{i\varphi_2^3} + B_2^1 \dot{\nu}_1 e^{i\varphi_1^3} + B \dot{\nu}_2 e^{i\varphi_2^3} + C_2 = 0,$$

$$E_j^1 e^{i\varphi_1^3} + E_j^2 e^{i\varphi_2^3} + F_j^1 \dot{\nu}_1 e^{i\varphi_1^3} + F[\ddot{\nu}_j + i(\dot{\nu}_j)^2] e^{i\varphi_j^3} + G_j = 0, \tag{16}$$

$j = 1,2,$

unde s-au folosit notațiile

$$C_2 = u_2 + \mathrm{i}\ v_2 = -\begin{vmatrix} 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 0 & e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \\ 0 & e^{i\varphi_2^1} & \mu_2^2 e^{i\varphi_2^2} & \dot{R}_2 e^{i\varphi_2^4} \end{vmatrix},$$

$$A_2^1 = u_2^1 + \mathrm{i}\ v_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 0 & e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \\ 0 & e^{i\varphi_2^1} & \mu_2^2 e^{i\varphi_2^2} & \dot{R}_2 e^{i\varphi_2^4} \end{vmatrix},$$

$$A_2^2 = u_2^2 + \mathrm{i}\, v_2^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 0 & e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \\ 0 & e^{i\varphi_2^1} & \mu_2^2 e^{i\varphi_2^2} & \dot{R}_2 e^{i\varphi_2^4} \end{vmatrix},$$

$$B_2^1 = b_2^1 + \mathrm{i}\ \beta_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 0 & e^{i\varphi_2^1} & \mu_2^2 e^{i\varphi_2^2} & \dot{R}_2 e^{i\varphi_2^4} \end{vmatrix},$$

$$B = b + \mathrm{i}\,\beta = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 0 & e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \end{vmatrix},$$

$$G_j = x_j + \mathrm{i}\, y_j = -\begin{vmatrix} 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 0 & e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \\ 0 & (\eta_j^1 + \mathrm{i})\, e^{i\varphi_j^1} & [\eta_j^2 + \mathrm{i}(\mu_j^2)^2]\, e^{i\varphi_j^2} & [\ddot{R}_j + \mathrm{i}(\dot{R}_j)^2]\, e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$E_j^1 = x_j^1 + \mathrm{i}\, y_j^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 0 & e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \\ 0 & (\eta_j^1 + \mathrm{i})\, e^{i\varphi_j^1} & [\eta_j^2 + \mathrm{i}(\mu_j^2)^2]\, e^{i\varphi_j^2} & [\ddot{R}_j + \mathrm{i}(\dot{R}_j)^2]\, e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix},$$

$$E_j^2 = x_j^2 + \mathrm{i}\, y_j^2 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 0 & e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \\ 0 & (\eta_j^1 + \mathrm{i})\, e^{i\varphi_j^1} & [\eta_j^2 + \mathrm{i}(\mu_j^2)^2]\, e^{i\varphi_j^2} & [\ddot{R}_j + \mathrm{i}(\dot{R}_j)^2]\, e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix},$$

$$F_j^1 = f_j' + \mathrm{i}\, \gamma_j^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 0 & (\eta_j^1 + \mathrm{i})\, e^{i\varphi_j^1} & [\eta_j^2 + \mathrm{i}(\mu_j^2)^2]\, e^{i\varphi_j^2} & [\ddot{R}_j + \mathrm{i}(\dot{R}_j)^2]\, e^{i\varphi_j^4} \end{vmatrix},$$

$$F = f + \mathrm{i}\, \gamma = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\varphi_1^1} & e^{i\varphi_1^2} & e^{i\varphi_1^4} \\ 1 & e^{i\varphi_2^1} & e^{i\varphi_2^2} & e^{i\varphi_2^4} \\ 0 & e^{i\varphi_1^1} & \mu_1^2 e^{i\varphi_1^2} & \dot{R}_1 e^{i\varphi_1^4} \end{vmatrix},$$

$$j = 1, 2. \qquad (17)$$

Din sistemul (16) introducînd sistemul complex conjugat și eliminînd necunoscutele $\dot{\nu}_2$, $\ddot{\nu}_1$, $\ddot{\nu}_2$ rezultă sistemul

$$f_1(\varphi_1^3, \varphi_2^3, \dot{\nu}_1) = \sum_{r=1}^{2} |A_2^r \overline{B}| \sin(\theta_1^r + \varphi_r^3 - \varphi_2^3) + \dot{\nu}_1 |B_2^1 \overline{B}| \sin(\alpha_1^1 +$$

$$+ \varphi_1^3 - \varphi_2^3) - |\overline{C}_2 B| \sin(\theta_1 + \varphi_j^3) = 0,$$

$$f_2(\varphi_1^3, \varphi_2^3, \dot{\nu}_1) = \sum_{r=1}^{2} |E_1^r \lambda F| \sin(\theta_2^r + \varphi_r^3 - \varphi_1^3) + \dot{\nu}_1 |F_1^1 \overline{F}| \sin(\alpha_2^1 +$$

$$+ \varphi_1^3 - \varphi_1^3) + |F_2 \overline{F}| (\dot{\nu}_1)^2 - |\overline{G}_1 F| \sin(\theta_2 + \varphi_1^3) = 0$$

$$f_3(\varphi_1^3, \varphi_2^3, \dot{\nu}_1) = \sum_{r=1}^{2} |E_2^r \overline{F}| \sin(\theta_3^r + \varphi_r^3 - \varphi_2^3) + \dot{\nu}_1 |F_2^1 \overline{F}| \sin(\alpha_3^1 + \tag{18}$$

$$+ \varphi_1^3 - \varphi_2^3) + \frac{|F\overline{F}|}{|B\overline{B}|}\left(\sum_{r=1}^{2} A_2^r e^{i\varphi_r^3} + B_2^1 \dot{\nu}_1 e^{i\varphi_1^3} + C_2\right)\left(\sum_{r=1}^{2} \overline{A}_2^r e^{-i\varphi_r^3} + \right.$$

$$\left. + \overline{B}_2^1 \dot{\nu}_1 e^{-i\varphi_1^3} + \overline{C}_2\right) - |\overline{G}_2 F| \sin(\theta_3 + \varphi_2^3) = 0,$$

unde

$$\operatorname{tg} \theta_1^r = \frac{b v_2^r - \beta u_2^r}{u_2^r b + v_2^r \beta}; \qquad \operatorname{tg} \alpha_1^1 = \frac{b \beta_2^1 - \beta b_2^1}{b_2^1 b + \beta_2^1 b},$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{u_2 \beta - b v_2}{v_2 \beta + u_2 b},$$

$r = 1, 2$

$$\operatorname{tg} \theta_\varepsilon^r = \frac{f y_j^r - \gamma x_j^r}{x_j^r f + y_j^r \gamma}; \qquad \operatorname{tg} \alpha_\varepsilon^1 = \frac{f \gamma_j^1 - \gamma f_j^1}{f_j^1 f + \gamma_j^1 \gamma},$$

$$\operatorname{tg} \theta_\varepsilon = \frac{x_j \gamma - f y_j}{y_j \gamma + x_j f},$$

pentru $r = 1, 2$ și corespondența $\varepsilon = 2, 3$ cu $j = 1, 2$,

$$|A_2^r \overline{B}| = \sqrt{(u_2^r b + v_2^r \beta)^2 + (b v_2^r - \beta u_2^r)^2},$$

$$|B_2^1 \overline{B}| = \sqrt{(b_2^1 b + \beta_2^1 \beta)^2 + (b \beta_2^1 - \beta b_2^1)^2},$$

$$|\overline{C}_2 B| = \sqrt{(v_2 + u_2 b)^2 + (u_2 - b v_2)^2},$$

$$|E_j^r \overline{F}| = \sqrt{(x_j^r f + y_j^r \gamma)^2 + (f y_j^r - \gamma x_j^r)^2},$$

$$|F_j^1 \overline{F}| = \sqrt{(f_j^1 f + \gamma_j^1 \gamma)^2 + (f \gamma_j^1 - \gamma f_j^1)^2},$$

$$|\overline{G}_j F| = \sqrt{(y_j \gamma + x_j f)^2 + (x_j \gamma - f y_j)^2},$$

pentru $r = 1,2$,

$j = 1,2$.

Sistemul de trei ecuații (18) se rezolvă prin aproximații succesive [3] după care din (15) și (14) se determină $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, $\bar{\lambda}_3$, $\bar{\lambda}_4$ și astfel sinteza mecanismului pentalater pe baza funcțiilor de transmitere de ordinul zero, unu și doi este făcută.

Primită la redacție la 16 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. V. Handra-Luca, *Asupra sintezei mecanismelor pe baza funcțiilor de transmitere*, Bul. Științ. Inst. polit. Cluj, *11*$_2$ (1968).
2. I. Székely și V. Handra-Luca, *Studiul cinematic al mecanismelor plane cu mai multe grade de mobilitate cu ajutorul funcțiilor de transmitere*, Bul. Științ. Inst. polit. Cluj, *8* (1965).
3. B. P. Demidovici și I. A. Maron, *Osnovî vicislitelnoi matematiki, Gosudarstvenie izdatelstvo fizico-matematicescoi literaturî*, Moscva, 1960.
4. Chr. Pelecudi, *Metoda contururilor în sinteza numerică și structurală a lanțurilor cinematice*, St. cerc. mec. apl., **25**, *2* (1967).
5. R. C. Bogdan și T. V. Hunker, *Sistematizarea generală și calculul unitar al mecanismelor fundamentale plane, pentalatere și patrulatere*, St. cerc. mec. apl., **24**, *2* (1967).

MATRICELE DE TRANSMISIE ALE MULTIPOLILOR CINEMATICI FORMAȚI DIN DIADE

de CHR. PELECUDI, ANCA MATHEESCU

Se interpretează diadele cu cuple de rotație sau de translație ca multipoli cinematici și se calculează matricele de transmisie ale vitezelor. Funcțiile de poziții sînt determinate prin metoda elementelor bazată pe coordonatele carteziene rectangulare sau prin metoda contururilor cu ajutorul coordonatelor polare. Se dau matricele de transmisie rezultante pentru diverse conexiuni ale grupelor.

În lucrările anterioare [1,2] s-a introdus interpretarea generală a lanțurilor cinematice ca transmițători ale informațiilor de mișcare. În particular grupele fundamentale (assurice) au fost interpretate ca multipoli cinematici pasivi exemplificîndu-se cazul diadei cu cuple de rotație. Cele două cuple exterioare potențiale ale diadei sînt considerate ca poli pentru intrarea mișcării. Mișcările elementelor diadei sau altfel starea sa internă de mișcare, sînt complet determinate de parametrii cinematici ai polilor de intrare, ceea ce face ca diada să fie considerată ca dipol. Dacă mișcarea este redată mai departe prin doi poli de ieșire, diada este interpretată ca un cvadripol cinematic.

Ca semnale de transmisie se aleg vitezele deoarece pentru o poziție a diadei, relațiile între viteze sînt liniare. Aceste relații se deduc prin derivarea funcțiilor de poziții obținute prin metoda elementelor sau a coordonatelor carteziene și prin metoda contururilor sau a coordonatelor polare.

Astfel o *bipletă de rotație* (fig 1), adică un lanț cinematic format cu două corpuri legate printr-o cuplă de rotație are următoarele ecuații de poziții în variabile carteziene :

$$\begin{aligned}(X - x_1)^2 + (X - y_1)^2 &= l_1^2,\\ (X - x_2)^2 + (Y - y_2) &= l_2^2.\end{aligned} \tag{1}$$

Acestea au fiecare forme pătratice dar pot livra prin scădere o ecuație liniară în necunoscutele X și Y astfel $(x_2 - x_1)(2X - x_1 - x_2) + (y_2 - y_1)(2Y - y_1 - y_2) = l_1^2 - l_2^2$.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970, P. 1327–1355

De altfel aceste ecuații corespund construcțiilor grafice prin care punctul C este poziționat la intersecția a două cercuri de centre A și B și de raze l_1 și l_2, sau la intersecția unuia din cercuri cu axa radicală, care desigur este perpendiculară pe dreapta centrelor A și B.

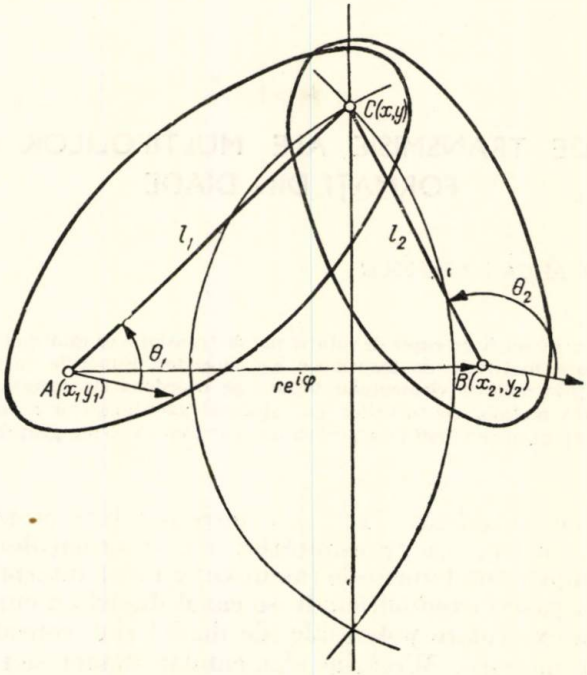


Fig. 1

Cu ajutorul variabilelor polare vectorul $\overline{AB}$ provenit din conturul vectorial ACB adică $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ are forma complexă

$$\overline{AB} = l_1 e^{i\theta_1} - l_2 e^{i\theta_2},$$
$$\overline{AB^*} = l_1 e^{-i\theta_1} - l_2 e^{-i\theta_2} \tag{2}$$

sau în proiecție pe axe livrează

$$r\cos\varphi = l_1\cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2,$$
$$r\sin\varphi = l_1\sin\theta_1 - l_2\sin\theta_2, \tag{3}$$

care reprezintă formele polare ale funcțiilor de poziții.

La o *bipletă de translație* (fig. 2), utilizînd punctele auxiliare P și Q funcțiile de poziție vor fi:

$$(X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 = h_1^2,$$
$$(X_2 - x_2)^2 + (Y_2 - y_2)^2 = h_2^2 \tag{4}$$

și

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \cdot \frac{Y_1 - y_1}{X_1 - x_1} + 1 = 0,$$
$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \cdot \frac{Y_2 - y_2}{X_2 - x_2} + 1 = 0. \tag{5}$$

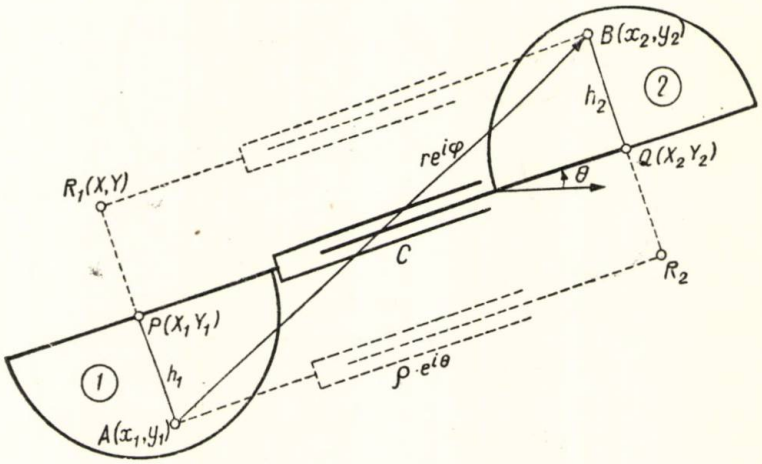


Fig. 2

Primele ecuații exprimă constanța lungimilor AP și BQ iar ultimele marchează perpendicularitatea între AP și PQ sau BQ și PQ. Grafic acestor ecuații le revin construcțiile tangentelor (interioare sau exterioare) PQ la cercurile cu centrele în A și B și de raze h_1 și h_2.

Dar mai simplu problema anterioară a pozițiilor poate fi redusă la determinarea poziției numai a punctului R_1 (sau R_2) aflat la intersecția perpendicularelor una pe cealaltă coborîte din A și B dintre care una este perpendiculară pe dreapta translației relativă, adică

$$\frac{Y - y_2}{X - x_2} \cdot \frac{Y - y_1}{X - x_1} + 1 = 0,$$
$$(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = h^2 \tag{6}$$

sau

$$(X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 = h^2, \qquad h = h_1 \pm h_2.$$

Sub formă polară avem

$$\overline{AB} = \rho\, e^{i\theta} + h\, e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \tag{7}$$

sau

$$r \cos \varphi = \rho \cos \theta - h \sin \theta,$$
$$r \sin \varphi = \rho \sin \theta + h \cos \theta, \tag{8}$$

ceea ce încheie concluzia că la ambele biplete, prin orice metodă, sînt de determinat doi parametri scalari

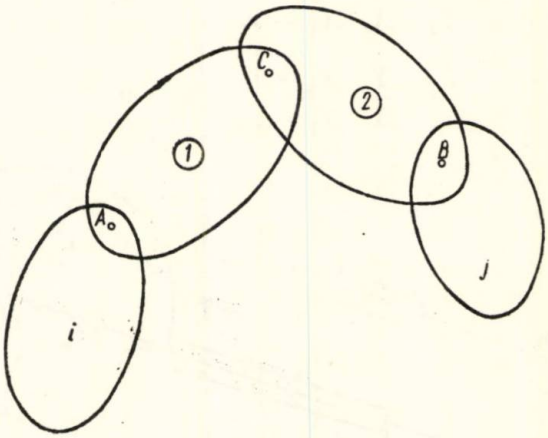


Fig. 3

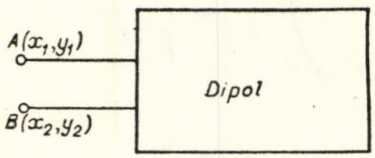


Fig. 4

DIPOLI. Determinarea stării interne de mişcare.

Conform principiului de construcţie al mecanismelor diada, respectiv o bipletă cu cuple potenţiale, este legată de două corpuri cu mişcări cunoscute, ceea ce o aşază în partea centrală a unei secvenţe de patru corpuri — cvadrupletă (fig. 3). Polii de intrare vor face parte din corpurile cunoscute marginale i şi j. Funcţiile de poziţii vor fi scrise pe rînd prin cele două metode ale elementelor şi ale contururilor. Ele se vor referi numai la starea internă de mişcare a diadei, care are astfel numai poli de intrare, diada fiind considerată ca un dipol (fig.4).

1) *In metoda elementelor* derivînd funcţiile de poziţii se obţin ecuaţiile de viteze care pot fi puse sub forma matriceală

$$|i| \cdot |v| + |I| \cdot |V| = 0 \tag{9}$$

unde

$$|v| = \left|\begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \hline \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} v_1 \\ \hline v_2 \end{array}\right|, \qquad |V| = \left|\begin{array}{c} \dot{X} \\ \hline \dot{Y} \end{array}\right|, \tag{10}$$

iar matricele $|i|$ și $|I|$ care cuprind coordonate poziționale, diferă după natura diadelor.

Ecuația matriceală a vitezelor interne diadei este

$$|V| = |M| \cdot |v|, \tag{11}$$

unde

$$|M| = -|I|^{-1} \cdot |i| \tag{12}$$

este matricea de transmisie a vitezelor interne.

1.1. La diada cu cuple de rotație RRR (aspect I — fig. 1) prin derivarea funcțiilor de poziții carteziene (1) vom avea

$$\begin{aligned} (X - x_1)(\dot{X} - \dot{x}_1) + (Y - y_1)(\dot{Y} - \dot{y}_1) &= 0, \\ (X - x_2)(\dot{X} - \dot{x}_2) + (Y - y_2)(\dot{Y} - \dot{y}_2) &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

adică

$$|i| = -\begin{vmatrix} X - x_1 & Y - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X - x_2 & Y - y_2 & 0 \end{vmatrix}, \tag{14}$$

$$|I| = \begin{vmatrix} X - x_1 & Y - y_1 \\ X - x_2 & Y - y_2 \end{vmatrix}, \tag{15}$$

cu

$$|M| = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} (X - x_1)\times & (Y - y_1)\times & 0 & -(X - x_2)\times & -(Y - y_2)\times & 0 \\ (Y - y_2) & (Y - y_2) & & (Y - y_1) & (Y - y_1) & \\ -(X - x_1)\times & -(Y - y_1)\times & 0 & (X - x_1)\times & (X - x_1)\times & 0 \\ (X - x_2) & (X - x_2) & & (X - x_2) & (Y - y_2) & \end{vmatrix}, \tag{16}$$

cu

$$D = (X - x_1)(Y - y_2) - (X - x_2)(Y - y_1).$$

1.2. La diada cu cuplă de translație interioară RTR (aspect 3, fig. 2) se derivează funcțiile de poziții (6) astfel

$$\begin{aligned} (X - x_1)(\dot{X} - \dot{x}_1) + (Y - y_1)(\dot{Y} - \dot{y}_1) &= 0, \\ (Y - y_2)(\dot{Y} - \dot{y}_1) + (\dot{Y} - \dot{y}_2)(Y - y_1) + & \\ + (X - x_2)(\dot{X} - \dot{x}_1) + (\dot{X} - \dot{x}_2)(X - x_1) &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

şi deci

$$|i| = -\left|\begin{array}{ccc|ccc} X-x_1 & Y-y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X-x_2 & Y-y_2 & 0 & X-x_1 & Y-y_1 & 0 \end{array}\right|, \tag{18}$$

$$|I| = \left|\begin{array}{cc} X-x_1 & Y-y_1 \\ 2X-x_1-x_2 & 2Y-y_1-y_2 \end{array}\right|, \tag{19}$$

şi

$$|M| = \frac{1}{D}\left|\begin{array}{ccc|ccc} (2Y-y_1-y_2)\times & & & & & \\ (X-x_1)- & Y-y_1 & 0 & -(Y-y_1)\times & -(Y-y_1)^2 & 0 \\ -(Y-y_1)\times & & & (X-x_1) & & \\ (X-x_2) & & & & & \\ & -(2X-x_1-x_2)\times & & & & \\ -(X-x_1) & (Y-y_1)+ & 0 & (X-x_1)^2 & (X-x_1)\times & 0 \\ & +(X-x_1)\times & & & (Y-y_1) & \\ & (Y-y_2) & & & & \end{array}\right|, \tag{20}$$

cu

$$D = (X - x_1)(2Y - y_1 - y_2) - (Y - y_1)(2X - x_1 - x_2).$$

1.3. Diada cu cuple de translaţie la exterior şi cuplă de rotaţie interioară TRT (aspect 4, fig. 5*a*) are polii de intrare aşezaţi la infinit pe dreptele centrelor perpendiculare la dreptele translaţiilor relative. S-ar putea lua ca poli auxiliari punctele situate pe aceleaşi drepte dar aparţinînd celor două corpuri externe ale cvadrupletei ale căror stări de mişcări sînt complet cunoscute. Grafic această situaţie permite utilizarea proprietăţii de egalitate a proiecţiilor vitezelor punctelor de pe dreapta centrelor pe aceeaşi dreaptă indiferent de corpul căruia aparţin [3]. Analitic o astfel de situaţie poate fi întrebuinţată pentru ecuaţia matriceală a vitezelor, dar fiind valabilă la un moment dat nu se poate întrebuinţa pe intervale de timp, fie pentru determinarea deplasărilor prin aproximaţii succesive, fie pentru aflarea acceleraţiilor prin derivări.

Din motivele arătate şi pe baza observaţiilor anterioare la cupla de translaţie, se vor alege ca poli de intrare, punctele A şi B situate în cor-

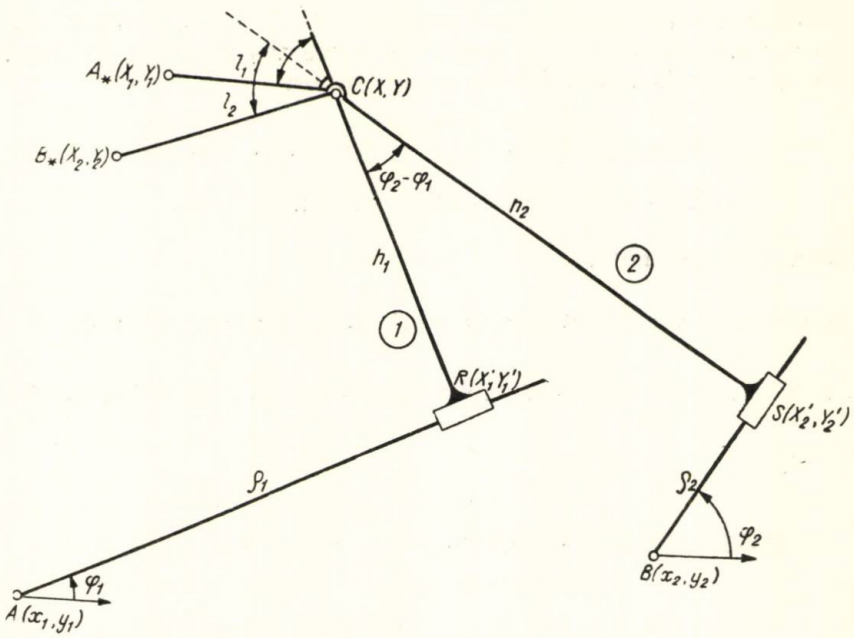


Fig. 5 a

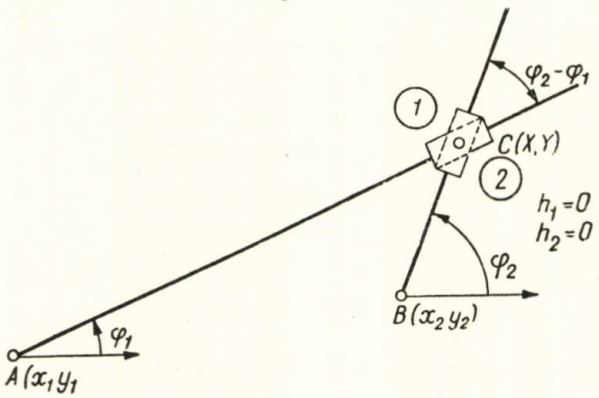


Fig. 5 b

purile extreme cunoscute i şi j ale cvadrupletei, pe axele cuplelor de translaţie (fig. 5*a*). Funcţiile de poziţii sînt :

$$
\begin{aligned}
&(X - X_1')^2 + (Y - Y_1')^2 = h_1^2,\\
&(X - X_1') \cos \varphi_1 + (Y - Y_1') \sin \varphi_1 = 0,\\
&(Y_1' - y_1) \cos \varphi_1 - (X_1' - x_1) \sin \varphi_1 = 0,\\
&(X - X_2')^2 + (Y - Y_2')^2 = h_2^2,\\
&(X - X_2') \cos \varphi_2 + (Y - Y_2') \sin \varphi_2 = 0,\\
&(Y_2' - y_2) \cos \varphi_2 - (X_2' - x_2) \sin \varphi_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Dar coordonatele punctelor auxiliare $R(X_1', Y_1')$ şi $S(X_2', Y_2')$ se pot elimina scriind ecuaţiile de proiecţii ale segmentelor AC şi BC pe direcţiile CR şi CS, adică funcţiile de poziţii rămîn

$$\begin{aligned}(Y - y_1)\cos\varphi_1 - (X - x_1)\sin\varphi_1 &= h_1,\\ (Y - y_2)\cos\varphi_2 - (X - x_2)\sin\varphi_2 &= h_2,\end{aligned} \tag{22}$$

care prin derivare devin

$$\begin{aligned}(\dot{Y}-\dot{y}_1)\cos\varphi_1-(\dot{X}-\dot{x}_1)\sin\varphi_1-[(Y-y_1)\sin\varphi_1+(X-x_1)\cos\varphi_1]\dot{\varphi}_1=0,\\ (\dot{Y}-\dot{y}_2)\cos\varphi_2-(\dot{X}-\dot{x}_2)\sin\varphi_2-[(Y-y_2)\sin\varphi_2+(X-x_2)\cos\varphi_2]\dot{\varphi}_2=0.\end{aligned} \tag{23}$$

Se obţine

$$|i| = -\begin{vmatrix} -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & (Y-y_1)\sin\varphi_1+(X-x_1)\cos\varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & (Y-y_2)\sin\varphi_2+(X-x_2)\cos\varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{24}$$

$$|I| = \begin{vmatrix} -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{25}$$

astfel că

$$|M| = \frac{1}{D} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \cos\varphi_1\cos\varphi_2 & \cos\varphi_2\times[(X-x_1)\cos\varphi_1-(Y-y_1)\sin\varphi_1] \\ -\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & \sin\varphi_2\cos\varphi_1 & \sin\varphi_2\times[(X-x_1)\cos\varphi_1-(Y-y_1)\sin\varphi_1] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin\varphi_2\cos\varphi_1 & -\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -\cos\varphi_1\times[(Y-y_2)\sin\varphi_2+(X-x_2)\cos\varphi_2] \\ \sin\varphi_1\sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_1\times[(Y-y_2)\sin\varphi_2+(X-x_2)\cos\varphi_2] \end{vmatrix}, \tag{26}$$

cu

$$D = \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

De asemenea fără a scădea generalitatea în locul diadei complete se poate substitui, fără modificarea mișcărilor, diada redusă TRT (fig.5b) la care funcțiile de poziții corespund celor anterioare, dacă se iau h_1 și h_2 nule. Rămîn deci aceleași matrice ale vitezelor.

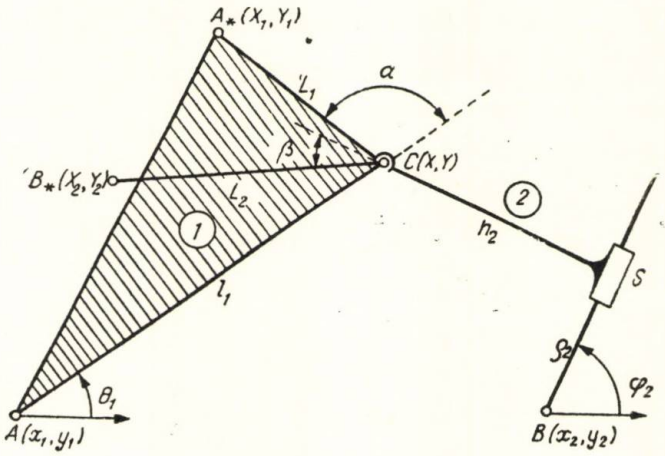


Fig. 6 a

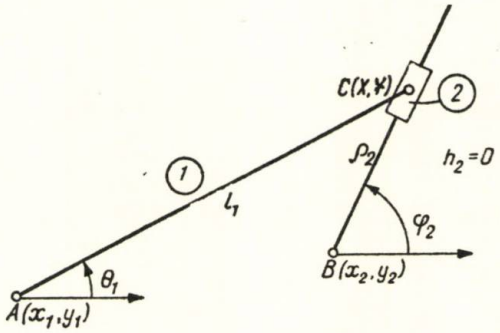


Fig. 6 b

1.4. Pentru diada completă sau redusă RRT (aspect 2, fig. 6 *a*, *b*), avem funcțiile de poziții

$$(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = l_1^2$$
$$(Y - y_2)\cos\varphi_2 - (X - x_2)\sin\varphi_2 = h_2 \qquad (h_2 = 0) \tag{27}$$

și derivatele

$$(X - x_1)(\dot{X} - \dot{x}_1) + (Y - y_1)(\dot{Y} - \dot{y}_1) = 0,$$
$$(\dot{Y} - \dot{y}_2)\cos\varphi_2 - (\dot{X} - \dot{x}_2)\sin\varphi_2 - \tag{28}$$
$$- [(Y - y_2)\sin\varphi_2 + (X - x_2)\cos\varphi_2]\dot{\varphi}_2 = 0.$$

Rezultă

$$|i| = -\begin{vmatrix} X-x_1 & Y-y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & (Y-y_2)\sin\varphi_2 + \\ & & & & & +(X-x_2)\cos\varphi_2 \end{vmatrix}, \quad (29)$$

$$|I| = \begin{vmatrix} X-x_1 & Y-y_1 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{vmatrix} \quad (30)$$

şi

$$|M| = \frac{1}{D} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (X-x_1)\times & (Y-y_1)\times & 0 & (Y-y_1)\times & -(Y-y_1)\times & -(Y-y_1)\times \\ \cos\varphi_2 & \cos\varphi_2 & & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & [(Y-y_2)\sin\varphi_2 + \\ & & & & & +(X-x_2)\cos\varphi_2] \\ (X-x_1)\times & (Y-y_1)\times & 0 & -(X-x_1)\times & (X-x_1)\times & (X-x_1)\times \\ \sin\varphi_2 & \sin\varphi_2 & & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & [(Y-y_2)\sin\varphi_2 + \\ & & & & & +(X-x_2)\cos\varphi_2] \end{vmatrix}, \quad (31)$$

cu

$$D = (X-x_1)\cos\varphi_2 + (Y-y_1)\sin\varphi_2.$$

1.5. La diada completă sau redusă RTT (aspect 5, fig.7 *a,b*) funcţiile de poziţii sînt

$$\begin{aligned} (Y-y_1)\cos(\varphi_2-\alpha) - (X-x_1)\sin(\varphi_2-\alpha) &= 0, \\ (Y-y_2)\cos\varphi_2 - (X-x_2)\sin\varphi_2 &= h_2 \qquad (h_2 = 0), \end{aligned} \quad (32)$$

adică

$$\begin{aligned}&(\dot{Y}-\dot{y}_1)\cos(\varphi_2-\alpha)-(\dot{X}-\dot{x}_1)\sin(\varphi_2-\alpha)-\\&-[(Y-y_1)\sin(\varphi_2-\alpha)+(X-x_1)\cos(\varphi_2-\alpha)]\,\dot{\varphi}_2=0,\\&(\dot{Y}-\dot{y}_2)\cos\varphi_2-(\dot{X}-\dot{x}_2)\sin\varphi_2-\\&-[(Y-y_2)\sin\varphi_2+(X-x_2)\cos\varphi_2]\,\dot{\varphi}_2=0.\end{aligned}\tag{33}$$

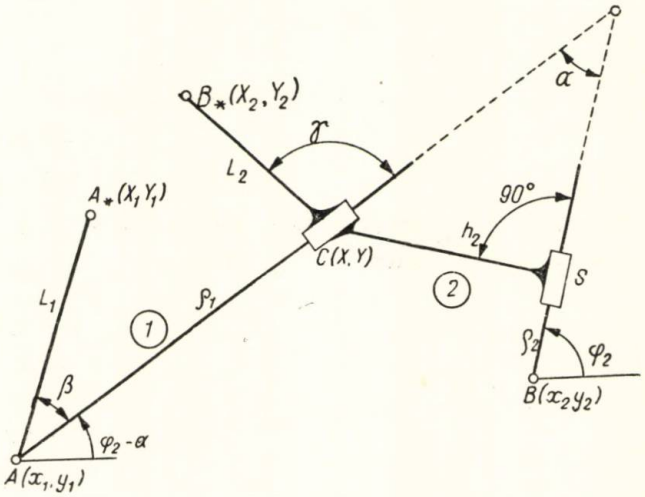


Fig. 7a

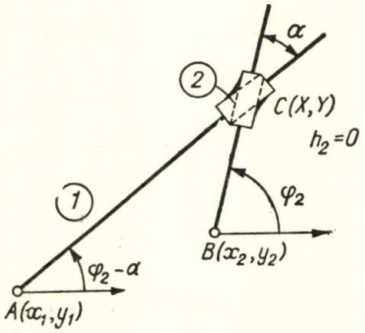


Fig. 7b

Se obține

$$|i|=-\begin{vmatrix}-\sin(\varphi_2-\alpha) & \cos(\varphi_2-\alpha) & 0 & 0 & 0 & (Y-y_2)\sin(\varphi_2-\alpha)+\\ & & & & & +(X-x_2)\cos(\varphi_2-\alpha)\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & (Y-y_2)\sin\varphi_2+\\ & & & & & (X-x_2)\cos\varphi_2\end{vmatrix},\tag{34}$$

$$|I| = \begin{vmatrix} -\sin(\varphi_2-\alpha) & \cos(\varphi_2-\alpha) \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{vmatrix} \tag{35}$$

şi

$$|M| = \frac{1}{D} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} -\sin(\varphi_2-\alpha)\times\cos\varphi_2 & \cos(\varphi_2-\alpha)\times\cos\varphi_2 & 0 \\ \cos(\varphi_2-\alpha)\times\sin\varphi_2 & \cos(\varphi_2-\alpha)\times\cos\varphi_2 & \cos\varphi_2\times[(Y-y_1)\sin(\varphi_2-\alpha)+(X-x_1)\cos(\varphi_2-\alpha)]-\cos(\varphi_2-\alpha)\times[(Y-y_2)\sin\varphi_2+(X-x_2)\cos\varphi_2] \\ -\sin(\varphi_2-\alpha)\times\sin\varphi_2 & \cos(\varphi_2-\alpha)\times\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin(\varphi_2-\alpha)\times\sin\varphi_2 & \sin(\varphi_2-\alpha)\times\cos\varphi_2 & \sin\varphi_2\times[(Y-y_1)\sin(\varphi_2-\alpha)+(X-x_1)\cos(\varphi_2-\alpha)]-\sin(\varphi_2-\alpha)\times[(Y-y_2)\sin\varphi_2+(X-x_2)\cos\varphi_2] \end{vmatrix},$$

$$\text{cu } D = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

2) *In metoda contururilor* funcţiile de poziţii diferă obţinîndu-se alte relaţii matriceale de viteze. Polii de intrare, ca de altfel şi cei de ieşire, se pot poziţiona prin vectorii complecşi faţă de o origine fixă. Este mai comod însă să se lucreze cu valorile relative ale parametrilor cinematici ceea ce corespunde cu ataşarea unei biplete de translaţie între doi poli, schematizată prin vectorii $z = re^{i\varphi}$ şi asemănător $Z = Re^{i\theta}$. Ecuaţiile de poziţii se obţin din ecuaţiile vectoriale de închidere ale contururilor deformabile independente.

2.1. La diada *RRR* (fig. 1) derivatele funcţiilor de poziţii (3) sînt

$$\begin{aligned} v\cos\varphi - r\sin\varphi\,\omega &= -l_1\sin\theta_1\,\omega_1 + l_2\sin\theta_2\,\omega_2, \\ v\sin\varphi + r\cos\varphi\,\omega &= \quad l_1\cos\theta_1\,\omega_1 - l_2\cos\theta_2\,\omega_2, \end{aligned} \tag{37}$$

astfel că

$$|v| = \begin{vmatrix} v \\ \omega \end{vmatrix}; \quad |V| = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{vmatrix}, \tag{38}$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}, \quad |I| = \begin{vmatrix} l_1\sin\theta_1 & -l_2\sin\theta_2 \\ -l_1\cos\theta_1 & l_2\cos\theta_2 \end{vmatrix} \tag{39}$$

și

$$|M| = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} l_2\cos(\theta_2-\varphi) & l_2 r\sin(\theta_2-\varphi) \\ l_1\cos(\theta_1-\varphi) & l_1 r\cos(\theta_1-\varphi) \end{vmatrix}, \tag{40}$$

cu

$$D = l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2).$$

2.2. La diada RTR (fig. 2) avem

$$\begin{aligned} v\cos\varphi - r\sin\varphi\,\omega &= \dot{\rho}\cos\theta - (\rho\sin\theta + h\cos\theta)\,\dot{\theta}, \\ v\sin\varphi + r\cos\varphi\,\omega &= \dot{\rho}\sin\theta + (\rho\cos\theta - h\sin\theta)\,\dot{\theta}, \end{aligned} \tag{41}$$

adică

$$|v| = \begin{vmatrix} v \\ \omega \end{vmatrix}; \quad |V| = \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}. \tag{42}$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}, \quad |I| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta - h\cos\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta - h\sin\theta \end{vmatrix} \tag{43}$$

și

$$|M| = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} \rho\cos(\theta-\varphi) + & -\rho r\sin(\varphi-\theta) + \\ +h\sin(\varphi-\theta) & +hr\cos(\varphi-\theta) \\ \sin(\varphi-\theta) & r\cos(\varphi-\theta) \end{vmatrix}, \tag{44}$$

cu

$$D = \rho.$$

2.3. La diada TRT (fig.5) avem

$$\overline{AB} = r\,e^{i\varphi} = [\rho_1 e^{i\varphi_1} + h_1 e^{i(\varphi_1+90^\circ)}] - \\ - [\rho_2 e^{i\varphi_2} + h_2 e^{i(\varphi_2+90^\circ)}], \tag{45}$$

adică prin derivare se obține

$$v\,e^{i\varphi} + ir\,e^{i\varphi}\,\omega = [\dot{\rho}_1 e^{i\varphi_1} + i\rho_1 e^{i\varphi_1}\omega_1 + ih_1 e^{i(\varphi_1+90^\circ)}\omega_1] - \\ - [\dot{\rho}_2 e^{i\varphi_2} + i\rho_2 e^{i\varphi_2}\omega_2 + ih_2 e^{i(\varphi_2+90^\circ)}\omega_2] \tag{46}$$

sau în proiecții pe axe

$$v\cos\varphi - r\sin\varphi\,\omega = [\dot{\rho}_1\cos\varphi_1 - (\rho_1\sin\varphi_1 + h_1\cos\varphi_1)\omega_1] - \\ - [\dot{\rho}_2\cos\varphi_2 - (\rho_2\sin\varphi_2 + h_2\cos\varphi_2)\omega_2], \\ v\sin\varphi + r\cos\varphi\,\omega = [\dot{\rho}_1\sin\varphi_1 + (\rho_1\cos\varphi_1 - h_1\sin\varphi_1)\omega_1] - \\ - [\dot{\rho}_2\sin\varphi_2 + (\rho_2\cos\varphi_2 - h_2\sin\varphi_2)\omega_2]. \tag{47}$$

Sub formă matriceală avem

$$|v| = \begin{vmatrix} v \\ \omega \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{vmatrix}; \quad |V| = \begin{vmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \end{vmatrix}, \tag{48}$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & \rho_1\sin\varphi_1 + & -\rho_2\sin\varphi_2 - \\ & & +h_1\cos\varphi_1 & -h_2\cos\varphi_2 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & -\rho_1\cos\varphi_1 + & \rho_2\cos\varphi_2 - \\ & & +h_1\sin\varphi_1 & -h_2\sin\varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{49}$$

$$|I| = \begin{vmatrix} -\cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \\ -\sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{50}$$

și

$$|M| = -\frac{1}{D} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sin(\varphi_2-\varphi) & -r\cos(\varphi_2-\varphi) & \rho_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)+- & \rho_2 \\ & & +h_1\sin(\varphi_2-\varphi_1) & \\ \sin(\varphi_1-\varphi) & -r\cos(\varphi_1-\varphi) & \rho_1 & -\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+ \\ & & & +h_2\sin(\varphi_2-\varphi_1) \end{vmatrix}, \tag{51}$$

cu $D = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$.

2.4. Diada RRT (fig. 6) are

$$\overline{AB} = r\,e^{i\varphi} = l_1\,e^{i\theta_1} - [\rho_2\,e^{i\varphi_2} + h_2\,e^{i(\varphi_2+90^\circ)}], \tag{52}$$

astfel că ecuațiile de viteze sînt

$$v\cos\varphi - r\sin\varphi\,\omega = -l_1\sin\theta_1\,\omega_1 - \dot{\rho}_2\cos\varphi_2 + (\rho_2\sin\varphi_2 - h_2\cos\varphi_2)\,\omega_2, \tag{53}$$

$$v\sin\varphi + r\cos\varphi\,\omega = l_1\cos\theta_1\,\omega_1 - \dot{\rho}_2\sin\varphi_2 - (\rho_2\cos\varphi_2 - h_2\sin\varphi_2)\,\omega_2.$$

Cu notațiile

$$|v| = \begin{vmatrix} v \\ \omega \\ \omega_2 \end{vmatrix}; \quad |V| = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \dot{\rho}_2 \end{vmatrix}, \tag{54}$$

se deduce

$$|i| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & -\rho_2\sin\varphi_2 - h_2\cos\varphi_2 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & \rho_2\cos\varphi_2 - h_2\sin\varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{55}$$

$$|I| = \begin{vmatrix} l_1\sin\theta_1 & \cos\varphi_2 \\ -l_1\cos\theta_1 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix} \tag{56}$$

și

$$|M| = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sin(\varphi_2-\varphi) & -r\cos(\varphi_2-\varphi) & -\rho_2 \\ l_1\cos(\theta_1-\varphi) & r\sin(\theta_1-\varphi) & l_1[\rho_2\sin(\theta_1-\varphi_2)- \\ & & -h_2\cos(\theta_1-\varphi_2)] \end{vmatrix}, \tag{57}$$

cu

$$D = l_1 \cos(\varphi_2 - \theta_1).$$

2.5. Pentru diada RTT (fig.7) avem

$$\overline{AB} = r\, e^{i\varphi} = \rho_1 e^{i(\varphi_2 - \alpha)} - [\rho_2 e^{i\varphi_2} + h_2 e^{i(\varphi_2 + 90^\circ)}]. \tag{58}$$

Ecuațiile pentru viteze sînt

$$v\cos\varphi - r\sin\varphi\,\omega = \dot{\rho}_1 \cos(\varphi_2 - \alpha) - \dot{\rho}_2 \cos\varphi_2 - \\ - [\rho_1 \sin(\varphi_2 - \alpha) - \rho_2 \sin\varphi_2 - h_2 \cos\varphi_2]\,\omega_2, \tag{59}$$

$$v\sin\varphi + r\cos\varphi\omega = \dot{\rho}_1 \sin(\varphi_2 - \alpha) - \dot{\rho}_2 \sin\varphi_2 + \\ + [\rho_1 \cos(\varphi_2 - \alpha) + \rho_2 \cos\varphi_2 - h_2 \sin\varphi_2]\,\omega_2.$$

Sub formă matriceală avem

$$|v| = \begin{vmatrix} v \\ \omega \\ \omega_2 \end{vmatrix}; \quad |V| = \begin{vmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \end{vmatrix}, \tag{60}$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & \rho_1 \sin(\varphi_2 - \alpha) - \\ & & -\rho_2 \sin\varphi_2 - h_2 \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & -\rho_1 \cos(\varphi_2 - \alpha) + \\ & & +\rho_2 \cos\varphi_2 - h_2 \sin\varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{61}$$

$$|I| = \begin{vmatrix} -\cos(\varphi_2 - \alpha) & \cos\varphi_2 \\ -\sin(\varphi_2 - \alpha) & \sin\varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{62}$$

$$|M| = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sin(\varphi_2 - \varphi) & -r\cos(\varphi_2 - \varphi) & \rho_1 \cos\alpha - \rho_2 \\ \sin(\varphi_2 - \alpha - \varphi) & -r\cos(\varphi_2 - \alpha - \varphi) & \rho_1 - \rho_2 \cos\alpha + h_2 \sin\alpha \end{vmatrix}, \tag{63}$$

cu

$$D = -\sin\alpha.$$

CVADRIPOLI. Determinarea vitezelor de ieșire.

Întrebuințînd doi poli de ieșire a mișcării, diada devine un transmițător de mișcare și are forma schematică a unui cvadripol (fig. 8). Polii de

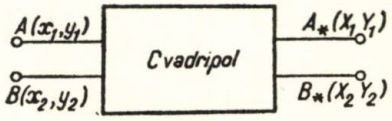


Fig. 8

ieșire A_* B_* fac parte din elementele diadei. Se adaugă noi ecuații de poziții care prin derivare dau ecuațiile de viteze ce pot fi puse sub forma matriceală

$$|j|\cdot|v|+|J|\cdot|V|+|I^*|\cdot|V^*|=0, \tag{64}$$

unde

$$|v|=\left|\begin{array}{c}\dot{x}_1\\ \dot{y}_1\\ \dot{\varphi}_1\\ \hline \dot{x}_2\\ \dot{y}_2\\ \dot{\varphi}_2\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}v_1\\ \hline v_2\end{array}\right|;\quad |V|=\left|\begin{array}{c}\dot{X}\\ \hline \dot{Y}\end{array}\right|, \tag{65}$$

$$|V^*|=\left|\begin{array}{c}\dot{X}_1\\ \dot{Y}_1\\ \hline \dot{X}_2\\ \dot{Y}_2\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}V_1^*\\ \hline V_2^*\end{array}\right|. \tag{66}$$

Deci se obține

$$|V^*|=|M^*|\cdot|v|, \tag{67}$$

dacă

$$|M^*|=|I^*|^{-1}\,[\,|J|\cdot|I|^{-1}|i|-|j|\,], \tag{68}$$

care este matricea de transmisie a vitezelor de ieșire.

La diada *RRR* (fig. 9) se adugă funcțiile

$$\begin{aligned}
&(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 = l^2_{A_0C},\\
&(X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 = l^2_{A_0A},\\
&(X_2 - X)^2 + (Y_2 - y)^2 = l^2_{B_0C},\\
&(X_2 - x_2)^2 + (Y_2 - y_2)^2 = l^2_{B_0B},
\end{aligned} \tag{69}$$

care dau ecuațiile de viteze

$$\begin{aligned}
&(X_1 - X)\,(\dot{X}_1 - \dot{X}) + (Y_1 - Y)\,(\dot{Y}_1 - \dot{Y}) = 0,\\
&(X_1 - x_1)\,(\dot{X}_1 - \dot{x}_1) + (Y_1 - y_1)\,(\dot{Y} - \dot{y}_1) = 0,\\
&(X_2 - X)\,(\dot{X}_2 - \dot{X}) + (Y_2 - Y)\,(\dot{Y}_2 - \dot{Y}) = 0,\\
&(X_2 - x_2)\,(\dot{X}_2 - \dot{x}_2) + (Y_2 - y_2)\,(\dot{Y}_2 - \dot{y}_2) = 0
\end{aligned} \tag{70}$$

și

$$|j| = -\left|\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
X_1-x_1 & Y_1-y_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & X_2-x_2 & Y_2-y_2 & 0
\end{array}\right|, \tag{71}$$

$$|J| = -\left|\begin{array}{cc}
X_1-X & Y_1-Y\\
0 & 0\\
X_2-X & Y_2-Y\\
0 & 0
\end{array}\right|, \tag{72}$$

$$|I^*| = \left|\begin{array}{cc|cc}
X_1-X & Y_1-Y & 0 & 0\\
X_1-x_1 & Y_1-y_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & X_2-X & Y_2-Y\\
0 & 0 & X_2-x_2 & Y_2-y_2
\end{array}\right|. \tag{73}$$

La diada RTR se pot considera polii de ieşire P şi Q (fig. 2) ceea ce face să se utilizeze funcţiile de poziţii (4) şi (5). Se obţine

$$\begin{aligned}
&(X_1 - x_1)\,(\dot{X}_1 - \dot{x}_1) + (Y_1 - y_1)\,(\dot{Y}_1 - \dot{y}_1) = 0,\\
&(X_2 - x_2)\,(\dot{X}_2 - \dot{x}_2) + (Y_2 - y_2)\,(\dot{Y}_2 - \dot{y}_2) = 0,\\
&(\dot{Y}_2 - \dot{Y}_1)\,(Y_1 - y_1) + (Y_2 - Y_1)\,(\dot{Y}_1 - \dot{y}_1) +\\
&+ (\dot{X}_2 - \dot{X}_1)\,(X_1 - x_1) + (X_2 - X_1)\,(\dot{X}_1 - \dot{x}_1) = 0,\\
&(\dot{Y}_2 - \dot{Y}_1)\,(Y_2 - y_2) + (Y_2 - Y_1)\,(\dot{Y}_2 - \dot{y}_2) +\\
&+ (\dot{X}_2 - \dot{X}_1)\,(X_2 - x_2) + (X_2 - X_1)\,(\dot{X}_2 - \dot{x}_2) = 0,
\end{aligned} \tag{74}$$

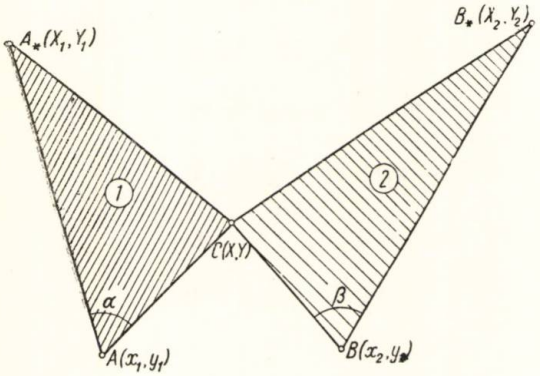


Fig. 9

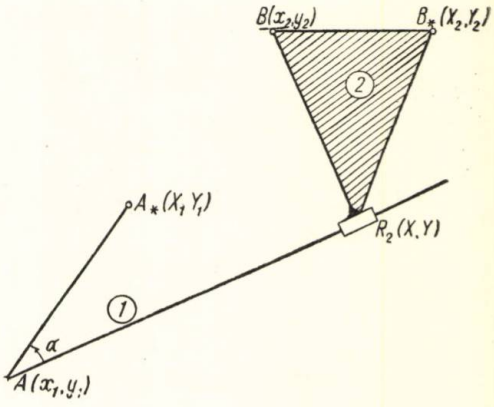


Fig. 10

adică

$$|j| = -\begin{vmatrix} X_1-x_1 & Y_1-y_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & X_2-x_2 & Y_2-y_2 & 0\\ X_2-X_1 & Y_2-Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & X_2-X_1 & Y_2-Y_1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{75}$$

$$|J| = 0, \tag{76}$$

$$|I^*| = \begin{vmatrix} X_1-x_1 & Y_1-y_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & X_2-x_2 & Y_2-y_2\\ x_1+X_2-2X_1 & y_1+Y_2-2Y_1 & X_1-x_1 & Y_1-y_1\\ -(X_2-x_2) & -(Y_2-y_2) & 2X_2-X_1-x_2 & 2Y_2-Y_1-y_2 \end{vmatrix}. \tag{77}$$

Dacă se iau polii de ieşire A_* şi B_* (fig. 10) avem

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha\,[(X_1 - x_1)(X - x_1) + (Y_1 - y_1)(Y - y_1)] + \\
&+ \cos\alpha\,[(X_1 - x_1)(Y - y_1) - (Y_1 - y_1)(X - x_1)] = 0, \\
&(X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 = l^2_{A_*A}, \\
&(X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2 = l^2_{B_*B}, \\
&(X_2 - x_2)^2 + (Y_2 - y_2)^2 = l^2_{B_*B}
\end{aligned} \tag{78}$$

şi

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha\,[(\dot X_1 - \dot x_1)(X - x_1) + (X_1 - x_1)(\dot X - \dot x_1) + \\
&\quad + (\dot Y_1 - \dot y_1)(Y - y_1) + (Y_1 - y_1)(\dot Y - \dot y_1)] + \\
&\quad + \cos\alpha\,[(\dot X_1 - \dot x_1)(Y - y_1) + (X_1 - x_1)(\dot Y - \dot y_1) - \\
&\quad - (\dot Y_1 - \dot y_1)(X - x_1) - (Y_1 - y_1)(\dot X - \dot x_1)] = 0, \\
&(X_1 - x_1)(\dot X_1 - \dot x_1) + (Y_1 - y_1)(\dot Y_1 - \dot y_1) = 0, \\
&(X_2 - X)(\dot X_2 - \dot X) + (Y_2 - Y)(\dot Y_2 - \dot Y) = 0, \\
&(X_2 - x_2)(\dot X_2 - \dot x_2) + (Y_2 - y_2)(\dot Y_2 - \dot y_2) = 0.
\end{aligned} \tag{79}$$

Se obţin matricele

$$|j| = -\begin{vmatrix}
(X + X_1 - 2x_1)\sin\alpha + (Y + Y_1 - 2y_1)\sin\alpha + & & & & & \\
+ (Y - Y_1)\cos\alpha \quad + (X_1 - X)\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_1 - x_1 & Y_1 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & X_2 - x_2 & Y_2 - y_2 & 0
\end{vmatrix}, \tag{80}$$

$$|J| = -\begin{vmatrix}
-(X_1 - x_1)\sin\alpha + & -(Y_1 - y_1)\sin\alpha - \\
+ (Y_1 - y_1)\cos\alpha & -(X_1 - x_1)\cos\alpha \\
0 & 0 \\
X_2 - X & Y_2 - Y \\
0 & 0
\end{vmatrix}, \tag{81}$$

$$|I^*| = \begin{vmatrix} (X-x_1)\sin\alpha + & (Y-y_1)\sin\alpha - & 0 & 0 \\ +(Y-y_1)\cos\alpha & -(X-x_1)\cos\alpha & & \\ X_1-x_1 & Y_1-y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_2-X & Y_2-Y \\ 0 & 0 & X_2-x_2 & Y_2-y_2 \end{vmatrix}. \quad (82)$$

La diada TRT (fig.5 a) avem

$$\begin{aligned} X_1 &= X - l_1 \sin(\varphi_1 + \alpha), \\ Y_1 &= Y + l_1 \cos(\varphi_1 + \alpha), \\ X_2 &= X - l_2 \sin(\varphi_2 + \beta), \\ Y_2 &= Y + l_2 \cos(\varphi_2 + \beta), \end{aligned} \quad (83)$$

adică

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \dot{X} - l_1 \cos(\varphi_1 + \alpha)\,\dot{\varphi}_1, \\ \dot{Y}_1 &= \dot{Y} - l_1 \sin(\varphi_1 + \alpha)\,\dot{\varphi}_1, \\ \dot{X}_2 &= \dot{X} - l_2 \cos(\varphi_2 + \beta)\,\dot{\varphi}_2, \\ \dot{Y}_2 &= \dot{Y} - l_2 \sin(\varphi_2 + \beta)\,\dot{\varphi}_2. \end{aligned} \quad (84)$$

Avem matricele

$$|j| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & l_1\cos(\alpha+\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1\sin(\alpha+\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_2\cos(\beta+\varphi_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_2\sin(\beta+\varphi_2) \end{vmatrix}, \quad (85)$$

$$|J| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (86)$$

$$|I^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (87)$$

În mod asemănător se tratează şi celelalte diade.
La diada RRT (fig. 6 a) avem

$$\begin{aligned}
&(X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 = l_{AA_*}^2,\\
&(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 = l_{CA_*}^2,\\
&X_2 = X - L_2 \sin(\varphi_2 + \beta),\\
&Y_2 = Y + L_2 \cos(\varphi + \beta)
\end{aligned} \tag{88}$$

şi derivînd

$$\begin{aligned}
&(X_1 - x_1)(\dot{X}_1 - \dot{x}_1) + (Y_1 - y_1)(\dot{Y}_1 - \dot{y}_1) = 0,\\
&(X_1 - X)(\dot{X}_1 - \dot{X}) + (Y_1 - Y)(\dot{Y}_1 - \dot{Y}) = 0,\\
&\dot{X}_2 - \dot{X} + L_2 \cos(\beta + \varphi_2)\,\dot{\varphi}_2 = 0,\\
&\dot{Y}_2 - \dot{Y} + L_2 \sin(\beta + \varphi_2)\,\dot{\varphi}_2 = 0
\end{aligned} \tag{89}$$

se obţin matricele

$$|j| = -\left|\begin{array}{ccc|ccc}
X_1 - x_1 & Y_1 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\cos(\beta + \varphi_2)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\sin(\beta + \varphi_2)
\end{array}\right|, \tag{90}$$

$$|J| = -\left|\begin{array}{cc}
0 & 0\\
X_1 - X & Y_1 - Y\\
1 & 0\\
0 & 1
\end{array}\right| \tag{91}$$

şi

$$|I^*| = \left|\begin{array}{cccc}
X_1 - x_1 & Y_1 - y_1 & 0 & 0\\
X_1 - X & Y_1 - Y & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right| \tag{92}$$

La diada RTT (fig.7 a) avem

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + L_1 \cos(\varphi_2 - \alpha + \beta), \\ Y_1 &= y_1 + L_1 \sin(\varphi_2 - \alpha + \beta), \\ X_2 &= X + L_2 \cos(\varphi_2 - \alpha + \gamma), \\ Y_2 &= Y + L_2 \sin(\varphi_2 - \alpha + \gamma); \end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 - \dot{x}_1 + L_1 \sin(\varphi_2 - \alpha + \beta)\,\dot{\varphi}_2 &= 0, \\ \dot{Y}_1 - \dot{y}_1 - L_1 \cos(\varphi_2 - \alpha + \beta)\,\dot{\varphi}_2 &= 0, \\ \dot{X}_2 - \dot{X} + L_2 \sin(\varphi_2 - \alpha = \gamma)\,\dot{\varphi}_2 &= 0, \\ \dot{Y}_2 - \dot{Y} - L_2 \cos(\varphi_2 - \alpha + \gamma)\,\dot{\varphi}_2 &= 0, \end{aligned} \tag{94}$$

$$|j| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_1 \sin(\varphi_2 - \alpha + \beta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & L_1 \cos(\varphi_2 - \alpha + \beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 \sin(\varphi_2 - \alpha + \gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 \cos(\varphi_2 - \alpha + \gamma) \end{vmatrix}, \tag{95}$$

$$|J| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{96}$$

$$|I^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{97}$$

În lucrările [1], [2] s-au studiat conexiunile grupelor cinematice: legarea în serie, legarea în paralel, legarea mixtă și legarea inversă. La legarea în serie a două diade, matricea de transmisie rezultantă $|M|$ este

egală cu produsul matricelor de transmisie $|M_1|$ și $|M_2|$ ale diadelor componente

$$|M| = |M|_1 \cdot |M|_2. \tag{98}$$

În cazul mecanismului din figura 11 s-au calculat matricele de transmisie ale diadelor componente și matricea rezultantă. Astfel, la dipolul $A'B'C'$, diada 1 — 2, avem

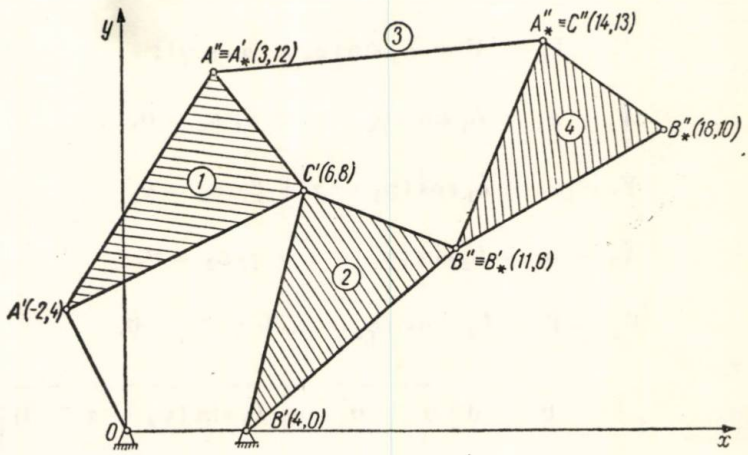


Fig. 11

$$A'(x_1 = -2,\ y_1 = 4),\quad B'(x_2 = 4,\ y_2 = 0),\quad C'(X = 6,\quad Y = 8)$$

și se determină matricea de transmisie a vitezelor interne după formula (16), adică

$$|M|_1 = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 8 & 4 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & 2 & 8 \end{vmatrix}. \tag{99}$$

Pentru cvadripolul $A'B'C'A'_*B'_*$ cu

$$A'_*(X_1 = 3,\ Y_1 = 12) \text{ și } B'_*(X_2 = 11;\ Y_2 = 6)$$

se determină după (71), (72) și (73) matricele

$$|j| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix}, \tag{100}$$

$$|J| = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 5 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{101}$$

$$|I^*| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}, \tag{102}$$

astfel că se determină după (68) matricea de transmisie a vitezelor exterioare

$$|M^*| = \begin{vmatrix} \frac{9}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{5}{28} & \frac{2}{7} & \frac{5}{28} & \frac{5}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}. \tag{103}$$

În același fel se procedează pentru dipolul și cvadripolul următor $A''\ B''C''A''_*B''_*$, la care coordonatele sînt

$A'' \equiv A'_*$ $(x_1 = 3,\ y_1 = 12)$; $B'' \equiv B'_*$ $(x_2 = 11,\ y_2 = 6)$,

$C''(X = 14;\ Y = 13)$; $A''_* \equiv C''$ $(X_1 = 14,\ Y_1 = 13)$,

B''_* $(X_2 = 18;\ Y_2 = 10)$,

astfel că

$$|M|_2 = \frac{1}{74}\begin{vmatrix} 77 & 7 & -3 & -7 \\ -3 & -3 & 33 & 77 \end{vmatrix}, \tag{104}$$

şi

$$|M^*|_2 = \frac{1}{37}\begin{vmatrix} 22 & 2 & 15 & 2 \\ -38{,}5 & -3{,}5 & 38{,}5 & 40{,}5 \end{vmatrix}. \tag{105}$$

Matricea rezultantă este

$$|M| = \frac{1}{37}\begin{vmatrix} 38{,}78 & 31 & -5{,}8 & -27 \\ -55{,}8 & -69 & 56{,}37 & 63{,}25 \end{vmatrix}, \tag{106}$$

adică

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= -24, \\ \dot{Y}_1 &= 19{,}8, \\ \dot{X}_2 &= -17{,}6, \\ \dot{Y}_2 &= 29, \end{aligned} \tag{107}$$

dacă vitezele polilor de intrare sînt

$$\dot{x}_1 = -12, \qquad \dot{y}_1 = -6 \qquad \dot{x}_2 = \dot{y}_2 = 0.$$

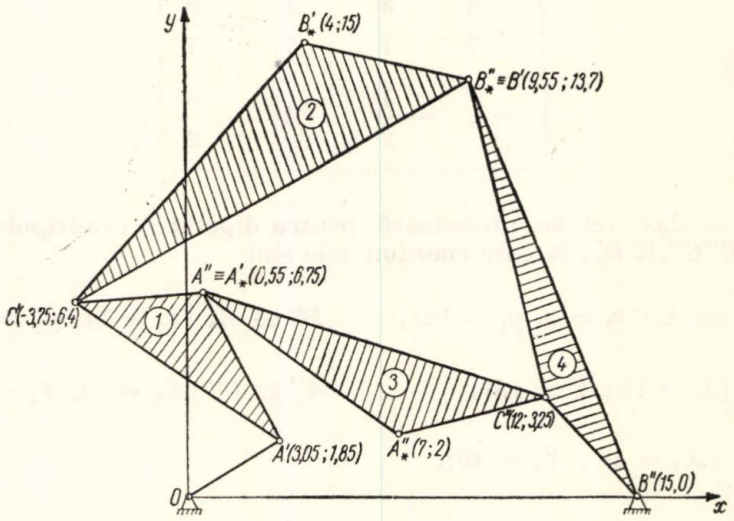


Fig. 12

La mecanismul din figura 12 se exemplifică legarea inversă a două diade şi se determină matricele de transmisie ale diadelor componente şi matricea rezultantă.

Pentru prima diadă 1 — 2 luată ca dipol $A'B'C'$ cu

$$A'(x_1 = 3{,}05\,;\quad y_1 = 1{,}85)\,;\quad B'\ (x_2 = 9{,}55\,;\quad y_2 - 13{,}7)\,;\quad C'(X = \\ = -\,3{,}75\,;\ Y = 6{,}4),$$

și ca un cvadripol $A'B'C'\,A'_*B'_*$ cu $A'_*\,(X_1 = 0{,}55\,;\ Y_1 = 6{,}75)$ și $B'_*\,(X_2 = 4\,;\ Y_2 = 15)$ se determină matricea de transmisie a vitezelor interne după formula (16).

$$|M|_1 = \begin{vmatrix} 0{,}448 & -0{,}3 & 0{,}545 & 0{,}299 \\ -0{,}816 & 0{,}546 & 0{,}811 & 0{,}445 \end{vmatrix}. \tag{108}$$

Folosind (71), (72), (73), (68) se calculează matricele

$$|j| = \begin{vmatrix} 2{,}5 & -4{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 5{,}55 & -1{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{109}$$

$$|J| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4{,}30 & 0{,}35 \\ 0 & 0 \\ 7{,}75 & 8{,}6 \end{vmatrix}, \tag{110}$$

$$|I^*| = \begin{vmatrix} -2{,}5 & 4{,}9 & 0 & 0 \\ 4{,}3 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5{,}55 & 1{,}3 \\ 0 & 0 & 7{,}75 & 8{,}6 \end{vmatrix}, \tag{111}$$

și matricea de transmisie a vitezelor exterioare

$$|M^*|_1 = \left|\begin{array}{cc|cc} 0{,}406 & -0{,}323 & 0{,}586 & 0{,}321 \\ -0{,}300 & 0{,}830 & 0{,}299 & 0{,}164 \\ \hline -0{,}078 & 0{,}052 & 1{,}060 & -0{,}057 \\ -0{,}340 & 0{,}227 & 0{,}338 & 0{,}764 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} m'_{11} & m'_{12} \\ \hline m'_{21} & m'_{22} \end{array}\right|. \tag{112}$$

Pentru a doua diadă 3—4 considerată ca dipol şi cvadripol

$A''B''C''A''_*B''_*$ cu $A'' \equiv A'_*$ $(x_1 = 0{,}55\,;\ y_1 = 6{,}75)$,

$B''(x_2 = 15\,;\ y_2 = 0)\,;\ C''(X = 12,\ Y = 3{,}25)$,

$A''_*(X_1 = 7\,;\ Y_1 = 2)\,;\ B''_* \equiv B'(X_2 = 9{,}55\,;\ Y_2 = 13{,}7)$,

se procedează în acelaşi mod

$$|M|_2 = -\begin{vmatrix} -1{,}385 & 0{,}417 & 0{,}384 & -0{,}416 \\ -1{,}271 & 0{,}383 & 1{,}278 & -1{,}384 \end{vmatrix} \tag{113}$$

şi

$$|M^*|_2 = \left|\begin{array}{cc|cc} 1{,}514 & -0{,}562 & -0{,}520 & 0{,}564 \\ 0{,}723 & 0{,}219 & -0{,}717 & 0{,}777 \\ \hline 5{,}784 & -1{,}744 & -4{,}827 & 1{,}740 \\ 2{,}304 & -0{,}694 & -2{,}325 & 1{,}707 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} m''_{11} & m''_{12} \\ m''_{21} & m''_{22} \end{vmatrix}. \tag{114}$$

Pentru tetrada obţinută prin legarea inversă, avînd intrările $A'B''$ şi ieşirile $A''_* B'_*$, matricea de transmisie rezultantă este dată de relaţia

$$|M| = \begin{vmatrix} m'_{21} + \\ +m'_{22}(1 - m''_{21}\, m'_{12})^{-1}\, m''_{21}\, m'_{11} & m'_{22}(1 - m''_{21}\, m'_{12})^{-1}\, m''_{22} \\ m''_{11}(1 - m'_{12}\, m''_{21})^{-1}\, m'_{11} & m''_{12} + \\ +m''_{11}(1 - m'_{12}\, m''_{21})^{-1}\, m'_{12}\, m''_{22} \end{vmatrix}, \tag{115}$$

stabilită în lucrarea [2].

Deci

$$|M| = \begin{vmatrix} -1{,}272 & 1{,}429 & 2{,}294 & 0{,}739 \\ -1{,}079 & 1{,}080 & 1{,}100 & 1{,}268 \\ -0{,}226 & 0{,}209 & 1{,}239 & 0{,}261 \\ -0{,}458 & 0{,}740 & 0{,}479 & 0{,}854 \end{vmatrix}. \tag{116}$$

Cunoscînd vitezele la intrare $\dot{x}_1 = -5{,}3$; $\dot{y}_1 = 9{,}1$; $\dot{x}_2 = \dot{y}_2 = 0$ se calculează vitezele polilor de ieșire

$$\dot{X}_1 = 3{,}105,$$

$$\dot{Y}_1 = 9{,}176,$$

$$\dot{X}_2 = 19{,}79 \qquad (117)$$

$$\dot{Y}_2 = 15{,}582.$$

Primită la redacție la 5 iulie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Multipoli cinematici cu elemente rigide*, St. cerc. mec. apl., *5* (1968).
2. — *Diada interpretată ca dipol și cuadripol cinematic*, St. cerc mec. apl. *6* (1968).
3. — *Bazele analizei mecanismelor*, București, Edit. Academiei, 1967.

STUDIU ASUPRA STABILITĂȚII REGIMURILOR DE MIȘCARE A MAȘINILOR

de O. RĂDULESCU
Academia militară

Pe baza unei ecuații unitare a mașinilor se stabilesc legile de mișcare în regim tranzitoriu, iar cu ajutorul unei ecuații caracteristice de exploatare, regimurile staționare : stabile cu echilibrare lentă sau rapidă, semistabile și instabile. Se stabilește, ca o consecință a acestui studiu, calea practică de a asigura stabilitatea unui agregat în cazul sarcinilor din zonele de instabilitate ale acestuia, precum și zona rațională de exploatare.

În exploatarea mașinilor se întîlnesc regimuri de mișcare nestabile care produc neajunsuri, mai ales în cazul conducerii sau al reglării automate, cînd mașinile nu sînt sub controlul unui conducător care ar putea interveni rațional. Aceste regimuri prezintă pericolul desprinderii, urmat de oprirea agregatului.

Studiul stabilității mașinilor nu a fost efectuat pînă în prezent, deoarece nu a existat o ecuație unitară a acestora, care să permită stabilirea legilor de mișcare în regim tranzitoriu.

În cele ce urmează se folosește ecuația de mișcare a agregatului în regim tranzitoriu, pe baza unei teorii unitare a mașinilor [10], care permite identificarea regimurilor staționare și studiul stabilității lor.

Mașinile componente ale agregatului, motorul și generatorul, sînt structurate ca în figura 1, fiecare din ele cuprinzînd :

— o sursă de energie (s), prevăzută cu un repartitor (R) al energiei de diferite densități în funcție de poziția sa (β_j) și un obturator (O) al debitului de energie în funcție de poziția sa (α_i) ;

— un mecanism (M).

După sensul circulației energiei (puterii), mașina poate fi motoare sau generatoare (fig. 2).

Ținînd seama de puterea disipată (Pd), bilanțul energetic dintre puterea sursei (Ps) și cea mecanică (Pm), are forma

$$Pm = Ps \mp Pd, \tag{1}$$

semnul negativ aparținînd motorului, iar cel pozitiv generatorului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970, P. 1357–1367

Pentru anumite valori ale parametrilor sursei (α_i, β_j), această ecuație generală, exprimată în funcție de frecvența ciclului energetic al mașinii sau de viteza de rotație a axei sale (n), are expresia [10]:

$$Pij = (Aij \cdot n + Bij \cdot n^2 - Cij \cdot n^3) \mp (Dij \cdot n + Eij \cdot n^3) \qquad (2)$$

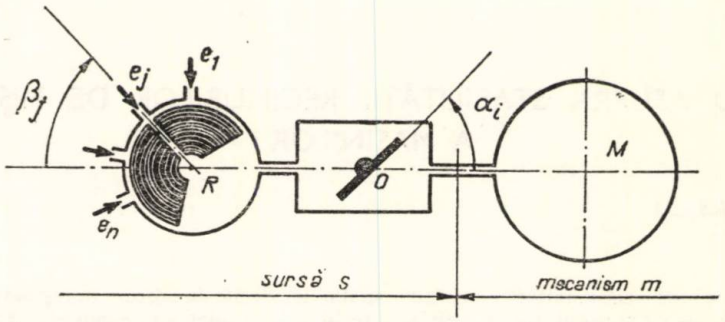


Fig. 1

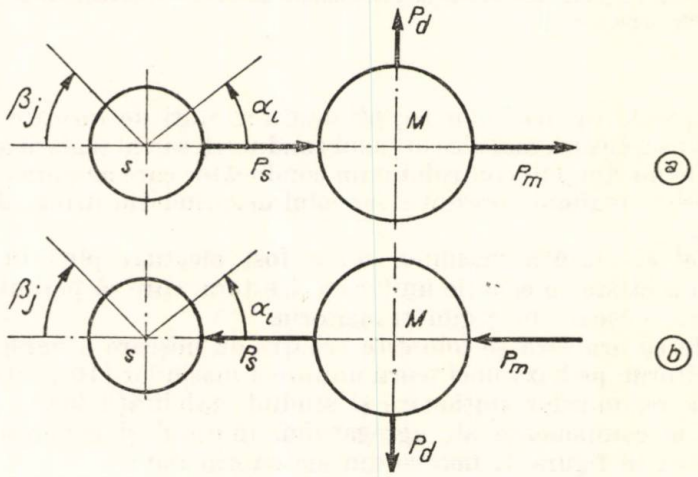


Fig. 2

și reprezintă caracteristicile mecanice ale mașinii în planul mecanic (Pm,n).

Coeficienții (Aij, Bij...) au valori constante sau variabile aleatoare, cuprinse în intervale limitate:

$$(Aij)_{min} \leqslant Aij \leqslant (Aij)_{max} \ldots \text{ etc.} \qquad (3)$$

Fiecare termen (Aij ...) reprezintă o valoare medie constantă în timpul funcționării. În cele ce urmează se vor folosi valorile medii ale coeficienților, apelînd la cele aleatoare numai cînd va fi necesar și cînd se va preciza acest lucru.

Caracteristicile mecanice sînt cubice ascendent-descendente pentru motoare și ascendente pentru generatoare [10]. În cazul coeficienților aleatori, ele sînt fascicule de cubice, cuprinse în zone limitate de curbe extreme.

Este cunoscută legea de mișcare a modelului mecanismului agregatului, redus la axa mașinii

$$M^* \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = J^* \omega^* \frac{\mathrm{d}\omega^*}{\mathrm{d}t} + \frac{\omega^{*2}}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}J^*}{\mathrm{d}t}, \tag{4}$$

unde mărimile stelate reprezintă valorile reduse instantanee.

În studiul regimului tranzitoriu interesează variația vitezei medii (ω_m^* sau n) a ciclurilor cinetice, nu cea a vitezei instantanee ca în regimul staționar. La fel de expresivă este și legea de variație a vitezei dintr-o anumită poziție a mecanismului, care poate fi considerată drept început de ciclu. De aceea fenomenul infinitezimal poate fi efectuat pe un interval de timp mic și egal cu cel al perioadei ciclului cinetic (Tc) : $\mathrm{d}t = Tc$.

Datorită faptului că momentul de inerție redus variază periodic, avînd aceeași perioadă (Tc), rezultă că pentru un astfel de interval variația sa este zero

$$\frac{\mathrm{d}J^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta J^*}{Tc} = \frac{J_0^* - J_0^*}{Tc} = 0. \tag{5}$$

În aceste condiții parametrii ecuației (4) vor avea valori medii, corespunzătoare ciclurilor cinetice, iar forma sa va fi

$$M_m^* \omega_m^* = J_m^* \omega_m^* \cdot \frac{\mathrm{d}\omega_m^*}{\mathrm{d}t} = P, \tag{6}$$

echivalentă cu ecuația de mișcare a modelului

$$M_m^* = J_m^* \varepsilon_m^*.$$

Înlocuind valoarea vitezei de rotație prin turația axei, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{KJ_m^*} \cdot \frac{P}{n}, \tag{7}$$

: $P = Pm - Pg$ reprezintă puterea medie a ciclului cinetic,
ctiv diferența dintre puterea motorului și cea a generatorului. Aceas-
oare, în cazul general, este funcție de raportul de transmitere dintre
celor două mașini :

$$\gamma = \frac{n_g}{n_m} = \frac{n_g}{n}, \tag{8}$$

acceptînd notația generică : $n_m = n$.

Puterea medie a ciclului, respectiv puterea disponibilă a agregatului devine :

$$P = Pm - Pg = (Aij \cdot n + Bij \cdot n^2 - Cij \cdot n^3) - (Dij \cdot n + Eij \cdot n^3) -$$

$$- [(A_{\chi\lambda} n\gamma + B_{\chi\lambda} n^2\gamma^2 - C_{\chi\lambda} n^3\gamma^3) + (D_{\chi\lambda} n\gamma + E_{\chi\lambda} n^3\gamma^3) =$$

$$= n\{-[(A_{\gamma\lambda} + D_{\chi\lambda})\,\gamma + (Dij - Aij)] + n(Bij - B_{\chi\lambda}\gamma^2) -$$

$$- n^2[(E_{\chi\lambda} - C_{\chi\lambda})\,\gamma^3 + (Cij + Eij)]\} =$$

$$= n[-P(\gamma) + Q(\gamma)\,n - R(\gamma)\,n^2]. \tag{9}$$

Înlocuind această valoare în ecuaţia de mişcare se obţine

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n[-P(\gamma) + Q(\gamma)\,n - R(\gamma)\,n^2]}{nKJ_m^*} = -p + qn - rn^2, \tag{10}$$

unde p, q, r au valori constante pentru un raport de transmitere constant (γ) şi pentru parametrii constanţi ai surselor (α_i, β_j, α_χ, β_λ).

Separînd variabilele ecuaţiei (10), rezultă

$$t = \int \frac{dn}{-rn^2 + qn - p} = t(n) \text{ sau } n = n(t). \tag{11}$$

Integrala depinde de forma numitorului, respectiv, de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice a exploatării

$$rn^2 - qn + p = 0, \tag{12}$$

care poate crea următoarele cazuri :

— *regim de stabilitate*, cînd rădăcinile sînt reale şi distincte ;

— *regim de semistabilitate*, cînd acestea sînt reale şi confundate ;

— *regim de instabilitate*, cînd rădăcinile sînt complexe.

Deoarece funcţionarea agregatului într-unul din aceste regimuri este determinată de coeficienţii ecuaţiei caracteristice (p, q, r), iar aceştia depind de raportul de transmitere (γ), rezultă că se poate asigura oricînd exploatarea în regimul de stabilitate, prin simpla schimbare a transmisiei (variatorului de viteze), menţinînd constanţi parametrii surselor.

Într-adevăr, condiţia

$$\delta = q^2 - 4qr \geqslant 0 \tag{13}$$

conduce la o inecuaţie de gradul patru în γ, care are soluţii în domenii foarte largi.

Ecuaţia de mişcare (11) are forme specifice, corespunzătoare cazurilor definite mai sus.

Regimul de stabilitate, definit de rădăcini reale și distincte

$$n_m < n_M, \tag{14}$$

conduce la :

$$t = \int \frac{\mathrm{d}n}{-rn^2 + qn - p} = -\frac{1}{r}\int \frac{\mathrm{d}n}{(n - n_m)(n - n_M)} =$$

$$= \frac{1}{r(n_M - n_m)} \ln \frac{n - n_m}{n - n_M}. \tag{15}$$

Integrala definită între două limite (n_0, n_1) are expresia

$$t_{01} = \frac{1}{r(n_M - n_m)} \ln \frac{(n_1 - n_m)(n_0 - n_M)}{(n_1 - n_M)(n_0 - n_m)}. \tag{16}$$

Notînd : $u = r(n_M - n_m)$; $v = \dfrac{n_0 - n_m}{n_0 - n_M}$, turația finală $(n = n_1)$ se obține din relația

$$t = \frac{1}{u} \ln \frac{1}{v} \cdot \frac{n - n_m}{n - n_M} \tag{17}$$

sau

$$n = \frac{n_m - v n_M \mathrm{e}^{ut}}{1 - v\mathrm{e}^{ut}}. \tag{18}$$

Derivata acestei turații în raport cu timpul este

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -r(n_0 - n_m)(n_0 - n_M) \cdot \frac{(n_M - n_m)^2 \cdot \mathrm{e}^{ut}}{[(n_0 - n_M) - (n_0 - n_m)\,\mathrm{e}^{ut}]^2}. \tag{19}$$

Cu aceste ecuații se pot evidenția regimurile staționare, hotărîte de turația constantă sau de accelerația nulă :

— *regimul staționar minor*, la turația mică (n_m), în cazul :

$n_0 = n_m$; $v = 0$; $n = n_m = n_0$, din (18) sau : $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = 0$, din (19) ;

— *regimul staționar major*, la turația mare (n_M), în situația

$$n_0 = n_M ; \quad v = \infty ; \quad n = n_M = n_0, \text{ din (18)}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = 0, \text{ din (19)}.$$

Deşi ecuaţia (19) indică şi cazul $n_m = n_M$, acesta nu aparţine restricţiei (14).

În ce priveşte semnul acceleraţiei (19), este evident că

$$\operatorname{sign}\frac{dn}{dt} = -\operatorname{sign}(n_0 - n_m)(n_0 - n_M), \tag{20}$$

deoarece $r>0$ este una din condiţiile existenţei maşinilor [10].

În consecinţă, viteza agregatului este o funcţie uniform crescătoare sau descrescătoare.

Regimul de semistabilitate, determinat de rădăcini egale:

$$n_m = n_M = n_t \tag{21}$$

are legea

$$t = \int \frac{dn}{-rn^2 + qn - p} = -\frac{1}{r}\int \frac{dn}{(n - n_t)^2} = \frac{1}{r(n - n_t)}. \tag{22}$$

Integrala definită între limitele n_0 şi n are expresia

$$t = \frac{1}{r}\cdot\frac{n_0 - n}{(n_0 - n_t)(n - n_t)} \tag{23}$$

şi

$$n = \frac{n_0 + rn_t(n_0 - n_t)t}{1 + r(n_0 - n_t)t}, \tag{24}$$

iar derivata sa

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{r(n_0 - n_t)^2}{[1 + r(n_0 - n_t)t]^2}. \tag{25}$$

Ca şi în cazul precedent, se poate evidenţia singurul regim staţionar:

— *regimul staţionar semistabil*, la turaţia punctului de tangenţă a caracteristicilor mecanice ale maşinilor (n_t) cînd

$$n_0 = n_t; \quad n = n_0 = n_t, \text{ din (24)}$$

sau $\dfrac{dn}{dt} = 0$, din (25).

În condiţiile stabilite $r > 0$, rezultă

$$\frac{dn}{dt} < 0. \tag{26}$$

În consecință, viteza agregatului este o funcție uniform descrescătoare, avînd numai mișcare decelerată, cu posibilitatea de a se stabiliza în regimul staționar semistabil sau în repaus.

Regimul de instabilitate, definit de rădăcinile complexe ale ecuației caracteristice

$$n = a \pm bi, \tag{27}$$

are legea de mișcare

$$t = \int \frac{dn}{-rn + qn - p} = -\frac{1}{r} \int \frac{dn}{(n-a)^2 + b^2} = -\frac{1}{rb} \operatorname{arctg} \frac{n-a}{b}. \tag{28}$$

Integrala definită între n_0 și n este

$$t = -\frac{1}{rb} \operatorname{arc\,tg} \frac{b(n-n_0)}{b^2 + (n-a)(n_0-a)} \tag{29}$$

sau

$$n = \frac{bn_0 - (a^2 + b^2 - an_0) \operatorname{tg} rbt}{b + (n_0 - a) \operatorname{tg} rbt}. \tag{30}$$

Derivata sa este

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{rb^2(n_0-a)^2 + b^2}{[b + (n_0-a) \operatorname{tg} rbt]^2 \cos^2 rbt}. \tag{31}$$

În acest caz derivata nu mai are soluție, astfel încît nu se mai întîlnește un regim staționar ca în situațiile precedente.

Rezultă că

$$\frac{dn}{dt} < 0, \tag{32}$$

astfel încît regimul este tranzitoriu decelerat.

Cunoscînd legile de mișcare ale celor trei regimuri definite, se poate analiza *stabilitatea regimurilor staționare.*

Este cunoscut că stabilitatea unui sistem în echilibru sau în regim de mișcare staționar este asigurată atunci cînd, după scoaterea sistemului din echilibru în apropierea stării respective, acesta revine în starea inițială, într-un timp finit, printr-o mișcare accelerată sau oscilatorie amortizată, sau într-un timp infinit, printr-o mișcare oscilatorie sau asimptotică. În cazul agregatului se întîlnește prima și ultima formă de reechilibrare a mișcării sale.

În continuare vor fi studiate proprietățile regimurilor staționare enumerate mai sus.

Regimul staţionar major. Se consideră iniţial că dezechilibrarea se face prin majorarea turaţiei

$$n_0 > n_M > n_m. \tag{33}$$

Conform relaţiei (20), rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} < 0.$$

În consecinţă agregatul se decelerează, revenind în aceeaşi stare de echilibru după timpul (17) :

$$t = \frac{1}{v} \ln \frac{1}{v} \cdot \frac{n_M - n_m}{n_M - n_M} = \infty.$$

Rezultă o reechilibrare asimptotică, lentă, într-un timp infinit, confirmînd concluziile anterioare.

Dezechilibrînd agregatul prin micşorarea turaţiei în vecinătatea regimului staţionar,

$$n_m < n_0 < n_M, \tag{34}$$

se obţine

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} > 0,$$

adică o accelerare a agregatului, care revine în starea iniţială, în aceleaşi condiţii ale reechilibrării asimptotice.

În concluzie, regimul staţionar major este stabil.

Regimul staţionar minor. Dezechilibrarea agregatului prin majorarea turaţiei

$$n_m < n_0 < n_M, \tag{35}$$

analizată în mod similar, presupune

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} > 0,$$

respectiv o accelerare a acestuia, astfel încît nu mai revine în starea iniţială, ci trece prin accelerare în regimul staţionar major.

Dezechilibrînd prin micşorarea turaţiei

$$n_0 < n_m < n_M,$$

rezultă

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} < 0,$$

adică agregatul se decelerează, ajungînd în regimul de repaus, în timpul

$$t = \frac{1}{u} \ln \frac{1}{v} \cdot \frac{n_m}{n_M} = \frac{1}{r(n_M - n_m)} \ln \frac{n_m(n_M - n_0)}{n_M(n_m - n_0)}. \tag{36}$$

De data aceasta, agregatul trece într-un regim staționar printr-o mișcare rapidă, într-un timp finit, deosebit de cazurile precedente.

În consecință, regimul staționar minor nu este stabil.

Regimul de semistabilitate. Conform relației (26), indiferent modul în care va fi scos din echilibru, agregatul se va decelera. Însemnează că, majorînd turația, el va reveni în starea inițială, reechilibrîndu-se în timpul

$$t = \frac{1}{r} \cdot \frac{n_0 - n_t}{(n_0 - n_t)(n_t - n_t)} = \infty, \tag{37}$$

adică, printr-o mișcare lentă, indicînd caracterul de stabilitate al acestui regim.

Dacă se dezechilibrează prin micșorarea turației agregatul va trece în regimul de repaus, în timpul

$$t = \frac{1}{r} \cdot \frac{n_0}{(n_0 - n_t)(-n_t)} = \frac{n_0}{rn_t(n_t - n_0)}, \tag{38}$$

care are o valoare finită, specifică oricărei treceri în acest regim caracteristic.

Fenomenul indică faptul că într-un asemenea caz, regimul nu este stabil; de aceea a fost denumit regim de semistabilitate.

Studiul celor trei cazuri posibile în exploatarea fără reglare automată, conturează aspecte deosebite ale stabilității regimurilor:

— *regimul de repaus*, cu fază rapidă de reechilibrare, care nu interesează;

— *regimul stabil* cu fază lentă de reechilibrare, regim util în exploatare, deoarece asigură transformarea puterii mecanice la o turație constantă;

— *regimul semistabil* în punctul de tangență al caracteristicii mecanice a motorului, cu cea a generatorului, regim care permite dezechilibrarea numai la majorarea turației. Practic însă, variațiile aleatoare ale coeficienților (A_{ij}, $A_{\chi\lambda}$ ...) dezechilibrează agregatul și în sens invers, astfel încît exploatarea în acest regim trebuie evitată;

— *regimul nestabil*, în care agregatul nu trebuie exploatat niciodată.

Evident că în cazul exploatării cu reglare automată, studiul stabilității mașinilor impune și pe cel al stabilității sistemului respectiv, format dintr-un mecanism de execuție (mecanism clasic cu gradul de mobilitate unu), stabil în orice poziție și în orice condiții de mișcare și un traductor (mecanism de măsură, deosebit de cel clasic, deoarece parametrul conducător este o viteză, iar cel condus spațiu), care poate fi nestabil în anumite

poziţii. În general însă, traductorul de tip centrifugal clasic este stabil, iar problema esenţială a exploatării constă în evitarea regimurilor necorespunzătoare de mai sus, prin măsuri ce vor rezulta în urma analizei lor.

Regimul semistabil al unui agregat este determinat de punctele de tangenţă ale caracteristicilor mecanice ale celor două maşini. În cazul maşinilor cu potenţiale constante (β_j = const, β_λ = const), respectiv al agregatelor obişnuite, cunoscute tehnicii actuale, aceste puncte scriu o curbă a regimului nestabil. Această curbă determină limita în sensul turaţiilor mici în exploatarea motorului. Dacă se schimbă generatorul, curba are altă formă, astfel încît punctele sale se pot deplasa.

Limita către care tind aceste puncte, în cazul în care caracteristicile generatorului, cubice ascendente, sînt degenerate în drepte, este determinată de punctele de tangenţă ale fasciculului de drepte ce trece prin origină cu caracteristicile motorului. Cum curba regimului nestabil trebuie evitată, rezultă că noua curbă, obţinută de punctele de tangenţă ale fasciculului de drepte poate fi folosită în exploatare. Această curbă, numită *curba minoră* a motorului, este locul geometric al punctelor de cuplu maxim.

Într-adevăr, cuplul motorului are expresia

$$C = \frac{P}{n} \tag{39}$$

şi este reprezentat de coeficientul unghiular al unei drepte ce trece prin originea planului mecanic (P, n). Cuplul maxim corespunde tangentei din origină la caracteristica mecanică a motorului.

Cu aceste precizări, rezultă că motorul poate fi exploatat pe curba minoră şi în zona din dreapta acesteia, astfel încît suprafaţa de exploatare a sa este împărţită în două :

— zona de exploatare stabilă, din dreapta,

— zona de exploatare nestabilă, din stînga, ce trebuie evitată.

Din consideraţii deosebite, privind uzura şi randamentul, se defineşte *curba majoră* [10], ca loc geometric al punctelor de putere maximă, care reprezintă limita exploatării la dreapta, astfel încît se conturează o zonă limitată pentru exploatarea raţională.

Pentru a evita zona nestabilă, respectiv trecerea agregatului la stînga curbei minore, se pot folosi parametrii disponibili ai maşinilor care au fost consideraţi constanţi :

— raportul de transmitere dintre axele motorului şi generatorului (γ) ;

— parametrii surselor energetice (β_j, β_λ).

Raportul de transmitere (γ) trebuie să fie variabil şi uşor de schimbat. Aceasta se realizează printr-un variator continuu sau printr-o cutie de viteze. Valorile sale se găsesc printre soluţiile inecuaţiei (13), pe intervale destul de largi. Modificarea sa impune în primul rînd un sistem de alarmă (sesizare) şi în al doilea rînd un sistem de execuţie [10] şi se poate efectua manual sau prin comenzi automate.

Parametrii surselor energetice (β_j, β_λ) constanţi în tehnica actuală, ar trebui să fie variabili, asigurînd maşinilor o mare maleabilitate în acest scop [10].

Este evident, că, folosind principiile și metodele evitării regimului semistabil, se evită complet și regimul instabil, aflat la stînga acestuia.

Un exemplu concret al aplicării acestui studiu îl constituie problema regimului de sarcină al locomotivei Diesel-electrice [5], aflat în zona semistabilă a motorului. Cum traductorul sistemului de reglare automată este stabil, rezultă că instabilitatea se datorește numai soluțiilor ecuației caracteristice (10) care sînt egale sau foarte apropiate. Pentru evitarea acestei situații este necesară modificarea parametrului (γ), care va deplasa regimul de sarcină în zona stabilă a motorului.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. I. Antobolevski, *Teoria mecanismelor și a mașinilor*, traducere din limba rusă, București, Edit. tehnică, 1955.
2. G. Buzdugan, *Măsurarea vibrațiilor mecanice*, București, Edit. tehnică, 1964.
3. N. Manolescu și colab., *Teoria mecanismelor și a mașinilor. Cinestatica și dinamica*, București, Edit. tehnică, 1958.
4. — *Problema de teoria mecanismelor și a mașinilor*, vol. II, București, Edit. didactică și pedagogică, 1967.
5. — *Asupra unor cauze ale dereglării sistemului de reglare automată de pe I.D.E.* 060-DA., Comunicarea științifică la sesiunea noiembrie 1968 a Institutului politehnic București.
6. — *Contribuții privind cinematica regulatorului mecanic al motorului Diesel* 12 I DA-28 *de pe* IDE-060 DA., Comunicare științifică la sesiunea noiembrie 1968 a Institutului politehnic București.
7. G. Silaș, *Mecanică, vibrații mecanice*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1968.
8. G. Silaș și colab., *Culegere de probleme de vibrații mecanice*, București, Edit. tehnică, 1967.
9. V. Vîlcovici și colab., *Mecanică teoretică*, București, Edit. tehnică, 1963.
10. O. Rădulescu, *O teorie unitară a mașinilor*, Teză pentru obținerea titlului de doctor inginer, Institutul politehnic București, 1968.
11. M. Tolle, *Regelung der Kraftmaschinen*, Berlin, 1921.

STUDII

PRIVIRE DE SINTEZĂ ASUPRA CĂILOR EFICIENTE DE REZOLVARE, PRIN ETAPE SUCCESIVE, A STRUCTURILOR ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

de AL. GHEORGHIU, C. PACOSTE, M. IORDĂNESCU
Institutul de construcții, București

În lucrare sînt analizate variante posibile de aplicare a metodelor staticii liniare, pentru determinarea prin etape succesive a comportării structurilor în domeniul elasto-plastic.
În vederea reducerii la minimum a operațiilor de calcul, se subliniază necesitatea utilizării de sisteme de bază static sau geometric nedeterminate, care se modifică treptat pe măsura apariției articulațiilor plastice. Se indică modul de alegere a unor astfel de sisteme de bază atît în metoda eforturilor, cît și în metoda deplasărilor.
Pentru ambele cazuri, sînt studiate în paralel posibilități de determinare directă a succesiunii articulațiilor plastice, evitînd rezolvări repetate de sisteme de ecuații, astfel încît analiza elasto-plastică a structurilor curent întîlnite în proiectare să poată fi efectuată folosind calculatoare electronice de capacitate mică.

1. OBIECTUL LUCRĂRII

Cercetarea comportării structurilor static nedeterminate dincolo de limita domeniului elastic, pentru determinarea ordinei în care apar articulațiile plastice și a factorilor de încărcare corespunzători, este, prin natura sa, o operație laborioasă. În literatura de specialitate se întîlnesc puține exemple rezolvate integral și aceasta de obicei pentru structuri simple. Problema prezintă totuși interes deosebit pentru proiectare, deoarece apare frecvent necesitatea de a cunoaște nu numai situația structurii din momentul cînd cedarea plastică devine iminentă, ci și anumite elemente privitoare la unele stadii intermediare. Este deci firească preocuparea de a găsi căi cît mai simple pentru rezolvarea acestei probleme, căreia autorii i-au consacrat atenție în ultimii ani [1], [2], [3].

O primă simplificare provine de la schematizările ce se admit uzual, atît privitor la material (curbă caracteristică schematizată de tip Prandtl, cu formă bilinară : perfect elastic—perfect plastic cu palier lung de curgere), cît și la formarea punctuală și instantanee a articulațiilor plastice. În aceste

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970, P. 1369 — 1393

poteze, limita domeniului elastic coincide cu formarea primei articulații plastice, iar domeniul elasto-plastic se împarte într-o succesiune de intervale de comportare elastică, separate prin apariția succesivă a articulațiilor plastice. În aceste intervale sînt deci aplicabile metodele de calcul ale staticii liniare.

Mai departe simplificările trebuie să rezulte din alegerea judicioasă a modului în care va fi condus calculul, atît în ce privește metoda adoptată, cît și folosirea eficientă a mijloacelor de calcul disponibile.

Privitor la aplicarea metodelor staticii liniare, în lucrarea [1] s-au examinat comparativ caracteristicile metodei eforturilor și ale metodei deplasărilor în condițiile efecturii unui calcul „biografic", ajungîndu-se la concluzia că specificul metodei eforturilor, la care sistemul de bază se obține prin suprimare de legături, concordă cu specificul modificării structurii în etapele succesive, caracterizat prin pierderea treptată de legături. Din punct de vedere teoretic această metodă apare deci ca preferabilă.

Practic însă, trebuie ținut seama că un calcul prin etape succesive rămîne laborios chiar cînd se folosesc procedee ce aduc simplificări importante, astfel încît — exceptînd cazurile de structuri simple — calea normală pentru efectuarea unei analize elasto-plastice complete este cea a utilizării calculatoarelor electronice.

În aceste condiții, metoda eforturilor vădește anumite dezavantaje legate de faptul că sistemul de bază nu este unic, ci poate fi ales în diferite moduri. Rezultă că, la cadre de formă oarecare, operația de alcătuire a diagramelor unitare este dificil de programat la un calculator. Obișnuit, se acceptă ideea că proiectantul trasează aceste diagrame, care intervin astfel ca date inițiale ce țin seama de particularitățile cazului concret studiat și deci numai restul calculului rămîne programabil.

În schimb metoda deplasărilor permite automatizarea integrală a calculului, datorită faptului că sistemul de bază geometric determinat este unic. Oricare ar fi forma structurii, se pot alcătui programe la care datele inițiale sînt reduse la strictul necesar, fiind limitate la descrierea alcătuirii structurii și a sarcinilor. Asemenea programe reclamă însă folosirea unor calculatoare electronice puternice, cu memorie de capacitate ridicată, deoarece caracterul general rezultă tocmai din eliminarea oricărui element de diferențiere. Astfel, la cadre se ține seama de deformarea axială a barelor spre a elimina deosebirea dintre cadrele cu noduri fixe și cadrele cu noduri deplasabile, rezemările sînt introduse în categoria nodurilor (avînd unele deplasări nule) etc.

Apare astfel un nou criteriu ce trebuie luat în considerație, anume mijlocul de calcul de care proiectantul poate dispune în mod curent. Din acest punct de vedere, pentru realizarea calculului prin etape succesive a unor structuri *de același grad de complexitate* se pot desprinde două orientări [1]:

---

[1]) Pentru apreciere, arătăm că la catedra de Statica construcțiilor de la Institutul de construcții s-au elaborat recent două programe diferite pentru calculul prin etape succesive a cadrelor plane, urmărind cuprinderea unor structuri uzuale mai complexe (pînă la un grad de nedeterminare statică de cca. 40). Unul din programe, care are caracter cu totul general și corespunde primei orientări, folosind metoda deplasărilor, a necesitat recurgerea la calculatorul IBM 360—30 (memorie internă de 64 k). Pentru celălalt program [3], care se încadrează în a doua orientare și utilizează matricea deplasărilor din metoda eforturilor, a fost suficient calculatorul CIFA—102 (memorie internă de ordinul 4 k).

— elaborarea de programe cît mai generale, destinate calculatoarelor puternice, care să permită automatizarea integrală a calculului pe baza unui minimum de date inițiale;

— elaborarea de programe destinate unor calculatoare de capacitate mai redusă, la care proiectantul preia efectuarea părții preliminare de calcul în condițiile structurii date.

Prima orientare este frecvent întîlnită în literatura de specialitate și a fost abordată de autori în alte lucrări.

Lucrarea de față se încadrează în cea de a *a doua* orientare, care credem că poate prezenta interes în multe situații, în raport cu gradul de dotare al institutelor de proiectare și de cercetări. Obiectul lucrării se referă la examinarea comparativă și la valorificarea posibilităților metodelor staticii liniare în direcția simplificării calculului prin etape succesive al structurilor încărcate proporțional în domeniul elasto-plastic.

2. POSIBILITĂȚI DE ALEGERE A SISTEMULUI DE BAZĂ

Calculul prin etape succesive implică efectuarea repetată a rezolvării pe o structură care se modifică treptat de la o etapă la alta, pierzînd cîte o legătură prin formarea succesivă a articulațiilor plastice. Pozițiile secțiunilor critice nu sînt cunoscute inițial astfel că în mod obișnuit calculul se pornește de la determinarea stării de eforturi în domeniul elastic, pe baza căreia se identifică prima articulație plastică și factorul de încărcare corespunzător. Pentru creșterea ulterioară a sarcinilor, în secțiunea respectivă se introduce o articulație obișnuită și sistemul astfel modificat se rezolvă din nou, căutînd secțiunea în care — pentru cea mai mică creștere a factorului de încărcare — se acoperă acolo diferența între momentul încovoietor din etapa precedentă și valoarea M_p. Se repetă procedeul pînă se ajunge la mecanismul de cedare.

Caracteristic este deci faptul că aflarea *poziției* articulațiilor plastice se face treptat, concomitent cu stabilirea *ordinei* lor de formare și cu determinarea factorilor de încărcare corespunzătoare. Acest mod de lucru este inevitabil într-un program cu caracter general.

În lucrări anterioare [1] [2] s-a arătat că o simplificare substanțială se poate obține cunoscînd *de la început* pozițiile articulațiilor plastice, calculul prin etape succesive rămînînd să stabilească numai ordinea de formare și mărimile factorilor de încărcare. Aceasta este posibil cînd proiectantul preia efectuarea părții preliminare de calcul pe cazul concret. Mai departe, în loc de a urmări în fiecare etapă situația din întreaga structură, este suficient să se urmărească numai un număr restrîns de secțiuni, anume acelea ce corespund articulațiilor plastice. Este deci indicat *să se înceapă cu determinarea stadiului de cedare plastică*, folosind una dintre metodele uzuale de identificare a mecanismului de cedare [1]). Aceasta corespunde de altfel cerințelor proiectării: apare normal ca proiectantul să se ocupe mai întîi de aprecierea capacității portante a structurii, înainte de a-și întregi studiul cu cercetarea unor stadii intermediare.

---

[1]) Pentru această operație există programe de calcul în literatura de specialitate, de exemplu în lucrarea [4].

Pentru cunoaşterea situaţiei structurii în momentul cînd cedarea plastică devine iminentă, mai trebuie stabilit care este *ultima* articulaţie plastică ce se formează. În acest stadiu, toate articulaţiile plastice s-au format pe parcurs şi în secţiunile respective s-au produs rotiri relative, afară de această ultimă articulaţie unde valoarea M_p este atinsă, dar continuitatea subzistă încă. Identificarea ultimei articulaţii plastice se poate face folosind procedeul sistematizat propus în lucrarea [1]. Cunoscînd care este ultima articulaţie, studiul se reduce la *a stabili ordinea în care se formează primele n articulaţii plastice* şi factorii de încărcare corespunzători. Aceasta este problema de care ne vom ocupa în continuare.

Conducerea calculului prin etape succesive, este evident avantajată dacă se asigură posibilitatea de a folosi într-o etapă elemente calculate în etapa precedentă, reducînd astfel la minimum operaţiile fiecărei etape. Cunoscînd de la început secţiunile critice $1, \ldots, i, \ldots n$, apare firesc să fie preferate drept necunoscute cantităţi legate de aceste secţiuni, anume eforturi — momentele încovoietoare M_i, sau deplasări — rotirile relative φ_i.

După modul cum se aleg necunoscutele, celelalte cantităţi se pot exprima prin relaţii liniare în funcţie de acestea. Astfel, dacă necunoscute sînt momentele încovoietoare M_i, rotirile relative φ_i se pot scrie sub forma

$$\varphi_i = \varphi_{i1} M_1 + \ldots + \varphi_{ih} M_h + \ldots + \varphi_{in} M_n + c\varphi_{is} \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (1)$$

iar dacă necunoscute sînt rotirile relative φ_i, momentele încovoietoare M_i din secţiunile critice au expresiile

$$M_i = M_{i1}\varphi_1 + \ldots + M_{ih}\varphi_h + \ldots + M_{in}\varphi_n + cM_{is} \quad (i = 1, 2 \ldots n). \qquad (2)$$

Coeficienţii φ_{ih} sau M_{ih}, precum şi termenii liberi φ_{is} sau M_{is}, corespund încărcării succesive a sistemului de bază cu necunoscute-unitate şi cu sarcini. Identificarea sistemului de bază folosit rezultă admiţînd că toate necunoscutele sînt nule :

— În primul caz, condiţia $M_1 = 0, \ldots M_n = 0$ arată că sistemul de bază se obţine din structura dată introducînd articulaţii obişnuite în toate cele n secţiuni critice şi este deci *static determinat*;

— În a doilea caz, condiţia $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$ arată că sistemul de bază *coincide cu structura dată*, deoarece în toate cele n secţiuni critice continuitatea este respectată.

Între coeficienţii celor două serii de expresii (1) şi (2) se poate stabili o relaţie deosebit de interesantă. Considerînd încărcarea sistemelor de bază numai cu necunoscute şi trecînd la exprimare matriceală, se poate scrie :

$$\varphi_i = \varphi M_i \quad \text{şi} \quad M_i = M\varphi_i, \text{ unde} \qquad (3)$$

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} \cdots \varphi_{1h} \cdots \varphi_{1n} \\ \vdots \\ \varphi_{i1} \cdots \varphi_{ih} \cdots \varphi_{in} \\ \vdots \\ \varphi_{n1} \cdots \varphi_{nh} \cdots \varphi_{nn} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} \cdots M_{1h} \cdots M_{1n} \\ \vdots \\ M_{i1} \cdots M_{ih} \cdots M_{in} \\ \vdots \\ M_{n1} \cdots M_{nh} \cdots M_{nn} \end{bmatrix}, \quad M_i = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix},$$

unde i reprezintă secţiunea critică curentă.

Ambele expresii (3) se referă la aceeaşi poziţie deformată : în primul caz, în articulaţiile introduse în cele n secţiuni critice se încarcă cu momentele M_i şi rezultă rotirile relative totale φ_i ; în al doilea caz, se încarcă în aceleaşi secţiuni cu rotirile relative φ_i, astfel că se dezvoltă acolo momentele încovoietoare totale M_i. Înseamnă că, în ambele expresii, matricele-coloană M_i şi φ_i sînt aceleaşi ; se poate deci scrie

$$M_i = \varphi^{-1} \cdot \varphi_i = M \varphi_i \quad \text{sau} \quad M = \varphi^{-1}, \tag{4}$$

rezultînd că *matricea coeficienţilor* M_{ih} *este inversa matricii coeficienţilor* φ_{ih}.

Raportul de inversiune apare evident dacă se ţine seama că φ este o matrice de flexibilitate, iar M — o matrice de rigiditate, ambele referitoare la o aceeaşi situaţie a structurii, dar considerînd inversate între ele efectul şi cauza.

Relaţia (4) are consecinţe practice importante. Matricea φ a coeficienţilor φ_{ih} este uşor de alcătuit, considerînd sistemul static determinat ce rezultă prin introducerea de articulaţii în cele n secţiuni critice şi trasînd diagramele unitare $m_{x1} \ldots m_{xh}, \ldots m_{xn}$ ce corespund încărcării succesive cu $M_1 = 1, \ldots M_h = 1, \ldots M_n = 1$. În continuare, se efectuează următorul produs matriceal binecunoscut de la metoda generală a eforturilor

$$\varphi = m' F m, \quad \text{unde} \tag{5}$$

$$m = \begin{bmatrix} \overline{m_1^{(1)}} & \ldots & \overline{m_1^{(h)}} & \ldots & \overline{m_1^{(n)}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \overline{m_k^{(1)}} & \ldots & \overline{m_k^{(h)}} & \ldots & \overline{m_k^{(n)}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{m_b^{(1)}} & \ldots & \underline{m_b^{(h)}} & \ldots & \underline{m_b^{(n)}} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \overline{f_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & f_k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \underline{f_b} \end{bmatrix},$$

$$m_k^{(h)} = \begin{bmatrix} \overline{m_{k,st}^{(h)}} \\ \underline{m_{k,dr}^{(h)}} \end{bmatrix}, \qquad f_k = \lambda_k \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \underline{1} & \underline{2} \end{bmatrix}.$$

Matricea m cuprinde, pe coloane, ordonatele diagramelor unitare m_{xh} la extremităţile celor b bare ale structurii (cîte două ordonate, pentru fiecare bară, înscrise în ordinea dată de sensul de parcurgere ales) ; matricea m' este transpusa matricii m. Matricea cvasi-diagonală F cuprinde matricile de flexibilitate f_k specifice fiecăreia dintre bare (λ_k — lungimea transformată a barei curente k).

Trasarea diagramelor unitare m_{xk} şi alcătuirea celor două matrici m şi F reprezintă întreaga operaţie preliminară ce revine proiectantului, după care calculul se efectuează automat.

Matricea M a coeficienţilor M_{ih} este mult mai dificil de alcătuit *direct*. Sistemul de bază ce corespunde acestor coeficienţi este însăşi structura dată, care ar trebui rezolvată integral prin metoda deplasărilor pentru fiecare dintre încărcările cu $\varphi_1 = 1, \ldots \varphi_n = 1$. Relaţia (4) arată însă că se poate evita acest drum laborios, pornind tot de la formarea matricii φ şi apoi inversînd-o

$$M = \varphi^{-1} = (m' F m)^{-1}. \tag{6}$$

Ajungem la concluzia că, indiferent dacă dorim să utilizăm în cele ce urmează matricea deplasărilor φ sau matricea eforturilor M, calea pentru obținerea lor este aceeași, cu deosebirea că la matricea M intervine în plus o inversare de matrice de ordinul $n \cdot n$. Acest dezavantaj trebuie ținut seama la aprecierea eficienței procedeului bazat pe matricea M.

Rămîne să cercetăm situația structurii într-un stadiu intermediar, de exemplu la formarea articulației plastice j; vom avea:

artic. plastică	$1, \ldots (j-1)$	j	$(j+1), \ldots n$
moment încovoietor	M_p	M_p	$M_h < M_p$
rotire relativă	$\varphi_h \neq 0$	0	0

(7)

Se constată că în acest stadiu numărul necunoscutelor s-a redus la $(n-j)$ în cazul momentelor încovoietoare $(M_{j+1}, \ldots M_n)$, respectiv la $(j-1)$ în cazul rotirilor relative $(\varphi_1, \ldots \varphi_{j-1})$, la care se adaugă și mărimea factorului de încărcare c_j. Au apărut și condițiile corespunzătoare, anume $\varphi_i = 0$, $\ldots \varphi_n = 0$ în primul caz și respectiv $M_1 = M_p, \ldots, M_j = M_p$ în cel de al doilea caz. S-ar părea deci că există posibilitatea de a rezolva *direct* acest stadiu.

O asemenea posibilitate nu există totuși, deoarece nu se cunoaște inițial în care secțiune critică apare articulația plastică j, iar dacă s-ar proceda prin încercări — considerînd succesiv că fiecare secțiune critică $1, \ldots, n$ ar fi cea căutată, lipsește un criteriu de triere. Dificultatea poate fi ocolită numai operînd prin etape succesive.

Poziția necunoscutelor din tabela (7) arată că succesiunea etapelor poate fi admisă în *două* sensuri: fie pornind de la stadiul elastic spre stadiul de cedare, fie invers, pornind de la penultima articulație plastică spre prima. În fiecare dintre aceste alternative apare cîte un criteriu de triere pentru identificarea articulației plastice j:

(a) Cînd calculul începe de la stadiul elastic și s-au parcurs etapele ce preced formarea articulației plastice j, sînt cunoscute pozițiile articulațiilor $1, \ldots, (j-1)$. Trecînd la etapa următoare, trebuie admis succesiv că fiecare dintre articulațiile plastice $j, \ldots, n$ ar fi cea care se formează în stadiul respectiv, determinînd factorii de încărcare $c_j^{(h)}$ corespunzători. Deoarece interesează *prima* articulație — care apare în acest stadiu — din succesiunea normală a articulațiilor plastice, criteriul este

$$c_j = c_{j\,\text{minimum}}^{(h)}. \tag{8}$$

(b) Cînd calculul începe de la stadiul de cedare și s-au parcurs etapele $n, \ldots, (j+1)$, sînt cunoscute pozițiile articulațiilor plastice $(j+1), \ldots, n$; urmează deci să se admită succesiv că fiecare dintre articulațiile plastice $1, \ldots, j$ ar fi cea care se formează în noua etapă, determinînd factorii de încărcare $c_j^{(h)}$ corespunzători. Deoarece aici interesează *ultima* articulație — care apare în acest stadiu — din succesiunea normală a articulațiilor plastice, criteriul este

$$c_j = c_{j\,\text{maximum}}^{(h)}. \tag{9}$$

Aceste criterii sînt aplicabile oricare ar fi necunoscutele cu care se lucrează, utilizînd deci fie matricea deplasărilor φ, fie matricea eforturilor M. Criteriul (8) este cel folosit curent în calculele „biografice" obişnuite. Criteriul (9) este specific cazului cînd calculul prin etape succesive se conduce în sens invers, dinspre stadiul de cedare spre domeniul elastic. Acest mod de operare a fost propus în lucrarea [2] unde criteriul (9) a fost fundamentat prin formularea unei teoreme a calculului în domeniul plastic, referitoare la un stadiu intermediar oarecare.

Pe baza elementelor cu caracter general, stabilite în mod unitar în cele ce preced, se poate acum trece la examinarea unor procedee concrete ce derivă din utilizarea matricei deplasărilor sau a matricei eforturilor. Interesează în special posibilităţile de a evita rezolvări repetate a unor sisteme de ecuaţii, căutînd căi cît mai simple pentru determinarea directă a succesiunii articulaţiilor plastice şi a factorilor de încărcare respectivi.

3. UTILIZAREA MATRICEI DEPLASĂRILOR

a) Considerînd ca primă etapă stadiul de comportare elastică a structurii, se utilizează expresiile de forma (1) ale rotirilor relative din secţiunile critice, punînd condiţia că toate acestea să fi nule. Ecuaţiile de condiţie se pot scrie sub forma

$$\varphi_i = \varphi \cdot M_i + c\varphi_{is} = 0, \tag{10}$$

unde matricile-coloană φ_i şi M_i, precum şi matricea patrată φ, au fost definite în legătură cu relaţiile (3). Matricea-coloană φ_{is} a termenilor liberi se obţine sub forma cunoscută de la metoda eforturilor, anume

$$\varphi_{is} = m'(FM^s + \varphi^s), \quad \text{unde} \tag{11}$$

$$\varphi_{is} = \begin{bmatrix} \varphi_{1s} \\ \vdots \\ \varphi_{is} \\ \vdots \\ \varphi_{ns} \end{bmatrix}, \quad M^s = \begin{bmatrix} M_1^s \\ \vdots \\ M_k^s \\ \vdots \\ M_b^s \end{bmatrix}, \quad \varphi^s = \begin{bmatrix} \varphi_1^s \\ \vdots \\ \varphi_k^s \\ \vdots \\ \varphi_b^s \end{bmatrix}, \qquad M_k^s = \begin{bmatrix} M_k^{st} \\ M_k^{dr} \end{bmatrix},$$

$$\varphi_k^s = \lambda_k \begin{bmatrix} m_k^{st} \\ m_k^{dr} \end{bmatrix}.$$

Matricea M^s cuprinde ordonatele de la capetele barelor $1, \ldots k, \ldots b$, din diagrama de momente încovoietoare produsă în sistemul de bază static determinat de către încărcarea cu sarcinile date, iar φ^s este o matrice-coloană în care intervin pentru fiecare bară caracteristicile de încărcare m^{st} şi m^{dr} ce definesc sarcinile aplicate pe bara respectivă, multiplicate cu lungimea transformată a barei.

Rezolvarea sistemului (10) duce la găsirea momentelor încovoietoare $M_1 \ldots M_n$ din secţiunile critice, în funcţie de factorul de încărcare c. Mărimea c_1 a acestui factor, corespunzător formării primei articulaţii plastice, se obţine admiţînd pe rînd $M_1 = M_p^{(1)} \ldots, M_n = M_p^{(n)}$ şi aplicînd criteriul (8)

$$c_1 = c_1^{(h)}{}_{\text{minimum}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Trecînd la etapa a doua, vom ţine seama că $\varphi_1 \neq 0$ şi $M_1 = M_p^{(1)}$, deci au rămas numai necunoscutele $M_2, \ldots, M_n$ şi condiţiile $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$, cu care se procedează analog ca în prima etapă pentru găsirea celei de a doua articulaţii plastice şi a factorului de încărcare c_2. Se continuă astfel pînă la penultima articulaţie plastică. Din sistemul de ecuaţii de forma (1) dispare deci treptat cîte o ecuaţie, iar numărul de necunoscute se reduce cu cîte o unitate, termenii în care $M = M_p$ trecînd la termenul liber al ecuaţiei.

În loc de a urmări pe parcursul etapelor succesive valorile globale ale momentelor încovoietoare, precum şi a factorului de încărcare, calculul se simplifică operînd în fiecare etapă intermediară numai cu creşterile sarcinilor şi ale eforturilor faţă de limita etapei precedente. Înseamnă că articulaţiile plastice formate anterior se comportă ca articulaţii obişnuite, la care nu mai intervin momentele M_p. Astfel, pentru etapa în care se formează articulaţia plastică j, se pleacă de la etapa precedentă $(j-1)$ scriind sistemul ecuaţiilor sub forma

$$\varphi_i = \varphi_{ij}\,\Delta M_j + \ldots + \varphi_{in}\Delta M_n + \Delta c_{j-1}\,\varphi_{is} = 0 \quad (i = j, \ldots, n), \tag{12}$$

care rezultă din sistemul iniţial de forma (1) prin suprimarea liniilor şi coloanelor corespunzătoare articulaţiilor plastice $1, \ldots, (j-1)$ formate anterior. Mărimea Δc_{j-1} a factorului de încărcare necesară pentru formarea articulaţiei plastice j se determină drept mărimea *minimă* care conduce la atingerea valorii M_p într-o altă secţiune critică; factorul de încărcare total este $c_j = c_{j-1} + \Delta c_{j-1}$.

Acest procedeu, care a fost propus şi exemplificat în lucrarea [1], are avantajul de a folosi acelaşi sistem de bază static determinat în toate etapele; se formează deci o singură dată matricea φ a deplasărilor, trecerea de la o etapă la etapa următoare reducîndu-se la suprimarea unei linii şi a unei coloane, anume acelea corespunzătoare articulaţiei plastice formată în etapa depăşită. Ca dezavantaj, în fiecare etapă trebuie rezolvat efectiv cîte un sistem de ecuaţii, numărul ecuaţiilor din sistem scăzînd cu cîte o unitate de la o etapă la alta.

b) Dacă parcurgerea etapelor se face în sens invers, prima etapă corespunde stadiului de formare a penultimei articulaţii plastice n. Se utilizează tot expresiile (1) ale rotirilor relative din secţiunile critice, care au forma

$$\varphi_i = \varphi_{i1} M_1 + \ldots + \varphi_{ih} M_h + \ldots + \varphi_{in} M_n + c\varphi_{is}, \tag{1'}$$

unde coeficienţii φ_{ih} şi termenii liberi φ_{is} se obţin cu ajutorul expresiilor (5) şi (11) pentru sistemul de bază static determinat (articulaţii în secţiunile critice $1, \ldots, n$).

În acest stadiu $M_1 = M_p^{(1)}, \ldots, M_n = M_p^{(n)}$ şi deci expresia devine

$$\varphi_i = \sum_1^n \varphi_{ih}\, M_p^{(h)} + c\varphi_{is}. \tag{13}$$

Condiţia de determinare a articulaţiei plastice n este $\varphi_n = 0$, deoarece numai în această secţiune continuitatea mai subzistă (în celelalte secţiuni

critice $\varphi_h \neq 0$). Inițial nu se știe care este penultima articulație plastică, astfel că trebuie considerat pe rînd că fiecare dintre articulațiile plastice $1, \ldots, n$ ar fi aceasta. Înseamnă a impune succesiv fiecăreia dintre rotirile relative $\varphi_1 \ldots, \varphi_n$ condiția

$$\varphi_i = \sum_1^n \varphi_{ih} M_p^{(h)} + c_n^{(h)} \varphi_{is} = 0, \quad \text{deci} \quad c_n^{(i)} = -\sum_1^n \varphi_{ih} M_p^{(h)} / \varphi_{is} \tag{14}$$

și a aplica criteriul de triere (9)

$$c_n = c_{n\,\text{maximum}}^{(i)}.$$

În continuare, se trece la identificarea articulației plastice $n-1$. În acest stadiu dispunem de două condiții $\varphi_{n-1} = 0$ și $\varphi_n = 0$, în timp ce în expresiile (1′) ale rotirilor relative sînt două necunoscute : factorul de încărcare c_{n-1} și momentul încovoietor $M_n < M_p^{(n)}$ din secțiunea n. Se poate ajunge la o situație analogă celei din etapa precedentă, dacă se utilizează condiția $\varphi_n = 0$ pentru eliminarea necunoscutei M_n din expresiile (1′), sub forma

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_i + \alpha_{ni} \cdot \varphi_n \quad , \quad \text{unde} \quad \alpha_{ni} = -\varphi_{ni}/\varphi_{nn},$$

întîlnită uzual la aplicarea algoritmului lui Gauss. Deoarece $M_1 = M_p^{(1)}, \ldots, M_{n-1} = M_p^{(n-1)}$, expresia curentă devine

$$\varphi_i^{(1)} = \sum_1^{n-1} \varphi_{ih}^{(1)} M_p^{(h)} + c\varphi_{is}^{(1)}, \tag{15}$$

unde coeficienții $\varphi_{ih}^{(1)}$ și termenii liberi $\varphi_{is}^{(1)}$ corespund unui sistem de bază odată static nedeterminat (articulații în secțiunile critice $1, \ldots, n-1$). Anulînd pe rînd expresiile rotirilor relative (15) și utilizînd criteriul (9), se identifică articulația plastică $n-1$ și factorul de încărcare c_{n-1}.

Mai departe, se trece la formarea expresiilor rotirilor relative $\varphi_i^{(2)}$ prin eliminarea necunoscutei M_{n-1} cu ajutorul condiției $\varphi_{n-1} = 0$, care restabilește continuitatea în secțiunea $n-1$; coeficienții $\varphi_{ih}^{(2)}$ și termenii liberi $\varphi_{is}^{(2)}$ din aceste expresii corespund unui sistem de bază de două ori static nedeterminat (articulații în secțiunile critice $1, \ldots, n-2$). Se efectuează în același mod operațiile pentru etapele următoare. De fiecare dată numărul rotirilor scade cu o unitate astfel că la urmă se ajunge la o singură ecuație

$$\varphi_1^{(n-1)} = \varphi_{11}^{(n-1)} M_p^{(1)} + c_1 \varphi_{is}^{(n-1)} = 0,$$

care corespunde unui sistem de bază $(n-1)$ ori static nedeterminat (ce coincide cu structura dată, dar avînd $M_1 = M_p$) și din care se obține factorul de încărcare la apariția primei articulații plastice.

Procedeul expus, care a fost prezentat și exemplificat în lucrarea [2], conduce la determinarea *directă* a succesiunii articulațiilor plastice și a factorilor de încărcare corespunzători, *fără a necesita rezolvarea vreunui sistem de ecuații*. Pornind de la expresiile (1) ale rotirilor relative din secțiunile critice, procedeul constă în efectuarea alternată a două operații : o *operație de triere* pe baza relațiilor de forma (14) și a criteriului (9), prin care se găsește articulația plastică ce se formează în stadiul considerat, precum și o *operație de eliminare* prin care se trece de la expresiile rotirilor relative

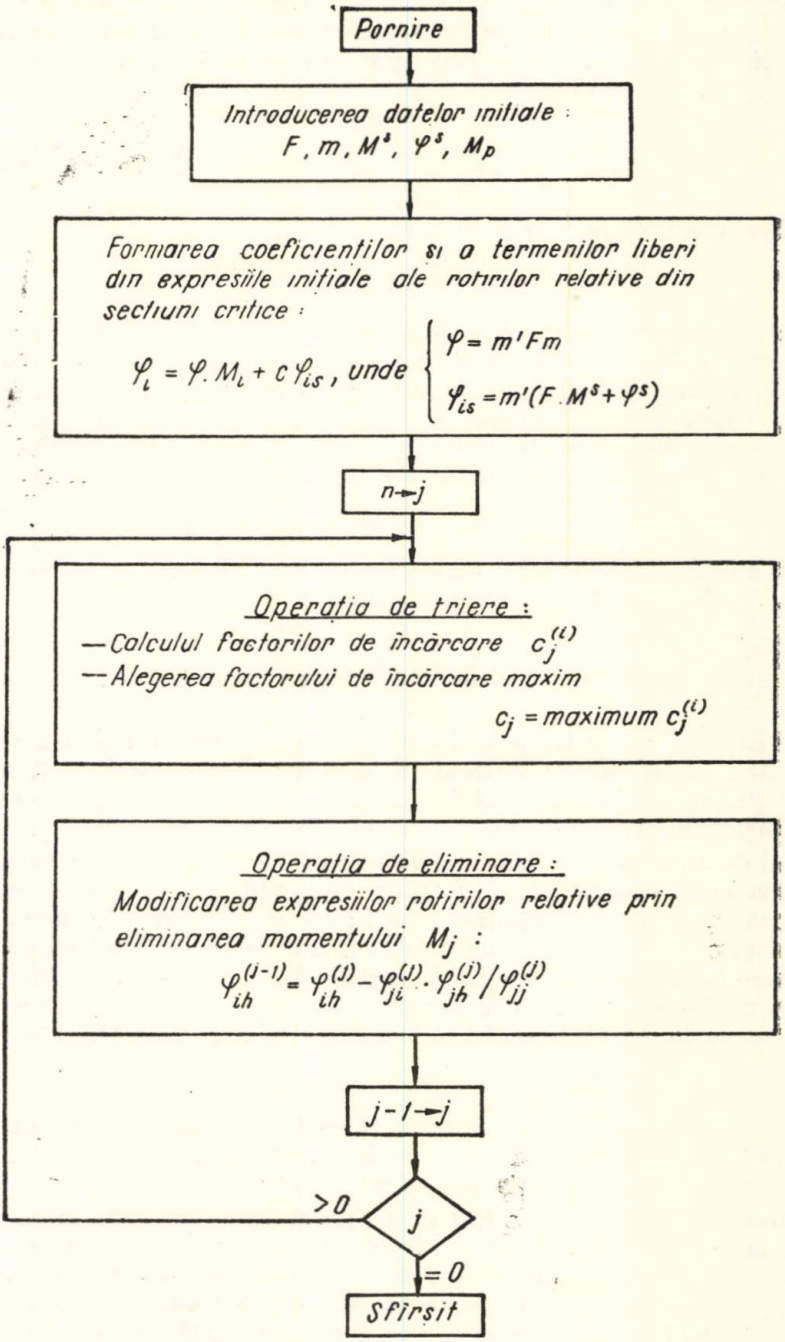


Fig. 1. — Schema logică pentru procedeul direct bazat pe matricea deplasărilor φ.

scrise pe sistemul de bază ce corespunde acestui stadiu, la expresiile rotirilor relative pentru sistemul de bază cu un grad de nedeterminare statică în plus.

Comparat cu procedeul expus la pct. a), care pornește de la stadiul elastic spre stadiul de cedare, apare că procedeul arătat aici este mai simplu și deci trebuie preferat. Specificul său, care rezultă din alternarea celor două operații, se dovedește avantajos pentru programare și poate fi prezentat sintetic cum se vede în schema logică din figura 1. Datorită simplității operațiilor de programat, precum și a memoriei restrînse necesare pentru calculul prin etape succesive a structurilor cu alcătuiri uzuale, procedeul este adecuat calculatoarelor electronice de capacitate redusă [1]).

4. UTILIZAREA MATRICEI EFORTURILOR

Raportul de inversiune $M = \varphi^{-1}$ dintre matricea deplasărilor φ și matricea eforturilor M, stabilit prin relația (4), sugerează că în ambele cazuri se ajunge la procedee ce prezintă paralelism, deși se lucrează cu elemente diferite. Totodată, din modul cum apar necunoscutele în tabela (7), rezultă că procedee similare vor fi cele ce corespund la sensuri *opuse* de parcurgere a etapelor succesive. Se pornește de la premiza că matricea eforturilor M a fost determinată sub forma

$$M = \varphi^{-1} = (m'Fm)^{-1},$$

unde matricele m și F au fost definite în legătură cu relațiile (5).

a) Considerînd ca primă etapă stadiul de formare al penultimei articulații plastice n, se pornește de la expresiile (2) ale momentelor încovoietoare din secțiunile critice, punînd condiția că în acest stadiu toate au atins valorile M_p respective. Ecuațiile de condiție se pot scrie sub forma

$$M_i = M \cdot \varphi_i + cM_{is} = M_p^{(i)}, \tag{16}$$

unde matricele-coloană M_i și φ_i, precum și matricea pătrată $M = \varphi^{-1}$ au fost definite în legătură cu relațiile (3). Matricea $M_p^{(i)}$ conține mărimile momentelor plastice din secțiunile critice.

Pentru formarea matricei-coloană M_{is} a termenilor liberi trebuie să se țină seama că expresiile (3) corespund unui sistem de bază care coincide cu structura dată și deci valorile M_{is} sînt chiar momentele încovoietoare din secțiunile critice în *stadiul elastic* al structurii, pentru $c = 1$. Acestea se pot determina direct pornind de la faptul că dispunem de matricea inversă φ^{-1} și deci este avantajos să folosim rezolvarea prin metoda eforturilor sub forma

$$\varphi_i = \varphi \cdot M_{is} + \varphi_{is} = 0, \quad \text{deci} \quad M_{is} = -\varphi^{-1} \cdot \varphi_{is}, \tag{17}$$

unde termenii liberi φ_{is} se obțin pe baza relației (11). Înseamnă că sistemul (2) se mai poate scrie și sub forma

$$M_i = M \cdot \varphi_i + cM_{is} = \varphi^{-1}(\varphi_i - c\varphi_{is}).$$

---

[1]) Programarea acestui procedeu pentru calculatorul CIFA—102 (memoria de 4096 adrese) face obiectul lucrării [3].

În expresiile (16) intervin ca necunoscute rotirile relative $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, precum și factorii de încărcare c. În stadiul considerat $\varphi_n = 0$ și deci sînt în total numai n necunoscute, număr egal cu al ecuațiilor de condiție. Nu știm însă care este articulația plastică n, astfel că trebuie admis succesiv $\varphi_1 = 0, \ldots \varphi_n = 0$ (suprimînd deci pe rînd cîte o coloană) și pentru fiecare din aceste cazuri să rezolvăm sistemul ecuațiilor de condiție, obținînd valorile corespunzătoare ale factorului de încărcare $c_n^{(h)}$ și ale rotirilor relative din articulațiile plastice $1, \ldots, n-1$. Pe baza criteriului (9) se identifică articulația plastică n din condiția $c_n = c_n^{(h)}{}_{\text{maximum}}$.

Trecînd la determinarea articulației plastice $(n-1)$, se va ține seama că în această etapă $\varphi_n = 0$ și $M_n < M_p^{(n)}$, unde secțiunea critică n este acum cunoscută, deci din sistemul ecuațiilor (16) se poate elimina rîndul și coloana n. Rămîne un sistem cu $(n-1)$ ecuații care corespund condițiilor $M_1 = M_p^{(1)}, \ldots, M_{n-1} = M_p^{(n-1)}$ și au ca necunoscute rotirile relative $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, precum și factorul de încărcare; deoarece în acest stadiu $\varphi_{n-1} = 0$, sînt de fapt numai $(n-1)$ necunoscute. Admițînd pe rînd că fiecare din rotirile relative $\varphi_1 \ldots, \varphi_{n-1}$ ar fi cea care se anulează, se obține pentru fiecare caz cîte un sistem de ecuații, din rezolvarea căruia se găsesc factorii de încărcare $c_{n-1}^{(h)}$. Criteriul de maximum identifică factorul de încărcare c_{n-1} efectiv, împreună cu care se cunosc și rotirile relative $\varphi_1 \ldots, \varphi_{n-2}$ din acest stadiu.

Se continuă în același mod, la fiecare etapă dispărînd cîte o necunoscută; se elimină astfel pe rînd cîte o linie și o coloană din sistemul (16), pînă se ajunge la situația cînd toate rotirile relative sînt nule și deci rămîne o singură relație de forma

$$c_1 M_{1s} = M_p^{(1)} \quad \text{sau} \quad c_1 = M_p^{(1)} / M_{1s}, \tag{18}$$

care este factorul de încărcare la formarea primei articulații plastice.

Se vede imediat că acest procedeu implică un volum mult mai mare de calcule, deoarece în fiecare etapă j trebuie rezolvate mai multe sisteme de cîte $(n-j)$ ecuații, anume cîte un asemenea sistem pentru fiecare dintre valorile $c_j^{(h)}$ ale factorului de încărcare ce intervin la aplicarea criteriului (9) pentru selecționarea factorului efectiv c_j.

b) Admițînd drept primă etapă stadiul de comportare elastică a structurii, se utilizează tot expresiile (2) ale momentelor încovoietoare din secțiunile critice, a căror formare a fost discutată la punctul precedent. În acest stadiu $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$ și deci în expresii rămîn numai termenii liberi cM_{is}; totodată, în secțiunea corespunzătoare primei articulații plastice $M_1 = M_p^{(1)}$. Nu știm însă care este această secțiune, deci vom admite pe rînd că fiecare dintre secțiunile $1, \ldots, n$ este cea căutată. Expresia curentă devine

$$M_i = c_1^{(i)} M_{is} = M_p^{(i)} \quad \text{sau} \quad c_1^{(i)} = M_p^{(i)} / M_{is} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

urmînd ca identificarea poziției primei articulații plastice și stabilirea factorului de încărcare corespunzător să rezulte din aplicarea criteriului (8)

$$c_1 = c_1^{(i)}{}_{\text{minimum}}.$$

Trecînd la stadiul formării celei de a doua articulații plastice vom avea $\varphi_1 \neq 0$ deoarece prima articulație plastică funcționează. Se poate evita introducerea în rezolvare a două necunoscute, anume rotirea relativă φ_1 și factorul de încărcare c_2, eliminînd pe φ_1 din expresiile inițiale cu ajutorul condiției $M_1 = M_p^{(1)}$. Așa cum rezultă din relația (19), apare mai avantajos să se lucreze cu diferențele ΔM_i dintre momentele încovoietoare din secțiunile critice și momentele plastice $M_p^{(i)}$ corespunzătoare, anume

$$\Delta M_i = M_i - M_p^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

scriind expresiile (2) sub forma

$$\Delta M_i = \sum_1^n M_{ih}\, \varphi_h + cM_{is} - M_p^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Înseamnă că eliminarea necunoscutei φ_1 se realizează folosind condiția $\Delta M_1 = 0$, efectuînd pentru fiecare dintre expresiile lui $\Delta M_2, \ldots \Delta M_n$ operația

$$\Delta M_i^{(1)} = \Delta M_i + \alpha_{1i} \cdot \Delta M_1, \quad \text{unde} \quad \alpha_{1i} = - M_{1i}/M_{11},$$

care este similară celei utilizate pentru matricea deplasărilor în legătură cu relația (15). De observat că, în noile expresii ale diferențelor $\Delta M_2, \ldots, \Delta M_n$, care au forma

$$\Delta M_i^{(1)} = M_{i2}^{(1)}\, \varphi_2 + \ldots + M_{ih}^{(1)}\, \varphi_h + \ldots M_{in}^{(1)}\, \varphi_n + cM_{is}^{(1)} - [M_p^{(i)} - \alpha_{1i}\, M_p^{(1)}], \tag{21}$$

coeficienții $M_{ih}^{(1)}$ și termenii liberi $M_{is}^{(1)}$ corespund unui sistem de bază geometric nedeterminat în care articulația din secțiunea 1 poate funcționa liber.

Pentru identificarea celei de a doua articulații plastice, se admite succesiv că aceasta se formează în secțiunile 2, $\ldots, n$ și se impune acolo condiția că $\Delta M_i = M_i - M_p^{(i)} = 0$. Ținînd seama că în acest stadiu $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$, din expresii dispar toate coloanele care conțin aceste necunoscute, ajungînd la ecuații de forma

$$cM_{is}^{(1)} - [M_p^{(i)} - \alpha_{1i}\, M_p^{(1)}] = 0 \quad \text{sau} \quad c_2^{(i)} = [M_p^{(i)} - \alpha_{1i}\, M_p^{(1)}]/M_{is}^{(1)}, \tag{22}$$

care dau mărimile factorilor de încărcare corespunzători situațiilor respective, dintre care factorul de încărcare efectiv rezultă pe baza criteriului $c_2 = c_{2\,\text{minimum}}^{(i)}$.

Se trece apoi la eliminarea necunoscutei φ_2 din expresiile (21) pe baza condiției $\Delta M_2 = 0$, procedînd analog ca pentru necunoscuta φ_1 în etapa precedentă; se ajunge astfel la expresiile care vor servi pentru identificarea celei de a treia articulații plastice. În continuare, se efectuează în mod asemănător toate celelalte etape; de fiecare dată se elimină cîte o necunoscută și numărul expresiilor scade cu o unitate, pînă se ajunge la o singură ecuație

cu necunoscuta c_n, care corespunde formării penultimei articulaţii plastice. În acest stadiu sistemul de bază folosit ajunge odată static nedeterminat, deoarece în secţiunile 1, ..., $(n-1)$ rotirile relative φ_h sînt libere, dar dispunem şi de condiţia $\Delta M_n = 0$.

Modul de calcul arătat aici reprezintă *un nou procedeu pentru determinarea directă a succesiunii articulaţiilor plastice* şi a factorilor de încărcare corespunzători, care are la bază utilizarea matricei eforturilor. Acest procedeu prezintă un paralelism complet cu cel prezentat în paragraful 3, care utilizează matricea deplasărilor, cu deosebirea că *sensul de parcurgere al etapelor este invers*. Pornind de la stadiul elastic şi folosind expresiile (2) ale momentelor încovoietoare din secţiunile critice, procedeul constă tot în efectuarea alternată a două operaţii : *o operaţie de triere* pe baza relaţiilor de forma (22) şi a criteriului (8), prin care se identifică articulaţia plastică ce se formează în stadiul considerat şi o *operaţie de eliminare* prin care se elimină necunoscuta corespunzătoare articulaţiei plastice care s-a format, pregătind expresiile necesare etapei următoare. Nici acest procedeu nu comportă rezolvarea vreunui sistem de ecuaţii.

De observat, în acest mod de rezolvare, că stabilirea seriilor de factori de încărcare $c_j^{(i)}$ din fiecare etapă se face mai simplu, deoarece intervin numai termenii liberi din grupul corespunzător de expresii ; matricea iniţială $M = \varphi^{-1}$ şi formele ei transformate ulterioare servesc numai pentru operaţiile de eliminare.

Comparativ cu procedeul de determinare directă bazat pe matricea deplasărilor, procedeul arătat aici are avantajul unor operaţii numerice mai simple, precum şi faptul că parcurge etapele în sensul normal de formare a succesiunii articulaţiilor plastice. Ca dezavantaj, apare necesitatea unei operaţii suplimentare, anume inversarea matricei φ spre a obţine matricea M. Prin specificul său, oglindit în schema logică din figura 2, şi acest procedeu este adecuat calculatoarelor electronice de capacitate redusă.

5. ALTE ASPECTE LEGATE DE PROCEDEELE EXPUSE

a) În cele ce preced s-a presupus că cedarea plastică se produce după un mecanism *total* de cedare : etapele succesive sînt delimitate de formarea a $(n+1)$ articulaţii plastice, unde n este gradul de nedeterminare statică al structurii.

În practică se întîlnesc frecvent situaţii cînd cedarea se produce după un mecanism parţial, astfel că în acest stadiu o parte a structurii rămîne static nedeterminată. Procedeele expuse se pot aplica şi în asemenea situaţii, cu unele adaptări. Oricare ar fi procedeul folosit, interesează de fapt expresiile (1) ale rotirilor relative şi acestea trebuie să corespundă sistemului de bază ce se obţine introducînd articulaţii obişnuite în secţiunile corespunzătoare primelor $(k-1)$ articulaţii, presupunînd că mecanismul parţial de cedare cuprinde k articulaţii plastice. Acest sistem de bază este însă de $(n-k+1)$ ori static nedeterminat, astfel că stabilirea directă a coeficienţilor φ_{ih} şi a termenilor liberi φ_{is} implică rezolvarea acestuia pentru încărcarea succesivă cu $M_1 = 1, \ldots, M_{k-1} = 1$ şi cu sarcini.

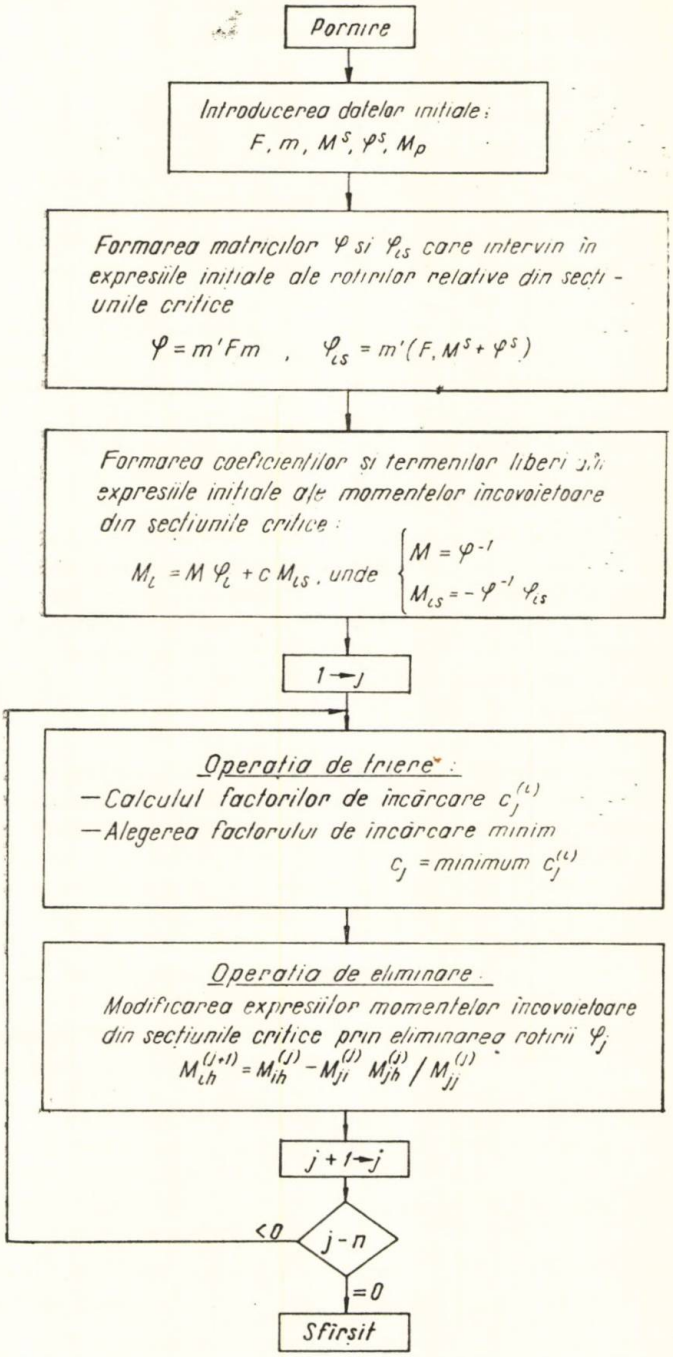


Fig. 2. — Schema logică pentru procedeul direct bazat pe matricea eforturilor *M*.

Dificultatea se poate ocoli dacă, alături de necunoscutele efective $M_1, \ldots, M_{k-1}$, se introduc necunoscutele auxiliare $M_k, \ldots, M_n$, care sînt momentele încovoietoare dintr-un număr de secţiuni $k, \ldots, n$, alese după voinţă astfel ca să se ajungă la un sistem static determinat [1]). Pe acest nou sistem de bază se stabilesc expresiile (1), trasînd diagramele unitare $m_{x1}, \ldots, m_{xn}$ şi diagrama M_{xs}, apoi aplicînd relaţiile (5) şi (11). Încărcînd sistemul static determinat cu necunoscutele $M_1, \ldots, M_n$ şi cu sarcini, trebuie să regăsim situaţia din sistemul cu $(n-k+1)$ nedeterminări, deci pe de o parte $\varphi_1 \neq 0, \ldots, \varphi_{k-1} \neq 0$ deoarece acestea corespund primelor $(k-1)$ articulaţii plastice care funcţionează, iar pe de altă parte $\varphi_k = 0, \ldots, \varphi_n = 0$ deoarece în secţiunile respective continuitatea este asigurată.

Condiţiile $\varphi_k = 1, \ldots, \varphi_n = 1$ pot fi folosite pentru eliminarea necunoscutelor $M_k, \ldots, M_n$ din primele $(k-1)$ expresii (1), procedînd similar ca la stabilirea relaţiei (15). După efectuarea acestor operaţii, expresiile rezultate pentru rotirile relative $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ corespund sistemului de bază de $(n-k+1)$ static nedeterminat şi deci pot fi utilizate la determinarea succesiunii articulaţiilor plastice $1, \ldots, (k-1)$ după oricare dintre procedeele descrise mai înainte.

b) În ce priveşte eficienţa procedeelor, apare firesc să se dea preferinţă acelora care conduc la determinarea *directă* a succesiunii articulaţiilor plastice şi a factorilor de încărcare corespunzători, fără a necesita rezolvarea vreunui sistem de ecuaţii. Alcătuirea expresiilor de formele (1) sau (2) şi apoi efectuarea alternativă a operaţiilor de triere şi de eliminare ce caracterizează aceste procedee, reprezintă drumul cel mai simplu pentru rezolvare, care reduce considerabil volumul de calcul în raport cu alte procedee „biografice".

Spre deosebire însă de procedeele bazate pe rezolvări succesive de sisteme de ecuaţii, prin care se obţin implicit în fiecare etapă şi elementele necesare pentru trasarea diagramelor respective de eforturi, aplicarea procedeelor de determinare *directă* conduce numai la stabilirea ordinii de formare a articulaţiilor plastice şi a mărimii factorilor de încărcare respectivi, fără a se cunoaşte evoluţia stării de eforturi din structură. Dacă proiectantul apreciază însă utilitatea, este posibil ca *starea de eforturi să fie determinată direct pentru un anumit stadiu intermediar*, ales după voinţă, utilizînd tot expresiile (1) sau (2).

Să admitem că structura a ajuns la formarea articulaţiei plastice j şi dorim să cunoaştem diagrama de momente încovoietoare; din calculul prin etape succesive este cunoscut factorul de încărcare c_j. Tabela (7) arată că — în acest stadiu — momentele încovoietoare din secţiunile $1,2, \ldots, j$ sînt cunoscute şi au valoarea M_p, de asemenea că rotirile relative din secţiunile $1, \ldots, n$ sînt nule datorită continuităţii. Se poate proceda în două moduri, după cum utilizăm expressiile (1) sau (2).

În cazul expresiilor (1), drept necunoscute trebuie considerate momentele încovoietoare din secţiunile $(j+1), \ldots, n$; sînt disponibile con-

---

[1]) Drept necunoscute auxiliare pot fi alese şi alte forţe de legătură, admiţînd suprimate legăturile corespunzătoare, deoarece acestea dispar mai departe din calcul.

dițiile $\varphi_j = 0, \ldots, \varphi_n = 0$, dintre care prima poate fi lăsată de o parte și folosită ca relație de verificare deoarece factorul de încărcare c_j este cunoscut. Rămîn deci condițiile $\varphi_{j+1} = 0, \ldots, \varphi_n = 0$, pe care le aplicăm sub forma (1) în care pentru $M_1, \ldots, M_j$ se introduc valorile M_p respective. Se obține deci un sistem de $(n-j)$ ecuații cu $(n-j)$ necunoscute și anume $M_{j+1}, \ldots, M_n$, după aflarea cărora se poate trasa diagrama de momente încovoietoare.

În cazul expresiilor (2), drept necunoscute trebuie considerate rotirile relative din articulațiile $1, \ldots, (j-1)$; sînt disponibile condițiile $M_1 = M_p^{(1)}, \ldots, M_j = M_p^{(j)}$, dintre care ultima poate fi lăsată de o parte și folosită ca relație de verificare deoarece factorul de încărcare c_j este cunoscut. Rămîn deci condițiile $M_1 = M_p^{(1)}, \ldots, M_{j-1} = M_p^{(j-1)}$, pe care le aplicăm sub forma (2) în care $\varphi_j = 0, \ldots, \varphi_n = 0$. Se obține un sistem de $(j-1)$ ecuații cu $(j-1)$ necunoscute și anume $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}$. O dată aflate aceste rotiri relative, se înlocuiesc în restul expresiilor și se obțin mărimile momentelor încovoietoare $M_{j+1}, \ldots, M_n$, cu care se poate trasa diagrama de momente încovoietoare.

Cînd sînt cunoscute atît expresiile (1), cît și expresiile (2), deci s-a utilizat procedeul de determinare directă a succesiunii articulațiilor plastice bazat pe matricea eforturilor, alegerea uneia dintre cele două variante arătate mai sus depinde de poziția articulației plastice j în succesiunea $1, \ldots, n$, dacă se urmărește rezolvarea unui sistem cît mai redus de ecuații. Astfel, pentru un stadiu mai apropiat de cedarea plastică apare indicată prima variantă, în timp ce pentru un stadiu mai apropiat de domeniul elastic a doua variantă devine avantajoasă.

6. EXEMPLU DE CALCUL

Pentru ilustrarea procedeelor prezentate în lucrare și în vederea comparării lor, s-au aplicat cadrului din figura 3*a* cele două procedee de determinare directă a succesiunii articulațiilor plastice, bazate respectiv pe matricea deplasărilor φ și pe matricea eforturilor M.

Structura are șapte bare, la care s-au ales sensurile de parcurgere din figura 3*d*. Pe baza dimensiunilor indicate în figură rezultă pentru bare următoarele lungimi transformate $\lambda_k = l_k \cdot I_c / I_k$, unde $I_c = I$

$$\lambda = \{4;\ 3{,}76;\ 4{,}24;\ 4;\ 3{,}76;\ 4{,}24;\ 4\}.$$

Caracteristici de încărcare diferite de zero există numai la cele două rigle încărcate la mijloc cu sarcini de cîte 12 t; pe aceste bare

$$m^{st} = m^{dr} = 3Pl/8 = 3.12.9/8 = 40{,}5 \text{ tm}.$$

Lungimile transformate și caracteristicile de încărcare stau la baza alcătuirii matricilor F și φ^s date de relațiile (5) și (11).

Folosind procedeul combinării mecanismelor elementare, s-a obținut mecanismul total de cedare plastică din figura 3*b*, căruia îi corespunde un factor de încărcare $c_7 = 1{,}816$; diagrama de momente încovoietoare

la cedarea plastică este aratată în figura 3*c*. Cu ajutorul procedeului expus în lucrarea [1] s-a făcut identificarea ultimei articulații plastice, rezultînd că aceasta este cea de la baza stîlpului central al cadrului.

S-a trecut la formarea sistemului static determinat de bază, introducînd articulații în secțiunile unde apar primele șase articulații plastice, cum se vede în figura 3*d*; în ce privește convențiile de semne, s-a arătat în lucrarea [2] că este avantajos ca acestea să fie stabilite ținînd seama

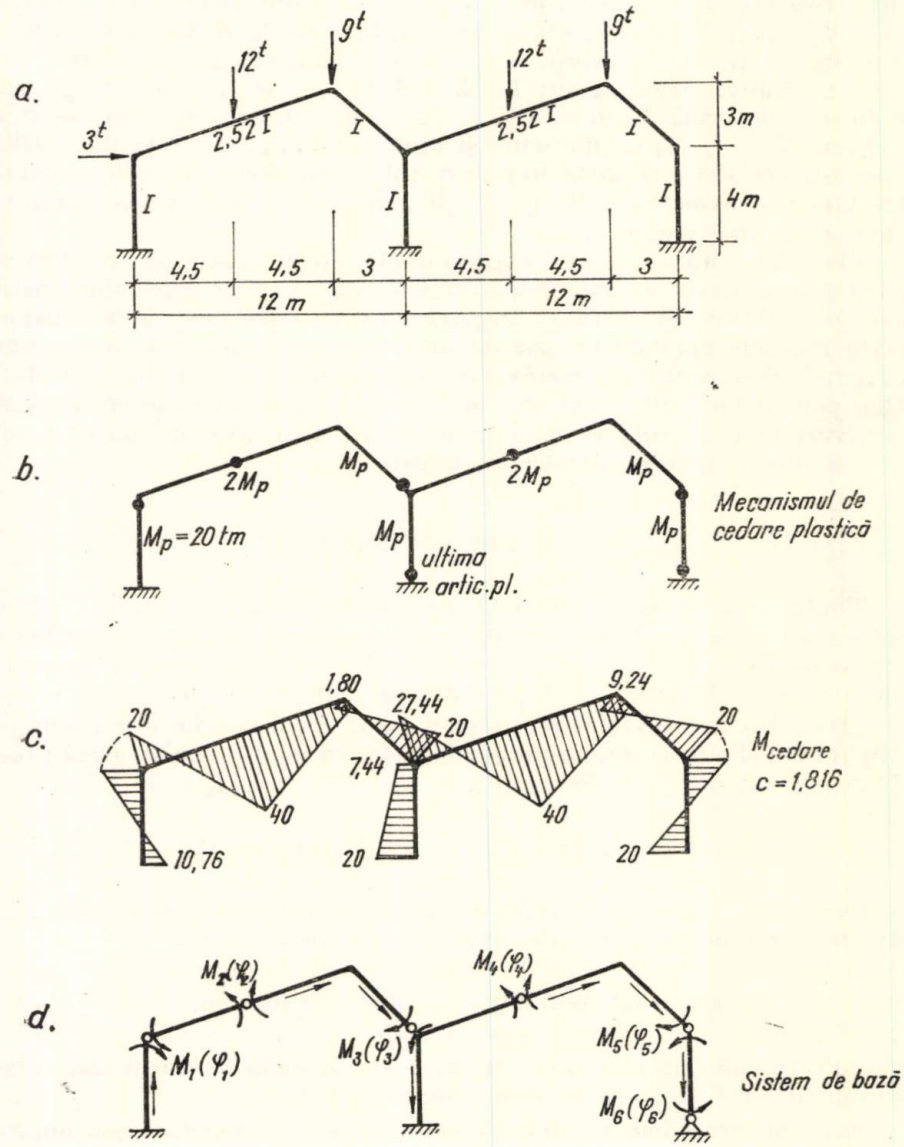


Fig. 3. — Stabilirea sistemului de bază.

de sensurile indicate de mecanismul de cedare. Astfel, pentru momentele încovoietoare $M_1 \ldots M_6$ din secţiunile critice vor fi considerate pozitive sensurile indicate în figura 3*d*, care corespund mecanismului de cedare cum se vede din diagrama de momente încovoietoare la cedarea plastică. Rotirile relative $\varphi_1 \ldots \varphi_6$ se consideră pozitive cînd au sensuri *opuse* celor din mecanismul de cedare (deci cînd se produc în sensul de acţiune al perechilor de momente $M_1 \ldots M_6$); admiţînd această convenţie, coeficienţii φ_{ih} care formează matricea deplasărilor φ rezultă toţi pozitivi, în timp ce termenii liberi sînt negativi.

Încărcînd succesiv sistemul static determinat de bază cu $M_1=1, \ldots$ $\ldots, M_6=1$, s-au trasat diagramele unitare $m_{x1}, \ldots, m_{x6}$, ale căror ordonate sînt înscrise în matricea m din tabela 1 (pentru claritate, perechile de ordonate corespunzătoare fiecărei bare s-au separat prin linii punctate). În mod asemănător, s-a încărcat sistemul de bază cu sarcinile date şi s-a trasat diagrama M_{xs}, ale cărei ordonate sînt înscrise în matricea M^s. S-a trecut apoi la formarea matricei deplasărilor φ cu ajutorul expresiei (5), rezultînd matricea arătată în tabela 1-dreapta. Tot acolo s-au trecut şi elementele matricei-coloană φ_{is}, formată cu ajutorul expresiei (11). De menţionat că, datorită sistematizărilor folosite [5], matricele φ şi φ_{is} au rezultat înmulţite cu $6EI_c = 6EI$.

Elementele matricelor φ şi φ_{is} au fost trecute în prima parte a tabelei 2, formînd expresiile (1) ale rotirilor relative $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$. S-a aplicat apoi procedeul de determinare directă a succesiunii articulaţiilor plastice, efectuînd alternativ operaţiile de triere şi de eliminare discutate în legătură cu relaţiile (14) şi (15). Mersul operaţiilor şi rezultatele obţinute se pot urmări direct în tabelă.

Pentru aplicarea celuilalt procedeu de determinare directă, bazat pe matricea eforturilor, s-a efectuat inversarea matricei φ obţinînd matricea M, de asemenea s-a format matricea M_{is} cu ajutorul relaţiei (17). Aceste matrice sînt date în tabela 1-dreapta; de asemenea, au fost înscrise şi în prima parte a tabelei 3. În urma inversării matricei φ, matricea M a rezultat împărţită cu $6EI_c=6EI$; pentru a lucra cu mărimi convenabile, în tabela 3 elementele matricei M sînt multiplicate cu 1000. Aceasta nu are nici un efect, deoarece coeficienţii M_{ij} intervin numai în operaţiile de eliminare, astfel că în locul lor pot fi luate mărimi proporţionale.

În tabelă se poate urmări direct aplicarea procedeului, prin efectuarea alternată a operaţiilor de triere şi de eliminare arătate în legătură cu relaţiile (19) şi (21), ajungînd la aceleaşi rezultate. Compararea tabelelor 2 şi 3 scoate în evidenţă precizia cu care se poate conduce calculul, prin coincidenţa mărimilor factorilor de încărcare $c_1 \ldots c_6$. Totodată, apare limpede paralelismul complet între cele două procedee, cît şi faptul că operaţia de triere la procedeul bazat pe matricea eforturilor este mai simplă.

Se menţionează că acest exemplu de calcul a putut fi executat în întregime pe baza programării la calculatorul electronic de birou „Olivetti-Programma 101". Pe parcursul rezolvării au fost folosite subpro-

Tabela 1

Elemente pentru calculul prin etape succesive

$m =$

$M_1=1$	$M_2=1$	$M_3=1$	$M_4=1$	$M_5=1$	$M_4=1$
−2,67	−2,67	−1	0	0	0
−1	0	0	0	0	0
−1	0	0	0	0	0
+1	+2	0	0	0	0
+1	+2	0	0	0	0
0	0	−1	0	0	0
0	0	−1	−1,6	−1,2	−0,6
−1,67	−2,67	−2	−1,6	−2,2	−1,6
0	0	0	+1,6	+1,2	+0,6
0	0	0	+0,4	−1,2	−0,6
0	0	0	+0,4	−1,2	−0,6
0	0	0	0	−1	0
0	0	0	0	−1	0
0	0	0	0	0	+1

$M_S =$

+105
0
0
−54
−54
0
+70,2
+187,2
−70,2
+16,2
+16,2
0
0
0

Succesiunea articulaţiilor plastice

Articulaţia plastică	I	II	III	IV	V	VI	VII
Secţiunea	6	5	3	1	4	2	7
c_j	1,236	1,573	1,580	1,700	1,750	1,789	1,816
c_j/c_1	1	1,273	1,278	1,375	1,416	1,447	1,469

Matricele φ şi φ_{is}

	φ_{i1}	φ_{i2}	φ_{i3}	φ_{i1}	φ_{i5}	φ_{i6}	φ_{is}
1	124,56	127,72	54,52	32,04	37,36	25,36	−6293,64
2	127,72	177,92	66,28	51,24	59,76	40,56	−8414,52
3	54,52	66,28	72,48	57,60	63,20	41,60	−5478,24
4	32,04	51,24	57,60	88,05	64,93	42,91	−5386,60
5	37,36	59,76	63,20	64,93	121,04	56,93	−6108,32
6	25,36	40,56	41,60	42,91	56,93	44,79	−3909,01

Matricele M şi M_{is}

	M_{i1}	M_{i2}	M_{i3}	M_{i4}	M_{i5}	M_{i6}	M_{is}
1	0,036130	−0,024115	−0,016653	0,006147	0,002481	0,007806	12,019
2	−0,024115	0,024656	0,003559	−0,003512	−0,001622	−0,006522	20,752
3	−0,016653	0,003559	0,052439	−0,016594	−0,006427	−0,018433	11,721
4	0,006147	−0,003512	−0,016594	0,028047	−0,002522	−0,008553	20,474
5	0,002481	−0,001622	−0,006427	−0,002522	0,022456	−0,020093	11,795
6	0,007806	−0,006552	−0,018433	−0,008533	−0,020093	0,074693	16,185

Tabela 2

Determinarea directă a articulațiilor plastice folosind matricea deplasărilor

φ_i	φ_{i1}	φ_{i2}	φ_{i3}	φ_{i4}	φ_{i5}	φ_{i6}	φ_{is}	$\alpha_{ji} = -\frac{\varphi_{ji}}{\varphi_{jj}}$	$\Sigma \varphi_{ih}$		$\Sigma \varphi_{ih} M_p$	$c_j^{(i)} = -\frac{\Sigma \varphi_{ih} M_p}{\varphi_{is}}$
									M_p=20 tm	M_p=40 tm		
φ_1	124,56	127,72	54,52	32,04	37,36	25,36	−6.293,64	$\alpha_{21} = -0,7179$	241,80	159,76	11.226,4	$c_1^{(1)} = 1,784$
φ_2	127,72	177,92	66,28	51,24	59,76	40,56	−8.414,52	$\alpha_{22} = -1$	294,32	229,16	15.052,8	$c_6^{(2)} = 1,789 = c_6$
φ_3	54,52	66,28	72,48	57,60	63,20	41,60	−5.478,24	$\alpha_{23} = -0,3725$	231,80	123,88	9.591,2	$c_6^{(3)} = 1,751$
φ_4	32,04	51,24	57,60	88,05	64,93	42,91	−5.386,60	$\alpha_{24} = -0,2880$	197,48	139,29	9.521,2	$c_6^{(4)} = 1,768$
φ_5	37,36	59,76	63,20	64,93	121,04	56,93	−6.108,32	$\alpha_{25} = -0,3359$	278,53	124,69	10.558,2	$c_6^{(5)} = 1,728$
φ_6	25,36	40,56	41,60	42,91	56,93	44,79	−3.909,01	$\alpha_{26} = -0,2280$	168,68	83,47	6.712,4	$c_6^{(6)} = 1,717$
$\varphi_1^{(1)} = \varphi_1 - 0,7179\,\varphi_2$	32,87		6,94	−4,75	−5,54	−3,76	−252,86	$\alpha_{41}^{(1)} = +0,0648$	30,51	−4,75	420,2	$c_5^{(1)} = 1,662$
$\varphi_3^{(1)} = \varphi_3 - 0,3725\,\varphi_2$	6,94		47,79	38,51	40,94	26,49	−2.343,83	$\alpha_{43}^{(1)} = -0,5254$	122,16	38,51	3.983,6	$c_5^{(3)} = 1,700$
$\varphi_4^{(1)} = \varphi_4 - 0,2880\,\varphi_2$	−4,75		38,51	73,29	47,72	31,23	−2.963,22	$\alpha_{44}^{(1)} = -1$	112,71	73,29	5.185,8	$c_5^{(4)} = 1,750 = c_5$
$\varphi_5^{(1)} = \varphi_5 - 0,3359\,\varphi_2$	−5,54		40,94	47,72	100,97	43,21	−3,281,88	$\alpha_{45}^{(1)} = -0,6511$	179,68	47,72	5.502,4	$c_5^{(5)} = 1,677$
$\varphi_6^{(1)} = \varphi_6 - 0,2280\,\varphi_2$	−3,76		26,49	31,23	43,31	35,54	−1.990,50	$\alpha_{46}^{(1)} = -0,4261$	101,58	31,23	3.280,8	$c_5^{(6)} = 1,648$
$\varphi_1^{(2)} = \varphi_1^{(1)} + 0,0648\,\varphi_4^{(1)}$	32,56		9,44		−2,45	−1,74	−444,88	$\alpha_{11}^{(2)} = -1$	37,81		756,2	$c_4^{(1)} = 1,700 = c_4$
$\varphi_3^{(2)} = \varphi_3^{(1)} - 0,5254\,\varphi_4^{(1)}$	9,44		27,56		15,87	10,08	−786,95	$\alpha_{13}^{(2)} = -0,2899$	62,95		1.259,0	$c_4^{(3)} = 1,600$
$\varphi_5^{(2)} = \varphi_6^{(1)} - 0,6511\,\varphi_1^{(2)}$	−2,45		15,87		69,90	22,98	−1352,53	$\alpha_{15}^{(2)} = +0,0752$	106,3		2.126,0	$c_4^{(5)} = 1,572$
$\varphi_6^{(2)} = \varphi_6^{(1)} - 0,4261\,\varphi_4^{(1)}$	−1,74		10,08		22,98	22,23	−727,87	$\alpha_{16}^{(2)} = +0,0534$	53,55		1.071,0	$c_4^{(6)} = 1,471$
$\varphi_3^{(3)} = \varphi_3^{(2)} - 0,2899\,\varphi_4^{(2)}$			24,82		16,58	10,58	−657,98	$\alpha_{33}^{(3)} = -1$	51,98		1.039,6	$c_3^{(3)} = 1,580 = c_3$
$\varphi_5^{(3)} = \varphi_5^{(2)} + 0,0752\,\varphi_1^{(2)}$			16,58		69,72	22,85	−1385,98	$\alpha_{35}^{(3)} = -0,6680$	109,15		2.183,0	$c_3^{(5)} = 1,575$
$\varphi_6^{(3)} = \varphi_6^{(2)} + 0,0534\,\varphi_1^{(2)}$			10,58		22,85	22,14	−751,63	$\alpha_{36}^{(3)} = -0,4262$	55,57		1.111,4	$c_3^{(6)} = 1,479$
$\varphi_5^{(4)} = \varphi_5^{(3)} - 0,6680\,\varphi_3^{(3)}$					58,64	15,78	−946,45	$\alpha_{55}^{(4)} = -1$	74,42		1.488,4	$c_2^{(5)} = 1,573 = c_2$
$\varphi_6^{(4)} = \varphi_6^{(3)} - 0,4262\,\varphi_3^{(3)}$					15,78	17,63	−471,20	$\alpha_{56}^{(4)} = -0,2690$	33,41		668,2	$c_2^{(6)} = 1,418$
$\varphi_6^{(5)} = {}^{(4)}_{5} - 0,2690\,\varphi_5^{(4)}$						13,39	−216,60		13,39		267,8	$c_1^{(6)} = 1,236 = c_1$

Tabela 3

Determinarea directă a articulațiilor plastice folosind matricea eforturilor

ΔM_i	M_{i1}	M_{i2}	M_{i3}	M_{i4}	M_{i5}	M_{i6}	M_{is}	$M_p^{(i)}$	$\alpha_{ji} = -\frac{M_{ji}}{M_{jj}}$	$c_j^{(i)} = \frac{M_p^{(i)}}{M_{is}}$
ΔM_1	36,130	−24,115	−16,653	6,147	− 2,481	7,806	12,019	20	$\alpha_{61} = -0{,}1045$	$c_1^{(1)} = 1{,}664$
ΔM_2	−24,115	24,656	3,559	− 3,512	− 1,622	− 6,552	20,752	40	$\alpha_{62} = +0{,}0877$	$c_1^{(2)} = 1{,}928$
ΔM_3	−16,653	3,559	52,439	−16,594	− 6,427	−18,433	11,721	20	$\alpha_{63} = +0{,}2467$	$c_1^{(3)} = 1{,}706$
ΔM_4	6,147	− 3,512	−16,594	28,047	− 2,522	− 8,553	20,474	40	$\alpha_{64} = +0{,}1145$	$c_1^{(4)} = 1{,}954$
ΔM_5	2,481	− 1,622	− 6,327	− 2,522	22,456	−20,093	11,795	20	$\alpha_{65} = +0{,}2690$	$c_1^{(5)} = 1{,}696$
ΔM_6	7,806	− 6,552	−18,433	− 8,553	−20,093	74,693	16,185	20	$\alpha_{66} = -1$	$c_1^{(6)} = 1{,}236 = c_1$
$\Delta M_1^{(1)} = \Delta M_1 - 0{,}1045\,\Delta M_6$	35,314	−23,430	−14 727	7,041	4,581		10,328	17,910	$\alpha_{51}^{(1)} = -0{,}2686$	$c_2^{(1)} = 1{,}734$
$\Delta M_2^{(1)} = \Delta M_2 + 0{,}0877\,\Delta M_6$	−23,430	24,081	1,943	− 4,262	3,384		22,171	41,754	$\alpha_{52}^{(1)} = +0{,}1984$	$c_2^{(2)} = 1{,}883$
$\Delta M_3^{(1)} = \Delta M_3 + 0{,}2467\,\Delta M_6$	−14,727	1,943	47,892	−18,705	−11,385		15,714	24,934	$\alpha_{53}^{(1)} = +0{,}6677$	$c_2^{(3)} = 1{,}587$
$\Delta M_4^{(1)} = \Delta M_4 + 0{,}1145\,\Delta M_6$	7,041	− 4,262	−18,705	27,068	− 4,823		22,327	42,290	$\alpha_{54}^{(1)} = +0{,}2828$	$c_2^{(4)} = 1{,}894$
$\Delta M_5^{(1)} = \Delta M_5 + 0{,}2690\,\Delta M_6$	4,581	− 3,384	11,385	− 4,823	17,051		16,149	25,380	$\alpha_{55}^{(1)} = -1$	$c_2^{(5)} = 1{,}572 = c_2$
$\Delta M_1^{(2)} = \Delta M_1^{(1)} - 0{,}2686\,\Delta M_5^{(1)}$	34,084	−22,521	−11,669	8,336			5,990	11,093	$\alpha_{31}^{(2)} = +0{,}2896$	$c_3^{(1)} = 1{,}852$
$\Delta M_2^{(2)} = \Delta M_2^{(1)} + 0{,}1984\,\Delta M_5^{(1)}$	−22,521	23,410	− 0,316	− 5,219			25,375	46,775	$\alpha_{32}^{(2)} = +0{,}0078$	$c_3^{(2)} = 1{,}843$
$\Delta M_3^{(2)} = \Delta M_3^{(1)} + 0{,}6677\,\Delta M_5^{(1)}$	−11,669	− 0,316	40,290	−21,925			26,497	41,880	$\alpha_{33}^{(2)} = -1$	$c_3^{(3)} = 1{,}580 = c_3$
$\Delta M_4^{(2)} = \Delta M_4^{(1)} + 0{,}2828\,\Delta M_5^{(1)}$	8,336	− 5,219	−21,925	25,704			26,894	49,467	$\alpha_{34}^{(2)} = +0{,}5441$	$c_3^{(4)} = 1{,}839$
$\Delta M_1^{(3)} = \Delta M_1^{(2)} + 0{,}2896\,\Delta M_3^{(1)}$	30,705	−22,613		1,987			13,664	23,221	$\alpha_{11}^{(3)} = -1$	$c_4^{(1)} = 1{,}699 = c_4$
$\Delta M_2^{(3)} = \Delta M_2^{(2)} + 0{,}0078\,\Delta M_3^{(1)}$	−22,613	23,408		− 5,390			25,582	47,102	$\alpha_{12}^{(3)} = +0{,}7364$	$c_4^{(2)} = 1{,}841$
$\Delta M_4^{(3)} = \Delta M_4^{(2)} + 0{,}5441\,\Delta M_3^{(1)}$	1,987	− 5,391		13,775			41,311	72,254	$\alpha_{14}^{(3)} = -0{,}0647$	$c_4^{(4)} = 1{,}749$
$\Delta M_2^{(4)} = \Delta M_2^{(3)} + 0{,}7364\,\Delta M_1^{(3)}$		6,756		− 3,927			35,644	64,202	$\alpha_{42} = +0{,}2877$	$c_5^{(2)} = 1{,}801$
$\Delta M_4^{(4)} = \Delta M_4^{(3)} - 0{,}0647\,\Delta M_1^{(3)}$		− 3,927		13,646			40,427	70,752	$\alpha_{44} = -1$	$c_5^{(4)} = 1{,}750 = c_5$
$\Delta M_2^{(5)} = \Delta M_2^{(4)} + 0{,}2877\,\Delta M_4^{(4)}$		5,626					47,275	84,557		$c_6^{(2)} = 1{,}789 = c_6$

grame, adaptate acestui calculator, pentru efectuarea următoarelor operații matriceale: produs de matrice, inversarea unei matrice simetrice, eliminarea succesivă a unor ecuații prin operații de tip algoritmul lui Gauss.

7. CONSIDERAȚII FINALE ȘI CONCLUZII

Lucrarea de față, orientată spre găsirea unor căi cît mai simple pentru determinarea succesiunii articulațiilor plastice în cazul cadrelor încărcate cu sarcini proporționale, arată că pot fi utilizate procedee în care dispare necesitatea de a rezolva sisteme de ecuații, întregul calcul reducîndu-se la efectuarea alternată a unor operații de triere și a unor operații de eliminare, ușor programabile la calculatoare electronice de capacitate redusă. Aceste procedee impun utilizarea unui anumit sistem de bază, legat direct de cunoașterea mecanismului de cedare plastică a structurii pentru sarcinile date.

Înseamnă că efectuarea părții preliminare de calcul revine proiectantului, care trebuie să țină seama de cazul concret studiat pentru găsirea mecanismului de cedare, identificarea ultimei articulații plastice și trasarea diagramelor unitare pe sistemul de bază static determinat. În continuare, întregul calcul poate fi automatizat. Aceasta revine la încadrarea calculului prin etape succesive în procesul firesc al proiectării structurii, care trebuie să înceapă prin stabilirea judicioasă a capacității portante.

Dintre procedeele examinate, este normal să fie reținute cele două procedee de determinare directă a succesiunii articulațiilor plastice, bazate respectiv pe matricea deplasărilor φ și pe matricea eforturilor M. Deși procedeele prezintă un paralelism aproape complet, sînt utile unele observații comparative.

(a) Primul procedeu, care a fost prezentat pentru prima oară în lucrarea [2], are avantajul de a se desfășura în întregime folosind numai matricea deplasărilor φ, care stă de fapt la baza ambelor procedee. Caracteristic la acest procedeu este faptul că ordinea în care se stabilește succesiunea articulațiilor plastice este cea inversă fenomenului fizic, anume pornind de la stadiul de cedare plastică spre stadiul elastic. Deși sensul de parcurgere al etapelor nu poate prezenta prin el însuși un criteriu de preferință, se pot ridica unele întrebări legate de situația că se pornește tocmai din zona unde articulațiile plastice apar obișnuit în succesiune strînsă. Astfel:

— Ce se întîmplă cînd două articulații plastice succesive sînt foarte apropiate și, datorită valorilor aproape egale a factorilor de încărcare corespunzători, o unică eroare numerică sau o rotunjire (de exemplu cînd calculul s-ar face manual) ar duce la efectuarea incorectă a operației de triere, reținînd altă articulație plastică drept cea care se formează în stadiul respectiv. Desigur, o asemenea situație ar compromite restul calculului conducînd la efectuarea eronată a operației de eliminare, dar tocmai aceasta scoate în evidență eroarea printr-un rezultat caracteristic: în etapa următoare se obține un factor de încărcare *mai mare*, în loc de a

rezulta unul mai mic cum este normal şi deci continuarea operaţiilor poate fi blocată.

— Ce influenţă are asupra preciziei rezultatelor pornirea din zona valorilor foarte apropiate a factorilor de încărcare. Exemplul de calcul tratat comparativ prin ambele procedee în tabelele 2 şi 3 arată că rezultatele obţinute coincid în întregime şi deci sensul de parcurgere al etapelor nu influenţează. Aceeaşi constatare a fost făcută şi pentru alte exemple în lucrarea [3].

În aceeaşi lucrare s-a arătat că, deşi procedeul bazat pe matricea deplasărilor nu furnizează în ultima etapă date asupra stării de eforturi la limita stadiului elastic, ci dă numai mărimea factorului de încărcare respectiv, totuşi există posibilitatea să se controleze dacă — pentru sarcini de exploatare — structura se comportă sau nu în întregime elastic, aşa cum se pune uneori condiţia.

(b) Al doilea procedeu, care este pentru prima dată prezentat în această lucrare, are dezavantajul iniţial de a necesita inversarea matricei φ pentru a obţine matricea eforturilor M, care stă la baza procedeului. Cînd rezolvarea se face pe bază de programare la calculator electronic, acest dezavantaj devine minimal deoarece inversarea unei matrici pătrate simetrice constituie o operaţie de rutină pe bază de subprograme. În schimb, apar unele avantaje interesante:

— Parcurgerea etapelor succesive în sensul normal ce corespunde fenomenului fizic, creează proiectantului posibilităţi de orientare mai bune şi îi permit să intervină pe parcurs cînd consideră necesar, în special privitor la poziţia primelor articulaţii plastice şi mărimea factorilor de încărcare respectivi;

— Formarea matricei M_{is} pe baza expresiei (17), care este necesară conducerii calculului prin acest procedeu, rezolvă implicit cunoaşterea stării de eforturi a structurii pentru sarcini de exploatare, deoarece conţine chiar momentele încovoietoare din secţiunile critice pentru $c = 1$;

— Operaţiile de eliminare sînt substanţial mai simple în acest procedeu decît în primul.

Examinarea comparativă arată că cele două procedee sînt practic echivalente; preferinţa pentru unul dintre acestea trebuie să depindă în principal de mijlocul de calcul disponibil. Cînd calculul se efectuează manual (sau cu ajutorul unor maşini de calcul obişnuite), apare indicat procedeul bazat pe matricea deplasărilor φ, dînd deosebită atenţie determinării cît mai precise a mărimii factorilor de încărcare în cadrul operaţiilor de triere. Dacă se recurge la programare pentru calculator electronic, procedeul bazat pe matricea eforturilor M este acel care trebuie preferat.

Ambele procedee conduc la modalităţi mult mai simple pentru determinarea ordinii de formare a articulaţiilor plastice şi a mărimii factorilor de încărcare corespunzători, decît alte metode de calcul „biografic" şi în consecinţă pot fi considerate drept instrumente eficiente pentru introducerea în practica curentă a analizării comportării structurilor în domeniul elasto-plastic.

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. ALEX. GHEORGHIU şi colaboratori, *Asupra calculului cadrelor în domeniul elastico-plastic, prin etape succesive*, Bul. Inst. Construcţii, Bucureşti, *8* (1961).
2. ALEX. GHEORGHIU, C. PACOSTE, *Stabilirea directă a ordinii de formare a articulaţiilor plastice la cadre încărcate cu sarcini proporţionale*, St. cerc. mec. apl., *4* (1966); *Etablissement direct de la succession des rotules plastiques pour des structures soumises à des charges proportionnelles*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., *4* (1966).
3. ALEX. GHEORGHIU şi colaboratori, *Utilizarea calculatoarelor electronice pentru stabilirea directă a ordinii de formare a articulaţiilor plastice la cadre încărcate proporţional*, St. cerc. mec. apl., *5* (1968).
4. CH. MASSONNET, M. Save, *Calcul plastique des constructions* (I), Centre Belgo-Luxembourgeois d'information de l'acier, Bruxelles, 1967.
5. ALEX. GHEORGHIU, *Statica construcţiilor* (II), Editura Tehnică, Bucureşti, 1965.

FOLOSIREA MODELELOR CROMOPLASTICE LA STUDIUL FORMĂRII PRESIUNII MINIERE

de N. D. POPESCU
Institutul de mine, Petroşani

Folosindu-se proprietatea materialelor cromoplastice de a-şi schimba culoarea la solicitări din domeniul plastic şi anume, în negru pentru solicitări de compresiune sau în alb pentru solicitări de întindere, se studiază pe modele la scară redusă formarea zonelor de plastificare din jurul lucrărilor miniere, funcţie de forma geometrică a acestora. De asemeni, se studiază şi influenţa susţinerilor asupra procesului de plastificare a zonei din vecinătatea lucrărilor miniere.
Rezultatele obţinute pun în evidenţă dependenţa biunivocă dintre eforturile ce iau naştere în zona din jurul lucrărilor miniere şi eforturile ce se nasc în susţinerile miniere, precum şi largile posibilităţi de folosire a materialelor cromoplastice la studiul celor mai diverse probleme ridicate de tehnica minieră, care nu şi-au găsit încă rezolvarea pînă în prezent.

1. INTRODUCERE

Cunoaşterea legilor ce guvernează fenomenul de formare a presiunilor miniere, constituie una din principalele probleme ale ştiinţei miniere. De aceea, în acest domeniu s-au efectuat numeroase cercetări teoretice şi experimentale, emiţîndu-se diferite ipoteze şi teorii, fără să se ajungă însă la o teorie generală care să justifice în mod satisfăcător mecanismul formării şi dezvoltării presiunilor miniere şi al conlucrării susţinerii miniere cu roca din jurul lucrărilor miniere.

După cum se ştie, masivul de rocă neatacat se află în echilibru, care este deranjat la executarea lucrării miniere. Ca urmare, în roca din jurul acestora, se produc concentrări de eforturi, ce provoacă deformarea profilelor lucrărilor miniere. Dacă deformaţia rocilor nu depăşeşte limita de elasticitate, într-un interval mare de timp, lucrarea minieră este stabilă şi nu este nevoie de folosirea susţinerilor miniere, pentru împiedecarea dezvoltării deformaţiilor.

În cazul că deformaţiile sînt mari, iar limita de elasticitate este depăşită, lucrarea este nestabilă, deoarece în rocă apar zone de plastificare şi ca urmare, se produce alunecarea sau surparea unei părţi din lucrare, dacă nu se folosesc susţinerile miniere, care să limiteze dezvoltarea acestor deformaţii.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970. P. 1395–1401.

Deci, instabilitatea lucrării, de care este legată necesitatea folosirii susținerilor miniere, apare ca o consecință a plastificării totale sau parțiale a unor zone din jurul lucrării miniere.

Modul de apariție a acestor zone, forma și mărimea lor, funcție de caracteristicile lucrării miniere și a susținerilor miniere, constituie obiectul acestui studiu, lucrarea de față reprezentînd doar o succintă prezentare a primelor rezultate experimentale, obținute în această problemă.

Datorită complexității factorilor ce caracterizează comportarea reală a rocilor din jurul lucrărilor miniere, elucidarea acestei probleme este legată de un vast program de studii experimentale. În acest caz, efectuarea de încercări pe modele, la scară redusă, apare ca singura soluție rațională și eficace.

Pentru efectuarea acestor studii experimentale se impune folosirea unor materiale care să respecte condițiile de similitudine și să asigure obținerea unor rezultate cît mai exacte prin folosirea unor mijloace simple și sigure.

Aceste condiții sînt întrunite de către materialele cromoplastice a căror proprietate fundamentală constă în aceea că în momentul apariției deformațiilor plastice, materialul își schimbă culoarea, înegrindu-se cînd curgerea este produsă de solicitarea de compresiune și albindu-se cînd curgerea are loc datorită solicitărilor de întindere [1].

2. MATERIALE ȘI MODELE CROMOPLASTICE. ÎNCERCĂRI EFECTUATE

Materialul cromoplastic folosit, a fost realizat de către Academia R.S. România [1] și are la bază compounduri vinilice. El prezintă o sensibilitate deosebită a fenomenului cromoplastic, caracterizat prin diferența netă de culoare atît între zonele solicitate la întindere și cele solicitate la compresiune cît și între zonele de material solicitat și material nesolicitat.

De remarcat faptul că închiderea culorii (înegrirea datorită plastificării materialului prin solicitarea de compresiune) este însoțită de o creștere a transparenței, în timp ce deschiderea culorii (albirea provocată de plastificarea materialului prin solicitare de întindere) de o creștere a opacității.

Din materialul cromoplastic se pot confecționa bare și plăci de diferite dimensiuni, pentru realizarea acestor încercări folosindu-se plăci de $2 \times 25 \times 25$ cm. Materialul se poate curba la cald, se poate suda cu o mașină specială de sudare a maselor plastice și se poate prelucra cu scule uzuale, oferind deci posibilități largi de realizare a diferitelor tipuri de modele cromoplastice.

Se constată că în condiții perfecte de realizare a materialului cromoplastic și de executare a modelelor, se poate asigura integral ortotropia rezistențelor.

Prin aplicarea (în timpul fabricației) a unui tratament termic adecvat, se pot obține materiale cromoplastice cu diferite rezistențe și module de elasticitate, ceea ce constituie o calitate remarcabilă a acestui material.

Curba caracteristică a materialului cromoplastic folosit — pentru solicitarea de compresiune — este reprezentată în figura 1, caracteristicile principale ale materialului fiind

$\sigma_p = 255$ kg/cm² (limita de proporţionalitate),
$\sigma_c = 340$ kg/cm² (limita de curgere),
$\sigma_r = 440$ kg/cm² (rezistenţa de rupere),
$E = 2{,}7 \cdot 10^4$ kg/cm² (modulul de elasticitate).

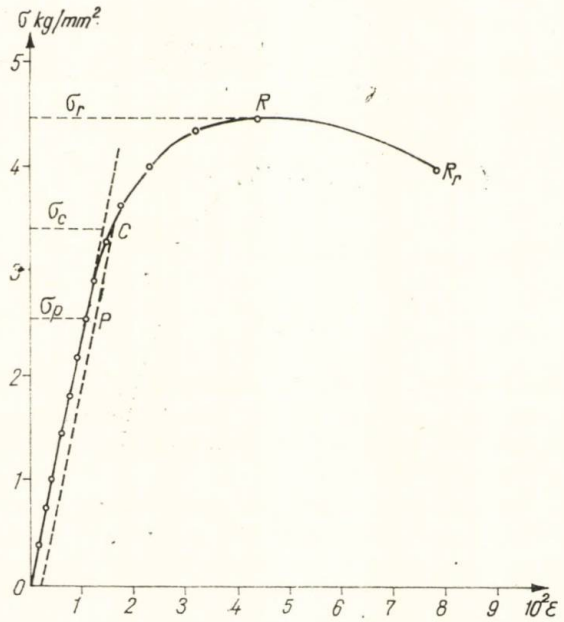


Fig. 1

Modelele cromoplastice realizate reprezintă trei tipuri de lucrări miniere orizontale, de formă circulară, semicirculară şi trapezoidală, confecţionate din plăci patrate de material cromoplastic, cu latura de 7 cm şi grosimea de 2 cm. Orificiile ce reprezintă galeriile au fost plasate în centrul plăcii, raza cercului înscris în figura trapezoidală ca şi raza galeriilor circulare şi semicirculare, fiind de 1 cm.

Pentru studierea influenţei susţinerilor asupra zonelor de plastificare a materialului din jurul lucrărilor miniere, o serie de modele au fost prevăzute cu armături, realizate din platbande de bronz sau din fier.

Axa principală a secţiunii galeriilor semicirculare şi trapezoidale a coincis cu direcţia de acţionare a forţei exterioare, sau a făcut unghiuri de 45° sau de 90° cu această direcţie.

Pentru realizarea unei stări de solicitare, cît mai apropiată de cea reală, încercarea modelelor cromoplastice s-a făcut cu ajutorul dispozitivului reprezentat în figura 2, care a permis ca pe direcţia de acţionare a forţei să se obţină o sarcină de compresiune uniform distribuită, iar pe direcţia normală, deplasările să fie complet împiedecate.

Uniformizarea presiunilor pe suprafeţele de contur ale modelului, s-a realizat cu ajutorul plăcilor de plumb, care s-au interpus între suprafeţele laterale ale modelului cromoplastic şi dispozitivul de încercare, aşa cum se vede în figura 2. *b.*, ce reprezintă o secţiune prin model şi dispozitiv.

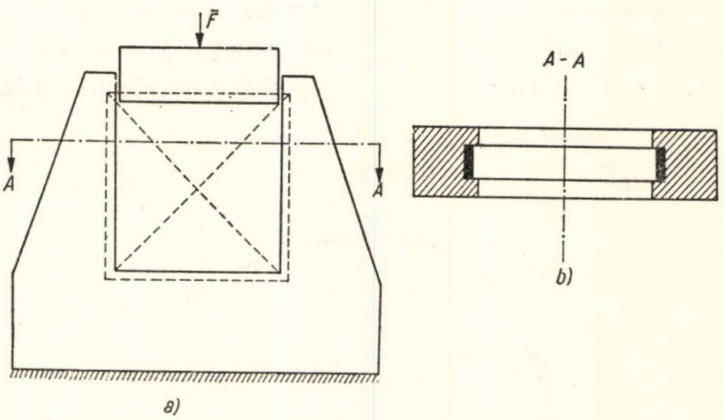


Fig. 2

Forţa de compresiune totală, în stadiul final de solicitare, a fost de 7,5 tone pentru modelele ce reprezintă galerii nearmate şi de 8,5 tone, respectiv 9 tone, pentru modelele ce reprezintă galerii armate cu platbandă de bronz, respectiv de fier.

Sub acţiunea crescătoare a forţei de compresiune, modelul cromoplastic suferă deformaţii, care, atîta timp cît se menţin în domeniul elastic, nu provoacă nici-o modificare a coloraţiei probei. Pentru o anumită valoare a forţei, apar zone de culoare închisă, care se măresc o dată cu creşterea sarcinii, ceea ce arată că în punctele respective materialul s-a plastificat, ca urmare a faptului că eforturile de compresiune au depăşit limita de curgere a materialului.

În figura 3, s-au reprezentat schematic limitele acestor zone, pentru un model cromoplastic ce reprezintă o lucrare minieră cu profil circular, nesusţinută, corespunzătoare valorilor de 5 t, 6 t, 7 t şi 7,5 t ale forţei de compresiune.

Se observă că zonele plastificate au forma unor bucle, alungite în direcţia diagonalelor pătratului ce reprezintă modelul cromoplastic.

Notînd cu φ_v respectiv cu φ_h unghiurile pe care le fac tangentele duse la curbele ce delimitează zonele plastificate, în punctele în care acestea intersectează conturul galeriei, se constată că atît unghiul φ_v, cît şi unghiul φ_h, se micşorează o dată cu creşterea sarcinii, însă în timp ce φ_v diferă foarte puţin de valoarea sa iniţială, care era 90°, unghiul φ_h se micşorează foarte repede, tinzînd către valoarea zero.

În figurile 4 şi 5 se dau fotografiile modelelor cromoplastice a două galerii circulare, nesusţinute, de diametre diferite şi anume, de 0,8 cm şi de 2,0 cm, pentru stadiul final de solicitare (7,5 tone).

Procesul de plastificare fiind similar pentru ambele cazuri, rezultă că dispozitivul de încercare asigură independența modelului cromoplastic de diametrul găurii.

Fotografiile din figura 6, reprezintă modelele cromoplastice — în stadiul final de solicitare — pentru galerii circulare susținute (modelul b_2 cu bronz, la $F = 8{,}5$ t, iar modelul b_3 cu fier la $F = 9$ t).

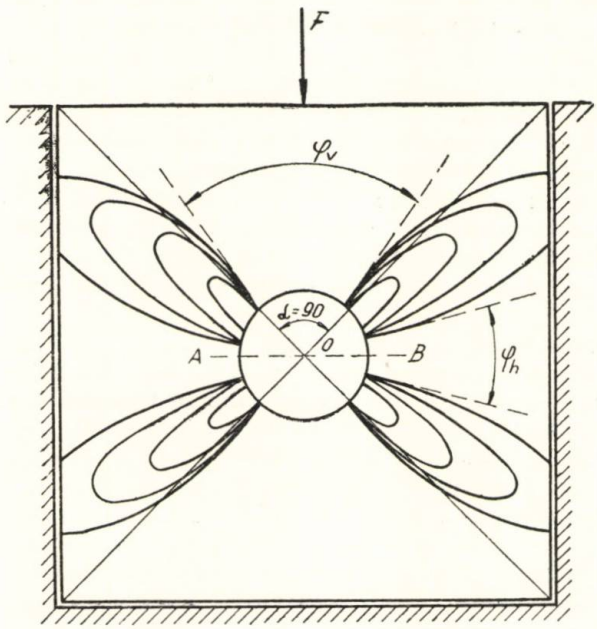


Fig. 3

În ambele cazuri unghiul φ_v se micșorează tinzînd spre zero (mai rapid la modelul cu susținere de fier, deci mai rigidă) o dată cu creșterea forței de compresiune, zona plastificată menținîndu-se pînă aproape de stadiul final de solicitare, numai în partea superioară a galeriei.

Fotografiile prezentate în figurile 7 și 8 reprezintă modelele cromoplastice — pentru stadiul final de solicitare — ale galeriei trapezoidale, respectiv semicirculare, nesusținute sau susținute cu armături de bronz sau de fier. Pentru ambele tipuri de galerii axa principală verticală a secțiunii transversale ocupă trei poziții și anume, coincide cu direcția de acționare a forței sau este rotită cu 90°, față de această direcție.

3. INTERPRETAREA REZULTATELOR

Limitîndu-ne numai la observație cu caracter general, că starea periculoasă la lucrările miniere cu profil semicircular și trapezoidal se produce mai repede decît în cazul profilelor circulare, dar că fenomenul de plastificare și influența armăturilor asupra procesului de dezvoltare a

acestui fenomen, se manifestă în acelaşi mod şi are aceleaşi cauze, indiferent de forma galeriei, în continuare ne vom ocupa numai de galeriile cu profil circular.

Ca urmare a deranjării echilibrului masivului de rocă, prin executarea lucrării miniere, în jurul acesteia se produce o concentrare a eforturilor. Mărimea acestor eforturi depinde de mai mulţi factori (ca de exemplu : natura rocii, dimensiunile, forma şi adîncimea galerii, etc.) ce urmează să fie determinaţi pe baza cercetărilor experimentale, în curs de executare.

Pentru o anumită valoare a acestor eforturi, în cele patru puncte obţinute prin intersecţia galeriei circulare cu direcţiile ce fac 45°, respectiv 135° cu verticala, materialul se plastifică. Aceste zone de plastificare se dezvoltă o dată cu mărirea forţei de compresiune, păstrînd la început direcţiile ce fac 45°, respectiv 135° cu verticala, ceea ce arată că plastificarea se datoreşte eforturilor unitare tangenţiale.

Mărindu-se în continuare forţa de compresiune, zonele de plastificare se curbează astfel încît unghiul φ_h (fig. 3) scade foarte repede, în timp ce unghiul φ_v îşi micşorează foarte puţin valoarea, ceea ce arată că într-o serie de puncte şi eforturile de compresiune au depăşit limita de curgere.

Să presupunem că pentru o anumită stare de solicitare, în partea superioară a galeriei s-au creat zonele plastificate, mm_1m' şi nn_1n' (fig. 9). Datorită afînării, materialul din aceste zone se tasează, creindu-se astfel liniile de alunecare mm_1 şi nn_1. Din această cauză solidul $mn\ m_1n_1$ rămîne suspendat de roca neplastificată în punctele m_1 şi n_1 şi ca atare, sub greutatea proprie se deformează, mărindu-şi volumul pînă ocupă spaţiul rămas liber prin afînarea zonelor plastificate. Dacă în procesul de deformare, în unele puncte ale acestui solid, eforturile de întindere produse de greutatea proprie depăşesc limita de curgere, el se distruge şi cade sub forma de sfărîmituri producîndu-se astfel surparea galeriei.

În cazul că eforturile de întindere nu depăşesc limita de curgere, iar solidul s-a deformat astfel încît se reazimă din nou pe cele două zone plastificate, sînt posibile alte două situaţii şi anume :

— dacă în procesul de curgere a materialului, din cele două zone plastificate, s-a produs fenomenul de consolidare (caracteristic la majoritatea rocilor), procesul de deformare încetează, iar lucrarea minieră este stabilă şi nu are nevoie de susţinere.

— dacă nu s-a produs fenomenul de consolidare, cele două zone plastificate fiind solicitate suplimentar de solidul ce se sprijină din nou pe ele, se vor mări, ceea ce atrage după sine o creştere a volumului solidului delimitat de planele de alunecare şi procesul de deformare se continuă ca mai înainte.

Evident, că mecanismul ce duce la distrugerea rocilor sau la stabilizarea deformaţiilor, este mult mai complicat decît procesul schematizat descris mai sus, deoarece în realitate intervin şi forţele de frecare pe planele de alunecare mm_1 şi nn_1, precum şi starea de tensiune naturală din zona nealterată m_1n_1, însă influenţa acestora nu este predominantă, fenomenele dezvoltîndu-se după schema arătată.

Rezultă deci că atunci cînd în jurul lucrărilor miniere se află roci care au proprietatea de consolidare a deformaţiilor plastice, este necesar să se folosească susţineri elastice care să limiteze procesul de deformare —

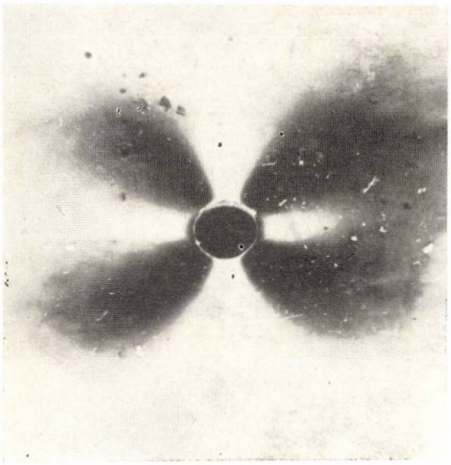


Fig. 4

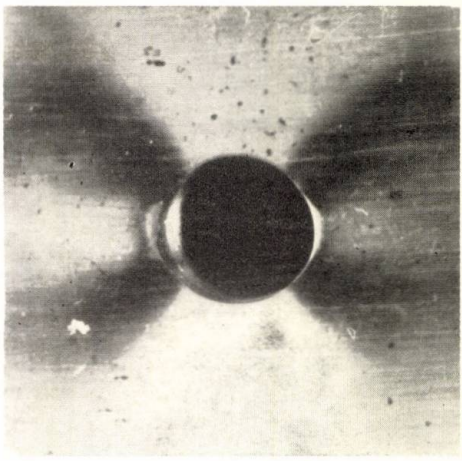


Fig. 5

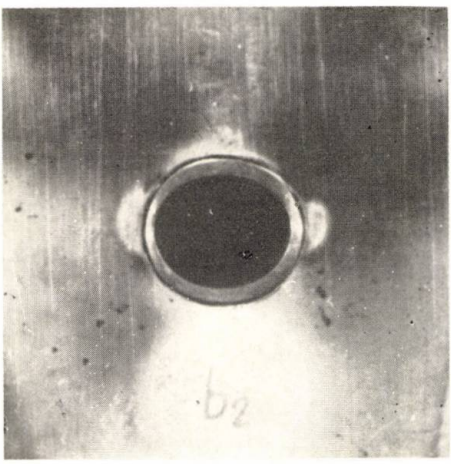


Fig. 6 b_2

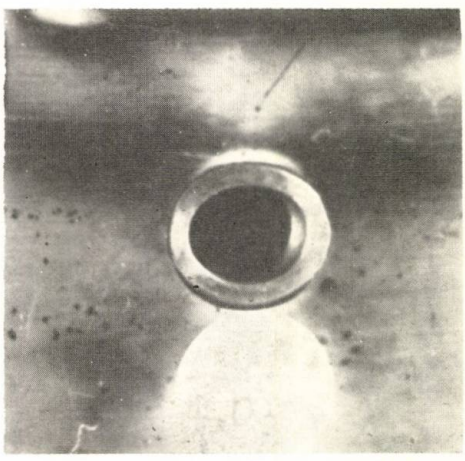


Fig. 6 b_3

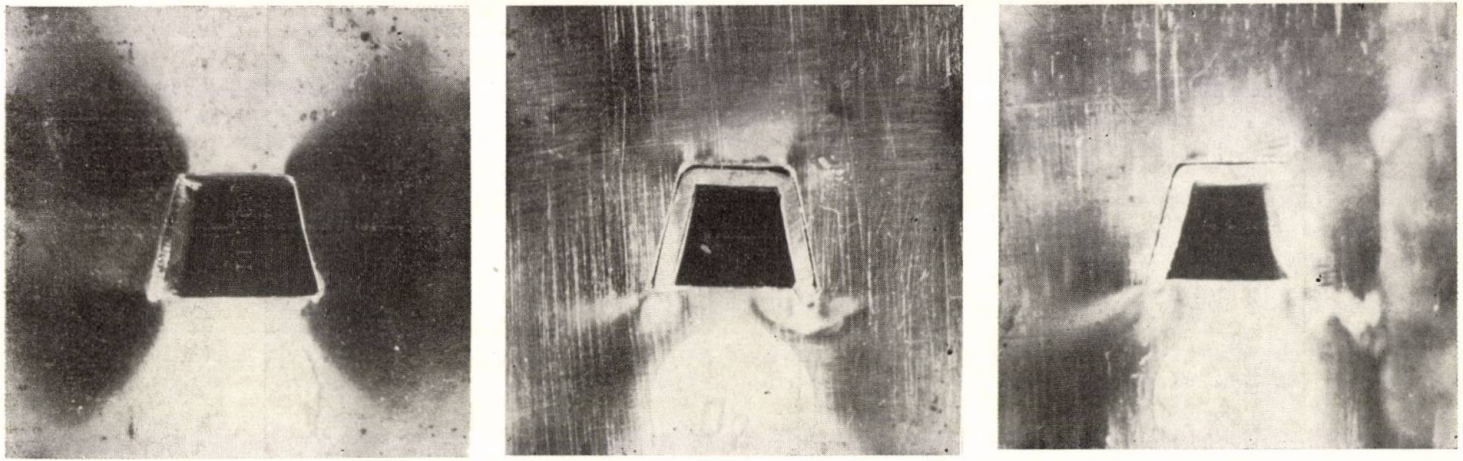


Fig. 7

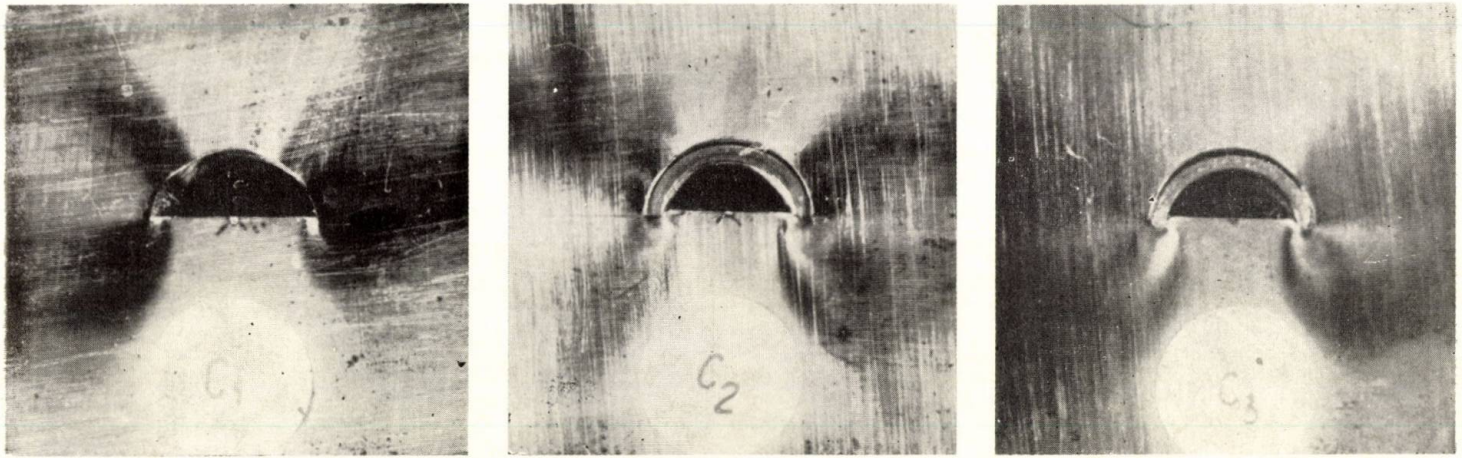


Fig. 8

fără al opri însă — dîndu-se astfel posibilitatea apariţiei fenomenului de consolidare, care asigură stabilitatea lucrărilor miniere.

Din analiza figurilor 6 (b_2 şi b_3) se constată că atunci cînd se folosesc susţineri rigide, zonele plastificate se dezvoltă mult mai rapid în partea

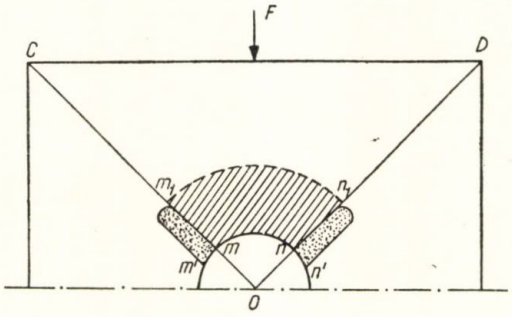


Fig. 9

superioară a susţinerii şi din cauza micşorării unghiului φ_v, posibilitatea de alunecare a solidului delimitat de aceste zone creşte, dezvoltîndu-se astfel presiuni mari asupra susţinerii. Dacă fenomenul de curgere al rocii se consolidează înainte de distrugerea susţinerii, lucrarea minieră devine stabilă şi procesul de deformare al susţinerii şi rocilor înconjurătoare încetează.

Rezultă deci, că în calculul susţinerilor lucrărilor miniere trebuie să ţină seama — în mod special — de proprietatea rocilor de a se consolida în timpul deformării.

CONCLUZII

Folosirea modelelor cromoplastice permite studierea stării de solicitare din jurul lucrărilor miniere şi mecanismul formării zonelor de rocă plastificată, precum şi modul de conlucrare al susţinerilor lucrărilor miniere cu roca înconjurătoare. Astfel, se constată că sub acţiunea crescătoare a unei forţe de compresiune, în momentul cînd forţa a atins o anumită valoare, în cele patru puncte obţinute prin intersecţia conturului galeriei miniere cu direcţiile ce fac 45°, respectiv 135°, cu verticala, materialul se plastifică, creindu-se patru zone de plastificare, ce au forma unor bucle, care se dezvoltă o dată cu mărirea forţei de compresiune, păstrînd la început direcţiile ce fac 45°, respectiv 135°, cu verticala, după care se curbează uşor.

Existenţa susţinerilor miniere modifică modul de formare şi de dezvoltare a zonelor de plastificare, ceea ce arată că între rocă şi susţinerea minieră există o legătură biunivocă, ce influenţează asupra procesului de formare a presiunii miniere.

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Şt. Bălan şi colab. *Cromoplasticitatea*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1963.
2. M. Stamatiu, *Mecanica rocilor*, Edit. didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

ASUPRA CALCULULUI CÎRLIGELOR DE TRACȚIUNE ÎN CAZUL GENERAL AL ÎNCĂRCĂRII ASIMETRICE

de E. BUGAJEWSKI

I.P.G.G.

În lucrare se determină expresia generală a forțelor interioare și a eforturilor unitare în orice secțiune a cîrligelor de tracțiune, considerate ca grinzi curbe de formă oarecare supuse unei încărcări asimetrice față de axa de suspendare. Se dau de asemenea expresiile particularizate pentru formele uzuale și în secțiunile care se verifică în mod curent.

Prin forma lor, adecvată prinderii sarcinilor, cîrligele de tracțiune sînt bare curbe plane în consolă (arce deschise), cu tija încastrată sau cel mai des liber rezemată, așa încît să poată lua direcția forței dată de sarcină. Dată fiind raza lor mică de curbură în raport cu înălțimea secțiunii, la determinarea eforturilor unitare trebuie să se aplice formulele barelor „cu rază mică de curbură", fiind folosită uzual expresia sub forma

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{\rho \cdot A}\left(1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y}\right) \quad [\mathrm{Kgf/cm^2}], \tag{1}$$

unde

A [cm^2] reprezintă aria secțiunii;

ρ [cm] — raza de curbură a axei centrelor de greutate ale secțiunilor („axa cîrligului") în dreptul secțiunii considerate;

y [cm] — distanța fibrei considerate de la suprafața curbă, perpendiculară pe planul axei centrelor de greutate și care conține această axă;

N[kgf] — forța axială în secțiune (pozitivă în cazul tracțiunii);

M[cmKgf] — momentul încovoietor în secțiune (pozitiv dacă tinde să micșoreze raza de curbură ρ);

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970, P. 1403—1416.

$\varkappa = -\frac{1}{A}\int_{-e_i}^{+e_e} \frac{y}{\rho + y}$ — coeficientul de formă, cunoscut din rezistența materialelor, care se poate calcula analitic sau grafic după metode cunoscute, limitele sale de integrare fiind $-e_i$, distanța de la centrul de greutate la fibra extremă interioară (către centrul de curbură), și $+e_e$ aceeași la fibra exterioară.

Pentru aplicarea relației (1) singura problemă este aceea a determinării eforturilor N și M în secțiunea care interesează, celelalte mărimi fiind de natură geometrică, legate numai de forma secțiunii.

În calculele curente ale cîrligelor, se verifică de obicei anumite secțiuni, considerate periculoase, pentru care se determină de la caz la caz, eforturile N și M, iar în literatura de specialitate se găsesc formulele particularizate pentru aceste secțiuni la tipurile obișnuite de cîrlige (simple, duble).

Ca urmare a formei speciale, de inel deschis plan, a cîrligelor și a încărcării lor printr-un sistem de forțe concentrate (datorită legăturilor prin care se prinde sarcina), există posibilitatea găsirii unor expresii generale ale eforturilor N și M într-o secțiune oarecare și deci posibilitatea exprimării generale a tensiunii în orice fibră a sa. Aceste expresii pot fi aplicate direct prin simple particularizări numerice și permit trasarea curbelor de variație respective în lungul cîrligului.

Într-o lucrare anterioară (4), s-au determinat aceste expresii generale în ipoteza prinderii la cîrlig prin legături simetrice (adică în ipoteza încărcării simetrice a cîrligului), din care, prin particularizare, s-au regăsit formulele cunoscute pentru secțiunile care se verifică în mod obișnuit.

În prezenta lucrare se caută să se determine expresiile în ipoteza mai generală a încărcării asimetrice, fiind presupus că legăturile sarcinii formează unghiuri diferite față de axa tijei cîrligului. În prealabil trebuie făcută observația că orice fel de legare a sarcinii trebuie să ducă pînă la sfîrșit la un sistem de forțe în planul axei cîrligului („planul cîrligului"), întrucît forțele legăturilor din afara acestui plan trebuie să dea rezultante ale căror componente din plan reprezintă încărcarea obișnuită a barei curbe, iar cele perpendiculare (cînd există) duc la o solicitare spațială, prin încovoierea cu un moment de vector perpendicular pe cel dat de forțele din plan. Această încovoiere se poate introduce separat în calcule prin suprapunerea efectelor. De altfel, cînd există probabilitatea unei asemenea prinderi cu totul asimetrice a sarcinii, se evită constructiv solicitarea dăunătoare datorită componentelor perpendiculare pe planul cîrligului, prin aceea că se prevede legarea tijei printr-o articulație sferică, așa încît axa acesteia să se poată oricînd orienta după direcția rezultantei legăturilor sarcinii.

Totodată, în cazul cînd pentru o bună prindere sînt necesare mai multe legături (în urma celor de mai sus se vor considera de aici înainte numai cele din planul cîrligului), forțele acestora pot fi considerate întotdeauna separat, (de obicei cîte două concurente sau paralele și admițînd o rezultantă cunoscută prin condițiile de legare), așa încît solicitarea totală poate fi ușor determinată, de asemenea prin suprapunerea efectelor acestor forțe.

Este de remarcat că și în planul cîrligului rezemarea articulată a tijei acestuia permite oricînd orientarea axei sale după rezultanta tuturor forțelor, iar în cazul cînd nu s-a prevăzut această dispoziție constructivă, se poate totdeauna vorbi despre o componentă a rezultantei în axa tijei peste ale cărei efecte se pot suprapune cele ale unei componente normale, care se tratează separat.

În consecința observațiilor de mai sus se poate considera cazul cel mai general de prindere a sarcinii ca reducîndu-se la suprapunerea efectelor date de fiecare forță de legătură, care în prealabil trebuie calculată din condițiile de legare.

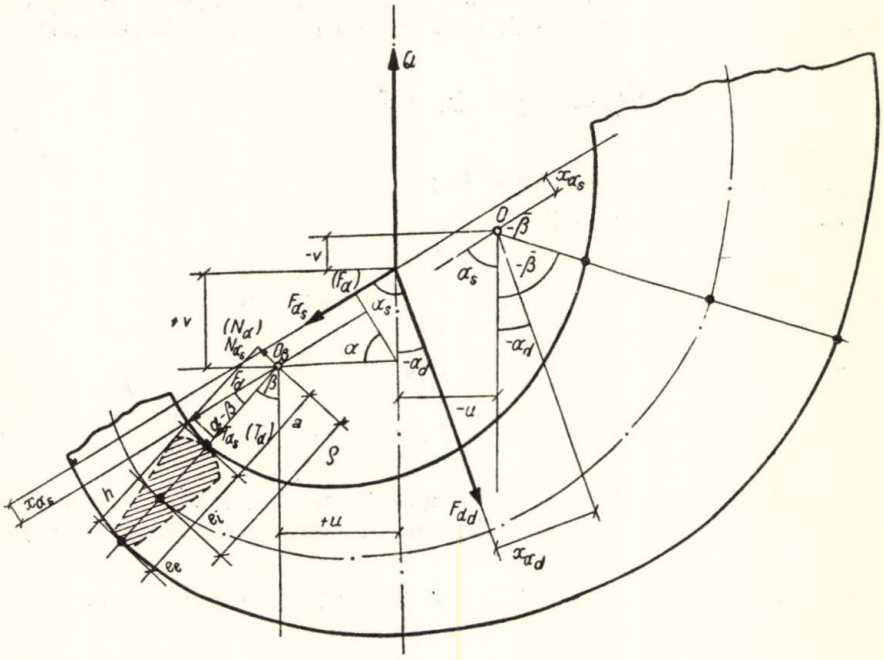


Fig. 1

Fie astfel considerată o porțiune de cîrlig ca în figura 1, secționată în „planul cîrligului", ce conține axa cîrligului și unde se admit unghiurile orientate în sens orar ca pozitive. Fie, de asemenea, una din forțele de legătură ale sarcinii din acest plan $F_{+\alpha}$, înclinată la $\sphericalangle +\alpha$ față de tija cîrligului (t-t) și o secțiune Ω_β (normală la axa cîrligului) înclinată față de aceeași direcție la $\sphericalangle \beta$, pentru care centrul de curbură al axei cîrligului este în O_β, iar mărimile geometrice care o caracterizează sînt

$A = A^{(\beta)}$ — aria;

$\rho = \rho^{(\beta)}$ — raza de curbură locală a axei cîrligului orientată de la centrul de curbură către cel de greutate;

$-e_i = -e_i^{(\beta)}$ — distanța fibrei mediane extreme interioare (de la centrul de greutate către centrul de curbură);

$+e_e = +e_e^{(\beta)}$ — distanța fibrei mediane extreme exterioare (de la centrul de greutate al secțiunii);

$h = h^{(\beta)} = e_i + e_e$ — înălțimea totală a secțiunii în planul cîrligului;
$a = a^{(\beta)}$ — raza de curbură locală a „gurii cîrligului", (de la centrul de curbură la fibra interioară extremă);
$\varkappa = \varkappa^{(\beta)}$ — coeficientul de formă din rel. (1) al secțiunii Ω_β;
$x_\alpha = x_\alpha^{(\beta)}$ — distanța de la centrul de curbură O_β la direcția forței F_α.

Observație. S-au adoptat aceste notații duble pentru ca în relațiile generale scrierea să fie scurtată, iar în relațiile particularizate diferitelor secțiuni să se poată face distincția prin indicele superior (β).

Solicitările care apar în secțiunea Ω_β datorită forței F_α se obțin ușor reducînd întîi forța la centrul de curbură, cu momentul de reducere

$$\overline{\mathfrak{M}}_\alpha = \overline{\mathfrak{M}}_\alpha^{(\beta)} = \bar{x}_\alpha \times \overline{F}_\alpha = \overline{x_\alpha \cdot F_\alpha} \tag{2}$$

și apoi descompunînd forța în:

— componenta normală la Ω_β,

$$N_\alpha = N_\alpha^{(\beta)} = F_\alpha \sin(\alpha - \beta), \tag{3}$$

— componenta tangențială la Ω_β,

$$T_\alpha = T_\alpha^{(\beta)} = F_\alpha \cos(\alpha - \beta). \tag{3'}$$

Forțele normală și tangențială în secțiune sînt evident date de rel. (3) și (3'), iar momentul încovoietor (cu convenția generală de semne) este

$$M_\alpha = M_\alpha^{(\beta)} = -N_\alpha \rho - \mathfrak{M}_\alpha = -F_\alpha[\rho \cdot \sin(\alpha - \beta) + x_\alpha]. \tag{3''}$$

Aplicînd relația (1), rezultă efortul unitar normal în secțiunea Ω_β

$$\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^{(\beta)} = \frac{N_\alpha}{A} + \frac{M_\alpha}{\rho \cdot A}\left(1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y}\right) =$$

$$= -\frac{F_\alpha}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \sin(\alpha - \beta) - \frac{F_\alpha x_\alpha}{A \cdot \rho}\left(1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y}\right). \tag{4}$$

Efortul unitar tangențial se neglijează de obicei, însă în calcule mai exacte se poate determina din $T_\alpha^{(\beta)}$ după formula lui Jurawski, ceea ce nu se consideră în lucrarea de față.

Bineînțeles, în cazul cînd de aceeași parte a secțiunii lucrează mai multe eforturi $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots$ (notate F_{α_j}), un calcul similar cu rezultanta lor dă efortul unitar total în secțiunea Ω_β, notat $\sigma_{\Sigma\alpha_j}^{(\beta)}$, care însă se poate

exprima mai simplu folosind direct rezultatul din relația (4), întrucît toate tensiunile parțiale sînt normale pe aceeași secțiune, așa încît

$$\sigma^{(\beta)}_{\Sigma\alpha_j} = \Sigma\sigma^{(\beta)}_{\alpha_j} = -\Sigma\frac{F_{\alpha j}}{A\cdot\varkappa}\cdot\frac{y}{\rho+y}\sin(\alpha_j-\beta) -$$

$$-\Sigma\frac{F_{\alpha j}x_{\alpha j}}{A\cdot\rho}\left(1+\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{y}{\rho+y}\right). \qquad (4')$$

Trebuie observat că pentru o secțiune anumită, la calculul efortului unitar $\sigma^{(\beta)}_{\Sigma\alpha_j}$ se iau în considerație, mai simplu, numai forțele legăturilor aplicate către vîrful cîrligului ca fiind de aceeași parte a secțiunii, întrucît considerarea celor din partea opusă, către regiunea de rezemare a tijei sale ar necesita și introducerea forțelor de rezemare (eventual cu încastrare). De aici apare evident că secțiunile dinspre vîrf, dincolo de care nu mai lucrează forțe F_{α_j}, sînt nesolicitate.

Din relația generală (4) rezultă că solicitarea unei secțiuni Ω_β, dată de o forță din legătură F_{α_j} este cu atît mai importantă cu cît $\sphericalangle\alpha_j$ este mai mare, însă (4'), arată că principial pot exista forțe care să diminueze solicitarea totală prin semnul cu care intervin, ceea ce însă practic la cîrlige nu se întîmplă deoarece toate legăturile lucrează în același sens.

De aici înainte formula generală nu mai este susceptibilă de transformări decît prin particularizări în anumite cazuri date.

★

Un caz de felul acesta, cu un caracter încă foarte general și ades întîlnit în practică, îl constituie suspendarea sarcinii prin două legături asimetrice față de tijă, așa cum se arată tot în figura 1. Pentru considerarea acestui caz cu respectarea convenției generale de semn admisă anterior, s-a împărțit planul cîrligului în două regiuni:

— regiunea din „stînga" de la axa rezultantei Q către vîrful cîrligului, toate mărimile sale fiind notate cu indicele s.

— regiunea din „dreapta", opusă celei dintîi, ale cărei mărimi vor purta indicele d.

Astfel, măsurînd unghiurile α și β pornind de la axa rezultantei Q (în general în axa tijei conform considerațiilor de mai sus), unghiurile α_s și β_s (din regiunea s) vor fi pozitive, în timp ce $\sphericalangle\alpha_d$ și $\sphericalangle\beta_d$ vor fi negative.

Ținînd seama că forțele din legături F_{α_s} și F_{α_d} sînt componente ale sarcinii Q, valoarea lor rezultă din teorema sinusurilor,

$$\frac{F_{\alpha_s}}{\sin\alpha_d} = \frac{F_{\alpha_d}}{\sin\alpha_s} = \frac{Q}{\sin(\alpha_s+\alpha_d)}. \qquad (5)$$

Astfel, aplicînd relaţiile (3), (3'), (3'') se obţin eforturile în secţiunea Ω_β :

— datorită componentei F_{α_s} :

$$N_{\alpha_s} = Q \frac{\sin(\alpha_s - \beta)}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \sin \alpha_d , \tag{6}$$

$$T_{\alpha_s} = Q \frac{\cos(\alpha_s - \beta)}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \sin \alpha_d , \tag{6'}$$

$$M_{\alpha_s} = -Q \frac{\sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} [\rho \sin(\alpha_s - \beta) + x_{\alpha_s}] ; \tag{6''}$$

— datorită componentei $F_{-\alpha_d}$:

$$N_{-\alpha_d} = -Q \frac{\sin(\alpha_d + \beta)}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \sin \alpha_s , \tag{7}$$

$$T_{-\alpha_d} = Q \frac{\cos(\alpha_d + \beta)}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \sin \alpha_s , \tag{7'}$$

$$M_{-\alpha_d} = +Q \frac{\sin \alpha_s}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} [\rho \cdot \sin(\alpha_d + \beta) - x_{-\alpha_d}] . \tag{7''}$$

De asemenea aplicînd relaţia (4), se obţin eforturile unitare într-o fibră oarecare y a secţiunii Ω_β :

— datorită componentei F_{α_s} :

$$\sigma_{\alpha_s} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \cdot \frac{\sin(\alpha_s - \beta) \sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} -$$

$$- \frac{Q \cdot x_{\alpha_s}}{A \cdot \rho} \cdot \frac{\sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y}\right) ; \tag{8}$$

— datorită componentei $F_{-\alpha_d}$:

$$\sigma_{-\alpha_d} = +\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \cdot \frac{\sin(\alpha_d + \beta)}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \sin \alpha_s +$$

$$+ \frac{Q \cdot x_{-\alpha_d}}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\sin \alpha_s}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \cdot \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y}\right) . \tag{8'}$$

În mod obișnuit interesează eforturile unitare în fibrele extreme, a căror expresie rezultă prin simplă particularizare din relațiile (8) și (8′). Astfel:

— datorită forței F_{α_s}, pentru fibra extremă interioară (cu $y = -e_i$):

$$\sigma_{\alpha_{s_i}} = +\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_i}{a} \cdot \frac{\sin(\alpha_s - \beta)}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \cdot \sin \alpha_d - \\ -\frac{Q \cdot x_{\alpha_s}}{A(a + e_i)} \cdot \frac{\sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{e_i}{a}\right) \tag{9}$$

și pentru fibra extremă exterioară (cu $y = +e_e$):

$$\sigma_{\alpha_{s_e}} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_e}{a + h} \cdot \frac{\sin(\alpha_s - \beta)}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \sin \alpha_d - \\ -\frac{Q \cdot x_{\alpha_s}}{A \cdot (a + e_i)} \cdot \frac{\sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{e_e}{a + h}\right); \tag{9′}$$

— datorită forței $F_{-\alpha_d}$ în fibra extremă interioară (cu $y = -e_i$):

$$\sigma_{-\alpha_{d_i}} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_i}{a} \cdot \frac{\sin(\alpha_d + \beta)}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \sin \alpha_s + \\ +\frac{Q \cdot x_{-\alpha_d}}{A(a + e_i)} \cdot \frac{\sin \alpha_s}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{e_i}{a}\right) \tag{10}$$

și în fibra extremă exterioară (cu $y = +e_e$);

$$\sigma_{-\alpha_{d_e}} = +\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_e}{a + h} \cdot \frac{\sin(\alpha_d + \beta)}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \sin \alpha_s + \\ +\frac{Q \cdot x_{-\alpha_d}}{A(a + e_i)} \cdot \frac{\sin \alpha_s}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{e_e}{a + h}\right). \tag{10′}$$

Pentru secțiunile cuprinse între punctele de intersecție ale suporturilor F_{α_s} și $F_{-\alpha_d}$ cu axa cîrligului (unde se aplică de fapt legăturile sarcinii), eforturile unitare sînt date numai de componenta F_{α_s} (admițînd că vîrful cîrligului este în regiunea din stînga s) — deci de relațiile (8) și (9)respectiv (9′) — ca fiind singura forță de o parte a secțiunii. Pentru secțiunile cu $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_d < 0$ în dreapta direcției forței $F_{-\alpha_d}$, efortul unitar este dat de

ambele componente F_{α_s} şi $F_{-\alpha_d}$ care apar în aceeaşi parte a secţiunii şi în acest caz se obţin următoarele :

— eforturile în secţiunea $\Omega_{-\bar{\beta}}$

$$N_Q^{(-\bar{\beta})} = N_{\alpha_s}^{(-\bar{\beta})} + N_{-\alpha_d}^{(-\bar{\beta})} = \frac{Q}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} [\sin \alpha_d \cdot \sin(\alpha_s + \bar{\beta}) -$$

$$- \sin \alpha_s \cdot \sin(\alpha_d - \bar{\beta})] = \underline{Q \sin \bar{\beta}}, \qquad (11)$$

$$T_Q^{(-\bar{\beta})} = T_{\alpha_s}^{(-\bar{\beta})} + T_{-\alpha_d}^{(-\bar{\beta})} = \frac{Q}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} [\sin \alpha_d \cdot \cos(\alpha_s + \bar{\beta}) +$$

$$+ \sin \alpha_s \cdot \cos(\alpha_d - \bar{\beta})] = \underline{Q \cos \bar{\beta}}, \qquad (11')$$

$$M_Q^{(-\bar{\beta})} = M_{\alpha_s}^{(-\bar{\beta})} + M_{-\alpha_d}^{(-\bar{\beta})} = - Q \frac{\rho}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} [\sin \alpha_d \cdot \sin(\alpha_s + \bar{\beta}) -$$

$$- \sin \alpha_s \cdot \sin(\alpha_d - \bar{\beta}) - \frac{Q}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \cdot (x_{\alpha_s} \sin \alpha_d +$$

$$+ x_{-\alpha_d} \cdot \sin \alpha_s) = \underline{- Q \cdot \rho \cdot \sin \bar{\beta} - Q \cdot u}. \qquad (11'')$$

Observaţie. Notînd cu u şi v abscisa şi ordonata centrului de curbură O_β al secţiunii considerate, se constată din figura 1, că

$$x_\alpha = | v \sin \alpha - u \cos \alpha |,$$

$$x_{\alpha_s} = | v \sin \alpha_s - u \cos \alpha_s |, \qquad (12)$$

$$x_{\alpha_d} = | - v \sin \alpha_d - u \cos \alpha_d |,$$

de unde

$$x_{\alpha_s} \sin \alpha_d + x_{-\alpha_d} \cdot \sin \alpha_s = | v \sin \alpha_s \sin \alpha_d - u \cos \alpha_s \sin \alpha_d -$$

$$- v \sin \alpha_d \cdot \sin \alpha_s - u \cos \alpha_d \sin \alpha_s | = | u \cdot \sin(\alpha_s + \alpha_d) |, \qquad (12')$$

ceea ce simplifică expresia termenului al doilea din relaţia (11'') ;

— efortul unitar într-o fibră oarecare y a secţiunii $\Omega_{\bar{\beta}}$ (aplicînd relaţia, (4')) ;

$$\sigma_Q^{(-\bar{\beta})} = - \frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \sin \bar{\beta} - \frac{Q \cdot u}{A \cdot \rho} \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \right). \qquad (13)$$

De asemenea şi pentru aceste secţiuni ($\Omega_{-\bar{\beta}}$) se pot obţine uşor expresiile eforturilor unitare în fibrele extreme care interesează cel mai mult. Astfel, rezultă ca mai sus din relaţia (13) :

— pentru fibra extremă interioară (cu $y = -e_i$):

$$\sigma_{Q_i}^{(-\bar{\beta})} = +\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_i}{a} \cdot \sin \bar{\beta} - \frac{Q \cdot u}{A \cdot \rho}\left(1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{e_i}{a}\right), \tag{14}$$

— pentru fibra extremă exterioară (cu $y = +e_e$):

$$\sigma_{Q_e}^{(-\bar{\beta})} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_e}{a+h} \cdot \sin \bar{\beta} - \frac{Q \cdot u}{A \cdot \rho} \cdot \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{e_e}{a+h}\right). \tag{14'}$$

Din relația (13) respectiv (8) se observă că de vreme ce solicitarea secțiunilor din afara $\sphericalangle(\alpha_s + \alpha_d)$ nu depind de acest unghi de suspendare a sarcinii, ci numai de poziția secțiunii ($\sphericalangle - \bar{\beta}$) față de rezultanta de suspendare (Q), pentru secțiunile din interiorul său solicitarea crește cu acest unghi.

Observație. Semnele unghiurilor α și β au fost specificate numai în notațiile indicilor pentru a sublinia sensul lor. În relațiile de calcul aceste semne au fost cuprinse, astfel că în calculele numerice mărimile respective se vor introduce în valoare absolută.

Relațiile obținute mai sus se pot particulariza fără dificultate pentru cazul suspendării prin două legături simetrice ($\alpha_s = -\alpha_d = \alpha$), rezultînd expresiile obținute direct în lucrarea anterioară [4]. Astfel, pentru $|\alpha_s| = |\alpha_d| = \alpha$ fiind

$$\sin(\alpha_s + \alpha_d) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

din relația (5) se obține

$$F_{\alpha_s} = F_{-\alpha_d} = F_\alpha = \frac{Q}{2 \cos \alpha} \tag{15}$$

și totodată relațiile (6 — 9') se transformă astfel:

— eforturile din secțiunea Ω_β (din relațiile 6, 6', 6''):

$$N_\alpha^{(\beta)} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}, \tag{16}$$

$$T_\alpha^{(\beta)} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}, \tag{16'}$$

$$M_\alpha^{(\beta)} = -\frac{Q}{2 \cos \alpha}[\rho \sin(\alpha - \beta) + x_\alpha]; \tag{16''}$$

— efortul unitar într-o fibră y din secțiunea Ω_β (din relația 8);

$$\sigma_\alpha^{(\beta)} = -\frac{Q}{2A\varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha} - \frac{Q \cdot x_\alpha}{2\rho A \cos \alpha}\left[1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y}\right], \tag{17}$$

— efortul unitar în fibra extremă interioară cu $y = -e_i$ (din relaţia 9):

$$\sigma_{\alpha_i}^{(\beta)} = +\frac{Q}{2A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_i}{a} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha} - \frac{Q \cdot x_\alpha}{2A(a + e_i)\cos \alpha}\left[1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{e_i}{a}\right], \quad (17')$$

— efortul unitar în fibra extremă exterioară, cu $y = +e_e$ (din relaţia 9');

$$\sigma_{\alpha_e}^{(\beta)} = -\frac{Q}{2A\varkappa} \cdot \frac{e_e}{a+h} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha} - \frac{Q \cdot x_\alpha}{2A(a + e_i)\cos \alpha} \cdot \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{e_e}{a+h}\right). \quad (17'')$$

Pentru secţiunile exterioare unghiului 2α al legăturilor, relaţiile (11—14') rămîn neschimbate şi în cazul legăturilor simetrice, întrucît depind numai de rezultanta Q, fără a avea importanţă modul cum aceasta este descompusă.

★

De asemenea, în cazul cîrligelor simple şi duble uzuale, la care centrul de curbură al secţiunilor (centrul gurii cîrligului) este situat pe una din direcţiile legăturilor sarcinii, relaţiile generale se simplifică prin anularea braţului de reducere x_α al forţelor F_α.

Astfel în cazul suspendării asimetrice rămîn valabile relaţiile (5), (6), (6'), (11), (11') — care nu conţin pe x_α — schimbîndu-se numai următoarele expresii în care s-a înlocuit $x_\alpha = 0$:

— momentul încovoietor într-o secţiune oarecare Ω_β din interiorul $\sphericalangle(\alpha_s + \alpha_d)$ (din relaţia 6''):

$$M_{\alpha_s}^{(\beta)} = -Q \cdot \rho \cdot \frac{\sin(\alpha_s - \beta)}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \cdot \sin \alpha_d, \quad (18)$$

cu particularizarea pentru secţiunea periculoasă Ω_0 (cu $\beta = 0$) în cazul cîrligelor simple şi duble

$$M_{\alpha_s}^{(0)} = -Q \cdot \rho \cdot \frac{\sin \alpha_s \cdot \sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)}, \quad (18')$$

— momentul încovoietor într-o secţiune $\Omega_{-\beta}$ din afara $\sphericalangle(\alpha_s + \alpha_d)$ (din relaţia 11''):

$$M_Q^{(-\bar{\beta})} = -Q \cdot \rho \cdot \sin \bar{\beta}, \quad (19)$$

cu particularizarea pentru secţiunea periculoasă cu $\bar{\beta} = -90°$, în cazul cîrligelor simple,

$$M_Q^{(-90)} = -Q \cdot \rho, \quad (19')$$

— efortul unitar într-o fibră oarecare a secțiunii Ω_β din interiorul $\sphericalangle (\alpha_s + \alpha_d)$ (din relația 8)

$$\sigma_{\alpha_s}^{(\beta)} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \cdot \frac{\sin(\alpha_s - \beta) \sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)}, \tag{20}$$

cu particularizarea pentru secțiunea Ω_0 ($\beta = 0$) în cazul cîrligelor simple și duble,

$$\sigma_{\alpha_s}^{(0)} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \cdot \frac{\sin \alpha_s \sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)}, \tag{20^I}$$

— eforturile unitare în fibrele extreme i și e pentru secțiunile Ω_β și Ω_0 (din relațiile (9) și (9')):

$$\sigma_{\alpha_{s_i}}^{(\beta)} = +\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_i}{a} \cdot \frac{\sin(\alpha_s - \beta) \sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)}, \tag{20^{II}}$$

$$\sigma_{\alpha_{s_e}}^{(\beta)} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_e}{a + h} \cdot \frac{\sin(\alpha_s - \beta) \sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)} \tag{20^{III}}$$

și

$$\sigma_{\alpha_{s_i}}^{(0)} = +\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_i}{a} \cdot \frac{\sin \alpha_s \cdot \sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)}, \tag{20^{IV}}$$

$$\sigma_{\alpha_{s_e}}^{(0)} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa}, \frac{e_e}{a + h} \cdot \frac{\sin \alpha_s \cdot \sin \alpha_d}{\sin(\alpha_s + \alpha_d)}, \tag{20^V}$$

— efortul unitar într-o fibră oarecare a secțiunii $\Omega_{-\bar{\beta}}$ din afara $\sphericalangle (\alpha_s + \alpha_d)$ (din relația 13):

$$\sigma_Q^{(-\bar{\beta})} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \cdot \sin \bar{\beta}, \tag{21}$$

cu particularizarea pentru secțiunea Ω_{-90} (cu $\bar{\beta} = -90°$) în cadrul cîrligelor simple

$$\sigma_Q^{(-90)} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y}, \tag{21^I}$$

— eforturile unitare în fibrele extreme i și e ale secțiunilor $\Omega_{-\bar{\beta}}$ și Ω_{-90} (din relațiile 14 și 14')

$$\sigma_{Q_i}^{(-\bar{\beta})} = +\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_i}{a} \cdot \sin \bar{\beta}, \tag{21^{II}}$$

$$\sigma_{Q_e}^{(-\bar{\beta})} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_e}{a+h} \cdot \sin \bar{\beta} \cdot \tag{21^{III}}$$

$$\sigma_{Q_i}^{(-90)} = +\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_i}{a} \cdot \tag{21^{IV}}$$

$$\sigma_{Q_e}^{(-90)} = -\frac{Q}{A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_e}{a+h} \cdot \tag{21^{V}}$$

Totodată, în cazul suspendării simetrice fiind $\alpha_s = -\alpha_d = \alpha$ se păstrează neschimbate relaţiile (15), (16), (16′) — care nu conţin pe x_α — precum şi toate formulele pentru secţiunile $\Omega_{-\bar{\beta}}$ — din afara $\sphericalangle 2\alpha$, — adică relaţiile (19), (19′) şi (21)—(21^{V})—care nu depind de unghiul de suspendare. Astfel se modifică numai relaţiile de mai jos, cu particularizările respective în cazul cîrligelor simple şi duble :

— momentul încovoietor într-o secţiune oarecare Ω_β în interiorul $\sphericalangle 2\alpha$ (din relaţia (16″)) :

$$M_\alpha^{(\beta)} = -\frac{Q}{2} \cdot \rho \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}, \tag{22}$$

cu particularizarea pentru Ω_0(cu $\beta = 0$) la cîrligele simple şi duble

$$M_\alpha^{(0)} = -\frac{Q}{2} \rho \operatorname{tg} \alpha, \tag{22'}$$

— efortul unitar într-o fibră oarecare a secţiunii Ω_β (din relaţia 17) :

$$\sigma_\alpha^{(\beta)} = -\frac{Q}{2A \cdot \varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}, \tag{23}$$

cu particularizarea pentru secţiunea Ω_0 (cu $\beta = 0$) a cîrligelor simple şi duble

$$\sigma_\alpha^{(0)} = -\frac{Q}{2A \cdot \varkappa} \cdot \frac{y}{\rho + y} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \tag{23^{I}}$$

— eforturile unitare în fibrele extreme i şi e ale secţiunilor Ω_β şi Ω_0 :

$$\sigma_{\alpha_i}^{(\beta)} = +\frac{Q}{2A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_i}{a} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}, \tag{23^{II}}$$

$$\sigma_{\alpha_e}^{(\beta)} = -\frac{Q}{2A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_e}{a+h} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}, \tag{23^{III}}$$

$$\sigma_{\alpha_i}^{(0)} = + \frac{Q}{2A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_i}{a} \cdot tg\ \alpha, \qquad (23^{IV})$$

$$\sigma_{\alpha_e}^{(0)} = - \frac{Q}{2A \cdot \varkappa} \cdot \frac{e_e}{a+h} \cdot \operatorname{tg}\ \alpha. \qquad (23^{V})$$

Examinînd aceste relații se observă că s-au regăsit expresiile cunoscute din literatura de specialitate pentru secțiunile periculoase ale cîrligelor simple și duble obișnuite (fig. 2*a*, *b*).

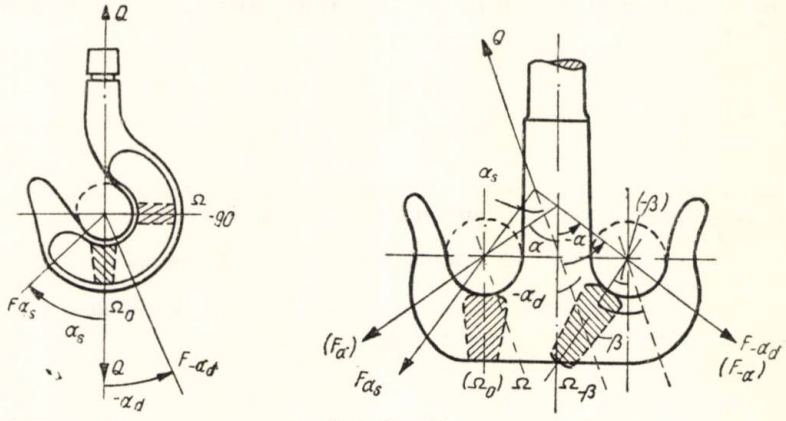


Fig. 2 a, b.

Astfel sînt cunoscute relațiile (22′, 23^{I}, 23^{IV}, 23^{V}) pentru secțiunea cu $\beta = 0$ la cîrligele simple și duble, relațiile (19′, 21^{I}, 21^{IV}, 21^{V}) pentru secțiunea cu $\beta = 90°$ la cîrligele simple și relațiile (22, 23, 23^{II}, 23^{III}) pentru secțiunea cu $\beta < 0$ din vecinătatea tijei cîrligelor duble.

Este de remarcat că în cazul suspendării prin legături paralele neuniform încărcate, relația (5) și toate celelalte care o folosesc se prezintă sub formă nedeterminată ($\alpha_s = \alpha_d = 0$). În această situație distribuția eforturilor nu mai depinde de unghiurile de suspendare, ci de condiții exterioare de încărcare neuniformă, folosindu-se astfel relația (4) respectiv (4′) cu valorile respective ale forțelor $\bar{F}_\alpha$ și $\bar{Q} = \bar{F}_{\alpha_{s_1}} + \bar{F}_{\alpha_d}$.

★

Relațiile generale stabilite în această lucrare se pot folosi direct în calcule prin simplă particularizare pentru orice secțiune a cîrligelor de formă oarecare (cîrlige speciale, verificări de cîrlige deformate prin utilizare îndelungată), în condiții de încărcare date. Totodată aceste relații permit studiul variației eforturilor și tensiunilor în lungul axei cîrligului, putîndu-se trage concluzii asupra formei adecvate și a rezistenței în diferite cazuri. Este de observat că în secțiunea din dreptul ultimei legături pornind de la vîrful cîrligului sînt valabile ambele formule (20) și (21) la determinarea lui σ. Pentru ca acestea să dea același rezultat (să nu apară discontinuitate între

solicitările secţiunilor infinit vecine), se găseşte din egalarea relaţiilor (20) şi (21) condiţia

$$\beta = \alpha_d, \tag{24}$$

adică această secţiune (normală la axa cîrligului) trebuie să fie chiar pe direcţia forţei locale de legătură.

Condiţia (24) este satisfăcută la cîrligele la care curbele de contur au în fiecare punct aceeaşi normală cu axa centrelor de greutate, întrucît atunci elementele de legătură au ca direcţie stabilă însăşi direcţia normalei comune locale. Altminteri, între secţiunile imediat vecine din acest punct de suspendare, apar discontinuităţi de eforturi unitare în aceeaşi fibră ce depind direct de diferenţa $(\alpha_d - \beta)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Hellmut Ernst, *Die Hebezeuge* I, Friedr. Vieweg u. Sohn — Braunscweig 1961.
2 H.Segal, Cr. Linde, I. Purcariu, *Maşini de ridicat şi de transportat*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1960.
3. A.O.Spivacovski, N.F. Rudenco, *Maşini de ridicat şi de transportat*, Bucureşti, Edit. tehnică.
4. E. Bugajewski, *Asupra calculului de rezistenţă al cîrligelor de tracţiune*, Comunicată în Sesiunea ştiinţifică A.M.G. din 1966.

INFLUENȚA VARIAȚIEI PARAMETRILOR TERMICI ASUPRA RĂCIRII GĂURII DE SONDĂ PRIN CIRCULAȚIE DE LICHID

de T. OROVEANU
Institutul de petrol, Ploiești

În lucrare se reia problema studiată în [1], însă în ipoteza că densitatea mediului poros, căldura lui specifică și conductivitatea termică depind de temperatură. Transferul de căldură dintre mediul poros și gaura de sondă este studiat cu ajutorul ecuației căldurii, liniarizată printr-un procedeu propus în [2], bazat pe faptul că variația în funcție de temperatură a parametrilor menționați mai sus este relativ redusă. Schimbul de căldură între lichidul care circulă în sondă și pereții găurii de sondă este studiat cu ajutorul procedeului propus în [3], în cele două variante studiate și în [1]. Sînt date formule care permit să se calculeze variația în timp a temperaturii la talpa sondei.

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1], am studiat problema răcirii unei găuri de sondă prin realizarea unei circulații de lichid injectat de la suprafață. O asemenea operație poate fi executată atunci cînd sonda este supusă unui anumit tratament cu fluide ale căror proprietăți sînt afectate de creșterea temperaturii. Astfel, la un tratament de acidizare, inhibitorii utilizați pentru evitarea coroziunii țevilor își pierd eficacitatea la temperaturi mai ridicate. Atunci cînd adîncimea sondei nu este prea mare, se poate lua în considerație răcirea cu ajutorul circulației de lichid. Într-adevăr, temperatura crește o dată cu adîncimea, putînd atinge la talpa sondei valori destul de ridicate, care limitează eficacitatea procedeului menționat, în sensul că debitul necesar pentru răcire devine mult prea mare. De altfel, problema care se pune practic este aceea a calculării debitului necesar pentru a se realiza o anumită temperatură la talpa sondei. În lucrarea citată, această problemă a fost rezolvată prin adaptarea unui procedeu aproximativ utilizat de H. J. Ramey Jr. [3] pentru rezolvarea unei probleme legate de injectarea unui lichid cald în zăcămînt, în cadrul procedeelor de stimulare termică. Acest procedeu, bazat pe introducerea valorilor medii într-o secțiune normală pe direcția de mișcare a lichidului, apare ca necesar deoarece tratarea riguroasă a problemei este dificilă, conducînd la rezultate complicate. Mai remarcăm

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970, P. 1417–1433.

şi faptul că pentru calculele practice, formulele obţinute prin procedeul aproximativ sînt destul de precise.

Într-o altă lucrare [2], am reluat problema tratată de H.J. Ramey Jr. introducînd însă ipoteza că parametrii termici ai mediului poros sînt variabili. Într-adevăr, în [1], ca şi în [3] de altfel, se utilizează soluţii ale ecuaţiei transmisiei căldurii în scopul stabilirii modului în care variază temperatura la suprafaţa de contact dintre gaura de sondă şi mediul poros. În aceste soluţii, mediul poros în care se produce transmisia căldurii este presupus ca avînd parametri termici constanţi. Această ipoteză este destul de simplificatoare deoarece se depărtează sensibil de realitate, densitatea mediului poros, căldura lui specifică şi conductivitatea lui termică fiind funcţii de temperatură. Ar mai trebui luat în consideraţie şi faptul că mediul poros este în general neomogen şi anizotrop dar de acest aspect intenţionăm să ne ocupăm mai tîrziu.

În această lucrare vom relua procedeul propus în [2] şi aplicat acolo la determinarea scăderii temperaturii lichidului cald injectat în strat, pentru a studia cu ajutorul lui problema răcirii găurii de sondă prin circulaţie de lichid în condiţii mai generale decît în lucrarea noastră anterioară [1].

2. TRANSMISIA CĂLDURII ÎNTR-UN MEDIU CU PARAMETRII TERMICI VARIABILI

Problemele de transmisie a căldurii într-un mediu, care are conductivitatea termică şi căldura specifică dependente de temperatură, au făcut obiectul unui număr destul de mare de studii, datorită faptului că, în afara unor excepţii, această situaţie este totdeauna prezentă în cazurile reale. De asemenea, trebuie să se ţină seama şi de faptul că densitatea mediului variază şi ea cu temperatura. În felul acesta, ecuaţia căldurii devine neliniară şi nu admite soluţii exacte decît în cazuri cu totul speciale sau dacă se recurge la unele ipoteze restrictive în legătură cu variaţia parametrilor amintiţi mai sus. Mai există evident şi posibilitatea utilizării metodelor numerice, de o largă utilizare în prezent.

În cele ce urmează, vom face apel la procedeul pe care l-am mai utilizat în [2] pentru a liniariza ecuaţia diferenţială şi a obţine astfel o soluţie aproximativă. Vom reaminti mai întîi pe scurt etapele principale care conduc la liniarizare, iar după aceea vom găsi soluţia adecvată pentru problema de care ne ocupăm.

2.1. LINIARIZAREA ECUAŢIEI

Într-un sistem de coordonate carteziene x_i, ecuaţia transmisiei căldurii are forma

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

t fiind timpul, T temperatura, ρ densitatea, c căldura specifică şi λ conductivitatea termică; în scrierea ecuaţiei a fost utilizată convenţia indicelui de sumare.

Cu ajutorul schimbării de funcție

$$\theta = \int_{T_0}^{T} \frac{\lambda}{\rho c} \, dT, \tag{2}$$

T_0 fiind o valoare constantă arbitrară a temperaturii, ecuația (1) devine

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{1}{\rho c} \frac{d(\rho c)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

rămînînd tot neliniară. Pentru efectuarea schimbării de funcție, se presupune că ρ, c și λ sînt funcții continue de T.

Din datele exprimentale, care au fost discutate în [2], rezultă că produsul ρc este practic constant în aplicațiile care ne interesează. Într-adevăr, deși cercetările experimentale cu privire la variația lui ρ, c și λ în funcție de temperatură sînt destul de puțin numeroase și limitate la cîteva tipuri de medii poroase, putem să admitem că există posibilitatea generalizării concluziilor la care s-a ajuns. Astfel W. H. Somerton [4] a constatat că pentru rocile poroase studiate căldura specifică crește destul de lent o dată cu temperatura. De asemenea, din studiul efectuat de W. H. Somerton și M. A. Selim [5] rezultă că, cel puțin în domeniul de temperaturi pe care îl avem în vedere, densitatea rocilor poroase descrește foarte încet atunci cînd temperatura crește. În felul acesta, creșterea căldurii specifice, destul de mică de altfel, este parțial compensată și ca urmare aproximația de a considera produsul ρc constant este foarte acceptabilă. Rezultă astfel posibilitatea ca în ecuația (3) să neglijăm termenii ce conțin derivata $\frac{d(\rho c)}{d\theta}$, ceea ce ne dă

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i}. \tag{4}$$

Această ecuație rămîne însă neliniară chiar dacă admitem că factorul ρc este constant, deoarece conductivitatea termică depinde de temperatură, respectiv de θ. Din datele prezentate în [4], valorile lui λ sînt destul de apropiate pentru rocile poroase studiate și scad atunci cînd temperatura crește. Este de remarcat faptul că variația conductivității termice este mai accentuată decît aceea a densității sau a căldurii specifice, însă atunci cînd intervalul de temperaturi nu este prea mare, se poate utiliza o valoare medie a lui λ, fără ca aceasta să se depărteze prea mult de valorile extreme. Putem deci pune

$$\frac{\lambda}{\rho c} \approx \left(\frac{\lambda}{\rho c}\right)_m = \varkappa^2 \tag{5}$$

și astfel ecuația (4) devine

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i}, \tag{6}$$

fiind liniară. Mai observăm că în calculul constantei definite prin relația (5) am ținut seama și de faptul că produsul ρc nu este riguros constant, introducînd valoarea sa medie. Pentru determinarea valorii lui $\varkappa^2$ trebuie să fie cunoscute valorile extreme pe care le poate lua temperatura, condiție care poate fi presupusă realizată.

2.2. SOLUȚIA PROBLEMEI DE TRANSFER DE CĂLDURĂ DE LA MEDIUL POROS LA GAURA DE SONDĂ

Atunci cînd un lichid circulă prin gaura de sondă, cu intenția de a se realiza o răcire, temperatura sa este, cel puțin de la o anumită adîncime, inferioară temperaturii mediului poros înconjurător. Se produce deci un transfer de căldură de la acesta din urmă către gaura de sondă și, deoarece formațiunile traversate au în plan orizontal dimensiuni mari în raport cu gaura de sondă, aceasta din urmă poate fi înlocuită cu o sursă liniară care absoarbe căldură din formațiunile presupuse a fi un sistem radial infinit. În sfîrșit, mai facem și aproximația de a considera mediul poros de grosime infinită.

Fenomenul posedă deci simetrie radială și ecuația (6) ia forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \varkappa^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right), \tag{7}$$

iar soluția pe care o căutăm trebuie să satisfacă o condiție inițială de forma

$$t = 0, \qquad \theta = \theta_i, \tag{8}$$

θ_i fiind valoarea lui θ care corespunde temperaturii inițiale T_i a mediului poros, presupusă constantă, precum și condițiile la limită

$$r = 0, \; r \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{2\pi \rho c} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}; \quad r = \infty, \; \theta = \theta_i, \tag{9}$$

$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}$ reprezentînd intensitatea pe unitatea de lungime, constantă în timp, a sursei liniare de căldură. Coordonata z are sensul verticalei descendente și nu intervine în ecuația (7) din motive care vor apare mai departe.

Problema se rezolvă mai ușor dacă introducem funcția

$$\bar{\theta} = \theta - \theta_i = \int_{T_i}^{T} \frac{\lambda}{\rho c} \, \mathrm{d}T, \tag{10}$$

care este tot o soluție a ecuației (7) cu condiția inițială

$$t = 0, \qquad \bar{\theta} = 0 \tag{11}$$

și condițiile la limită

$$r = 0,\ r\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\rho c}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z};\quad r = \infty,\ \overline{\theta} = 0. \tag{12}$$

Soluția problemei astfel formulate este bine cunoscută și are forma

$$\overline{\theta} = \theta - \theta_i = \frac{1}{4\pi\rho c}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z} Ei\left(-\frac{r^2}{4\varkappa^2 t}\right), \tag{13}$$

Ei fiind funcție exponențială integrală.

Din (10) rezultă

$$\int_{T_i}^{T}\frac{\lambda}{\rho c}\,\mathrm{d}T = \frac{1}{4\pi\rho c}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z} Ei\left(-\frac{r^2}{4\varkappa^2 t}\right), \tag{14}$$

produsul ρc fiind păstrat în membrul stîng sub semnul integral pentru a se mări precizia rezultatului găsit. Același produs se găsește și la numitor în membrul drept, provenind din prima condiție la limită în care a fost considerat constant.

3. RĂCIREA GĂURII DE SONDĂ PRIN CIRCULAȚIE DE LICHID. PRIMA VARIANTĂ

Ca și în lucrarea citată mai înainte [1], vom considera mai întîi cazul în care lichidul, presupus incompresibil, este introdus prin tubing (țevile interioare) și este apoi evacuat prin spațiul inelar dintre acesta și burlane. De asemenea, vom utiliza același procedeu, care constituie o adaptare a celui descris în [3], bazat pe scrierea unor relații simple de bilanț energetic.

Notînd astfel cu Q debitul de lichid, cu T_1 temeratura medie a lichidului într-o secțiune transversală a tubingului și cu T_2 temperatura medie într-o secțiune transversală a spațiului inelar, considerate ambele la aceeași adîncime z, obținem

$$Qc_l\mathrm{d}T_1 = 2\pi r_1 k_1(T_2 - T_1)\,\mathrm{d}z, \tag{15}$$

bineînțeles în ipoteza că schimbul de căldură se efectuează numai în direcția radială.

În relația precedentă, c_l reprezintă căldura specifică a lichidului, r_1 raza interioară a tubingului și k_1 coeficientul total de transmisie a căldurii de la lichidul din spațiul inelar la cel din tubing. Remarcăm faptul că temperatura T_2 este mai mare decît T_1 deoarece lichidul se încălzește în timpul circulației ($\mathrm{d}T_1 > 0$). Coordonata z are origina la suprafață și sensul precizat mai înainte.

În coeficientul k_1 se include transmisia căldurii prin convecție de la lichidul din spațiul inelar la peretele tubingului, prin conducție în metalul din care sînt construite țevile și prin convecție de la peretele interior al tu-

bingului la lichidul din interiorul acestuia. Formula pentru calcul poate fi găsită în literatura de specialitate şi a fost de altfel prezentată în lucrarea citată mai înainte [1].

O relaţie asemănătoare cu (15), referitoare la variaţia temperaturii T_2 a lichidului din spaţiul inelar, poate fi stabilită dacă observăm că aceasta este influenţată pe de o parte de schimbul de căldură cu lichidul din tubing iar pe de alta, de schimbul de căldură cu roca.

Notînd cu T_2' temperatura suprafeţei exterioare a burlanelor, găsim astfel

$$-Qc_i\,\mathrm{d}T_2 = 2\pi r_2 k_2(T_2' - T_2) - 2\pi r_1 k_1 (T_2 - T_1)\,\mathrm{d}z, \tag{16}$$

relaţie în care, pe lîngă mărimile definite anterior, mai apar raza interioară r_2 a burlanelor şi coeficientul total de transmisie a căldurii k_2 de la lichidul din spaţiul inelar la suprafaţa exterioară a burlanelor. Acest coeficient poate fi calculat cu ajutorul unei formule cunoscute, de asemenea prezentată în [1].

Temperatura T_2' este determinată de schimbul de căldură cu roca; relaţia dintre această temperatură şi aceea a rocii, notată mai înainte cu T_i, rezultă din (14) şi este

$$\int_{T_i}^{T_2'} \frac{\lambda}{\rho c}\,\mathrm{d}T = \frac{1}{4\pi\rho c}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\,Ei\left(-\frac{r_2'^2}{4\varkappa^2 t}\right), \tag{17}$$

r_2' fiind raza exterioară a burlanelor. Reamintim cu această ocazie faptul că formula (17) este aproximativă, condiţiile reale fiind complicate de faptul că atît temperatura cît şi fluxul de căldură sînt variabile. De asemenea, mai există şi posibilitatea semnalată şi utilizată în [3], de a se lua în consideraţie şi alte soluţii ale ecuaţiei transmisiei căldurii.

Din (17) obţinem

$$\mathrm{d}q = \frac{4\pi\rho c\int_{T_i}^{T_2'} \frac{\lambda}{\rho c}\,\mathrm{d}T}{Ei\left(-\frac{r_2'^2}{4\varkappa^2 t}\right)}\,\mathrm{d}z \tag{18}$$

şi aceeaşi cantitate de căldură mai are expresia

$$\mathrm{d}q = 2\pi r_2 k_2 (T_2' - T_2)\,\mathrm{d}z, \tag{19}$$

ceea ce ne dă

$$T_2' - T_2 = \frac{4\pi\rho c\int_{T_i}^{T_2'} \frac{\lambda}{\rho c}\,\mathrm{d}T}{2\pi r_2 k_2 f(\tau),}, \tag{20}$$

unde am pus

$$\tau = -\frac{r_2'^2}{4\varkappa^2 t}, \quad f(\tau) = Ei(-\tau). \tag{21}$$

Dacă ținem seama de (2), relația (20) se mai poate scrie

$$T_2' - T_2 = \frac{4\pi\rho c\,(\theta_2' - \theta_i)}{2\pi r_2 k_2 f(\tau)} \tag{22}$$

și pentru continuarea calculelor este necesar să procedăm ca în [2] și să introducem schimbarea de funcție inversă

$$T = \int_0^{\theta} \frac{\rho c}{\lambda}\,\mathrm{d}\theta + T_0, \tag{23}$$

care ne dă

$$T_2' - T_2 = \int_{\theta_2}^{\theta_2'} \frac{\rho c}{\lambda}\,\mathrm{d}\theta. \tag{24}$$

Deoarece $\frac{\rho c}{\lambda}$ este o funcție continuă de T și prin urmare de θ, cu ajutorul primei formule a mediei, obținem

$$T_2' - T_2 = \left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m (\theta_2' - \theta_2), \tag{25}$$

$\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m$ reprezentînd valoarea medie a raportului $\frac{\rho c}{\lambda}$ în intervalul $[\theta, \theta_2']$. Rezultă astfel, după înlocuirea în (22)

$$\theta_2' = \frac{\theta_i - \frac{r_2 k_2}{2\rho c}\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m f(\tau)\,\theta_2}{1 - \frac{r_2 k_2}{2\rho c}\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m f(\tau)}, \tag{26}$$

relație care ne permite să eliminăm pe θ_2'.

Revenind acum la relația (16), cu schimbarea de funcție (23) aceasta ia forma

$$-Qc_l \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}z} = 2\pi r_2 k_2 \int_{\theta_2}^{\theta_2'} \frac{\rho c}{\lambda}\,\mathrm{d}\theta - 2\pi r_1 k_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho c}{\lambda}\,\mathrm{d}\theta \tag{27}$$

și o nouă aplicare a primei formule a mediei ne dă

$$-Qc_l \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}z} = 2\pi r_2 k_2 \left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m (\theta_2' - \theta_2) - 2\pi r_1 k_1 \left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_M (\theta_2 - \theta_1), \tag{28}$$

$\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_M$ fiind valoarea medie a raportului $\frac{\rho c}{\lambda}$ în intervalul $[\theta_1, \theta_2]$.

După înlocuirea lui θ_2' cu expresia (26), găsim

$$-Qc_l \frac{\rho c}{\lambda} \frac{d\theta_2}{dz} = 4\pi \frac{\theta_i - \theta_2}{\frac{2}{r_2 k_2} - \frac{1}{\rho c}\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m f(\tau)} \left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m - 2\pi r_1 k_1 \left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_M (\theta_2 - \theta_1). \tag{29}$$

Tot astfel, relația (15) se scrie

$$Qc_l \frac{\rho c}{\lambda} \frac{d\theta_1}{dz} = 2\pi r_1 k_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho c}{\lambda} d\theta \tag{30}$$

și ia forma

$$Qc_l \frac{\rho c}{\lambda} \frac{d\theta_1}{dz} = 2\pi r_1 k_1 \left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_M (\theta_2 - \theta_1). \tag{31}$$

Dacă ne reamintim faptul că produsul ρc are valori care se depărtează destul de puțin de o constantă și că, la rîndul ei, conductivitatea termică λ variază lent cu temperatura, putem scrie

$$\frac{\rho c}{\lambda} \approx \left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m \approx \left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_M \tag{32}$$

și problema se reduce la rezolvarea sistemului de ecuații

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dz} &= \frac{2\pi r_1 k_1}{Qc_l} (\theta_2 - \theta_1), \\ \frac{d\theta_2}{dz} &= \frac{2\pi r_1 k_1}{Qc_l} (\theta_2 - \theta_1) - \frac{4\pi}{Qc_l\left[\frac{2}{r_2 k_2} - \frac{1}{\rho c}\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m f(\tau)\right]} (\theta_i - \theta_2). \end{aligned} \tag{33}$$

Observăm că aproximația (32) prin care am ajuns la acest sistem este de aceeași natură cu (5) prin care am liniarizat ecuația transmisiei căldurii. Cu toate acestea, sistemul rămîne neliniar din cauza prezenței factorului $\frac{1}{\rho c}$ în a doua ecuație, precum și datorită faptului că și căldura specifică c_l a lichidului depinde de temperatură. Pentru a evita integrarea numerică a sistemului (33), vom pune

$$\frac{1}{\rho c}\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m \approx \frac{1}{\lambda_m}, \tag{34}$$

astfel că acesta devine

$$\frac{d\theta_1}{dz} = \frac{2\pi r_1 k_1}{Qc_l}(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{d\theta_2}{dz} = \frac{2\pi r_1 k_1}{Qc_l}(\theta_2 - \theta_1) - \frac{4\pi\lambda_m}{Qc_l\left[\frac{2\lambda_m}{r_2 k_2} - f(\tau)\right]}(\theta_i - \theta_2). \tag{35}$$

În ceea ce privește căldura specifică a lichidului, variația acestuia cu temperatura este practic neglijabilă dacă ne găsim destul de departe de punctul critic.

Dacă introducem variabila adimensională

$$\zeta = \frac{z}{h}, \tag{36}$$

h fiind adîncimea sondei și utilizăm notațiile

$$A = \frac{2\pi r_1 k_1 h}{Qc_l}, \quad B(\tau) = \frac{4\pi\lambda_m h}{Qc_l\left[\frac{2\lambda_m}{r_2 k_2} - f(\tau)\right]}, \tag{37}$$

sistemul (35) devine

$$\frac{d\theta_1}{d\zeta} = A(\theta_2 - \theta_1), \tag{38}$$

$$\frac{d\theta_2}{d\zeta} = (A + B)\theta_2 - A\theta_1 - B\theta_i$$

și înainte de a trece la rezolvarea lui vom stabili expresia lui θ_i în funcție de ζ. În acest scop, observăm că relația dintre θ și T este neliniară și prin urmare, pentru a putea păstra în continuare posibilitatea integrării exacte a sistemului (38) trebuie să recurgem la o aproximație, de altfel de aceeași natură cu cele precedente.

Astfel, pentru funcția $T_i(z)$ considerăm expresia uzuală

$$T_i = \alpha z + \beta = \alpha h\zeta + \beta, \tag{39}$$

α și β fiind constante, iar θ_i are expresia

$$\theta_i = \int_{T_0}^{T_i} \frac{\lambda}{\rho c}\, dT \tag{40}$$

sau

$$\theta_i = \left(\frac{\lambda}{\rho c}\right)_0 (T_i - T_0), \tag{41}$$

$\left(\frac{\lambda}{\rho c}\right)_0$ fiind valoarea medie a raportului $\frac{\lambda}{\rho c}$ în intervalul $[T_0, T_i]$.

Cu notațiile

$$a = \left(\frac{\lambda}{\rho c}\right)_0 \alpha, \quad b = \left(\frac{\lambda}{\rho c}\right)_0 (b - T_0), \tag{42}$$

putem scrie

$$\theta_i = ah\zeta + b \tag{43}$$

și sistemul (38) capătă astfel forma definitivă care este

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{d\zeta} &= A(\theta_2 - \theta_1), \\ \frac{d\theta_2}{d\zeta} &= (A + B)\theta_2 - A\theta_1 - B(ah\zeta + b). \end{aligned} \tag{44}$$

Pentru găsirea soluțiilor vom utiliza transformata lui Laplace, admițînd că domeniul de variație a lui ζ este $[0, \to)$; în felul acesta omitem pentru moment, condiția pe care trebuie să o îndeplinească temperaturile T_1 și T_2, respectiv funcțiile θ_1 și θ_2, la $\zeta = 1$. Rezultă

$$\int_0^\infty \frac{d\theta_1}{d\zeta} e^{-p\zeta} d\zeta = p\bar{\theta}_1 - \theta_{10} \tag{45}$$

și

$$\int_0^\infty \frac{d\theta_2}{d\zeta} e^{-p\zeta} d\zeta = p\bar{\theta}_2 - \theta_{20}, \tag{46}$$

unde

$$\bar{\theta}_1 = \int_0^\infty \theta_1 e^{-p\zeta} d\zeta, \qquad \bar{\theta}_2 = \int_0^\infty \theta_2 e^{-p\zeta} d\zeta, \tag{47}$$

θ_{10} și θ_{20} fiind valorile funcțiilor θ_1, respectiv θ_2 la $\zeta = 0$. Aceste valori reprezintă de altfel condițiile cu care trebuie rezolvat sistemul (44). Mai precizăm că în (45) și (46) s-a presupus că la $\zeta = \infty$ atît θ_1 cît și θ_2 au valori finite, ceea ce este evident din punct de vedere fizic, deoarece temperaturile nu pot să crească peste orice limită.

Sistemul (44) devine deci

$$\begin{aligned} (p + A)\bar{\theta}_1 - A\bar{\theta}_2 &= \theta_{10}, \\ A\bar{\theta}_1 + (p - A - B)\bar{\theta}_2 &= \theta_{20} - \frac{B}{p}\left(\frac{ah}{p} + b\right) \end{aligned} \tag{48}$$

și are soluțiile

$$\bar{\theta}_1 = \frac{A\theta_{20}p^2 - AB(ah + bp) + \theta_{10}p^2(p - A - B)}{p^2(p - A - B)}, \tag{49}$$

respectiv

$$\bar{\theta}_2 = \frac{\theta_{20}p^2(p + A) - B(ah + bp)(p + A) - A\theta_{10}p^2}{p^2(p - A - B)}. \tag{50}$$

Observăm că atît sistemul (48) cît și soluțiile lui au aceeași firmă ca și sistemul găsit în lucrarea citată [1] pentru temperaturile T_1, și T_2, respectiv soluțiile lui. Bineînțeles, coeficienții a și b au alte expresii iar în $B(\sigma)$ intervine valoarea medie λ_m, dar observația făcută ne permite să renunțăm la calculele necesare pentru revenirea la originale.

Avem așa dar

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\theta_{10} + \frac{ah}{A} - b\right)\left[e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} + e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\left[\theta_{20}\frac{A}{B} - \frac{1}{2}\left(1+2\frac{A}{B}\right)\left(\theta_{10} - \frac{ah}{A}\right) + \right. \tag{51}$$

$$\left. + \frac{b}{2}\right]\left[e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} - e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] + ah\zeta + b - \frac{ah}{A}$$

sau

$$\theta_1 = \left(\theta_{10} + \frac{ah}{A} - b\right)e^{\frac{B}{2}\zeta}\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\zeta\right) + \left[2\theta_{20}\frac{A}{B} - \right.$$

$$\left. - \left(\theta_{10} - \frac{ah}{A}\right)\left(1+2\frac{A}{B}\right) + b\right]e^{\frac{B}{2}\zeta}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\zeta\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} + ah\zeta + b - \frac{ah}{A}, \tag{52}$$

soluție care satisface condiția

$$\zeta = 0, \qquad \theta_1 = \theta_{10}, \tag{53}$$

așa cum se constată imediat.

Găsim de asemenea

$$\theta_2 = \frac{1}{2}(\theta_{20} - b)\left[e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} + e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\left[\theta_{10}\frac{A}{B} - \frac{1}{2}\left(\theta_{20} - \frac{ah}{A}\right)\left(1+2\frac{A}{B}\right) - \frac{ah}{2A} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{2}\right]\left[e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} - e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] + ah\zeta + b \tag{54}$$

sau, la fel ca și mai sus,

$$\theta_2 = (\theta_{20} - b)\, e^{\frac{B}{2}\zeta} \operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right) - \left[2\theta_{10}\frac{A}{B} - \right.$$

$$\left. - \left(\theta_{20} - \frac{ah}{A}\right)\left(1+2\frac{A}{B}\right) - \frac{ah}{A} + b\right] e^{\frac{B}{2}\zeta} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} + ah\zeta + b \qquad (55)$$

și se poate verifica ușor că θ_2 satisface condiția

$$\zeta = 0, \qquad \theta_2 = \theta_{20}. \qquad (56)$$

Observăm că temperatura T_{10} cu care este introdus lichidul în tubing are o valoare constantă cunoscută; putem deci alege temperatura constantă arbitrară din (2) egală cu T_{10}, ceea ce ne dă imediat $\theta_{10} = 0$ și

$$\theta_1 = \left(\frac{ah}{A} - b\right) e^{\frac{B}{2}\zeta} \operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right) + \left[2\theta_{20}\frac{A}{B} + \right.$$

$$\left. + \frac{ah}{A}\left(1+2\frac{A}{B}\right) + b\right] e^{\frac{B}{2}\zeta} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} + ah\zeta + b - \frac{ah}{A}, \qquad (57)$$

respectiv

$$\theta_2 = (\theta_{20} - b)\, e^{\frac{B}{2}\zeta} \operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right) + \left[\left(\theta_{20} - \frac{ah}{A}\right)\left(1+2\frac{A}{B}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{ah}{A} + b\right] e^{\frac{B}{2}\zeta} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} + ah\zeta + b. \qquad (58)$$

Temperatura T_{20}, cu care lichidul iese la suprafață prin spațiul inelar nu este însă constantă ci o funcție de timp și prin urmare același lucru se poate spune și despre θ_{20}. Putem găsi această funcție dacă impunem soluțiilor găsite să realizeze și condiția

$$\zeta = 1, \qquad \theta_1 = \theta_2, \qquad (59)$$

ceea ce înseamnă că la trecerea din tubing în spațiul inelar temperatura lichidului are aceeași valoare, fapt evident din punct de vedere fizic.

Așadar, dacă punem $\zeta = 1$ atît în (57) cît și în (58) și egalăm expresiile găsite, rezultatul reprezintă o ecuație de gradul întîi cu necunoscuta θ_{20} și anume

$$\left[\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right]\theta_{20} = 2b\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)-$$

$$-\left[\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right]\frac{ah}{A}-\frac{\frac{ah}{A}\,e^{-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}}{\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)} \qquad (60)$$

a cărei soluție este

$$\theta_{20}=\frac{\left(2b-\frac{ah}{A}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)+\frac{ah}{A}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}-$$

$$-\frac{\frac{ah}{A}\,e^{-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}}{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}. \qquad (61)$$

Expresia găsită pentru θ_{20} poate fi înlocuită în (57) sau în (58) pentru a se putea calcula variația în timp a temperaturii la $\zeta = 1$ ($z = h$). În acest fel, obținem din (57)

$$\theta_{1h}=\left(\frac{ah}{A}-b\right)e^{\frac{B}{2}}\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)+$$

$$+\left[\frac{4\left(b-\frac{ah}{A}\right)\frac{A}{B}\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)-2\frac{ah}{B}\,e^{-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}}{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{ah}{A}+b\right]\frac{e^{\frac{B}{2}}\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}+ah\frac{A-1}{A}+b, \qquad (62)$$

expresie în care apar numai mărimi cunoscute; determinarea efectivă a temperaturii T_{1h} se face cu ajutorul relației

$$T_{1h} = \int_0^{\theta_{1h}} \frac{\rho c}{\lambda} \, d\theta + T_{10}, \tag{63}$$

dedusă din (23) în care punem $T_0 = T_{10}$.

Utilizarea acestor rezultate prezintă unele dificultăți care se referă la calculul constantei $\varkappa^2$, definită prin (5), la valoarea medie λ_m ce trebuie introdusă în expresia coeficientului $B(\tau)$ și în cele din urmă la determinarea valorilor constante $\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m$, $\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_M$ și $\left(\frac{\lambda}{\rho c}\right)_0$. Într-adevăr, intervalele de valori ale lui θ sau T în care sînt definite valorile medii λ_m, $\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_m$ și $\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right)_M$ sînt funcții de timp, intervalul $[T_{10}, T_i]$ pentru care se definește valoarea medie $\left(\frac{\lambda}{\rho c}\right)_0$ depinde de z, iar pentru $\varkappa^2$ acest interval nici nu este precizat. Într-o primă aproximație, putem proceda în modul indicat în [2] și anume înlocuind intervalele care depind de timp cu acela maxim posibil, respectiv $[T_{10}, T_i]$ în care T_i are valoarea corespunzătoare adîncimii maxime $z = h$. Date fiind ipotezele asupra variației mărimilor ρ, c și λ, eroarea nu este mare și se poate efectua o corecție care conduce la a doua aproximație.

4. RĂCIREA GĂURII DE SONDĂ PRIN CIRCULAȚIE DE LICHID. A DOUA VARIANTĂ

Vom considera acum cea de a doua variantă posibilă care constă în introducerea lichidului de răcire prin spațiul inelar și evacuarea lui prin tubing. Ca și în [1] se poate arăta că relația (16) trebuie înlocuită prin

$$Qc_i \, dT_2 = 2\pi r_2 k_2 (T_2' - T_2) + 2\pi r_1 k_1 (T_1 - T_2) \, dz, \tag{64}$$

deoarece temperatura T_2 a lichidului din spațiul inelar crește o dată cu z iar temperatura T_1 a lichidului din tubing este mai mare decît T_2.

De asemenea, în loc de (15) obținem

$$Qc_i \, dT_1 = 2\pi r_1 k_1 (T_1 - T_2) \, dz, \tag{65}$$

deoarece T_1 scade pe măsură ce ne apropiem de suprafață.

Prin calcule cu totul asemănătoare cu cele precedente, ajungem la sistemul

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dz} &= \frac{2\pi r_1 k_1}{Qc_i} (\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{d\theta_2}{dz} &= \frac{2\pi r_1 k_1}{Qc_i} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{4\pi \lambda_m}{Qc_i \left[\frac{2\lambda_m}{r_2 k_2} + f(\tau)\right]} (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \tag{66}$$

sau, dacă utilizăm variabila adimensională (36) și notațiile (37),

$$\frac{d\theta_1}{d\zeta} = A(\theta_1 - \theta_2),$$
$$\frac{d\theta_2}{d\zeta} = A\theta_1 - (A + B)\theta_2 + B\theta_i. \tag{67}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem, introducem din nou transformatele lui Laplace ale funcțiilor θ_1, θ_2 și θ_i; rezultă sistemul de ecuații algebrice

$$(p - A)\bar{\theta}_1 + A\bar{\theta}_2 = \theta_{10},$$
$$A\bar{\theta}_1 - (p + A + B)\bar{\theta}_2 = -\theta_{20} - \frac{B}{p}\left(\frac{ah}{p} + b\right), \tag{68}$$

θ_{10} și θ_{20} având aceleași semnificații ca și mai înainte.

Acest sistem este din nou identic, din punct de vedere formal, cu cel găsit în [1] și prin urmare vom trece și acum peste unele calcule intermediare.

Observînd că de data aceasta temperatura T_{20} cu care lichidul pătrunde în spațiul inelar este constantă, putem pune în (2) $T_0 = T_{20}$ de unde rezultă $\theta_{20} = 0$. Sistemul (68) are deci soluțiile

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\theta_{10}p^2(p + A + B) - AB(ah + bp)}{p^2(p^2 + Bp - AB)}, \tag{69}$$

respectiv

$$\bar{\theta}_2 = \frac{B(ah + bp)(p - A) + A\theta_{10}p^2}{p^2(p^2 + Bp - AB)}. \tag{70}$$

Revenirea la original ne dă

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\theta_{10} - \frac{ah}{A} - b\right)\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1 - \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} + e^{-\frac{B}{2}\left(1 + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + 4\frac{A}{B}}}\left[\frac{1}{2}\left(1 + 2\frac{A}{B}\right)\left(\theta_{10} - \frac{ah}{A}\right) - \frac{b}{2}\right]\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1 - \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} -\right.$$
$$\left. - e^{-\frac{B}{2}\left(1 + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] + ah\zeta + b + \frac{ah}{A} \tag{71}$$

sau

$$\theta_1 = \left(\theta_{10} - \frac{ah}{A} - b\right) e^{-\frac{B}{2}\zeta} \operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right) +$$

$$+ \left[\left(1+2\frac{A}{B}\right)\left(\theta_{10} - \frac{ah}{A}\right) - b\right] e^{-\frac{B}{2}\zeta} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} +$$

$$+ ah\zeta + b + \frac{ah}{A}. \tag{72}$$

Găsim de asemenea

$$\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\left(\theta_{10}\frac{A}{B} - \frac{ah}{A} + \frac{b}{2}\right)\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} -\right.$$

$$\left. - e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] - \frac{b}{2}\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} + e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] + ah\zeta + b \tag{73}$$

sau

$$\theta_2 = \left(2\,\theta_{10}\frac{A}{B} - 2\frac{ah}{B} + b\right) e^{-\frac{B}{2}\zeta} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} -$$

$$- be^{-\frac{B}{2}\zeta} \operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right) + ah\zeta + b. \tag{74}$$

Pentru găsirea funcției de timp necunoscute θ_{10}, legată de temperatura de ieșire din tubing a lichidului T_{10}, procedăm la fel ca mai înainte punînd $\zeta = 1$ în (72) și în (74) și egalînd expresiile rezultate. Găsim astfel ecuația

$$\left[\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right]\left(\theta_{10} - \frac{ah}{A}\right) = 2b\,\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) -$$

$$- \frac{\frac{ah}{A}\,e^{\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}}{\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}, \tag{75}$$

care ne dă

$$\theta_{10} = \frac{2b\,\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) - \frac{ah}{A}\,e^{\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}}{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)} + \frac{ah}{A}. \tag{76}$$

Pentru a calcula deci variația temperaturii în timp la $\zeta = 1$ ($z = h$), înlocuim acest rezultat în (74), obținînd

$$\theta_{2h} = \left[2 \frac{2\frac{A}{B} b \operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) - \frac{ah}{B} e^{\frac{B}{2}} \sqrt{1+4\frac{A}{B}}}{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}} \operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)} - \right.$$

$$\left. - b \right] \frac{e^{-\frac{B}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} - b\, e^{-\frac{B}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + ah + b, \quad (77)$$

formulă care, împreună cu

$$T_{2h} = \int_0^{\theta_{2h}} \frac{\rho c}{\lambda} \, d\theta + T_{20}, \quad (78)$$

rezolvă probleme în această variantă. Pentru calcul, rămîn valabile observațiile anterioare.

Primită la redacție la 3 iulie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. T. Oroveanu, *Răcirea găurii de sondă prin circulație de lichid.* St. cerc. mec. apl., **28**, *6* (1969).
2. T. Oroveanu, I. Spulber, *Unele probleme privitoare la injecția lichidelor calde în zăcăminte de petrol,* St. cerc. mec. apl. **29**, *2* (1970).
3. H.J Ramey Jr., *Wellbore Heat Transmission.* Transactions AIME, *225* (1962).
4. W.H. Somerton *Some Thermal Characteristics of Porous Rocks.* Transactions AIME, **213** (1958).
5 W H Somerton, M.A. Selim, *Additional Thermal Data for Porous Roks — Thermal Expansion and Heat of Reaction,* SPE Journal **1**, *4* (1961)

MODEL MATEMATIC PENTRU STUDIUL MODIFICĂRII PRESIUNII RADIALE A SEGMENTULUI PRIN UZURĂ DE CONTACT

de RODICA DELCESCU

Se prezintă un model matematic ce permite evaluarea cantitativă a uzurii radiale a segmentului de piston şi a redistribuirii legii de repartiţie a presiunii pe circumferinţa segmentului, ca urmare a acestei uzuri.

1. INTRODUCERE

Presiunea elastică pe care segmentul de piston montat o exercită asupra cilindrului pe întreaga circumferinţă asigură contactul celor două suprafeţe şi prin aceasta, funcţiunea de etanşare a spaţiului de lucru al cilindrului.

În timpul funcţionării însă, datorită deplasării segmentului în lungul generatoarei cilindrului, se produce o uzură de contact ceea ce conduce la micşorarea grosimii radiale a segmentului şi, în consecinţă, la modificarea presiunii cu care acesta acţionează asupra cilindrului.

Lucrarea de faţă îşi propune să evalueze prin calcul uzura radială a segmentului în funcţionare şi influenţa pe care o are micşorarea prin uzură a grosimii radiale asupra modificării presiunii dintre segment şi cilindru.

2. STABILIREA ECUAŢIILOR MODELULUI MATEMATIC CE DESCRIE MODIFICAREA PRESIUNII ELASTICE PRIN UZURA DE CONTACT

2.1. ECUAŢIA CE INTERPRETEAZĂ LEGĂTURA ÎNTRE PRESIUNEA ELASTICĂ A SEGMENTULUI ŞI UZURA RADIALĂ

Pentru un moment oarecare din cursul funcţionării, între dimensiunile segmentului, forma sa în stare liberă şi presiunea radială pe care segmentul o exercită asupra cilindrului există o corespondenţă univocă exprimată prin ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate [2]. Această corespondenţă permite să se enunţe următoarea

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970, P. 1435–1447.

Teoremă

Dacă se cunoaşte grosimea radială a segmentului şi forma sa liberă, se poate stabili legea de repartiţie a presiunii segmentului în cilindru, presupunînd că segmentul se află în contact cu cilindrul în toate punctele sale, şi

Reciproca

Dacă se cunoaşte grosimea radială şi expresia presiunii elastice pe care segmentul montat în cilindru o exercită asupra acestuia, se poate determina forma liberă a segmentului.

Pe baza reciprocei teoremei de mai sus, expresia formei libere a segmentului nou este precizată de ecuaţia

$$u(\psi, 0) + \frac{\mathrm{d}^2 [R + u(\psi, 0)]}{\mathrm{d}\psi^2} = \frac{M(\psi, 0)}{EI} R^2, \tag{1}$$

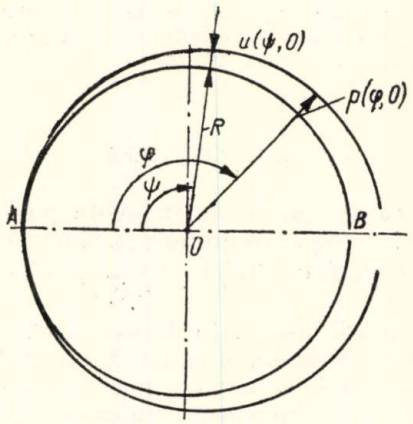


Fig. 1.

unde $u(\psi, 0)$ este deplasarea fibrei medii pe direcţia razei într-o secţiune oarecare ψ şi în momentul iniţial de funcţionare $t = 0$, iar $M(\psi, 0)$ este momentul încovoetor care produce deformaţia în secţiune considerată (fig. 1); acest moment este considerat pozitiv cînd produce creşterea razei de curbură iar deplasarea radială $u(\psi, 0)$ este pozitivă cînd raza fibrei medii a segmentului se măreşte. În formula (1), fibra medie a segmentului montat în cilindru este presupusă circulară de rază R.

Expresia momentului încovoetor $M(\psi, 0)$ care aduce fibra medie a segmentului de la starea circulară la starea liberă [3] este

$$M(\psi, 0) = R^2 h \int_{\psi}^{\pi} p(\varphi, 0) \sin(\varphi - \psi)\, \mathrm{d}\varphi, \tag{2}$$

unde $p(\varphi, 0)$ este presiunea elastică pe care segmentul o exercită asupra cilindrului într-o secţiune φ şi în momentul $t = 0$.

Folosind expresia (2) în ecuația (1) se obține, pentru forma liberă a segmentului nou, expresia

$$u(\psi, 0) + \frac{\mathrm{d}^2 u(\psi, 0)}{\mathrm{d}\psi^2} = \frac{R^4 h}{EI} \int_{\psi}^{\pi} p(\varphi, 0) \sin(\varphi - \psi)\, \mathrm{d}\varphi. \tag{3}$$

Fie $\tau(\psi, t)$ uzura radială a segmentului în secțiunea ψ și în momentul t. Comparînd forma liberă a segmentului uzat cu forma liberă a segmentului nou (fig. 2), se constată următoarele:

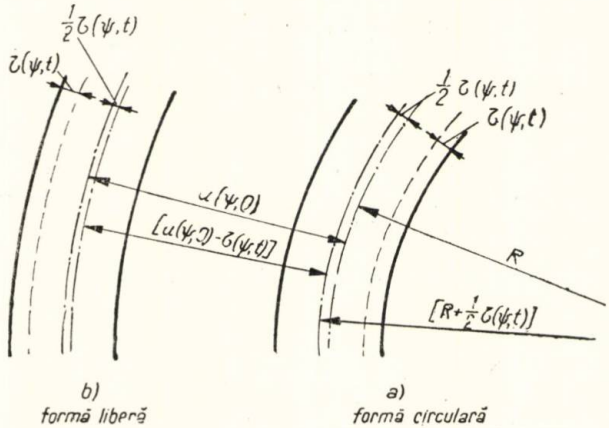


Fig. 2.

— pentru o secțiune oarecare, razele fibrelor interioare ale celor doi segmenți sînt aceleași;

— raza fibrei în secțiunea ψ este pentru segmentul nou $[R + u(\psi, 0)]$, iar pentru segmentul uzat, $\left[R + u(\psi, 0) - \frac{1}{2}\tau(\psi, t)\right]$.

Creșterea razei fibrei medii a segmentului uzat, cînd segmentul trece de la forma pe care o are în cilindru la forma liberă, este deci

$$\left[R + u(\psi, 0) - \frac{1}{2}\tau(\psi, t)\right] - \left[R + \frac{1}{2}\tau(\psi, t)\right] = u(\psi, 0) - \tau(\psi, t).$$

Pentru segmentul uzat ecuația (1) devine

$$u(\psi, 0) - \tau(\psi, t) + \frac{\mathrm{d}^2 [R(\psi, t) + u(\psi, 0) - \tau(\psi, t)]}{\mathrm{d}\psi^2} =$$

$$= \frac{M(\psi, t)}{EI(\psi, t)} R^2(\psi, t), \tag{4}$$

unde

$$R(\psi, t) = \frac{1}{2}[D - a + \tau(\psi, t)],$$

$$M(\psi, t) = \frac{1}{4}[D - a + \tau(\psi, t)]^2 h \int_{\psi}^{\pi} p(\varphi, t) \sin(\varphi - \psi)\, d\varphi, \qquad (5)$$

$$I(\psi, t) = \frac{1}{12} h [a - \tau(\psi, t)]^3,$$

D fiind diametrul nominal al cilindrului.

Se elimină $u(\psi, 0) + \frac{d^2 u(\psi, 0)}{d\psi^2}$ între ecuaţiile (1) şi (4); rezultă

$$M(\psi, 0) - M(\psi, t)\frac{R^2(\psi, t)}{R^2}\frac{I}{I(\psi, t)} = \frac{EI}{R^2}\left[\tau(\psi, t) + \frac{1}{2}\frac{d^2\tau(\psi, t)}{d\psi^2}\right]. \qquad (6)$$

Avînd în vedere expresiile (2) şi (5) şi ţinînd seama că $R = \frac{1}{2}(D - a)$, se obţine mai departe

$$\int_{\psi}^{\pi} p(\varphi, 0) \sin(\varphi - \psi)\, d\varphi - \frac{\left[1 + \frac{\tau(\psi, t)}{D - a}\right]^4}{\left[1 - \frac{\tau(\psi, t)}{a}\right]^3} \int_{\psi}^{\pi} p(\varphi, t) \sin(\varphi - \psi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{4E}{3}\frac{a^3}{(D-a)^4}\left[\tau(\psi, t) + \frac{1}{2}\frac{d^2\tau(\psi, t)}{d\psi^2}\right].$$

Luînd în considerare că $\tau(\psi, t)$ are valori mici în comparaţie cu a şi $(D-a)$, numărătorul şi numitorul expresiei fracţionare din membrul întîi al ecuaţiei precedente se pot dezvolta în serie de puteri, reţinîndu-se numai cîte doi termeni; dacă se foloseşte notaţia

$$K = \frac{1}{a}\,\frac{3\frac{D}{a} - 1}{\frac{D}{a} - 1},$$

ecuaţia devine

$$[1 - K\tau(\psi, t)]\int_{\psi}^{\pi} p(\varphi, 0) \sin(\varphi - \psi)\, d\varphi - \int_{\psi}^{\pi} p(\varphi, t) \sin(\varphi - \psi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{4E}{3}\frac{a^3}{(D-a)^4}\left[\tau(\psi, t) + \frac{1}{2}\frac{d^2\tau(\psi, t)}{d\psi^2}\right]. \qquad (7)$$

Expresia (7) reprezintă, sub formă integrodiferențială, corespondența între mărimea uzurii la un moment dat și legea repartiției presiunii pe segmentul uzat, în funcție de dimensiunea inițială a segmentului și de legea inițială de repartiție a presiunii.

Prin dublă derivare a ecuației (7) în raport cu variabila ψ și grupînd termenii după derivatele parțiale ale funcției $\tau(\psi, t)$, se obține

$$p(\psi, t) = p(\psi, 0) - \left[K \cdot p(\psi, 0) + \frac{4E}{3} \frac{a^3}{(D-a)^4}\right] \tau(\psi, t) +$$

$$+ \left[2K \int_{\psi}^{\pi} p(\varphi, 0) \cos(\varphi - \psi)\, d\varphi\right] \frac{\partial \tau(\psi, t)}{\partial \psi} -$$

$$- \left[K \int_{\psi}^{\pi} p(\varphi, 0) \cos(\varphi - \psi)\, d\varphi + 2E \frac{a^3}{(D-a)^4}\right] \frac{\partial^2 \tau(\psi, t)}{d\psi^2} -$$

$$- \frac{2E}{3} \frac{a^3}{(D-a)^4} \frac{\partial^4 \tau(\psi, t)}{\partial \psi^4}. \tag{8}$$

2.2. ECUAȚIA CE DESCRIE MODIFICAREA ÎN TIMP A GROSIMII RADIALE

Variația în timp a grosimii radiale poate fi cunoscută din legea de uzură. Conform acestei legi [5], viteza de uzură este proporțională cu presiunea dintre suprafețele în contact, adică

$$\frac{d\tau}{dt} = cp,$$

unde c este un coeficient de proporționalitate; el depinde de elementele ce caracterizează procesul de uzură (natura chimică și gradul de prelucrare a suprafețelor în contact, regimul termic, viteza de deplasare etc.).

În cazul segmentului de piston, presiunea pe suprafețele în contact este suma dintre presiunea $p(\psi, t)$ corespunzătoare stării montate în cilindru și presiunea $p^*(t)$ a gazelor din spatele segmentului; acesta din urmă nu variază cu secțiunea ψ (dacă se neglijează efectul eventualei circulații a gazelor în jurul canalului din piston), dar se modifică în timp datorită procesului continuu de curgere a gazelor prin treptele de segmenți. În ceea ce privește coeficientul de proporționalitate, literatura de specialitate recomandă valori în funcție de materialul cuplului de frecare, de gradul de prelucrare al suprafețelor în contact, al regimului termic etc... Presupunînd că în raport cu acești factori a fost aleasă o valoare, rămîne numai dependența coeficientului de viteza relativă de alunecare — organic variabilă — deci de timp.

Cu aceste observații și ținînd seama că uzura radială a segmentului este funcție de două variabile și deci derivata în raport cu timpul este de fapt derivata parțială a funcției $\tau(\psi, t)$ în raport cu această variabilă, legea

de uzură scrisă pentru segmentul de piston într-un moment oarecare t al duratei de funcționare este

$$\frac{\partial \tau(\psi, t)}{\partial t} = c(t)\,[p(\psi, t) + p^*(t)]. \tag{9}$$

Uzura radială totală ce apare într-o secțiune ψ în decursul unui ciclu motor se obține prin integrarea legii de uzură pe durata T corespunzătoare contactului direct între segment și cilindru. Deoarece, între două poziții extreme succesive ale pistonului, condițiile cinematice și de lubrificație determină întreruperea temporară a contactului direct între segment și cilindru prin apariția unui film continuu de lubrifiant, durata T este o parte din durata unui ciclu motor; rezultă totodată că această durată este suma unor intervale de timp separate prin intervale pe care nu există contact direct între segment și cilindru.

Dacă se integrează legea de uzură (9) între momentul inițial și un moment de timp t, pentru o secțiune oarecare ψ_i, se obține expresia uzurii radiale realizată în secțiunea considerată pînă în momentul t, sub forma

$$\tau(\psi_i, t) = \int_0^t c(t)[p(\psi, t) + p^*(t)]\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

3. REZOLVAREA ECUAȚIILOR MODELULUI MATEMATIC

Evaluarea uzurii radiale a segmentului, precum și analiza modificării presiunii sale elastice trebuie făcută pentru un ciclu motor, deoarece acesta reprezintă unitatea funcțională pe care evoluează o parte din mărimile ce condiționează uzura și presiunea radială. Într-adevăr, din legea de uzură, precum și din calculul funcțional al segmentului [4], se constată că atît viteza de uzură cît și durata contactului direct dintre segment și cilindru depinde de presiunea gazelor în treptele de segmenți, iar aceasta variază periodic.

Se consideră drept date ale problemei presiunea radială și dimensiunile principale ale segmentului la începutul primului ciclu motor, care sînt de fapt presiunea radială și, respectiv, dimensiunile principale ale segmentului nou; se urmărește stabilirea uzurii segmentului pe durata ciclului și a legii de repartiție a presiunii elastice la sfîrșitul ciclului.

Pentru soluționarea problemei trebuie stabilită în prealabil durata pe ciclu a contactului direct între segment și cilindru. În acest scop se efectuează calculul funcțional al setului de segmenți, determinîndu-se distribuția de presiuni în trepte și regimul de ungere în fiecare moment al ciclului. Pentru calcul se poate considera că legea inițială de distribuție pentru presiunea elastică a segmentului nu se modifică pe durata unui ciclu motor; această ipoteză nu influențează sensibil rezultatele, deoarece presiunea elastică variază extrem de puțin pe durata unui ciclu. La sfîrșitul acestui calcul este cunoscută, pentru fiecare segment, durata pe care se realizează contactul direct cu cilindrul, repartiția pe ciclu a duratelor de contact, precum și legea de variație a presiunii gazelor din treptele de segmenți

pe aceste durate. Rezultatele calculelor pun în evidenţă comportarea diferită a segmenţilor motorului. Într-adevăr, presiunea gazelor diferă de la o treaptă la alta, condiţiile de echilibru hidrodinamic, de asemenea; în consecinţă, durata contactului direct diferă de la un segment la altul şi mai mult decît atît, pe durata acestui contact, vitezele de uzură sînt diferite deorece ele depind şi de presiunea gazelor din treapta respectivă.

Pe durata T a contactului direct, procesul de modificare în timp a presiunii elastice a segmentului ca urmare a micşorării prin uzură a grosimii radiale este descris de sistemul de ecuaţii cu derivatele parţiale (8) —(10).

Dată fiind complexitatea ecuaţiilor, sistemul se rezolvă mai comod prin metode numerice; ecuaţiile diferenţiale se transformă în ecuaţii cu diferenţe finite, în modul următor:

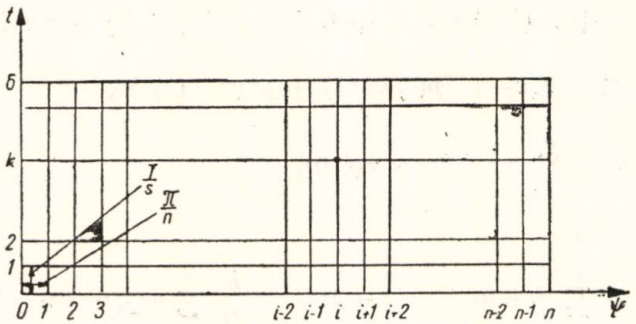


Fig. 3.

— se împarte domeniul ψ de definiţie al funcţiunilor p şi τ în n părţi (fig. 3), fiecăreia corespunzîndu-i un interval de $H = \frac{\pi}{n}$ radiani; ordonatele ce delimitează aceste părţi se notează cu indicele 0,1, . . ., i, . . . , n

— se împarte domeniul t de definiţie al funcţiunilor în s părţi egale, fiecăreia corespunzîndu-i un intevral $\Delta t = \frac{T}{s}$; abscisele ce delimitează aceste părţi se notează cu indicele 0,1, . . ., k, . . . , s.

S-a format în acest mod o reţea în ale cărei puncte vor fi derterminate, din ecuaţiile sistemului, valorile funcţiilor p şi τ; într-un punct i,k al reţelei, expresiile derivatelor parţiale sînt

$$\frac{\partial \tau(i, k)}{\partial t} = \frac{\Delta \tau(i, k)}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial \tau(i, k,)}{\partial \psi} = \frac{1}{2H} [\tau(i + 1, k) - \tau(i - 1, k)],$$

$$\frac{\partial^2 \tau(i, k)}{\partial \psi^2} = \frac{1}{H^2} [\tau(i + 1, k) - 2\tau(i, k) + \tau(i - 1, k)],$$

$$\frac{\partial^3 \tau(i,k)}{\partial \psi^3} = \frac{1}{2H^3}[\tau(i+2,k) - 2\tau(i+1,k) + 2\tau(i-1,k) - \tau(i-2,k)],$$

$$\frac{\partial^4 \tau(i,k)}{\partial \psi^4} = \frac{1}{H^4}[\tau(i+2,k) - 4\tau(i+1,k) + 6\tau(i,k) - 4\tau(i-1,k) + \tau(i-2,k)].$$

Înlocuind expresiile de mai sus în sistem, transformînd integralele ecuației (8) în sume finite și grupînd avantajos termenii, ecuațiile (8) ... (10) devin

$$p(i,k) = p(i,0) - F\tau(i-2,k) + A(i,0)\,\tau(i-1,k) + B(i,0)\,\tau(i,k) + C(i,0)\,\tau(i+1,k) - F\tau(i+2,k), \tag{11}$$

$$\Delta\tau(i,k) = c(k-1)[p(i,k-1) + p^*(k-1)]\,\Delta t, \tag{12}$$

$$\tau(i,k+1) = \sum_{l=1}^{k} \Delta\tau(i,l) + \tau(i,0), \tag{13}$$

unde

$$A(i,0) = -K\sum_{j=i}^{n} p(j,0)\cos(j-i)H - \frac{K}{H}\sum_{j=i}^{n} p(j,0)\sin(j-i)H - \frac{2E}{H^2}\frac{a^3}{(D-a)^4} + \frac{8E}{3H^4}\frac{a^3}{(D-a)^4}, \tag{14}$$

$$B(i,0) = -Kp(i,0) - \frac{4E}{3}\frac{a^3}{(D-a)^4} - \frac{2K}{H^4}\sum_{j=i}^{n} p(j,0)\sin(j-i)H - \frac{4E}{H^2}\frac{a^3}{(D-a)^4} + \frac{4E}{H^4}\frac{a^3}{(D-a)^4}, \tag{15}$$

$$C(i,0) = K\sum_{j=i}^{n} p(j,0)\cos(j-i)H - \frac{K}{H}\sum_{j=i}^{n} p(j,0)\sin(j-i)H - \frac{2E}{H^2}\frac{a^3}{(D-a)^4} + \frac{8Ea^3}{3H^4(D-a)}, \tag{16}$$

$$F = \frac{2E}{3H^4}\frac{a^3}{(D-a)^4}. \tag{17}$$

În ecuațiile (11) ... (13), semnificația variabilelor este următoarea :

— $p(i,0)$, $p(i,k)$ reprezintă presiunea segmentului în secțiunea i, și în momentul inițial al ciclului, respectiv la finele intervalului de timp k,

— $\tau\ (i,0)$, $\tau(i,k)$ reprezintă uzura radială în secţiunea i şi momentul iniţial al ciclului, respectiv la finele intervalului k,

— $\Delta\tau(i,k)$ reprezintă variaţia (creşterea) uzurii în intervalul k între începutul şi sfîrşitul acestui interval.

Calculul funcţiunii $\tau\ (i,k)$ pentru toate punctele reţelei necesită cunoaşterea expresiilor $\tau(i-2,k)$ şi $\tau(i-1,k)$ care apar atunci cînd ecuaţia (11) este scrisă pentru $i = 0$ şi $i = 1$, şi a expresiilor $\tau(n + 1,\ k)$, $\tau(n + 2,k)$ ce apar cînd aceeaşi ecuaţie este aplicată în secţiunea n.

Stabilirea acestor expresii se face folosind condiţiile de graniţă şi anume :

— pentru $\psi = 0$ $(i = 0)$ — în secţiunea opusă deschiderii —, curba de uzură şi cea de moment încovoietor admit tangente perpendiculare pe axa ce trece prin deschidere ;aceste condiţii cer îndeplinirea egalităţilor

$$\frac{\partial\tau(0,\ k)}{\partial\psi} = 0,$$

$$\frac{\partial M(0,\ k)}{\partial\psi} = 0.$$

Prima egalitate scrisă cu ajutorul diferenţelor finite, sub forma

$$\frac{\tau(0 + 1, k) - \tau(0 - 1, k)}{2H} = 0,$$

conduce la

$$\tau(-1,\ k) = \tau(1,\ k). \tag{18}$$

Cea de a doua se scrie, folosind relaţia (6),

$$\frac{\partial\tau(0,\ k)}{\partial\psi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3\tau(0,\ k)}{\partial\psi^3} = 0$$

sau

$$\frac{\tau(1,\ k) - \tau(-1,\ k)}{2H} + \frac{\tau(2,\ k) - 2\tau(1,\ k) + 2\tau(-1,\ k) - \tau(-2,\ k)}{2H^3} = 0,$$

de unde rezultă, ţinînd seama şi de (18),

$$\tau(-2,\ k) = \tau(2,\ k). \tag{19}$$

— pentru $\psi = \pi$ $(i = n)$, în capătul liber al segmentului — momentul încovoietor şi forţa tăietoare sînt nule. După cum este cunoscut, forţa

tăietoare într-o secţiune oarecare este $\frac{1}{R(\psi, t)} \frac{\partial M(\psi, t)}{d\psi}$; dacă se utilizează ecuaţia (6) cele două condiţii se scriu în secţiunea n după cum urmează

$$\tau(n, k) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau(n, k)}{\partial \psi^2} = 0,$$

şi

$$\frac{\partial \tau(n, k)}{\partial \psi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \tau(n, k)}{\partial \psi^3} = 0.$$

Prima relaţie dă

$$2(1 - H^2)\, \tau(n, k) - \tau(n - 1, k) = \tau(n + 1, k), \tag{20}$$

iar cea de a doua conduce la

$$\frac{\tau(n + 1, k) - \tau(n - 1, k)}{2H} +$$

$$+ \frac{\tau(n + 2, k) - 2\tau(n + 1, k) + 2\tau(n - 1, k) - \tau(n - 2, k)}{4H^3} = 0$$

sau

$$2(1 - H)^2 \tau(n + 1, k) - 2(1 - H^2)\, \tau(n - 1, k) + \tau(n - 2, k) = \tau(n + 2, k)$$

şi ţinînd seama şi de (20) rezultă

$$\tau(n + 2, k) = 4(1 - H^2)^2\, \tau(n, k) - 4(1 - H^2)\, \tau(n - 1, k) + \tau(n - 2, k). \tag{21}$$

Condiţia de graniţă pentru funcţia (i,k) în momentul iniţial al calculului afirmă că uzura este nulă în toate secţiunile şi deci $\tau(i,0) = 0$.

Cu aceste precizări, rezolvarea sistemului de ecuaţii (11)—(17) parcurge următoarele etape:

1. În funcţie de datele iniţiale ale problemei, se calculează din formulele (14) — (17) expresiile $A(i, 0)$, $B(i, 0)$, $C(i, 0)$, F, pentru toate secţiunile $i \in [0, n]$.

2. Aplicînd ecuaţia (12) celor $n+1$ secţiuni, se calculează expresiile $\Delta\tau$ $(i,1)$ ce reprezintă creşterea uzurii radiale în secţiunea i, pe primul interval de integrare, în raport cu valoarea ei la începutul acestui interval (fig.4*a*). Ecuaţia (13), scrisă pentru $k=1$ şi aplicată succesiv în toate secţiunile i ale reţelei, conduce apoi la valoarea uzurii, $\tau(i,1)$, corespunzătoare sfîrşitului primului interval. Se face observaţia că această valoare este egală chiar cu variaţia $\Delta\tau(i,1)$ a uzurii pe primul interval, deoarece uzura iniţială $\tau(i,0)$ este nulă în toate secţiunile. Se calculează de asemenea cu

ajutorul formulelor (18), (19), (20), (21) expresiile $\tau(-2,0)$, $\tau(-1,0)$, $\tau(n+1,0)$, $\tau(n-1,0)$.

3. Cu valorile uzurilor calculate la pct. 2, se determină din ecuația (11) presiunea radială $p(i,1)$ la sfîrșitul primului interval (fig. 4*b*).

4. Considerînd $p(i,1)$ și $\tau(i,1)$ drept valori inițiale ale funcțiunilor p și τ pentru cel de al doilea interval, se repetă succesiunea de operații de la pct. 2 și 3 determinîndu-se în final mărimile $\tau(i,2)$ și $p(i,2)$ (fig 4*a* și 4*b*).

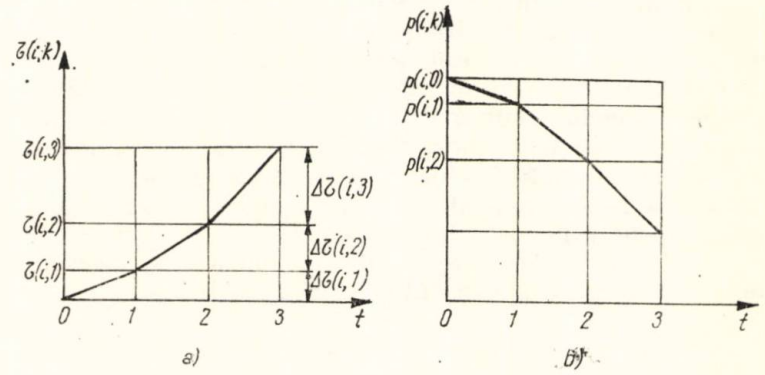


Fig. 4.

Se procedează analog pentru toate intervalele de timp pînă cînd, la sfîrșitul intervalului s, se obțin valorile $\tau(i,s)$ și $p(i,s)$ ce reprezintă uzura radială produsă prin uzura de contact pe durata unui ciclu motor și respectiv presiunea radială a segmentului la sfîrșitul acestui ciclu.

4. EVALUAREA UZURII RADIALE ȘI A LEGII DE REPARTIȚIE A PRESIUNII ELASTICE PE DURATA DE SERVICIU A SEGMENTULUI

Pentru calculul de proiectare a segmentului este necesară evaluarea uzurii pentru întreaga sa durată de funcționare. Pe această durată variația monotonă, neperiodică a unor mărimi (uzura radială, presiunea radială dezvoltată de segment pe periferia cilindrului) influențează legea de variație a unor mărimi periodice (presiunea gazelor în treptele de segmenți, cantitatea de gaze scăpată în carter, mișcarea segmenților în canalele din piston) care nu se mai reproduc identic de la un ciclu la altul.

Într-adevăr, fie cunoscută în urma calculelor, uzura segmenților pentru ciclul motor pentru care presiunea elastică inițială, este cea corespunzătoare segmentului nou; la sfîrșitul ciclului, legea de distribuție a presiunii s-a schimbat pentru fiecare segment, deoarece dimensiunile segmentului s-au modificat prin uzură; din același motiv, secțiunea de curgere a gazelor printre capetele libere ale segmentului a crescut; în consecință, pentru ciclul următor, regimul de curgere este diferit și în funcție de acest regim și de noua valoare a presiunii elastice, echilibrul forțelor ce condiționează contactul direct dintre segment și cilindru determină o altă durată a acestui contact.

În realitate însă, pe durata extrem de redusă a unui ciclu se produce o uzură neînsemnată, secțiunile de curgere și forțele care acționează

segmentul se modifică atît de puțin, încît rezultatele calculului funcțional nu sînt practic influențate de aceste modificări, pentru un număr relativ mare de cicluri consecutive.

Din acest motiv, pentru necesitățile evaluării cantitative a uzurii, durata totală de serviciu a segmentului poate fi considerată ca succesiunea unor „subdiviziuni" de timp, egale sau neegale între ele, în interiorul cărora fenomenele periodice se reproduc identic pe o perioadă egală cu ciclul motor, iar fenomenele neperiodice variază liniar cu numărul ciclurilor din subdiviziunea respectivă. Cu alte cuvinte, într-o subdiviziune de timp, variația presiunii gazelor în treptele segmenților, variația cantității de gaze scăpată pe ciclu și legea de mișcare a segmenților în canale se petrec identic în fiecare ciclu al subdiviziunii, în timp ce uzura segmentului variază continuu ; la sfîrșitul subdiviziunii, uzura într-o secțiune oarcare este un multiplu al uzurii produsă — în secțiunea respectivă — pe un ciclu, ordinul de multiplicitate fiind numărul de cicluri motoare. Dacă numărul acestor cicluri este ε_1 pentru prima subdiviziune, și dacă pentru un ciclu durata T_1 a contactului direct între segment și cilindru este descompusă în s_1 intervale, uzura radială la sfîrșitul celor ε_1 cicluri este

$$\tau'(i, s_1) = \varepsilon_1 \tau(i, s_1), \tag{22}$$

unde $\tau(i, s_1)$ este mărimea uzurii radiale în secțiunea i pe durata ciclului, determinată prin rezolvarea ecuației (11)—(17). Presiunea radială a segmentului la sfîrșitul primei subdiviziuni se determină folosind în ecuația (11), expresia (22) a uzurii $\tau'(i, s_1)$

$$p'(i, s_1) = p(i, 0) + \varepsilon_1[- F\tau(i-2, s_1) + A(i, 0)\tau(i-1, s_1) +$$

$$+ B(i, 0)\,\tau(i, s_1) + C(i, 0)\,\tau(i+1, s_1) - F\tau(i+2, s_1)]. \tag{23}$$

Presiunea $p'(i, s_1)$ precizată de (23) este considerată drept valoare inițială pentru a doua subdiviziune de timp și folosită-împreună cu valoarea uzurii $\tau'(i, s_1)$ din (22) — pentru calculul mărimilor periodice ale ciclului caracteristic acestei subdiviziuni. Din acest calcul funcțional, se determină o durată de contact direct între segment și cilindru T_2 în general diferită de cea determinată pentru ciclul primei subdiviziuni ; dacă se alege aceeași mărime a intervalului de integrare Δt, rezultă s_2 intervale de integrare.

Pentru ciclul celei de-a doua subdiviziuni, procesul de uzură și de modificare a presiunii radiale este descris tot de ecuațiile (11) . . . (17) ; coeficienții $A(i,0)$, $B(i,0)$ $C(i,0)$ și F ce se referă la segmentul nou, sînt cunoscuți de la calculul ciclului prcedent ; condițiile de graniță precizate de expresiile (18) — (21) pentru capetele domeniului de definiție al variabilei ψ rămîn aceleași, dar pentru momentul inițial, $k = 0$, al calculului, uzura radială este cea definită de relația (22).

Se rezolvă sistemul de ecuații (11) — (17) pe cele s_2 intervale ale ciclului ; la finele calculelor rezultă mărimea $\tau(i, s_2)$ a uzurii la sfîrșitul primului ciclu al subdiviziunii a doua. Dacă din această mărime se scade

uzura corespunzătoare momentului de început al aceluiași ciclu, rezultă uzura realizată pe durata unui ciclu, adică

$$[\tau(i, s_2) - \varepsilon_1 \tau(i_1 s_1)],$$

și multiplicînd această valoare cu numărul ε_2 al ciclurilor motoare din subdiviziunea a doua de timp, rezultă expresia

$$\varepsilon_2 [\tau(i, s_2) - \varepsilon_1 \tau(i, s_1)],$$

care reprezintă uzura radială la sfîrșitul celei de a doua subdiviziune și respectiv la începutul celei de a treia.

Dacă v este numărul total al subdiviziunilor de timp ce compun durata de serviciu a segmentului, extinzînd raționamentul precedent pentru toate subdiviziunile, se determină uzura radială totală a cărei expresie este

$$\left[\varepsilon_v \tau(i, s_v) + \sum_{k=1}^{v-1} (-1)^k \tau(i, s_{v-k}) \times \prod_{k=1}^{k} (\varepsilon_{v-k+1} - 1)\right].$$

Folosind această expresie în ecuația (11), se determină apoi și legea de repartiție finală a presiunii elastice.

5. CONCLUZII

Modelul prezentat descrie cu precizie procesul de uzură și de modificare a presiunii radiale prin uzură pe durata unui ciclu motor, luînd în considerare și fenomenele periodice care au loc în treptele de segmenți. Metoda de calcul pune în evidență condițiile de lucru diferite ale segmenților din motor și permite calculul precis al uzurii și presiunii radiale pentru fiecare segment în funcție de condițiile ce îi sînt specifice.

Metoda de calcul are o importanță practică deoarece permite, pe baza studiului pe ciclu, evaluarea proceselor pe durata de funcționare a segmentului și deci optimizarea soluției sale constructive.

Primită la redacție la 7 noiembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. B.I., Ghințburg, *Teoria i rasciot porșnevîh koleț*, Mașghiz, Moscova 1945.
2. S.D. Ponomariov și colab. *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. I, Edit. tehn, 1960.
3. G. Bărănescu, Rodica Manițiu, C. Dobre, *Asupra dimensionării segmenților de piston*, St. cerc. mec. apl., 27, 6 (1968).
4. Rodica Manițiu, *Calculul funcțional al segmentilor de piston cu considerarea pulsației segmentului.*, St. cerc. energ. electr. **20**, 2, 367 (1970).
5. I.V. Kraghelschi *Trenie i iznos*, Mașghiz, Moscova, 1962.
6. V.I. Smirnov, *Curs de matematici superioare* Edit. Tehn, 1956.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1970

INDEX ALFABETIC

	Tomul	Nr.	Pag.
ADAMS DOUGLAS P., CHRISTIAN PELECUDI, Influenţa supraacceleraţiilor în funcţionarea mecanismelor cu came	29	2	361
BĂLAN ŞTEFAN, Cuvînt de deschidere (Conferinţa Naţională de Mecanică Aplicată, iunie 1969)	29	1	5
BĂLAN ŞTEFAN, VALERIU PETCU, Un concept nou de exprimare a gradului de siguranţă în calculul structurilor elasto-plastice. I	29	4	897
BĂLAN ŞTEFAN, VALERIU PETCU, Un concept nou de exprimare a gradului de siguranţă în calculul structurilor elasto-plastice. II	29	5	1125
BĂRĂNESCU GEORGE, DINU TARAZA, Studiul echilibrajului motoarelor în linie cu ajutorul programării liniare	29	1	47
BEINER L., vezi LIBRESCU L.	29	2	283
BOICU N., Problema elastică plană în coordonate curbilinii pentru dantura evolventică	29	2	309
BRÎNDEU L., vezi SILAŞ GH.	29	5	1027
BUGAJEWSKI, E., Asupra calculului cîrligelor de tracţiune în cazul general al încărcării asimetrice	29	6	1403
CALCAN VICTOR, LEONTIN CIGAN, NICOLAE RĂDĂCINĂ, Utilizarea textolitului în construcţia ghidajelor	29	3	725
CĂMĂRĂŞESCU N., vezi CARAFOLI E.	29	4	947
CARAFOLI E., Cuvînt de închidere (Conferinţa Naţională de Mecanică Aplicată, iunie 1969)	29	1	19
CARAFOLI ELIE, Dezvoltarea cercetărilor de mecanică aplicată în România	29	1	7
CARAFOLI E., N. CĂMĂRĂŞESCU, Noi cercetări asupra aripilor de alungire mică cu jeturi laterale	29	4	947
CHIRIACESCU SERGIU T., Autovibraţii la strunjirea axelor zvelte	29	3	547
CIGAN LEONTIN, vezi CALCAN VICTOR	29	3	725
CIORĂNESCU I., vezi POPP T.	29	1	173
COŞA DAN, Stabilitatea arcului simplu rezemat cu tirant suspendat, fără momente iniţiale	29	5	1153
COZMA C., vezi IONESCU V.	29	3	713
COZMA CIPRIAN, vezi IONESCU VASILE	29	5	1209
DAN PAUL, vezi HÂNCU SIMION	29	2	493
DELCESCU RODICA, Model matematic pentru studiul modificării presiunii radiale a segmentului prin uzură de contact	29	6	1435
DIMITROV BORIS, vezi PAVELESCU DAN	29	2	501
DUMITRESCU L. Z., C. POPESCU, Producerea undelor de şoc de mare intensitate, cu aplicaţii la generarea curgerilor hipersonice de entalpie înaltă	29	1	185
FILIMON IOAN, Cîteva consideraţii asupra aplicării unei metode hodografice în dinamica gazelor (Cazul profilului circular)	29	3	689
FLORIAN VIRGILIU, NICOLAE ŢOPA, Contribuţii la calculul structurilor multietajate oarecare acţionate orizontal	29	3	635
FLORIAN VIRGILIU, NICOLAE ŢOPA, MIRCEA GRIGORIU, Calculul construcţiilor multietajate, simetrice, cu dispoziţie oarecare în plan a elementelor lor structurale, la acţiuni orizontale	29	2	431

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, 1970 P. 1449–1452.

	Tomul	Nr.	Pag.
GEORGESCU N., vezi MANEA V.	29	1	203
GHEORGHIU AL., C. PACOSTE, M. IORDĂNESCU, Privire de sinteză asupra căilor eficiente de rezolvare, prin etape succesive, a structurilor în domeniul elasto-plastic	29	6	1369
GRIGORIU MIRCEA, vezi FLORIAN VIRGILIU	29	2	431
HÂNCU SIMION, LUCIA PREDESCU, VIOREL MARINESCU, Cu privire la mişcarea fluidelor în jurul unei reţele de plăci plane	29	3	661
HÂNCU SIMION, EMIL RUS, PAUL DAN, Unele criterii de stabilitate a funcţionării canalelor de irigaţie cu reglare automată	29	2	493
HANDRA-LUCA V., Sinteza mecanismelor plane cu $\nu > 1$ pe baza funcţiilor de transmitere	29	5	1037
HANDRA-LUCA V., Sinteza mecanismului pentalater pe baza funcţiilor de transmitere	29	6	1315
HEGEDÜS A., Studiul mişcărilor periodice ale unui vibropercutor electromagnetic	29	5	1015
HEGEDÜS A., vezi SILAŞ GH.	29	5	1027
HEGEDÜS A., vezi SILAŞ GH.	29	6	1253
HUNCHER T. V., vezi PELECUDI CHR.	29	4	867
IANCĂU V., vezi NEGOIŢĂ AL.	29	4	919
IONESCU V., C. COZMA, Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase pe domenii multiplu conexe	29	3	713
IONESCU VASILE, CIPRIAN COZMA, Dezlocuirea necapilară a fluidelor în medii poroase omogene	29	5	1209
IONESCU-BUJOR M., vezi POSEA N	29	5	1177
IORDĂNESCU M., vezi GHEORGHIU Al.	29	6	
KLEPP H. J., vezi SILAŞ GH.	29	4	787
LIBRESCU L., E. MĂLAIU, L. BEINER, Stabilitatea aeroelastică a panourilor cilindrice circulare subţiri eterogene	29	2	283
LIVOVSCHI LEON, Identificarea sistemelor critice	29	3	615
LIVOVSCHI LEON, Sinteza distribuitoarelor hidraulice	29	1	63
MĂLAIU E., vezi LIBRESCU L.	29	2	283
MANEA V., N. GEORGESCU, Cîteva aspecte privind mişcarea fluidelor compresibile prin ajutaje	29	1	203
MANGERON D., A cincea conferinţă internaţională de oscilaţii neliniare, Kiev, 25 august — 5 septembrie 1969. Academia de ştiinţe a U.R.S.S., Academia de ştiinţe a R.S.S. Ucraina, Institutul de Matematică	29	1	257
MANOLESCU GORUN, Studiul concentrării eforturilor unitare în jurul găurilor de sondă. I	29	4	749
MANOLESCU GORUN, Studiul concentrării eforturilor unitare în jurul găurilor de sondă. II	29	5	997
MANOLESCU N.I., GH. C. POPA, Cubica polilor relativi de rotaţie la mecanismul manivelă-piston	29	3	569
MARINESCU VIOREL, vezi HÂNCU SIMION	29	3	661
MATEESCU ANCA, vezi PELECUDI CHR.	29	6	1327
MATEESCU DAN, Asupra aripilor poligonale prezentînd antisimetrie de incidenţă în regim supersonic	29	1	225
MATEESCU DAN, Caracteristicile aerodinamice în regim supersonic ale aripilor dreptunghiulare şi trapezoidale cu profil variabil în anvergură	29	4	963
MATEESCU DAN, Curgerea supersonică nepermanentă în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj avînd mişcări oscilatorii	29	3	699
MIHĂESCU ŞT. S., Consideraţii de mecanică asupra sapelor cu conuri pentru foraj. I	29	4	847
MIHĂESCU ŞT., Consideraţiuni de mecanică asupra sapelor cu conuri pentru foraj. II	29	5	1105
MUREŞAN T., vezi SZÉKELY I.	29	5	1093
NEGOIŢĂ AL., V. IANCĂU, Contribuţii privind aspectele probabilistice ale încărcărilor climatice şi siguranţa construcţiilor	29	4	919
OPREANU C., vezi PATRAULEA N.N.	29	3	683
OROVEANU T., Asupra efectului dispersiei transversale în scurgerea fluidelor miscibile prin medii poroase	29	1	245

	Tomul	Nr.	Pag.
OROVEANU T., Cîteva probleme de scurgere a fluidelor incompresibile prin medii poroase neomogene	29	5	1223
OROVEANU T., Influenţa variaţiei parametrilor termici asupra răcirii găurii de sondă prin circulaţie de lichid	29	6	1417
OROVEANU T., I. SPULBER, Unele probleme privitoare la injecţia lichidelor calde în zăcămintele de petrol	29	2	461
PACOSTE C., vezi GHEORGHIU AL.,	29	6	1369
PÂRVULESCU N. S., Despre ecuaţiile de compatibilitate în domeniul superelastic	29	4	777
PATRAULEA N.N., C. OPREANU, Asupra performanţelor pompelor turbomoleculare în cazul reflexiei oglindă	29	3	683
PATRAULEA N. N., N. POSTELNICU, O teorie pentru pompele turbomoleculare	29	2	453
PAVEL A., Calculul de rezistenţă al îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune I.	29	1	123
PAVEL A., Calculul de rezistenţă al îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune. II	29	2	401
PAVELESCU DAN, BORIS DIMITROV, Cu privire la stadiul actual al cercetărilor asupra mişcării sacadate	29	2	501
PELECUDI CHR., Condiţii de compatibilitate şi dependenţă liniară a funcţiilor de poziţii în mecanismele tridimensionale	29	2	333
PELECUDI CHR., Contribuţii la studiul matriceal al mecanismelor spaţiale	29	6	1291
PELECUDI CHR., Cuple multiaxe în mecanismele mono-şi biconture tridimensionale	29	5	1053
PELECUDI CHR., T. V. HUNCHER, Diagrame, nomograme şi tabele pentru mecanisme plane	29	4	867
PELECUDI CHR., ANCA MATEESCU, Matricele de transmisie ale multipolilor cinematici formaţi din diode	29	6	1327
PELECUDI CHR., I. SAVA, Studiul experimental al dinamicii mecanismelor cu came	29	3	587
PELECUDI CHR., vezi ADAMS DOUGLAS P.	29	2	361
PELECUDI CHR., vezi A. H. SONI	29	1	91
PETCU VALERIU, vezi BĂLAN ŞTEFAN	29	4	897
PETCU VALERIU, vezi BĂLAN ŞTEFAN	29	5	1125
POP I., Asupra stratului-limită compresibil nestaţionar pe un disc în rotaţie	29	4	981
POPA CONSTANTIN, Generalizarea teoriei lui Buckley şi Leverett asupra dezlocuirii amestecului a două fluide imiscibile oarecare de către un al treilea imiscibil cu ele	29	5	1235
POPA GH. C., vezi MANOLESCU N. I.	29	3	569
POPESCU C., vezi DUMITRESCU L. Z.	29	1	185
POPESCU N. D., Folosirea modelelor cromoplastice la studiul presiunii minime	29	6	1395
POPESCU N. D., Stabilitatea dinamică a plăcilor dreptunghiulare solicitate de sarcini mobile	29	3	523
POPESCU N. D., Stabilitatea dinamică a plăcilor circulare solicitate de sarcini variabile periodic	29	4	817
POPP T., I. CIORĂNESCU, Consideraţii privind acţiunea vîntului asupra construcţiilor înalte	29	1	173
POSEA N., I. RUIU, M. IONESCU-BUJOR, Calculul seismic al cadrelor plane.	29	5	1177
POSTELNICU N., vezi PATRAULEA N.N.	29	2	453
PREDESCU LUCIA, vezi HÂNCU SIMION	29	3	661
RĂDĂCINĂ NICOLAE, vezi CALCAN VICTOR	29	3	725
RĂDULESCU O., Studiu asupra stabilităţii regimurilor de mişcare a maşinilor	29	6	1357
RUIU I., vezi POSEA N.	29	5	1177
RUS EMIL, vezi HÂNCU SIMION	29	2	493
SAVA I., vezi PELECUDI CHR	29	3	587
SĂVULESCU ST., vezi TOMA V.	29	5	1195
SILAŞ GH., L. BRÎNDEU, A. HEGEDÜS, Studiul mişcărilor vibropercutante ale unei mase libere cu excitaţie periodică	29	5	1027

	Tomul	Nr.	Pag.
SILAŞ GH., HEGEDÜS A., Contribuţii la studiul mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate	29	6	1253
SILAŞ GH., H. J. KLEPP, Studiul spectrului de frecvenţe al autovibraţiilor transversale ale unei bare produse de frecarea uscată	29	4	787
SONI A. H., CHR. PELECUDI, Determinarea vectorială a ecuaţiilor generale de mişcare ale mecanismelor tridimensionale	29	1	91
SPULBER I. vezi OROVEANU T.	29	2	461
STĂNESCU CR., V. VISARION, Calculul plăcilor curbe cilindrice circulare nesubţiri	29	6	1271
STĂNESCU C., V. VISARION, Plăci plane nesubţiri	29	4	797
STĂNOIU L., vezi TIPEI N.	29	2	269
STOIANOVICI ŞERBAN, Instalaţii de pompare cu funcţii multiple	29	2	481
SZÉKELY I., T. MUREŞAN, Clasificarea mecanismelor logice cu elemente mecanice	29	5	1093
TARAZA DINU, vezi BĂRĂNESCU GEORGE	29	1	47
TIPEI N., L. STĂNOIU, Asupra factorilor care influenţează consumul de combustibil şi economicitatea, din acest punct de vedere, a diferitelor avioane	29	2	269
TOCACI EMIL, Aspecte ale utilizării teoriei distribuţiilor în mecanică	29	1	27
TOMA V., ŞT. SĂVULESCU, Cercetări teoretice şi experimentale asupra uniformizării repartiţiei de viteze în secţiunea de cataliză a machetelor unui reactor chimic	29	5	1195
ŢOPA N., Contribuţii la studiul conlucrării spaţiale a grinzilor din tablierele de poduri simplu rezemate, fără antretoaze în cîmp, în domeniul elastic	29	1	149
ŢOPA NICOLAE, vezi FLORIAN VIRGILIU	29	2	431
ŢOPA NICOLAE, vezi FLORIAN VIRGILIU	29	3	635
VAICUM AL., Factori de influenţă a stabilităţii fundaţiilor încastrate	29	2	387
VISARION V., vezi STĂNESCU C.	29	4	797
VISARION V., vezi STĂNESCU CR.	29	6	1271
RECENZII	29	1	263
		2	531
		3	741
		4	987
		5	1245

GH. SILAŞ, A. HEGEDÜS

CONTRIBUŢII LA STUDIUL MIŞCĂRILOR PERIODICE ALE UNUI SISTEM VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE LIBERTATE

În lucrare se studiază mişcările vibropercutante ale sistemului din figura 1 cînd asupra masei *m* acţionează o forţă periodică oarecare şi a sistemului din figura 14 cînd limitatorul execută mişcare periodică. Se consideră ciocnirea instantanee şi caracterizată prin coeficientul de restituire *R*. Se mai consideră că asupra masei *m* acţionează în mişcarea ei liberă dintre ciocniri o forţă de amortizare de natură vîscoasă.
Se determină condiţiile în care apar mişcări periodice avînd perioada egală cu un multiplu al forţei de excitaţie şi parametrii acestor mişcări. Se studiază apoi stabilitatea mişcărilor periodice. Prin particularizări se regăsesc unele rezultate cunoscute. Pentru cazul excitaţiei armonice se determină efectiv domeniile mişcărilor periodice stabile (fig. 4, 5, 6, 15).
Unele din rezultatele teoretice au fost verificate experimental.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 6, 1970, p 1253—1269
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

CR. STĂNESCU, V. VISARION

CALCULUL PLĂCILOR CURBE CILINDRICE CIRCULARE NESUBŢIRI

În lucrare se particularizează la cazul plăcii curbe cilindrice circulare nesubţiri teoria plăcilor curbe nesubţiri, bazată pe scindarea stării de tensiune, fără utilizarea metodei integrării asimptotice propusă în lucrarea [1].

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 6, 1970, p. 1271—1289
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

CHR. PELECUDI

CONTRIBUŢII LA STUDIUL MATRICEAL AL MECANISMELOR SPAŢIALE

Se aduc modificări metodei matriceale pentru analiza şi sinteza mecanismelor spaţiale, prin utilizarea unor noi triedre de referinţă oblice, deformabile sau nedeformabile, formate cu axele naturale ale elementelor. Se obţin matrice de transformare cu forme reduse, iar operaţiile de multiplicare sînt simplificate prin simetrizarea calculelor. Sînt determinate ecuaţiile independente ale rotaţiilor şi translaţiilor în lanţurile spaţiale simple închise.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 6, 1970, p. 1291—1313
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

V. HANDRA-LUCA

SINTEZA MECANISMULUI PENTALATER PE BAZA FUNCŢIILOR DE TRANSMITERE

În lucrare se face sinteza geometrică-cinematică a mecanismului pentalater pe baza funcţiilor de transmitere de ordinul zero, unu şi doi. Se fac aprecieri asupra degenerării acestui mecanism la mecanisme cu un singur grad de mobilitate.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 6, 1970, p. 1315—1532
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

CHR. PELECUDI, ANCA MATHEESCU

MATRICELE DE TRANSMISIE ALE MULTIPOLILOR CINEMATICI FORMAȚI DIN DIADE

Se interpretează diadele cu cuple de rotație sau translație ca multipoli cinematici și se determină matricele de transmisie ale vitezelor. Rezolvarea problemei se face în două etape : pentru diadă interpretată ca dipol, avînd numai poli de intrare, și apoi pentru diadă considerată cvadripol, avînd poli de intrare și poli de ieșire. Se determină funcțiile de poziție prin metoda elementelor bazată pe coordonatele carteziene rectangulare sau prin metoda contururilor cu ajutorul coordonatelor polare. Prin derivare se obțin ecuațiile matriceale ale vitezelor interne și exterioare ale diadei. Ca aplicație a metodei se dau exemple numerice pentru legăturile în serie și inversă a două diade cu cuple de rotație.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 6, 1970, p. 1327—1355
Redacția : București, str. Const. Mille, 15

O. RĂDULESCU

STUDIU ASUPRA STABILITĂȚII REGIMURILOR DE MIȘCARE A MAȘINILOR

Pe baza unei ecuații unitare a mașinilor se stabilesc legile de mișcare în regim tranzitoriu, iar cu ajutorul unei ecuații caracteristice de exploatare, regimurile staționare : stabile cu echilibrare lentă sau rapidă semistabile și instabile. Se stabilește, ca o consecință a acestui studiu, calea practică de a asigura stabilitatea unui agregat în cazul sarcinilor din zonele de instabilitate ale acestuia, precum și zona rațională de exploatare.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 6, 1970, p. 1357—1367
Redacția : București, str. Const. Mille, 15

AL. GHEORGHIU, C. PACOSTE, M. IORDĂNESCU

PRIVIRE DE SINTEZĂ ASUPRA CĂILOR EFICIENTE DE REZOLVARE, PRIN ETAPE SUCCESIVE, A STRUCTURILOR ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

În lucrare sînt analizate variante posibile de aplicare a metodelor statisticii liniare, pentru determinarea prin etape succesive a comportării structurilor în domeniul elasto-plastic.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 6, 1970, p. 1369—1393
Redacția : București, str. Const. Mille, 15

N. D. POPESCU

FOLOSIREA MODELELOR CROMOPLASTICE LA STUDIUL FORMĂRII PRESIUNII MINIERE

Folosindu-se proprietatea materialelor cromoplastice de a-și schimba culoarea la solicitări din domeniul plastic și anume, în negru pentru solicitări de compresiune sau în alb pentru solicitări de întindere, se studiază pe modele la scară redusă formarea zonelor de plastificare în jurul lucrărilor miniere, funcție de forma geometrică a acestora. De asemeni, se studiază și influența susținerilor asupra procesului de plastificare a zonei din vecinătatea lucrărilor miniere.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 6, 1970, p. 1395—1401
Redacția : București, str. Const. Mille, 15

F. BUGAJEWSKI

ASUPRA CALCULULUI CÎRLIGELOR DE TRACȚIUNE ÎN CAZUL GENERAL AL ÎNCĂRCĂRII ASIMETRICE

În lucrare se determină expresia generală a forțelor interioare și a eforturilor unitare în orice secțiune a cîrligelor de tracțiune, considerate ca grinzi curbe de formă oarecare supuse unei încărcări asimetrice față de axa de suspendare. Se dau de asemenea expresiile particularizate pentru formele uzuale și în secțiunile care se verifică în mod curent.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, 1970, p. 1403—1416
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

T. OROVEANU

INFLUENȚA VARIAȚIEI PARAMETRILOR TERMICI ASUPRA RĂCIRII GĂURII DE SONDĂ PRIN CIRCULAȚIE DE LICHID

Se studiază problema răcirii unei găuri de sondă în cazul în care densitatea mediului poros, căldura specifică și conductivitatea termică depind de temperatură. Variația temperaturii la talpa sondei este obținută în urma liniarizării ecuațiilor problemei, posibilă deoarece parametrii amintiți variază lent cu temperatura.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 6 1970, p. 1417—1423
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

RODICA DELCESCU

MODEL MATEMATIC PENTRU STUDIUL MODIFICĂRII PRESIUNII RADIALE A SEGMENTULUI PRIN UZURĂ DE CONTACT

Se prezintă un model matematic ce permite evaluarea cantitativă a uzurii radiale a segmentului de piston și a redistribuirii legii de repartiție a presiunii pe circumferința segmentului, ca urmare a acestei uzuri.

St. cerc. mec. apl., tom. 29, nr. 6, 1970, p. 1435—1447
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

• Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

• Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

• Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

• Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

• Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

• Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

• Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

• Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

• Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

• Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

• Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

• Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

• Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

GH. BUZDUGAN, **Dinamica fundațiilor de mașini**, 1968, 368 p., 24 lei.

PAUL DIMO, **Analiza nodală a sistemelor electroenergetice**, 1968, 628 p., 44 lei.

I. S. GHEORGHIU și AL. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice**, vol. I, Mașini de curent continuu, 1968, 412 p., 27 lei.

R. C. BOGDAN și DAN LARIONESCU, **Analiza armonică complexă și mecanoelectrică a mecanismelor plane**, 1968, 432 p., 29 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, **Aplicații industriale ale lagărelor cu aer**, 1968, 282 p., 16,50 lei.

MIRCEA SOARE, **Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri**, 1968, 622 p., 33 lei.

L. LIBRESCU, **Statica și dinamica structurilor elastice anizotrope și eterogene**, 1969, 320 p., 18,50 lei.

LUCIAN Z. DUMITRESCU, **Cercetări în tuburile de șoc**, 1969, 306 p., 21 lei.

ANDREI RIPIANU, **Mișcările vibratorii ale arborilor drepți și cotiți**, 1969, 483 p., 30 lei.

F. DINCĂ și C. TEODOSIU, **Vibrații neliniare și aleatoare**, 1969, 462 p., 24 lei.

V. VISARION și C. STĂNESCU, **Calculul stărilor de tensiune în teoria plăcilor curbe**, 1969, 714 p., 32 lei.

C. ȘORA, **Introducere în studiul generatorului Hall**, 1969, 310 p., 18,50 lei.

AL. MARINESCU, **Metode, aparate și instalații de măsură în aero-mecanică**, 1970, 356 p., 24,50 lei.

I. S. GHEORGHIU și ALEXANDRU FRANSUA, **Tratat de mașini electrice**, vol. II, **Transformatoare**, 1970, 462 p., 30 lei.

G. V. VASILIEV, **Torsiunea structurilor elastice cu pereți subțiri**, 1970, 240 p., 11,50 lei.

ALEXANDRU VAICUM, **Fundații încastrate**, 1970, 302 p., 21,50 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ȘI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 29, NR. 6, P. 1249—1452, BUCUREȘTI, 1970

I.P. „Informația" — c. 5782

43832

Lei 40. —